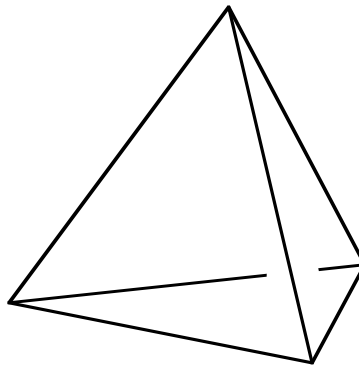


Übung 7

31. Mai 2011

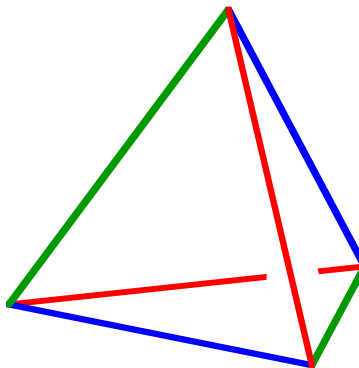
Aufgabe 7.1 Kanten färben: Tetraeder

Die sechs Kanten eines Tetraeders sollen mit drei Farben so gefärbt werden, dass jede Dreiecksseitenfläche alle drei Farben auf dem Rand enthält.



Tetraeder

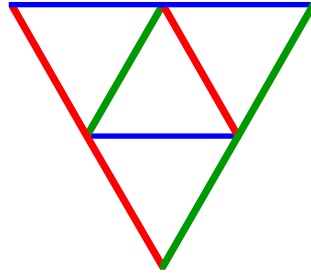
Ergebnis



Mögliche Lösung

Die Lösung ist einfach; gegenüberliegende Kanten müssen dieselbe Farbe haben. Diese Kanten gleicher Farbe sind orthogonal.

Abwicklung:

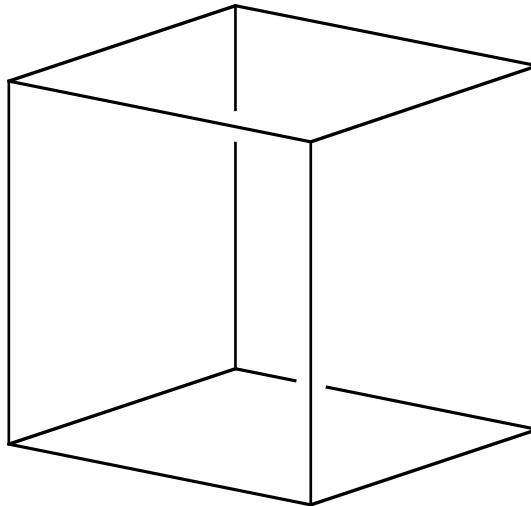


Abwicklung

Die zyklische Reihenfolge der Farben ist auf allen Dreiecken dieselbe, im gezeichneten Beispiel rot-grün-blau.

Aufgabe 7.2 Kanten färben: Würfel

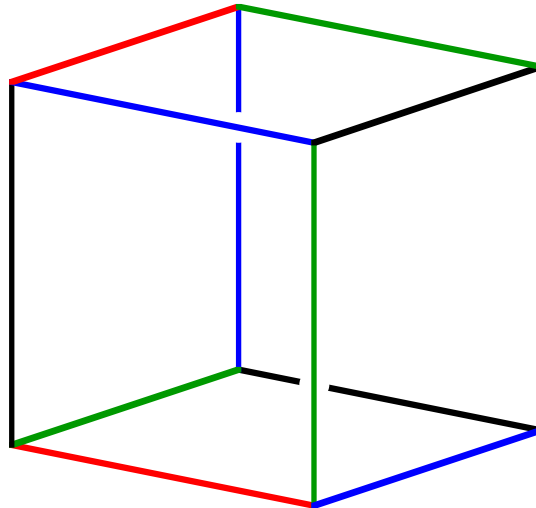
Die zwölf Kanten des Würfels sollen mit vier Farben so gefärbt werden, dass jede quadratische Seitenfläche alle vier Farben auf dem Rand enthält.



Würfel

Ergebnis

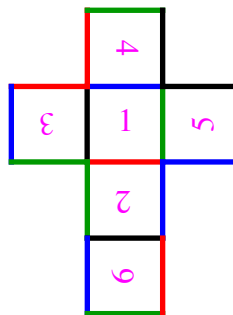
Drei Kanten gleicher Farbe sind paarweise orthogonal und disjunkt.



Mögliche Lösung

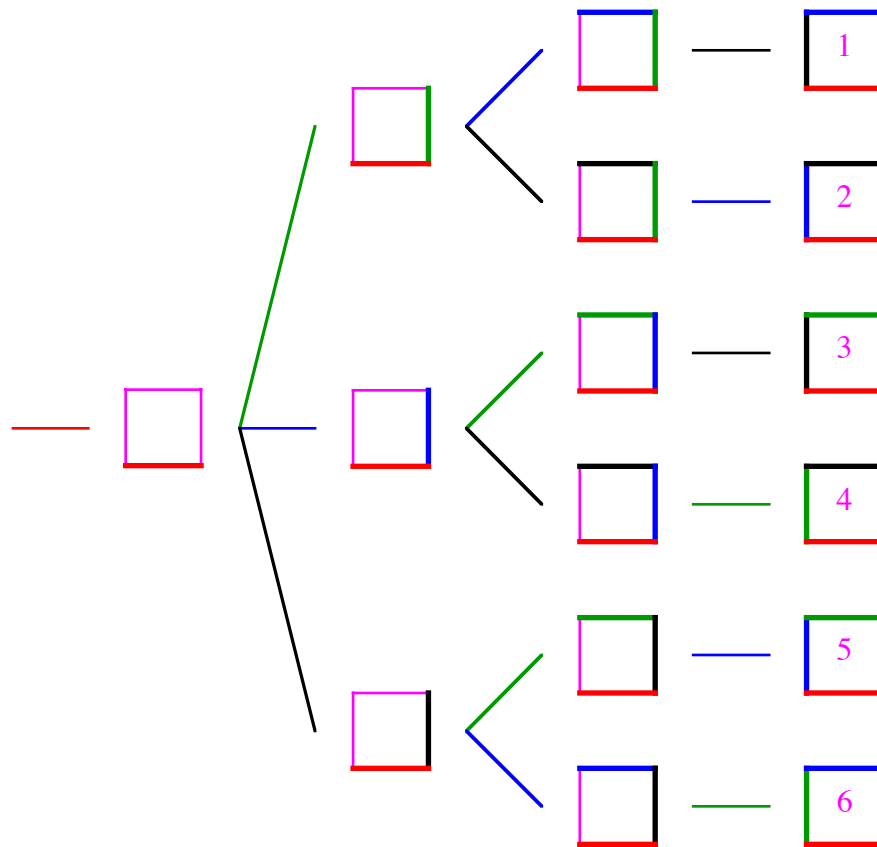
Abwicklung:

Die Nummern sind so positioniert, dass sie jeweils auf der roten Kante stehen.



Abwicklung

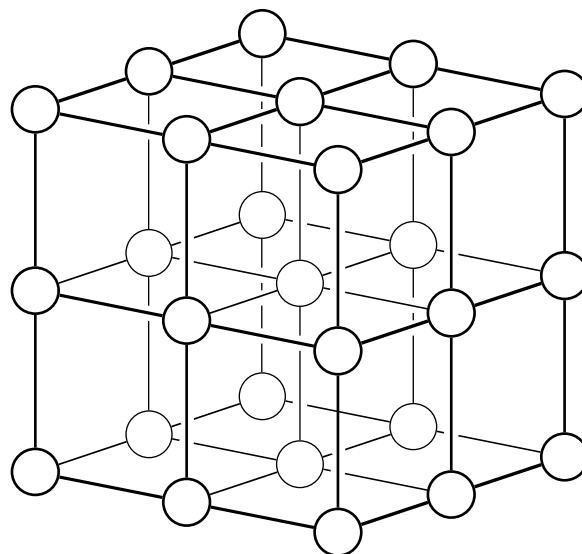
Die zyklische Reihenfolge der Farbe ist jedes Mal anders. Wir erhalten alle zyklischen Permutationen der vier Farben, jede Permutation genau ein Mal.



Zyklische Permutationen

Aufgabe 7.3 Sudokubus

Ein würfelförmiges Gerüst wird an den Knoten mit Kugeln versehen. Die Kugeln bilden eine 3x3x3-Anordnung.

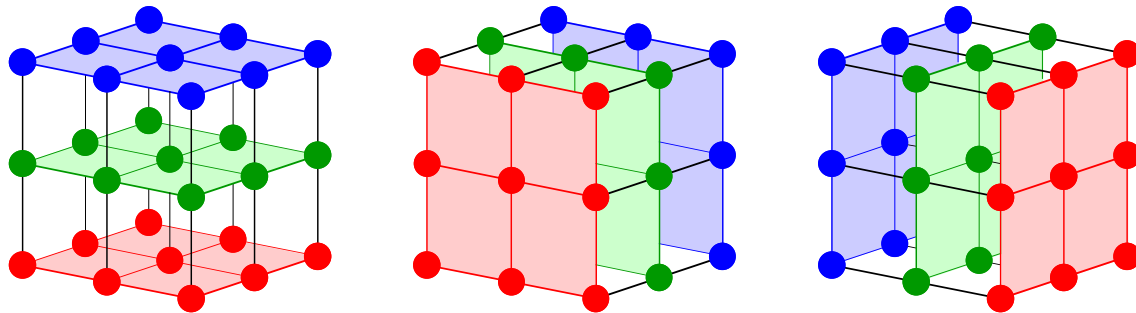


Würfel mit 27 Kugeln

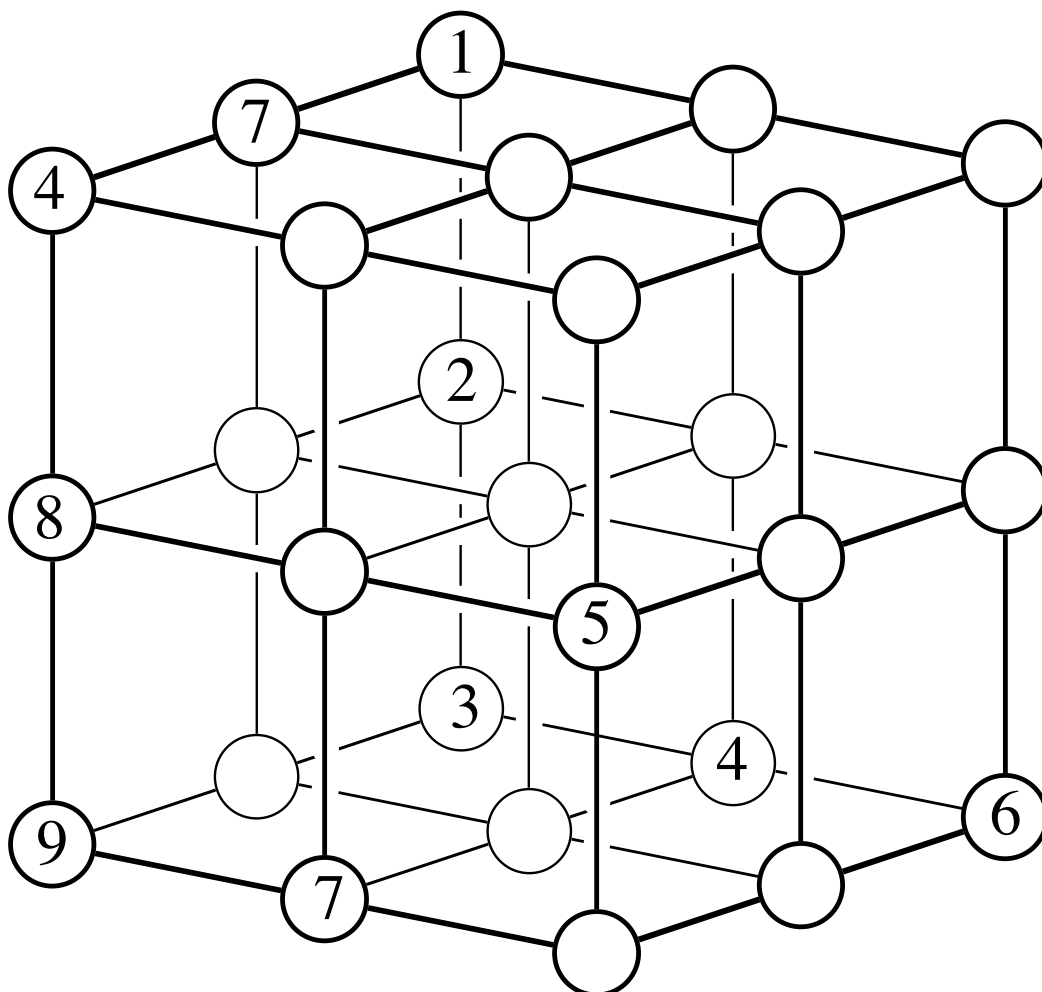
Versehen Sie die 27 Kugeln mit den Zahlen 1 bis 9, so dass

- in jeder der drei Etagen jede Zahl genau ein Mal erscheint,
- in jeder der drei zur Frontalebene parallelen Ebenen jede Zahl genau ein Mal erscheint und
- in jeder der drei zur Seitenwand parallelen Ebenen jede Zahl genau ein Mal erscheint.

Die Figur illustriert die drei Etagen, die drei zur Frontalebene parallelen Ebenen und die drei zur Seitenwand parallelen Ebenen.

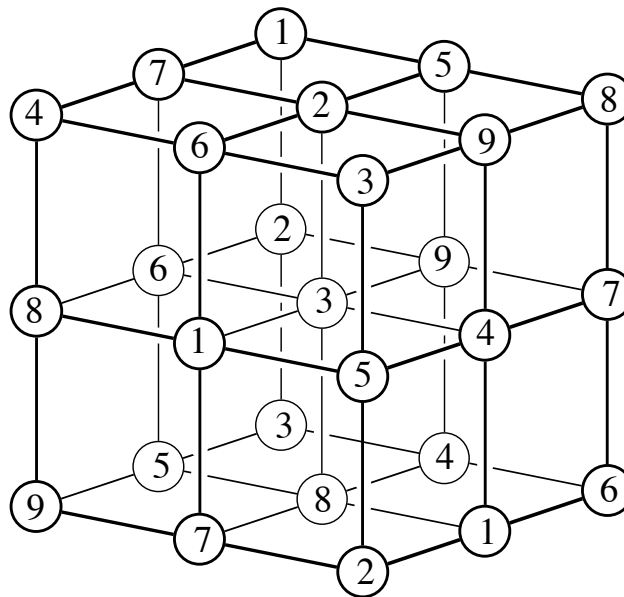


Drei Mal drei Ebenen



Sudokubus

Ergebnis



Sudokubus 1

Aufgabe 7.4 Zyklische Fibonacci-Folge

Was geschieht bei der Rekursionsformel

$$z_{n+2} = \rho z_{n+1} - z_n, \quad \rho = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \approx 0.618 \quad (\text{Goldener Schnitt})$$

Bearbeitung

Die Folge ist – bei beliebigen Startwerten – zyklisch mit der Zyklenlänge 5.

$$\begin{aligned} z[0] &= p \\ z[1] &= q \\ z[2] &= 1/2 * q * (5^{(1/2)} - 1) - p \\ z[3] &= -1/2 * (5^{(1/2)} - 1) * (p + q) \\ z[4] &= 1/2 * 5^{(1/2)} * p - q - 1/2 * p \\ z[5] &= p \\ z[6] &= q \end{aligned}$$

Aufgabe 7.5 Fibonacci-Folge modulo 7

Gewöhnliche Fibonacci-Folge:

$$a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$$

Fibonacci-Folge modulo 7:

$$b_{n+1} = b_n + b_{n-1} \pmod{7}$$

Ist die Folge b_n periodisch?

Bearbeitung

Tabelle:

SLA 1, Frühjahr 2011, Übung 7, Blatt 7

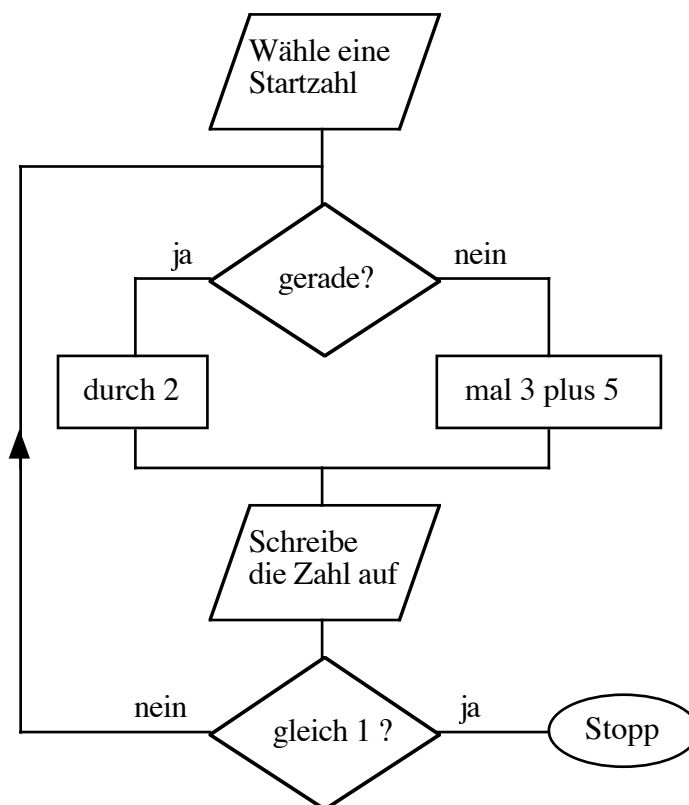
n	a[n]	b[n]
1	1	1
2	1	1
3	2	2
4	3	3
5	5	5
6	8	1
7	13	6
8	21	0
9	34	6
10	55	6
11	89	5
12	144	4
13	233	2
14	377	6
15	610	1
16	987	0
17	1597	1
18	2584	1
19	4181	2
20	6765	3
21	10946	5
22	17711	1
23	28657	6
24	46368	0
25	75025	6
26	121393	6
27	196418	5
28	317811	4
29	514229	2
30	832040	6
31	1346269	1
32	2178309	0

33	3524578	1
34	5702887	1
35	9227465	2

Die Tabelle zeigt für b_n ein periodisches Verhalten; die Periodenlänge ist 16.

Beweis der Periodizität mit dem Dirichletschen Schubfachprinzip: Da nur die sieben Ziffern 0, 1, 2, ..., 6 erscheinen können, gibt es auch nur $7^2 = 49$ mögliche Paare aufeinander folgender Zahlen. Somit beginnt spätestens nach 49 Schritten eine Wiederholung.

Aufgabe 7.6 Eine Folgenmaschine



Folgenmaschine

Was ergibt sich für verschiedene Startzahlen?

Bearbeitung

MuPAD Programm:

```

input("Startzahl eingeben: ", x):
m:=30:
i:=0:
repeat
if x mod 2 = 0 then x:=x/2 else x:=3*x+5 end_if:
i:=i+1:
print(x);
until i=m or x=1 end_repeat:
    
```


SLA 1, Frühjahr 2011, Übung 7, Blatt 9

Allgemein: sobald sich eine Zahl wiederholt, fängt eine Periode an.

Startzahl 1:

8	4	2	1
---	---	---	---

Startzahl 2:

1

Startzahl 3:

14	7	26	13	44	22	11	38	19	62	31	98	49	152	76	38
----	---	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	-----	----	----

Die Folge ist periodisch; Periodenlänge 8

Startzahl 4:

2	1
---	---

Startzahl 5:

20	10	5	20	10	5	20	10	5
----	----	---	----	----	---	----	----	---

Die Folge ist periodisch; Periodenlänge 3

Startzahl 6:

3	14	7	26	13	44	22	11	38	19	62	31	98	49	152	76	38
---	----	---	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	-----	----	----

Die Folge ist periodisch; Periodenlänge 8; gleiche Periode wie bei der Startzahl 3

Startzahl 7:

26	13	44	22	11	38	19	62	31	98	49	152	76	38
----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	-----	----	----

Die Folge ist periodisch; Periodenlänge 8; gleiche Periode wie bei der Startzahl 3

Startzahl 8:

4	2	1
---	---	---

Eine Zweierpotenz als Startzahl ergibt eine Halbierungsfolge

Startzahl 9:

32	16	8	4	2	1
----	----	---	---	---	---

überraschend!

Startzahl 10:

5	20	10	5	20	10	5	20	10	5	20
---	----	----	---	----	----	---	----	----	---	----

Die Folge ist periodisch; Periodenlänge 3; gleiche Periode wie bei der Startzahl 5

Startzahl 11:

38	19	62	31	98	49	152	76	38
----	----	----	----	----	----	-----	----	----

Die Folge ist periodisch; Periodenlänge 8; gleiche Periode wie bei der Startzahl 3

