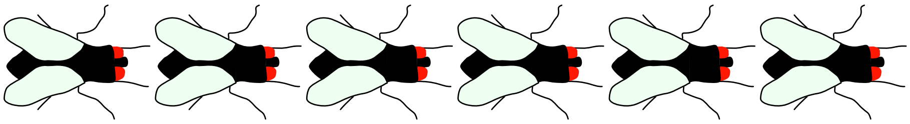
Hans Walser

Mathematik für die Sekundarstufe 1



Modul 202

Isometrien

Lernumgebung

UNI
BASEL

Inhalt

Modul 202 für die Lehrveranstaltung *Mathematik für die Sekundarstufe 1*

Sommer 2005 Probeausgabe
Sommer 2007 Geändertes Layout. Erweiterung
Frühjahr 2009 Fehlerkorrekturen und Erweiterungen
Frühjahr 2011 Keine Änderung

last modified: 3. Januar 2014

Hans Walser
www.walser-h-m.ch/hans

1 Translationssymmetrie im Alltag?

Gibt es im „wirklichen“ Leben Translationssymmetrie?

Antwort

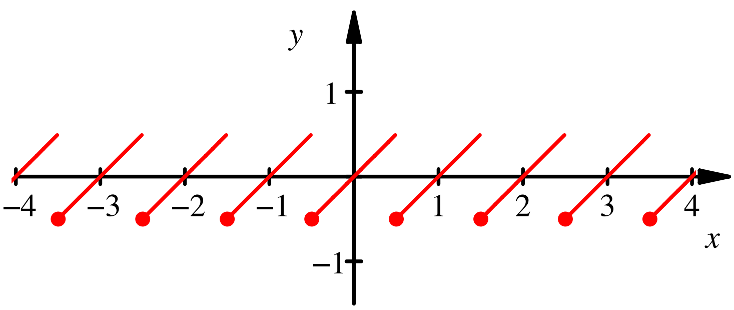
Nein

2 Symmetrien einer Funktion

Skizzieren Sie die Funktion $y = f(x) = x - \text{round}(x)$. Welche Symmetrien hat der Funktionsgraph?

Ergebnis

Wenn man davon ausgeht, dass „Runden“ im kritischen Fall der halbzahligen Zahlen „Aufrunden“ heißt, sieht die Lösung so aus:



$y = f(x) = x - \text{round}(x)$

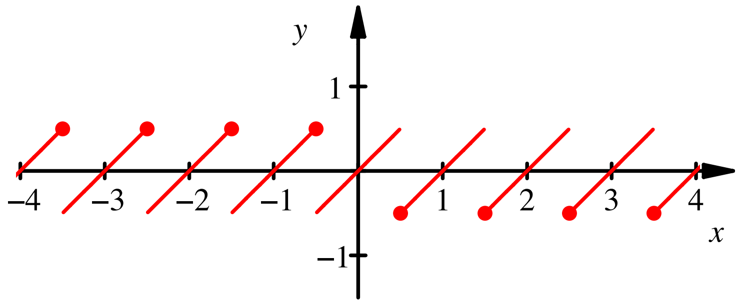
Wir haben eine Translationssymmetrie.

Nun gibt es aber Software, welche anders rundet. Excel macht es so:

x	RUNDEN(x)
-4.5	-5
-3.5	-4
-2.5	-3
-1.5	-2
-0.5	-1
0.5	1
1.5	2
2.5	3
3.5	4
4.5	5

$y = \text{round}(x)$

Entsprechend sieht auch $y = f(x) = x - \mathrm{round}(x)$ aus:



$y = f(x) = x - \mathrm{round}(x)$

Der Graph hat keine Translationssymmetrie, aber eine Punktsymmetrie mit dem Symmetriezentrum im Ursprung.

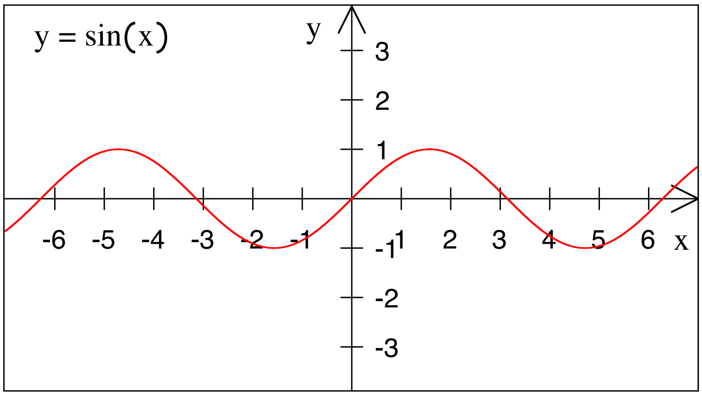
3 Translationssymmetrische Funktionsgraphen

a) Geben Sie ein Beispiel einer Funktion mit der Periodenlänge 2π.

b) Geben Sie ein Beispiel einer Funktion mit der Periodenlänge 1.

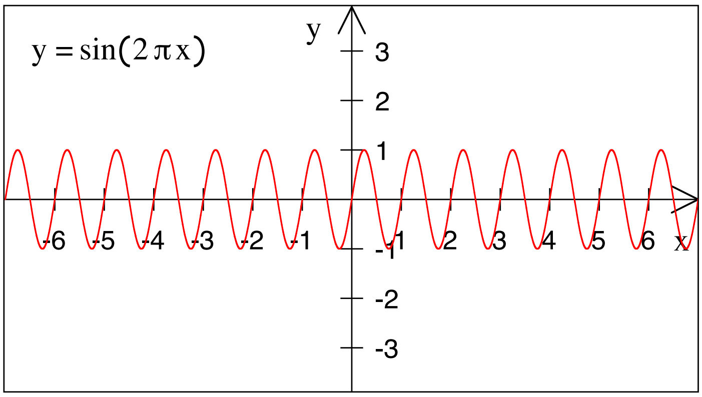
Ergebnis (exemplarisch)

a) $\sin(x)$



$y = \sin(x)$

b) $\sin(2\pi x)$



$y = \sin(2\pi x)$

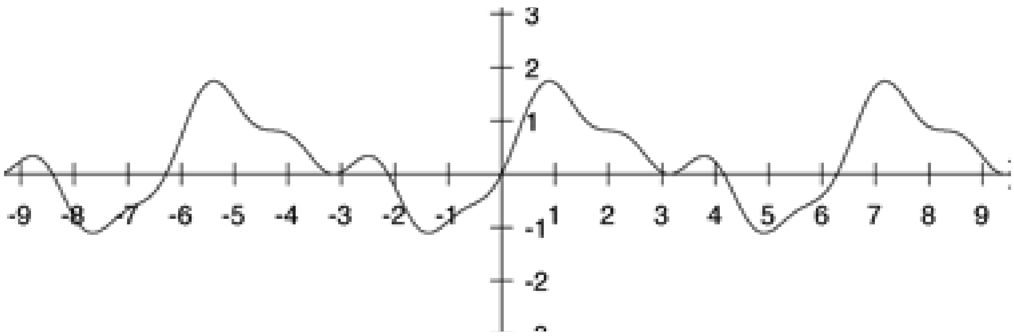
4 Translationssymmetrische Funktionsgraphen

a) Geben Sie ein Beispiel einer Funktion, deren Graph translationssymmetrisch, aber nicht achsensymmetrisch oder punktsymmetrisch ist. Tipp: Mit Graphikdisplay ausprobieren.

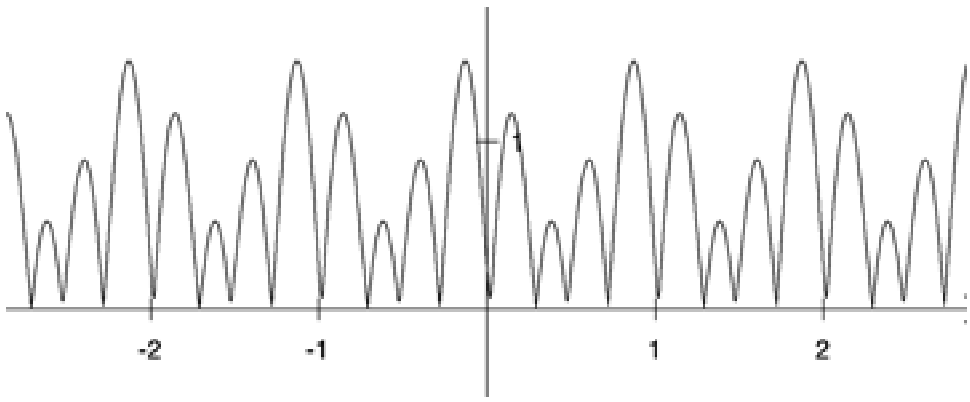
b) Geben Sie ein Beispiel einer solchen Funktion mit der Periodenlänge 1.

Beispiele

a) Geben Sie ein Beispiel einer Funktion, deren Graph translationssymmetrisch, aber nicht achsensymmetrisch oder punktsymmetrisch ist. Tipp: Mit Graphikdisplay ausprobieren.



b) Geben Sie ein Beispiel einer solchen Funktion mit der Periodenlänge 1.



5 Symmetrien des Funktionsgrafen?

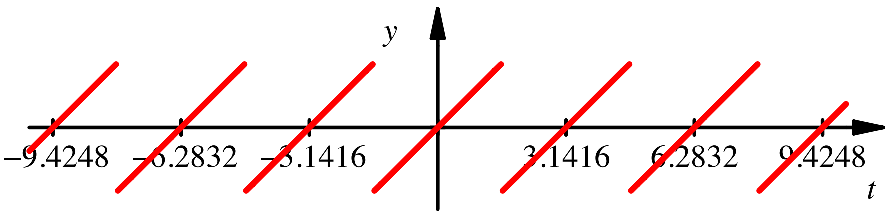
Wo ist die Funktion $t \mapsto \arctan(\tan(t))$ definiert?

Welche Symmetrien hat der Funktionsgraf?

Bearbeitung

Der größtmögliche Definitionsbereich ist $\mathbb{R} - \left\{ t \middle| \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$.

Funktionsgraf:

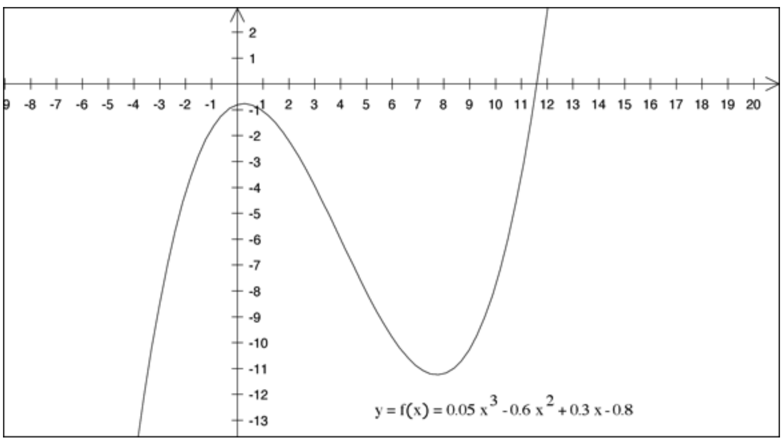


$t \mapsto \arctan(\tan(t))$

Wir haben Translationssymmetrie und Punktsymmetrie.

6 Kubische Parabel

Zeigen Sie, dass der Graph einer kubischen Funktion $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ *immer* punktsymmetrisch ist.



Punktsymmetrie?

Ergebnis

Mörderische Rechnung.

Ansatz: $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$.

Für den Wendepunkt W (vermutetes Symmetriezentrum) erhalten wir (zweite Ableitung Null setzen): $x_W = -\frac{b}{3a}$, $y_W = a\left(-\frac{b}{3a}\right)^3 + b\left(-\frac{b}{3a}\right)^2 + c\left(-\frac{b}{3a}\right) + d$.

Neue Koordinaten relativ zum Wendepunkt: $\xi = x - x_W$, $\eta = y - y_W$, also $x = \xi + x_W$, $y = \eta + y_W$. In $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ einsetzen ergibt:

$\eta = a\xi^3 + \xi\left(-\frac{1}{3}\frac{b^2}{a} + c\right)$, also eine ungerade Funktion mit punktsymmetrischem Graphen.

7 Hände

Welche Arten von Symmetrie können zwischen der linken und der rechten Hand bestehen?

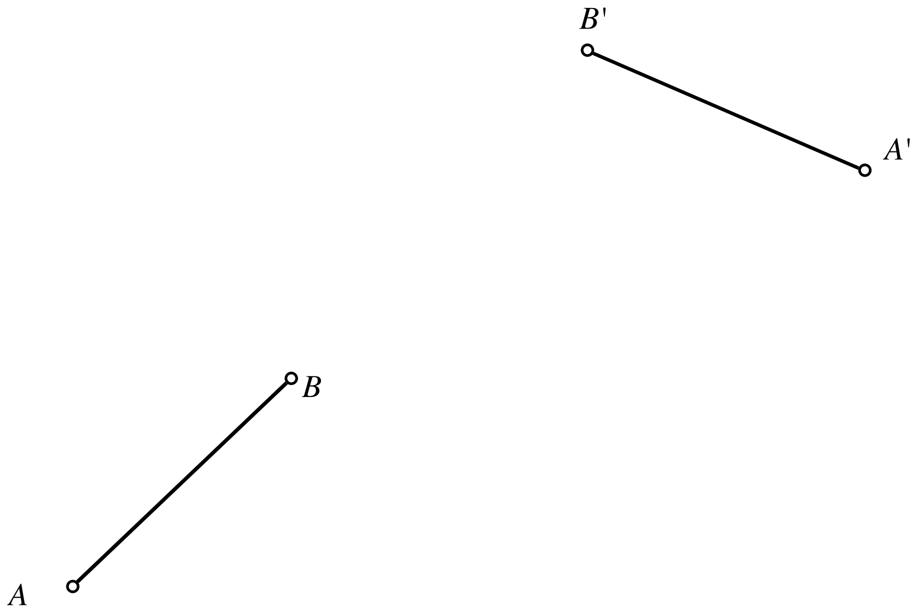
Ergebnis

a) Bilaterale Symmetrie mit Spiegelebene

b) Punktsymmetrie. Sieht man am besten, wenn man einen Ball so in die Hände nimmt, dass sich entsprechende Finger diametral gegenüberliegen.

8 Isometrien

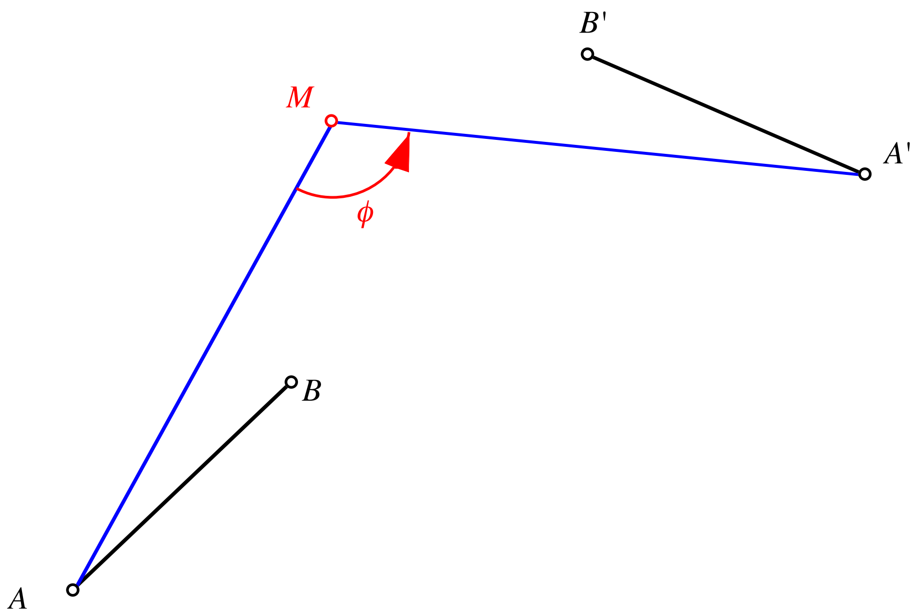
Es gibt zwei verschiedene Isometrien, welche die Strecke AB auf die Strecke $A'B'$ abbilden. (Tipp: Orientierung)



Isometrien?

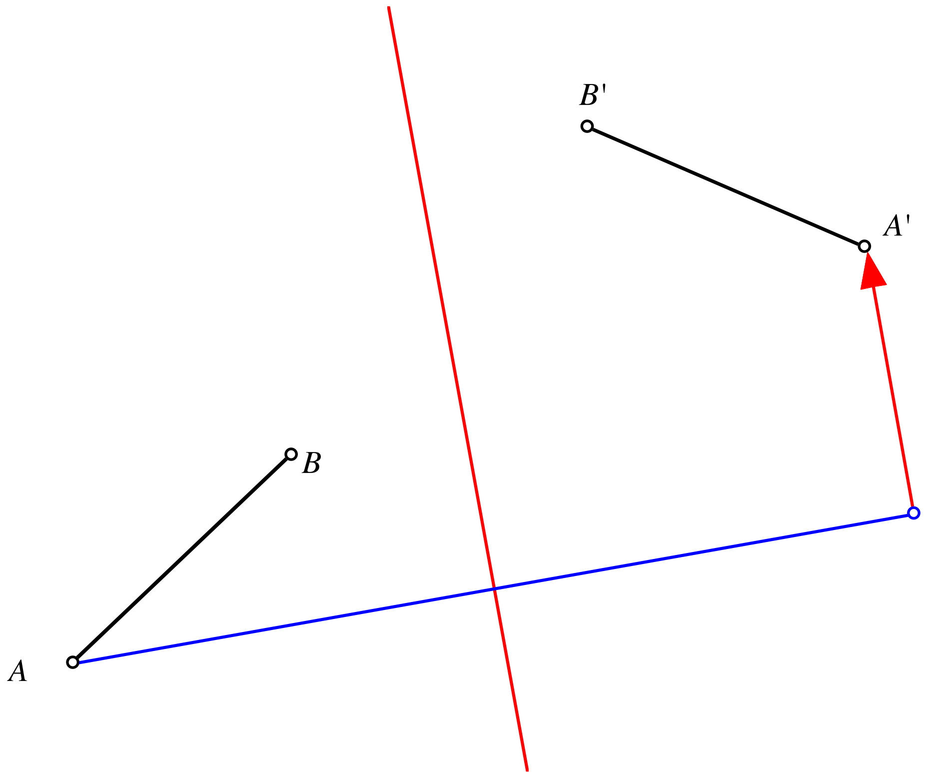
Ergebnis

1) Drehung um M um ϕ.



Drehung

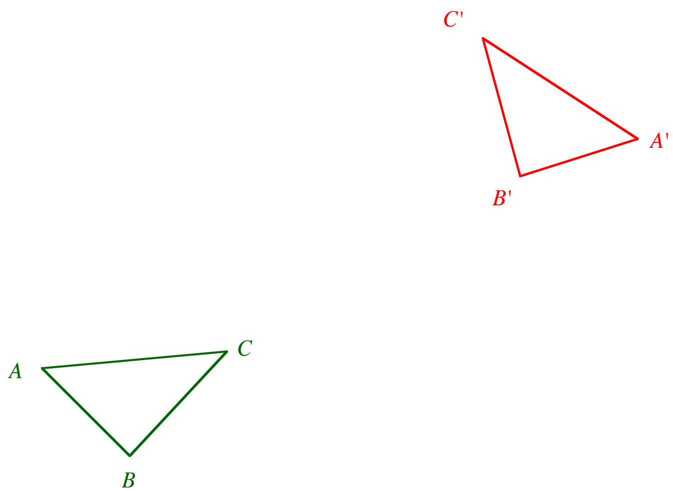
2) Schubspiegelung (orientierungsumkehrend)



Schubspiegelung

9 Schubspiegelung

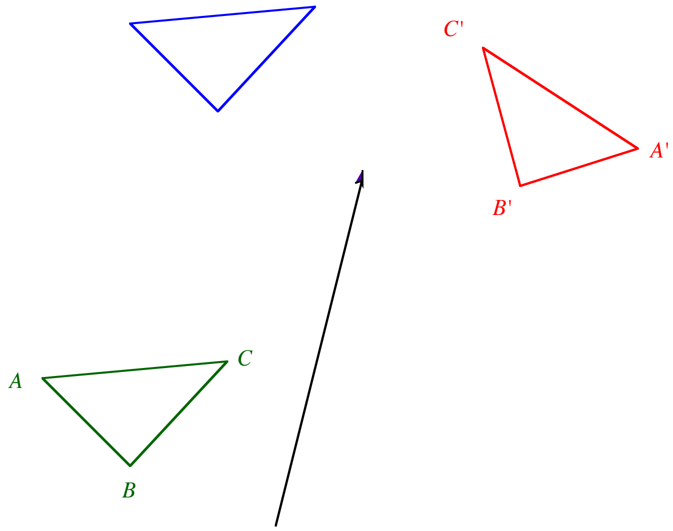
Das Dreieck $A'B'C'$ ist das Bild des Dreieckes ABC bei einer Schubspiegelung. Gesucht sind Achse und Translationsvektor dieser Schubspiegelung.



Schubspiegelung

Ergebnis

Der Translationsvektor gibt auch die Achse an.



Achse und Vektor

10 Kongruente Kreise

Auf wie viele Arten können zwei verschiedene kongruente Kreise aufeinander abgebildet werden?

Bearbeitung

Wegen der hohen Symmetrie des Kreises gibt es viele Möglichkeiten:

a) Translation

b) Drehung (Unendlich viele Möglichkeiten, Drehzentrum auf der Mittelsenkrechten der beiden Kreismittelpunkte. Sonderfall Punktspiegelung)

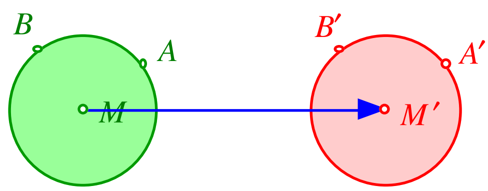
c) Geradenspiegelung

d) Schubspiegelung (Unendlich viele Möglichkeiten).

Durch zusätzliche Angabe von zwei Punkten und ihrer Bilder kann spezifiziert werden.

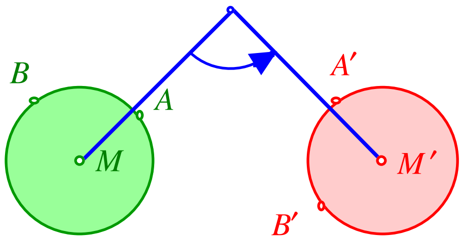
Beispiele

a) Translation

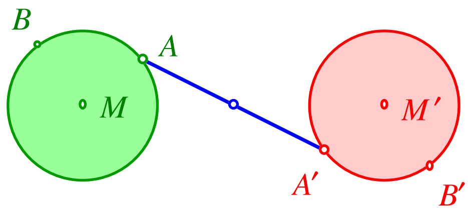


Translation

b) Drehung

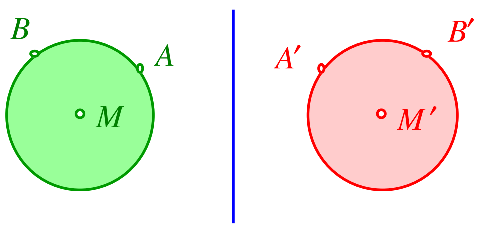


Drehung



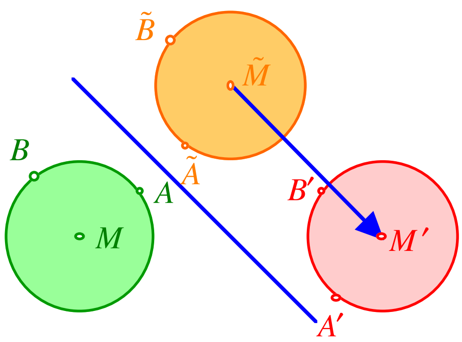
Punktspiegelung

c) Geradenspiegelung



Gerdenspiegelung

d) Schubspiegelung



Schubspiegelung mit Zwischenbild

Wie finden wir bei gegebenen Punkten A, B, A', B' die passende Abbildung?