Hans Walser

Mathematik für die Sekundarstufe 1

Modul 201

Symmetrie

UNI
BASEL

Inhalt

Modul 201 für die Lehrveranstaltung *Mathematik für die Sekundarstufe 1*

Sommer 1999 Erste Fassung (Einzelblätter)
Sommer 2001 Überarbeitung und Erweiterung
Sommer 2003 Fehlerbereinigung und Erweiterung
Sommer 2005 Kleine Ergänzungen
Sommer 2007 Verändertes Layout. Fehlerkorrekturen. MathType
Frühjahr 2009 Kürzungen
Frühjahr 2011 Neues Titelbild

last modified: 2. Januar 2014

Hans Walser
Mathematisches Institut, Rheinsprung 21, 4051 Basel
www.walser-h-m.ch/hans

Titelbild: Distelfalter (Foto H. Walser)

1 Symmetrie?

Symmetrie ist überall: Am bekanntesten ist die zweiseitige Spiegelsymmetrie, ebenso häufig ist aber die Translationssymmetrie, die sich durch bloße Wiederholung ergibt, und die Drehsymmetrie. Diese sowie weitere Symmetriearten werden exemplarisch vorgestellt. Einige dieser Symmetrien treten in Bandornamenten, Tapetenmustern und Parkettierungen, aber auch in Kristallstrukturen auf. Dabei zeigt es sich, dass diese Muster trotz ihrer unendlichen Vielfalt unter dem Gesichtspunkt der Symmetrie zu vergleichsweise wenigen Symmetrieklassen zusammengefaßt werden können.

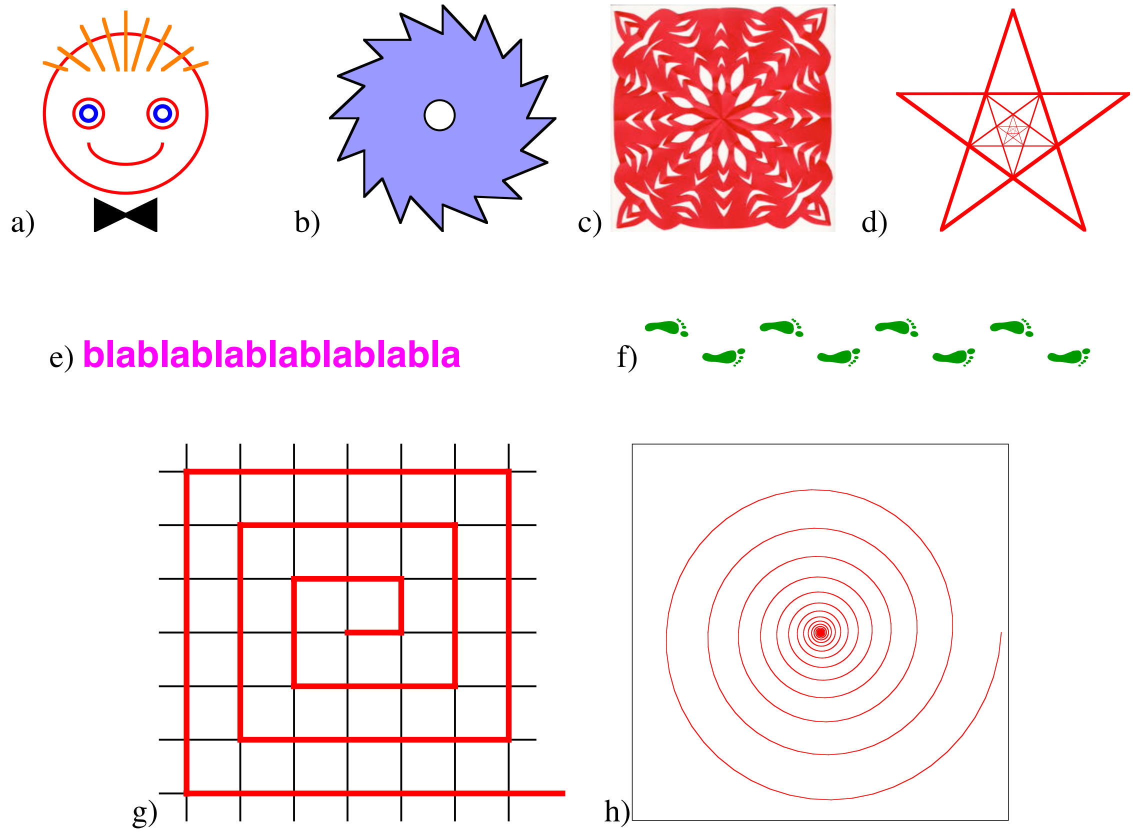
Narziss sieht sein Spiegelbild im Wasser. Die Spiegelsymmetrie ist die bekannteste Symmetrieart. In unserer Alltagswelt ist der Spiegel eine Ebene (Ebenensymmetrie im Raum), in zweidimensionalen Bildern ist der Spiegel aber nur noch eine Gerade (Achsensymmetrie in der ebenen Geometrie).

Symmetrie bedeutet allgemein das Vorhandensein einer gleichmäßigen Entsprechung. Dazu gehören die „Opfersymmetrie" in einer Budgetdebatte ebenso wie die mehrfache Wiederholung in einem Lied. Eine Beschränkung des Symmetriebegriffs im Unterricht auf Achsensymmetrie und Punktsymmetrie — und dies nur in der ebenen Geometrie — wird der Vielfalt und Bedeutung des Symmetriebegriffs in keiner Weise gerecht.

Literatur über Symmetrie allgemein: [Heilbronner/Dunitz 1993], [Hilton/Holton/Pedersen 1996], [Walser 1998], [Weyl 1955], [Wille 1988], [Yale 1988].

1.1 Fragen

Ein Bild der folgenden Figur ist *nicht* symmetrisch. Welches?



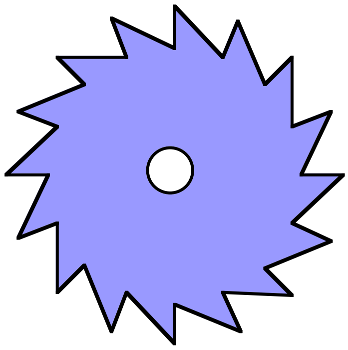
Symmetrische Figuren?

1.2 und Antworten

In der Figur haben wir folgende Symmetrietypen:

Das Bild des Kopfes hat eine *Achsensymmetrie* mit einer senkrechten Symmetrieachse. Ein Kopf im Raum hat eine Ebenensymmetrie. Diese wird oft auch als *bilaterale Symmetrie* bezeichnet. Allerdings hat kein wirklicher Menschenkopf eine völlig perfekte bilaterale Symmetrie.

Bilaterale Symmetrie erscheint in der Architektur. Originale gotische Kirchen haben oft eine durch die lange Bauzeit und spätere Umbauten und Reparaturen bedingte leicht gestörte Symmetrie, was aber gerade deren Reiz ausmacht und den allzu perfekten neogotischen Bauten abgeht.



Sägeblatt

Was können wir an der Position eines Kreissägeblattes verändern, ohne dass eine Beobachterin, welche den Raum kurzzeitig verlassen hat, eine Veränderung feststellen kann? Wir können das Sägeblatt um einen oder mehrere Zähne drehen; das Sägeblatt in unserem Beispiel hat eine sechzehnteilige Drehsymmetrie.

Scherenschnitt

In einem Scherenschnitt finden wir zusätzlich zur Drehsymmetrie auch *Achsensymmetrien,* welche durch das Falten des Blattes vor dem Schneiden entstanden sind. Unser Beispiel hat nur eine vierteilige Drehsymmetrie. Die Symmetrien in diesem Beispiel sind dieselben wie beim Quadrat. Sehr oft finden wir aber achtteilige oder gar sechzehnteilige Drehsymmetrien.

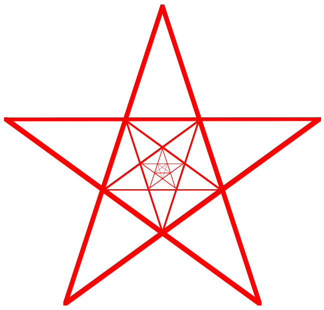
Sehr schöne Beispiele mit Drehsymmetrie und oft auch Achsensymmetrien sind die Rosettenfenster in gotischen Kathedralen (vgl. [Cowen 1992]).

Frage: Wie kann ein Scherenschnitt mit sechsteiliger Drehsymmetrie geschnitten werden?

Blablablablablablablablablablablablablablablablablablablablablablablablablablabla

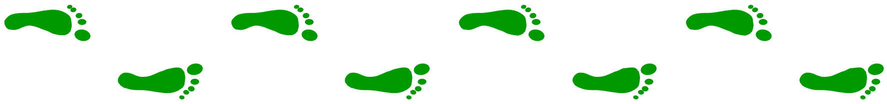
blabla

Eine ewige Wiederholung heißt *Translationssymmetrie*. Dabei muss das ...blabla... allerdings unendlich lang, das heißt ohne Anfang und ohne Ende, gedacht werden. Haben Sie auch schon solche Vorträge gehört?



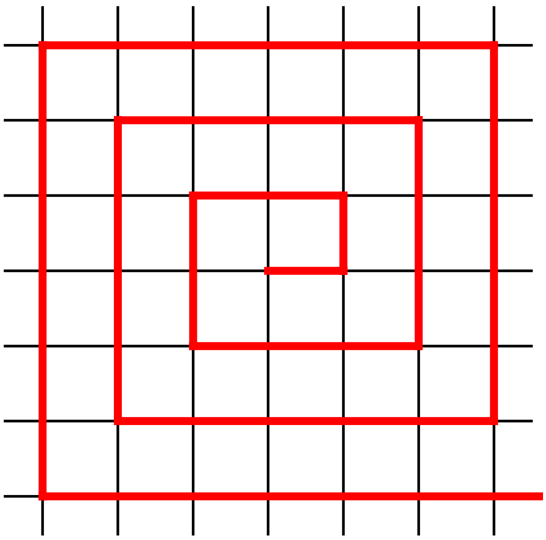
Pentagramm-o-gramm

Zusätzlich zur fünfteiligen Drehsymmetrie und der Achsensymmetrie habe wir im Pentagramm-o-gramm eine *Drehstrecksymmetrie*: Wird das Innere der Figur geeignet vergrößert (Vergrößerung auf 262% oder exakt $\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2$ (Quadrat des goldenen Schnittes)) und zusätzlich um 180° gedreht, kommt es zur Deckung mit der Gesamtfigur.



Fußspur

Eine regelmäßige Fußspur im Sand ist translationssymmetrisch, nach jedem Doppelschritt ergibt sich dasselbe Bild. Wenn wir die Fußspur aber nur um einen einfachen Schritt verschieben, kommen wir auch mit einer Spiegelung an der Längsachse auf das ursprüngliche Bild zurück; wir haben eine *Schubspiegelsymmetrie*. Dies ist die am wenigsten bekannte Symmetrieart.



Eckige Spirale mit gleichen Abständen

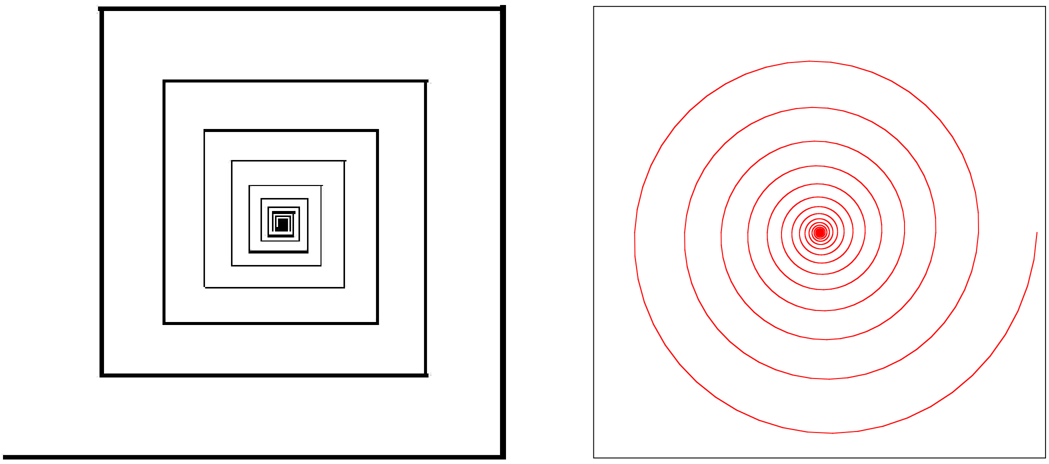
Diese eckige Spirale enthält keine Symmetrie; es gibt — außer der Identität — keine Abbildung, welche die Figur mit sich zur Deckung bringt.

Trotzdem hat unsere eckige Spirale einige reizvolle Zahleneigenschaften. Wenn wir die Strecke im Zentrum als Einheit nehmen und damit die Spiralenlängen vom Zentrum aus gemessen abtragen, erhalten wir folgendes Zahlenschema:

100	99	98	97	96	95	94	93	92	91	90
	64	63	62	61	60	59	58	57	56	89
	65	36	35	34	33	32	31	30	55	88
	66	37	16	15	14	13	12	29	54	87
	67	38	17	4	3	2	11	28	53	86
	68	39	18	5	0	1	10	27	52	85
	69	40	19	6	7	8	9	26	51	84
	70	41	20	21	22	23	24	25	50	83
	71	42	43	44	45	46	47	48	49	82
	72	73	74	75	76	77	78	79	80	81

Zahlenspirale

Wir erkennen zum Beispiel in den „Diagonalen“ die Quadratzahlen und die Zahlen von der Form $n(n+1)$. Interessant ist es auch, die Positionen der Primzahlen in diesem Schema zu untersuchen (Vgl. [Hoffman 1999], S. 106).

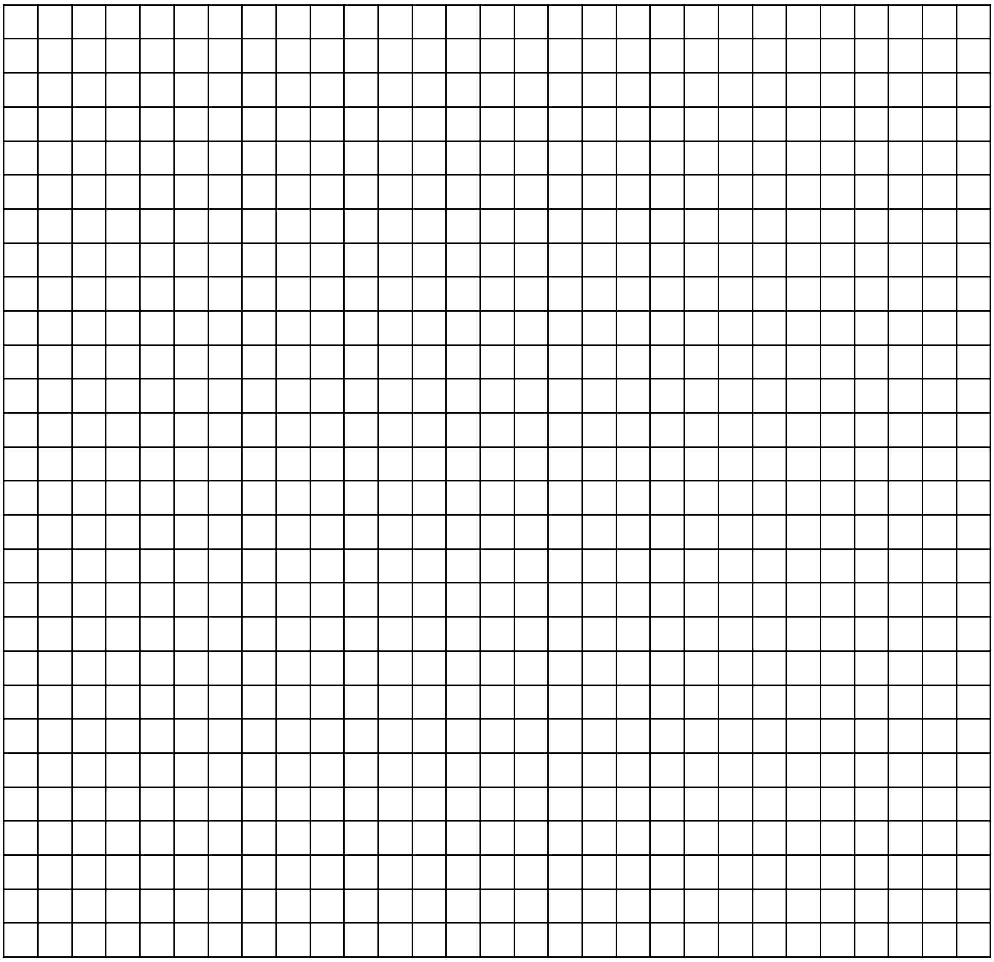


Logarithmische Spiralen

Wenn wir diese eckige Spirale auf 90% verkleinern und um 90° im Gegenuhrzeigersinn drehen, kommt sie (bis auf die erste Strecke) mit sich selber zur Deckung. Wir haben eine *Drehstrecksymmetrie*. Dieselbe Symmetrieart liegt bei einer *logarithmischen Spirale* vor. Logarithmische Spiralen erscheinen in der Natur bei Schneckenhäusern (vgl. [Cook 1979], [Hartmann/Mislin 1985], [Meinhardt 1997]).

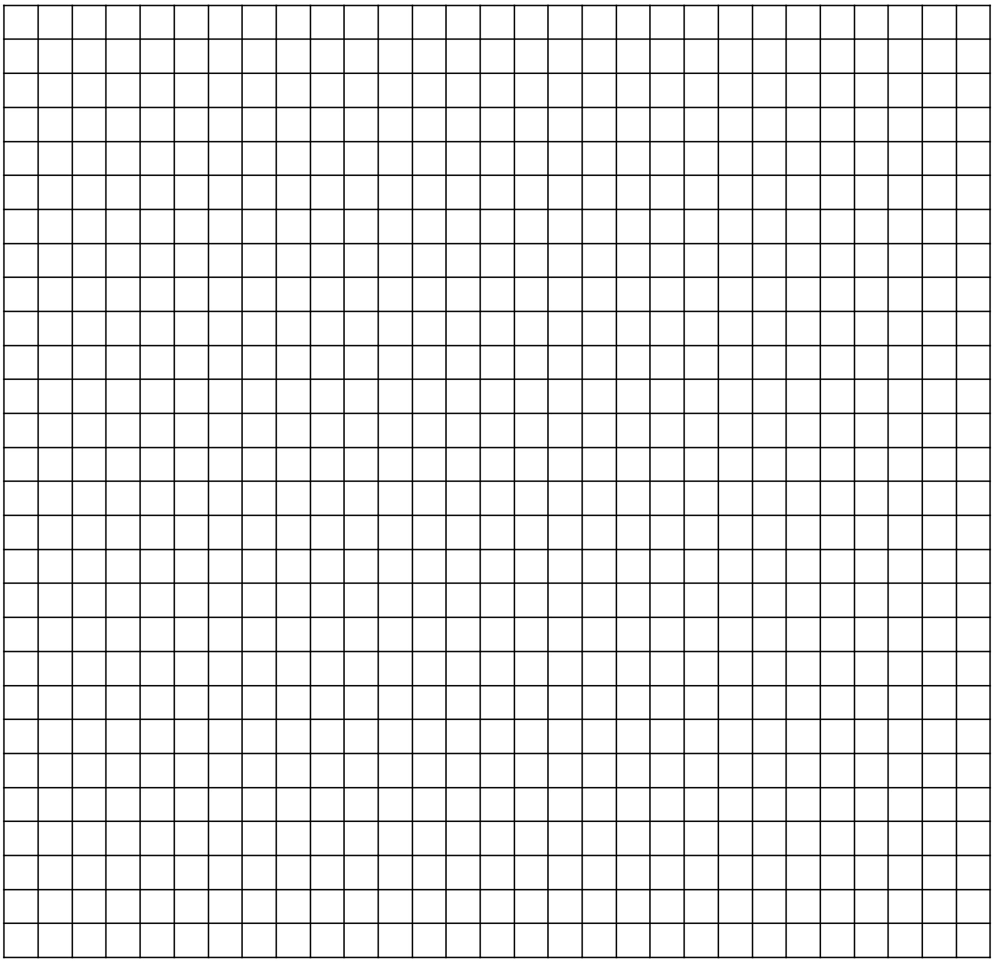
2 Ein Spiel im Quadratraster

Wir legen (zum Beispiel durch Würfeln) drei natürliche Zahlen a, b und c fest. Diese drei Zahlen werden in der Folge unverändert beibehalten. Nun wählen wir einen Gitterpunkt als Startpunkt und eine der vier Gitterrichtungen als Startrichtung. In dieser Richtung fahren wir zunächst a Einheiten. Dann ändern wir die Richtung im Uhrzeigersinn um 90° und fahren b Einheiten weit. Dann ändern wir wieder die Richtung im Uhrzeigersinn um 90° und fahren c Einheiten weit. Wir ändern wieder die Richtung im Uhrzeigersinn um 90° und fahren nun wieder a Einheiten weit. Und so weiter und so fort. Welche Symmetrien hat die entstehende Figur? Warum?



Spiel im Quadratraster

Was geschieht, wenn wir mit vier Zahlen arbeiten?

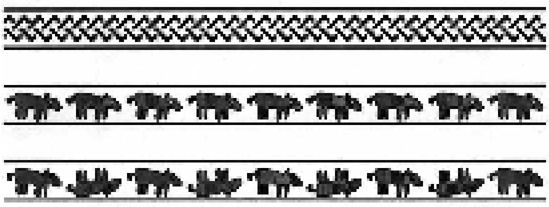


Welche Symmetrie entsteht bei vier Zahlen?

3 Bandornamente (Frieze Patterns)

3.1 Symmetrieklassen

Wieviel Bandornamente gibt es? Natürlich unendlich viele.



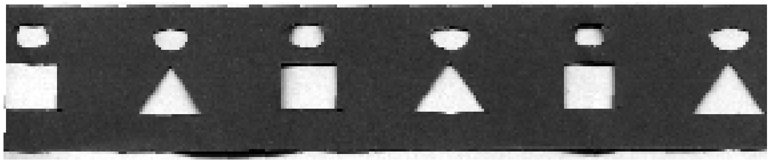
Bandornamente

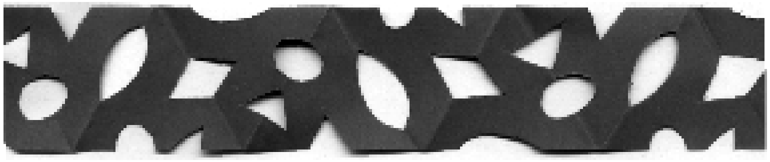
Aber: Das erste und das dritte der Beispiele haben dasselbe Symmetrieverhalten (Schubspiegelung). Also neue Frage:

Wie viele Symmetrieklassen gibt es bei Bandornamenten?

Wesentlich bei einem Bandornament ist, dass man es in beide Richtungen beliebig weit fortsetzen kann, dass aber umgekehrt ein beliebiger, aber genügend großer Abschnitt alle Informationen des gesamten Bandornamente enthält. Dies ist nur möglich, wenn nach einer gewissen Länge sich die Figuren wiederholen. Dann haben wir aber zumindest eine Translationssymmetrie.

3.2 Beispiele

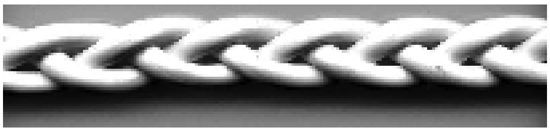




Bandornamente als Scherenschnitte

3.3 Zöpfe

Ein mit drei Strängen geflochtener Zopf hat, als zweidimensionales Bild gesehen, eine Schubspiegelsymmetrie.

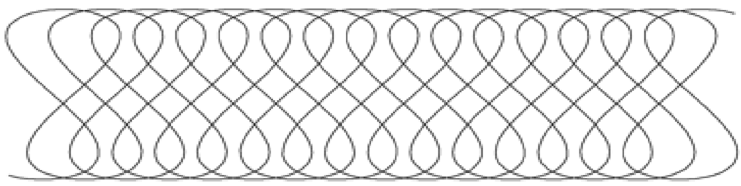


Zopf

Mit der Parameterdarstellung

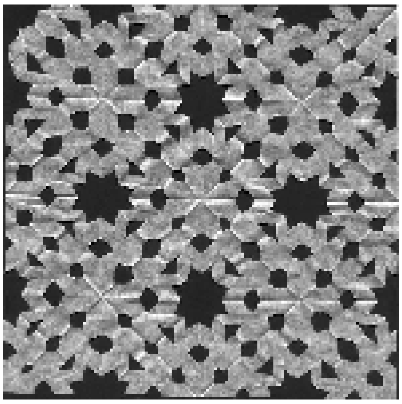
$$\left.\begin{array}{l} x(t) = \sin(2t) - \frac{\pi}{24}t \\ y(t) = 2\sin(t) \end{array}\right\} \quad t \in [-15.6\pi, 15.6\pi]$$

ergibt sich die Kurve der folgenden Figur.



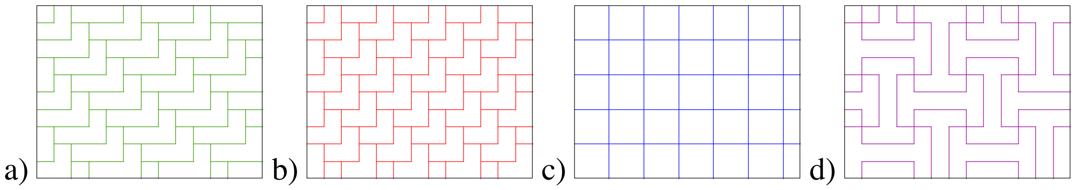
Mathematisches Geflecht

4 Flächenornamente und Parkette



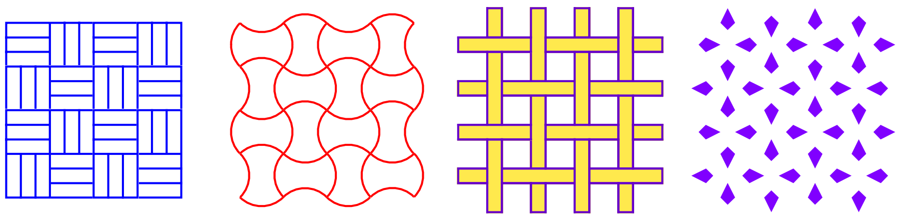
Scherenschnitt als Flächenornament

Wie bei den Bandornamenten können wir auch bei den Flächenornamenten nach den Symmetrieklassen fragen. Im folgenden einige Beispiele, die alle zu verschiedenen Symmetrieklassen gehören.



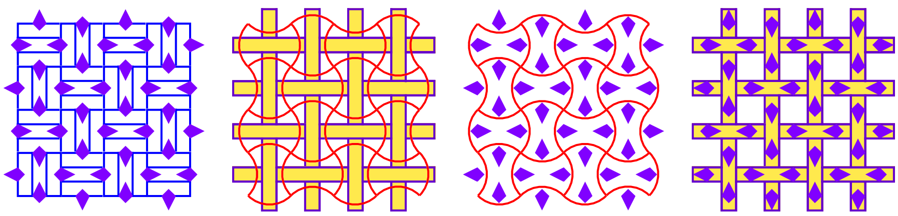
Beispiele von Flächenornamenten

Die folgende Figur zeigt vier Beispiele von Flächenornamenten mit denselben Symmetrien. Da die zur Translationssymmetrie gehörenden Translationsvektoren minimaler Länge bei allen vier Beispielen gleich groß und parallel sind, lassen sich die vier Beispiele problemlos überlagern.



Vier Beispiele mit demselben Symmetrietyp

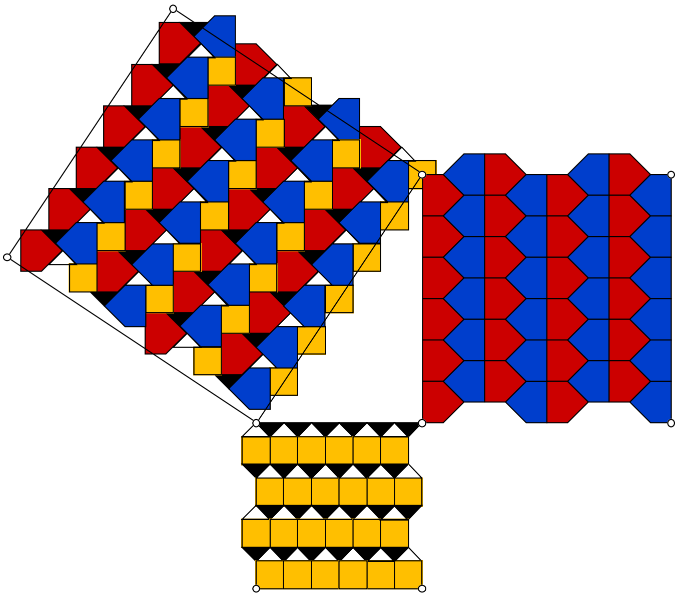
Die vier Beispiele lassen sich überlagern.



Überlagerungen

Der Graphiker M. C. Escher hat sich intensiv mit Flächenornamenten und den dahinter liegenden Symmetrien beschäftigt [Locher 1986]. Weiteres über Flächenornamente und Parkette siehe [Bigalke/Wippermann 1994], [Bongartz/Borho/Mertens/Steins 1988], [Coxeter 1963], [Flachsmeyer/Feiste/Manteuffel 1990], [Grünbaum/Shephard 1987].

Mit Parketten, welche verschiedene Steintypen enthalten, können durch Umordnen der Parkettsteine Flächensätze bewiesen werden, zum Beispiel der bekannte Satz des Pythagoras (vgl. [Walser 1998], S. 53). Die Parkettsteine in den beiden Kathetenquadraten kommen in gleicher Anzahl, aber veränderter Anordnung auch im Hypotenusenquadrat vor.



Pythagoras und Parkette

5 Das ästhetische Wiesel

Das ästhetische Wiesel

Ein Wiesel
saß auf einem Kiesel
inmitten Bachgeriesel.

Wisst ihr,
weshalb?

Das Mondkalb
verriet es mir
im Stillen:

Das raffinier-
te Tier
tats um des Reimes willen.

Christian Morgenstern: Galgenlieder

5.1 Symmetrie in der Sprache

Innerhalb eines Textes können auf verschiedenen Ebenen Symmetrien festgestellt werden. So kann beispielsweise ein Entwicklungsroman inhaltlich symmetrisch durch Aufstieg, Höhepunkt und Fall gestaltet sein. Stab- oder Endreime sowie Rhythmen sind Translationssymmetrien auf der lautlichen Ebene. Schließlich gibt es Symmetrien auf der Ebene der Buchstabenreihenfolge und der typographischen Buchstabendarstellung. In der deutschen Sprache kann die Vertauschung der Wörter bei Wortzusammensetzungen zu einem Bedeutungswechsel führen, wie das Beispiel

HAUSRAT $\neq$ RATHAUS

zeigt.

5.2 Palindrome

Unter einem *Palindrom* wird eine sinnvolle Folge von Buchstaben oder Wörtern verstanden, welche rückwärts gelesen denselben oder allenfalls einen anderen Sinn ergeben. Die Bezeichnung *Palindrom* kommt aus dem griechischen *palíndromos*, „rückläufig“. Beispiele sind etwa die Eigennamen:

ANNA

OTTO

ANNA SUSANNA

Der Eigenname „OTTO“ hat zudem eine typographische Achsensymmetrie mit einer senkrechten Symmetrieachse in der Wortmitte. Die Beispiele

RELIEFPFEILER

REGELBASISABLEGER

gehören wohl zu den längsten aus einem Wort bestehenden Palindromen der deutschen Sprache. *Herbert Pfeiffer* [Pfeiffer 1992] hat in seinem Buch mit dem Titel

OH CELLO VOLL ECHO

an die hundert palindromische Gedichte und Texte in deutscher Sprache publiziert. Ein Autor solcher Gedichte und Texte kann sich mit Recht als

RETROWORTER

bezeichnen (nach *André Thomkins*).

Wohl eher ironischerweise wird *Napoleon* der palindromische Satz

ABLE WAS I ERE I SAW ELBA

zugeschrieben. Im Zeichen zunehmender Finanzknappheit der öffentlichen Hand werden vielleicht bald einmal

SEX AT NOON TAXES

erhoben.

Palindrome mit einem Bedeutungswechsel beim Rückwärtslesen sind etwa:

AVE - EVA

NEBEL - LEBEN

REGAL – LAGER