Hans Walser
Mathematik für die Sekundarstufe 1
Frühjahrssemester 2011

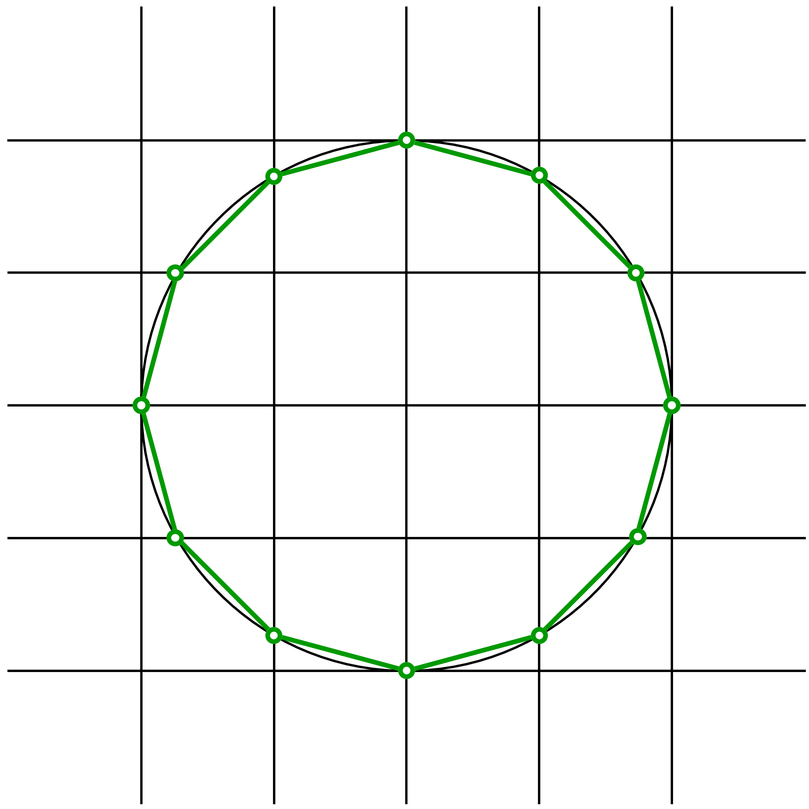
Übung 6

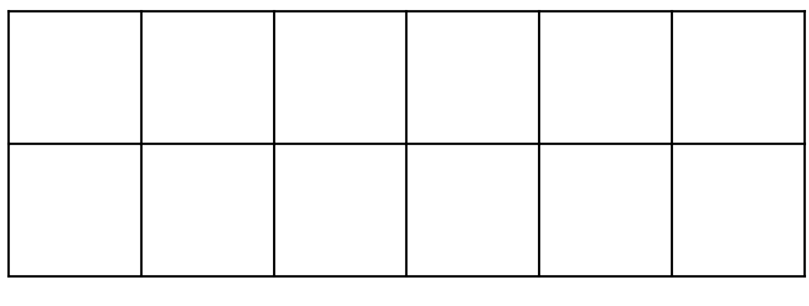
17. Mai 2011

Aufgabe 6.1 Regelmäßiges Zwölfeck

a) Gesucht ist der Flächeninhalt des regelmäßigen Zwölfeckes, ausgedrückt durch seinen Umkreisradius r. Was ist am Resultat erstaunlich? Tipp zur Berechnung des Flächeninhaltes: Das Dreieck ABC hat den Flächeninhalt $A_\Delta = \frac{1}{2}ab\sin(\gamma)$.

b) Lässt sich das Resultat durch ein Puzzle illustrieren?

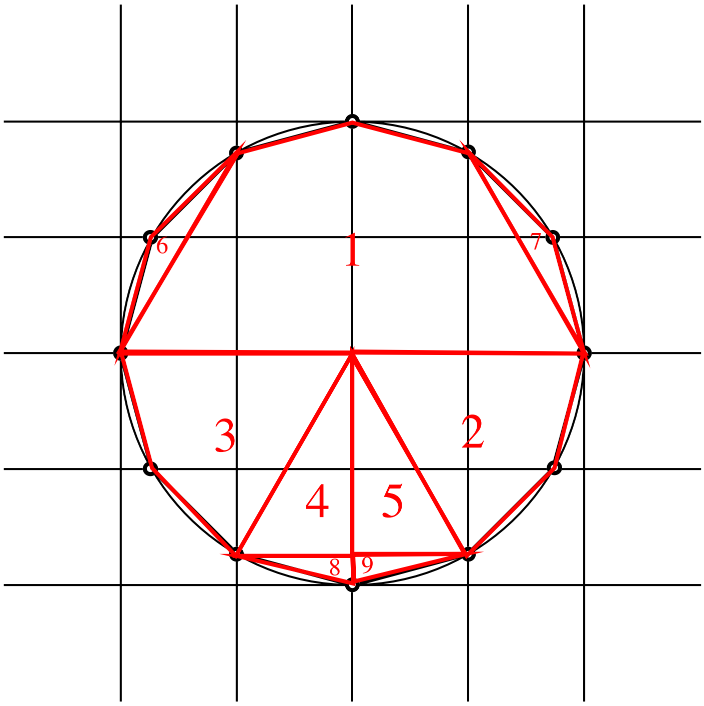


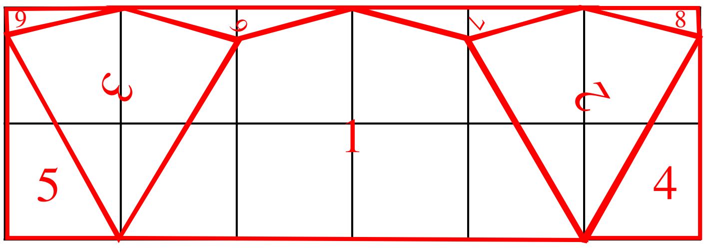


Ergebnis

a) $A = 3r^2$. Erstaunlich ist der ganzzahlige Faktor 3.

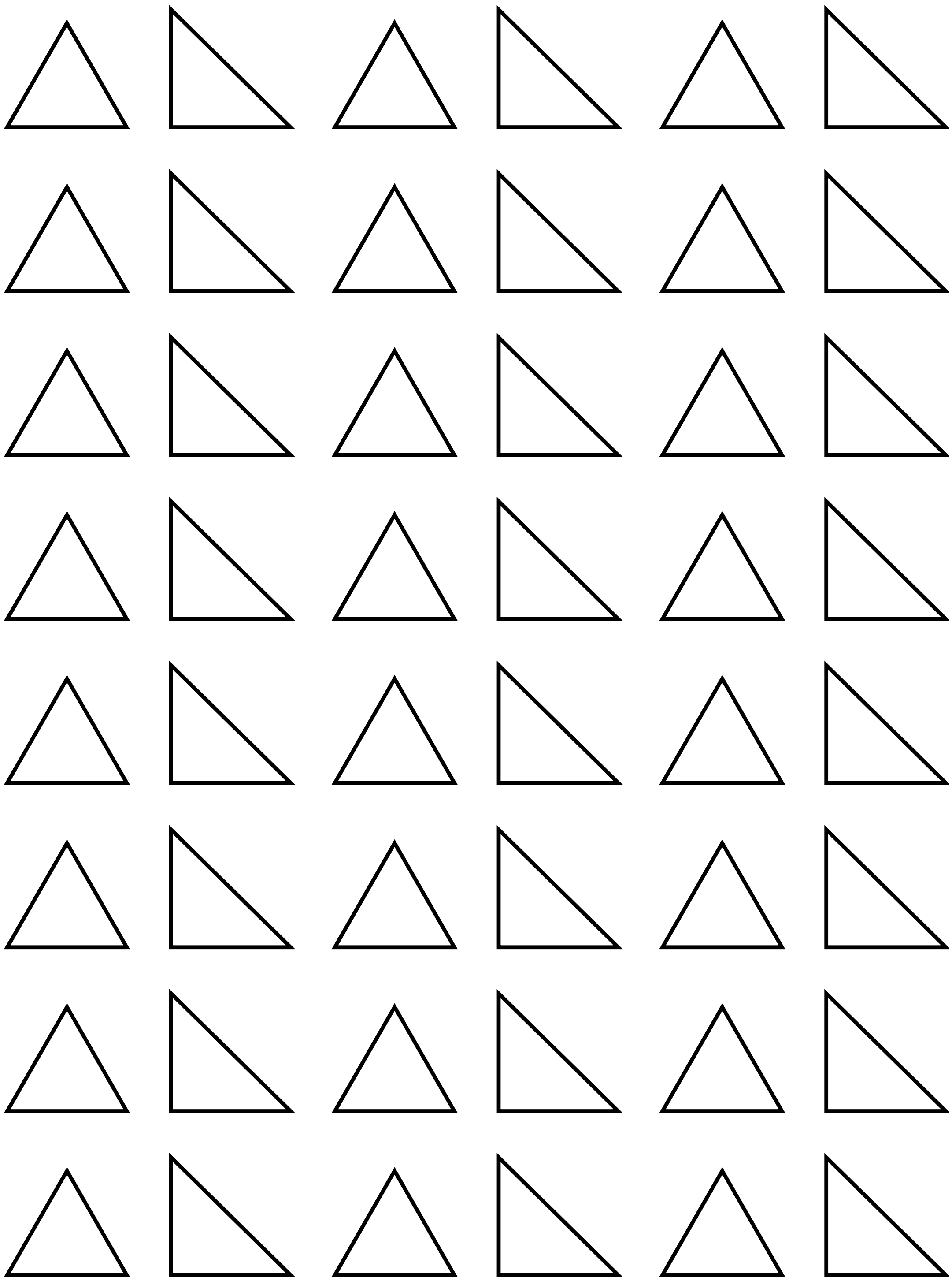
b) Es gibt natürlich verschiedene Lösungen. Hier ein Beispiel. Gibt es eine Lösung mit weniger als 9 Puzzle-Teilen?





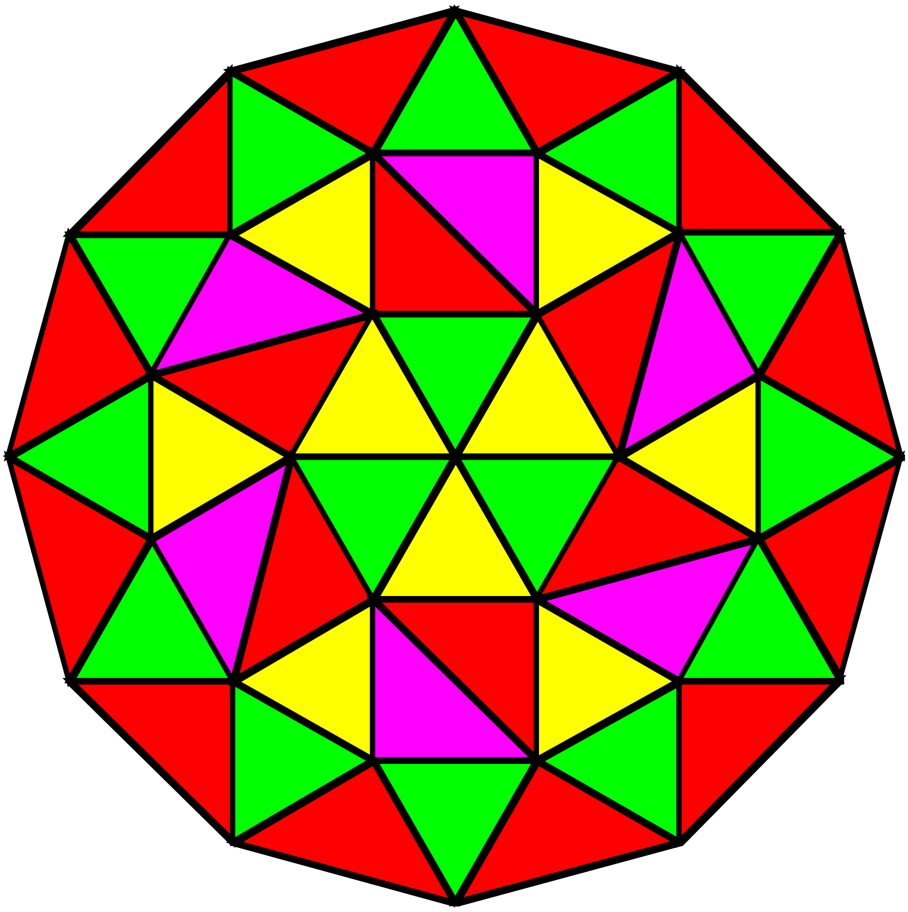
Aufgabe 6.2 Zwölfeck-Puzzle

Wie lassen sich die 48 Dreiecke zu einem regelmäßigen Zwölfeck zusammensetzen?



Bauteile

Ergebnis



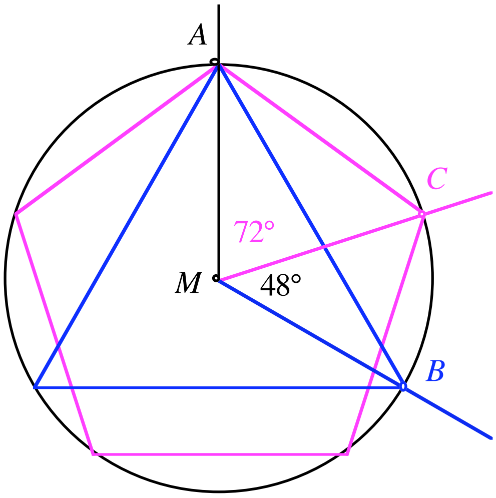
Zerlegung des Zwölfeckes

Aufgabe 6.3 Konstruktion des regelmäßigen 15-Eckes

Wie kann das regelmäßige 15-Eck konstruiert werden?

Bearbeitung

Die Zahl 15 ist das kleinste gemeinsame Vielfache von 3 und 5. Also probieren wir es mit dem regelmäßigen Dreieck und dem regelmäßigen Fünfeck. Wir zeichnen diese in denselben Umkreis mit der gemeinsamen Ecke A.

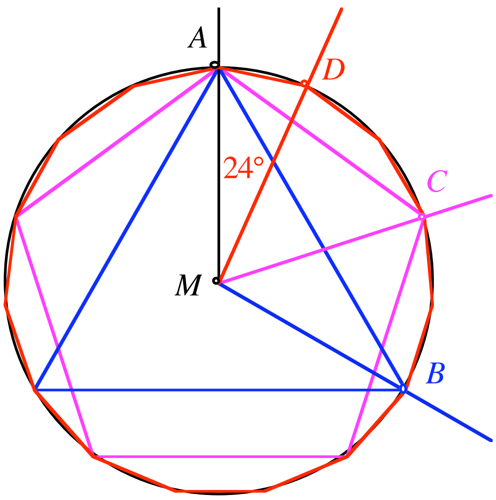


Dreieck und Fünfeck

Das regelmäßige Dreieck hat den Zentriwinkel $\sphericalangle BMA = 120°$, das regelmäßige Fünfeck den Zentriwinkel $\sphericalangle CMA = 72°$. Daraus ergibt sich der Differenzwinkel $\sphericalangle BMC = 48°$.

Denkpause: Für das 15-Eck brauchen wir einen Zentriwinkel von 24°. Wir können also den Winkel $\sphericalangle BMC = 48°$ halbieren und sind über dem Berg.

Eleganter geht es so: Wir spiegeln B an MC, den Spiegelpunkt nennen wir D. Dann ist $\sphericalangle DMA = 72° - 48° = 24°$. Daher ist die Strecke AD die Seitenlänge des 15-Eckes.

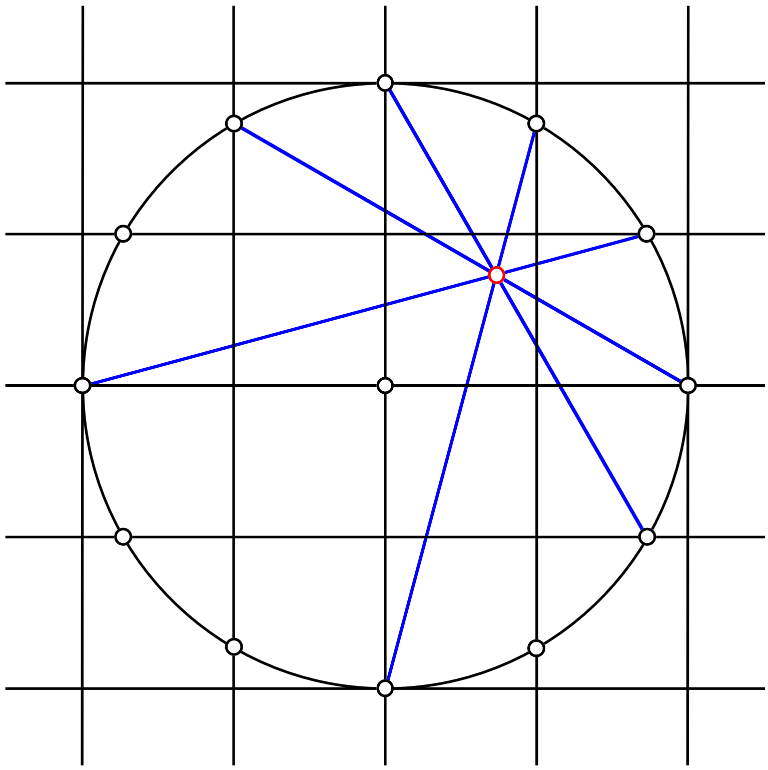


15-Eck

Durch fortlaufendes Halbieren des 24°-Winkels erhalten wir das 30-Eck, 60-Eck, 120-Eck und so weiter.

Aufgabe 6.4 Regelmäßiges Zwölfeck und Diagonalen

Schneiden sich die vier eingezeichneten Diagonalen des regelmäßigen Zwölfeckes alle im selben Punkt?



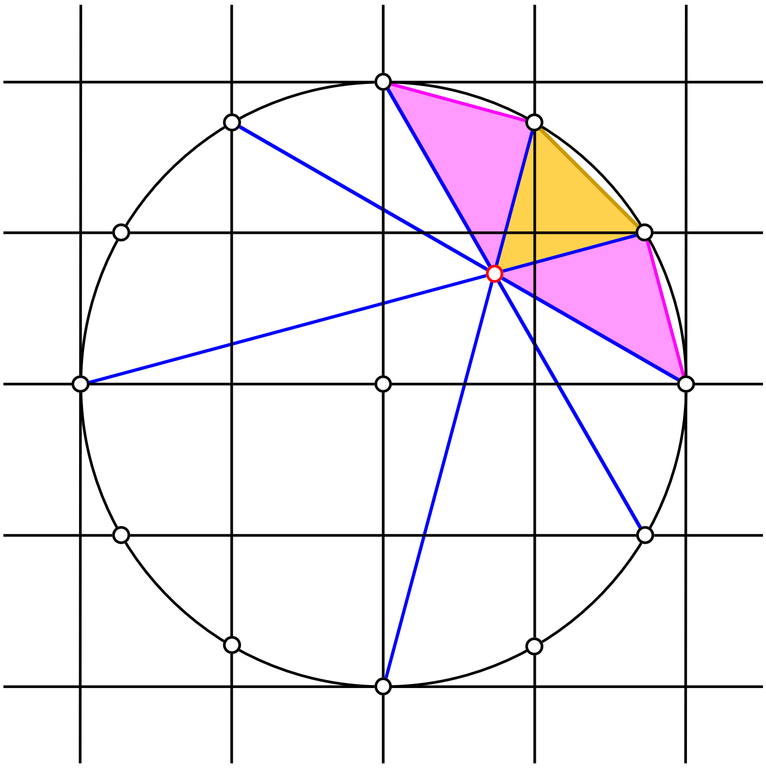
Gehen die Diagonalen durch denselben Punkt?

Ergebnis

Ja

Lösungsweg

Winkel- und Seitenüberlegungen in den eingezeichneten Dreiecken.



Überlegungsfigur