Hans Walser

Mathematik für die Sekundarstufe 1

$$1 : 7 = 0.\overline{142857}$$

10
30
20
60
40
50
10
30
20
60
40
50
10
30
20
60
40
50

Modul 208

Periodizität

Lernumgebung

UNI BASEL

Inhalt

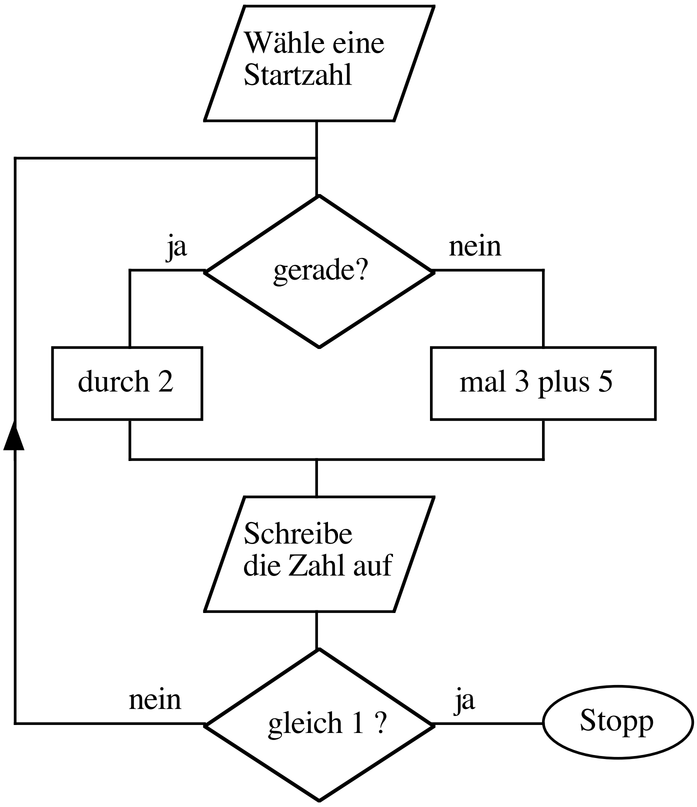
Modul 208 für die Lehrveranstaltung *Mathematik für die Sekundarstufe 1*

Sommer 2005 Provisorische Ausgabe
Sommer 2007 Ergänzungen. Formel-Editor revidiert
Frühjahr 2009 Erweiterungen
Frühjahr 2011 Keine Änderung

last modified: 1. Januar 2014

Hans Walser
Mathematisches Institut, Rheinsprung 21, 4051 Basel
www.walser-h-m.ch/hans

1 Eine Folgenmaschine



Folgenmaschine

Was ergibt sich für verschiedene Startzahlen?

Bearbeitung

MuPAD Programm:

```
input("Startzahl eingeben: ", x):
m:=30:
i:=0:
repeat
if x mod 2 = 0 then x:=x/2 else x:=3*x+5 end_if:
i:=i+1:
print(x);
until i=m or x=1 end_repeat:
```

Allgemein: sobald sich eine Zahl wiederholt, fängt eine Periode an.

Startzahl 1:

8	4	2	1

Startzahl 2:

1

Startzahl 3:

14	7	26	13	44	22	11	38	19	62	31	98	49	152	76	38

Die Folge ist periodisch; Periodenlänge 8

Startzahl 4:

2	1

Startzahl 5:

20	10	5	20	10	5	20	10	5

Die Folge ist periodisch; Periodenlänge 3

Startzahl 6:

3	14	7	26	13	44	22	11	38	19	62	31	98	49	152	76	38

Die Folge ist periodisch; Periodenlänge 8; gleiche Periode wie bei der Startzahl 3

Startzahl 7:

26	13	44	22	11	38	19	62	31	98	49	152	76	38

Die Folge ist periodisch; Periodenlänge 8; gleiche Periode wie bei der Startzahl 3

Startzahl 8:

4	2	1

Eine Zweierpotenz als Startzahl ergibt eine Halbierungsfolge

Startzahl 9:

32	16	8	4	2	1

überraschend!

Startzahl 10:

5	20	10	5	20	10	5	20	10	5	20

Die Folge ist periodisch; Periodenlänge 3; gleiche Periode wie bei der Startzahl 5

Startzahl 11:

38	19	62	31	98	49	152	76	38

Die Folge ist periodisch; Periodenlänge 8; gleiche Periode wie bei der Startzahl 3

2 Periodizität bei der Fibonacci-Folge

a) Wir betrachten die Fibonacci-Folge bezüglich *gerade* / *ungerade*. Ergibt sich eine Periodizität? Wie lang ist allenfalls die Periode?

b) Wir betrachten die Fibonacci-Folge modulo 5, das heißt wir nehmen jeweils nur den Rest, der bei Division durch 5 übrig bleibt. Ist diese Folge periodisch? Wie lang ist allenfalls die Periode?

c) Wir betrachten von der Fibonacci-Folge nur die letzte Stelle, also nur die Einer. Ist diese Folge periodisch? Wie lang ist allenfalls die Periode?

d) Wir betrachten von der Fibonacci-Folge nur die zwei letzten Stellen, also nur die Zehner und die Einer. Ist diese Folge periodisch? Wie lang ist allenfalls die Periode höchstens? (Tipp: Dirichletsches Schubfachprinzip)

Ergebnis

a) Periode: *ungerade, ungerade, gerade*. Periodenlänge 3

b) Periodenlänge 20

c) Periodenlänge 60

d) Die letzten zwei Stellen zweier aufeinander folgender Fibonacci-Zahlen bestimmen eindeutig die letzten zwei Stellen der nächsten Fibonacci-Zahl. Nun gibt es 100×100=10 000 Konstellationen von letzten zwei Stellen zweier aufeinander folgender Fibonacci-Zahlen. Das heißt, dass nach spätestens 10 000 Schritten sich eine Konstellation wiederholt und die Periode beginnt.

3 Fibonacci-Folge modulo 7

Gewöhnliche Fibonacci-Folge:

$$a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$$

Fibonacci-Folge modulo 7:

$$b_{n+1} = b_n + b_{n-1} (\bmod 7)$$

Ist die Folge b_n periodisch?

Bearbeitung

Tabelle:

n	a[n]	b[n]
1	1	1
2	1	1
3	2	2
4	3	3
5	5	5
6	8	1
7	13	6
8	21	0
9	34	6
10	55	6
11	89	5
12	144	4

13	233	2
14	377	6
15	610	1
16	987	0
17	1597	1
18	2584	1
19	4181	2
20	6765	3
21	10946	5
22	17711	1
23	28657	6
24	46368	0
25	75025	6
26	121393	6
27	196418	5
28	317811	4
29	514229	2
30	832040	6
31	1346269	1
32	2178309	0
33	3524578	1
34	5702887	1
35	9227465	2

Die Tabelle zeigt für b_n ein periodisches Verhalten; die Periodenlänge ist 16.

Beweis der Periodizität mit dem Dirichletschen Schubfachprinzip: Da nur die sieben Ziffern $0, 1, 2, \ldots, 6$ erscheinen können, gibt es auch nur $7^2 = 49$ mögliche Paare aufeinander folgender Zahlen. Somit beginnt spätestens nach 49 Schritten eine Wiederholung.

4 Zyklische Fibonacci-Folge

Was geschieht bei der Rekursionsformel

$$z_{n+2} = \sqrt{2} z_{n+1} - z_n$$

Bearbeitung

Die Folge ist – bei beliebigen Startwerten – zyklisch mit der Zyklenlänge 8.

```
z[0] = p
z[1] = q
z[2] = 2^(1/2)*q - p
z[3] = q - 2^(1/2)*p
z[4] = -p
z[5] = -q
z[6] = p - 2^(1/2)*q
z[7] = 2^(1/2)*p - q
z[8] = p
z[9] = q
```

5 Zyklische Fibonacci-Folge

Was geschieht bei der Rekursionsformel

$$z_{n+2} = \rho z_{n+1} - z_n, \quad \rho = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \approx 0.618 \quad \text{(Goldener Schnitt)}$$

Bearbeitung

Die Folge ist – bei beliebigen Startwerten – zyklisch mit der Zyklenlänge 5.

```
z[0] = p
z[1] = q
z[2] = 1/2*q*(5^(1/2) - 1) - p
z[3] = -1/2*(5^(1/2) - 1)*(p + q)
z[4] = 1/2*5^(1/2)*p - q - 1/2*p
z[5] = p
z[6] = q
```

6 Fibonacci mit komplexen Zahlen

Was geschieht bei der Rekursionsformel

$$a_{n+2} = a_{n+1} - a_n$$

Welche Symmetrien ergeben sich in der Gaußschen Zahlenebene?

Was geschieht mit den Quotienten:

$$c_n = \frac{a_n}{a_{n-1}}$$

Bearbeitung

Für beliebige Startwerte erhalten wir eine periodische Folge mit der Periodenlänge 6.

Beweis allgemein: Wir verwenden die Startwerte $a_1 = p + \mathrm{i}q$ und $a_2 = r + \mathrm{i}s$. Das ergibt:

```
a[1]:=p+I*q:
a[2]:=r+I*s:

for n from 1 to 6 do
   a[n+2]:=a[n+1]-a[n];
end_for:

for n from 1 to 8 do
   print(Unquoted,"a[".n."] = ".  a[n]);
end_for:
```

```
a[1] = p + I*q
a[2] = r + I*s
a[3] = r - I*q - p + I*s
a[4] = - p - I*q
a[5] = - r - I*s
a[6] = p + I*q - r - I*s
a[7] = p + I*q
a[8] = r + I*s
```

Es ist $a_7 = a_1$ und $a_8 = a_2$.

Ferner ist $a_4 = -a_1$ und $a_5 = -a_2$; wir haben also eine Punktsymmetrie bezüglich des Ursprunges.

Die Quotientenfolge $c_n = \frac{a_n}{a_{n-1}}$ folgt daraus:

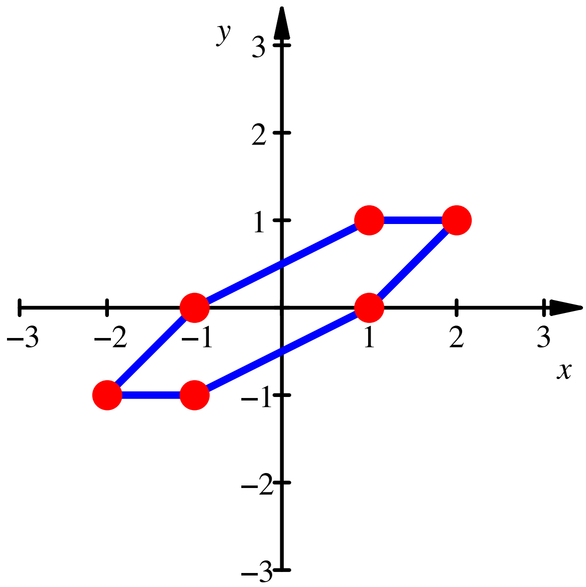
$$c_5 = \frac{a_5}{a_4} = \frac{-a_2}{-a_1} = c_2$$

Wir haben also eine periodische Folge mit der Periodenlänge 3.

Beispiel1: Für die Startwerte $a_1 = 1$ und $a_2 = 2 + \mathrm{i}$ erhalten wir:

```
a[1] = 1
a[2] = 2 + I
a[3] = 1 + I
a[4] = -1
a[5] = - 2 - I
a[6] = - 1 - I
a[7] = 1
a[8] = 2 + I
```

In der Gaußschen Zahlenebene sieht das so aus:

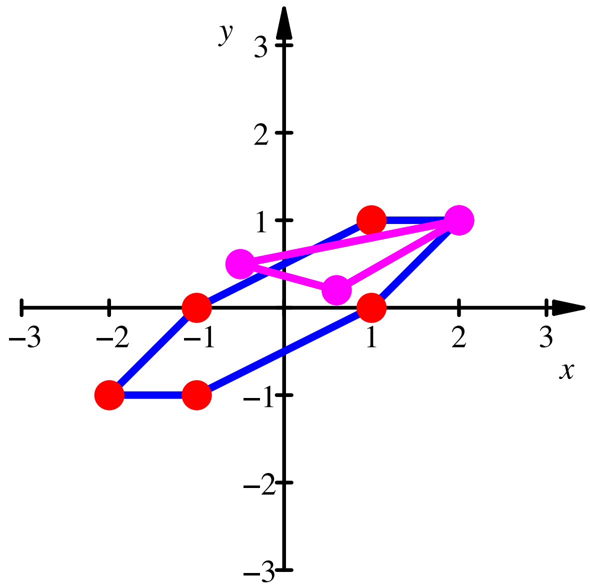


In der Gaußschen Zahlenebene

Für die Quotientenfolge erhalten wir:

```
c[2] = 2 + I
c[3] = 3/5 + 1/5*I
c[4] = - 1/2 + 1/2*I
c[5] = 2 + I
c[6] = 3/5 + 1/5*I
c[7] = - 1/2 + 1/2*I
```

Dies ist in der Gaußschen Zahlenebene magenta eingezeichnet:

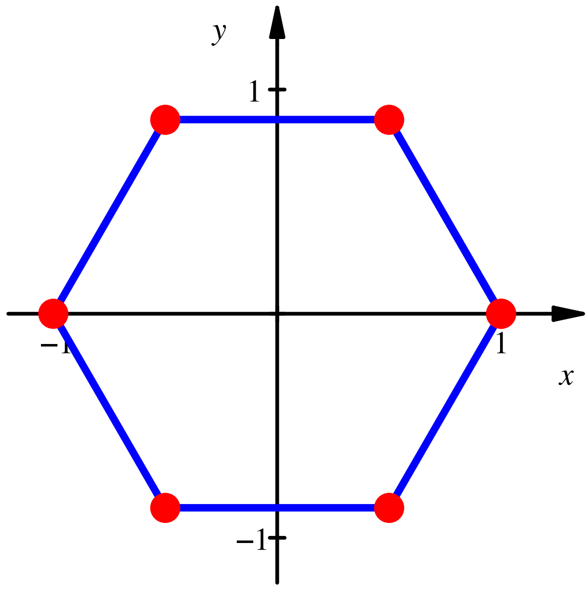


Quotientenfolge

Beispiel2: Für die Startwerte $a_1 = 1$ und $a_2 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$ erhalten wir:

```
a[1] = 1
a[2] = 1/2*I*3^(1/2) + 1/2
a[3] = 1/2*I*3^(1/2) - 1/2
a[4] = -1
a[5] = - 1/2*I*3^(1/2) - 1/2
a[6] = 1/2 - 1/2*I*3^(1/2)
a[7] = 1
a[8] = 1/2*I*3^(1/2) + 1/2
```

In der Gaußschen Zahlenebene ergibt sich das regelmäßige Sechseck.

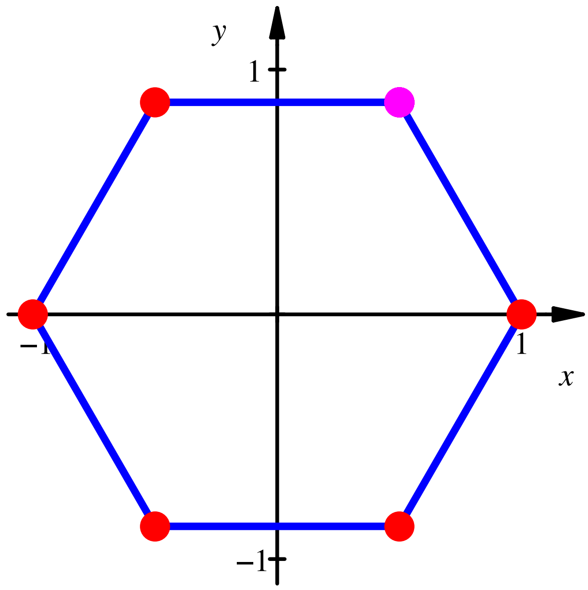


In der Gaußschen Zahlenebene

Warum ist das so?

Die Quotientenfolge ist sogar konstant. Warum?

```
c[2] = 1/2*I*3^(1/2) + 1/2
c[3] = 1/2*I*3^(1/2) + 1/2
c[4] = 1/2*I*3^(1/2) + 1/2
c[5] = 1/2*I*3^(1/2) + 1/2
c[6] = 1/2*I*3^(1/2) + 1/2
c[7] = 1/2*I*3^(1/2) + 1/2
```



Konstante Quotientenfolge

7 Periodische Dezimalbrüche

Gesucht ist die Periode der Dezimaldarstellung folgender Brüche:

a) $\frac{1}{17}$ b) $\frac{1}{19}$ c) $\frac{1}{81}$ d) $\frac{4115}{33333}$

Ergebnis

a) $\frac{1}{17} = 0.\overline{0588235294117647}$ Periodenlänge 16

b) $\frac{1}{19} = 0.\overline{052631578947368421}$ Periodenlänge 18

c) $\frac{1}{81} = 0.\overline{012345679}$ Periodenlänge 9

d) $\frac{4115}{33333} = 0.\overline{12345}$ Periodenlänge 5

8 Periodische Folgen

Gesucht ist die Periodenlänge (in Abhängigkeit eines einstelligen Startwertes) folgender Folgen:

a) $a_{n+1} = \text{Quersumme}(3a_n)$

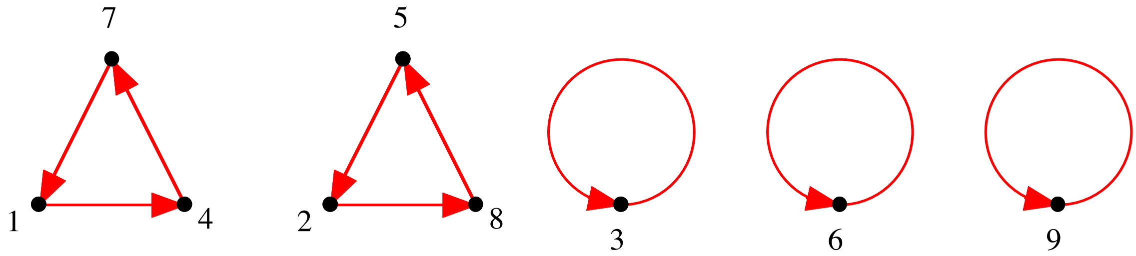
b) $a_{n+1} = \text{Quersumme}(4a_n)$

c) $a_{n+1} = \text{Quersumme}(5a_n)$

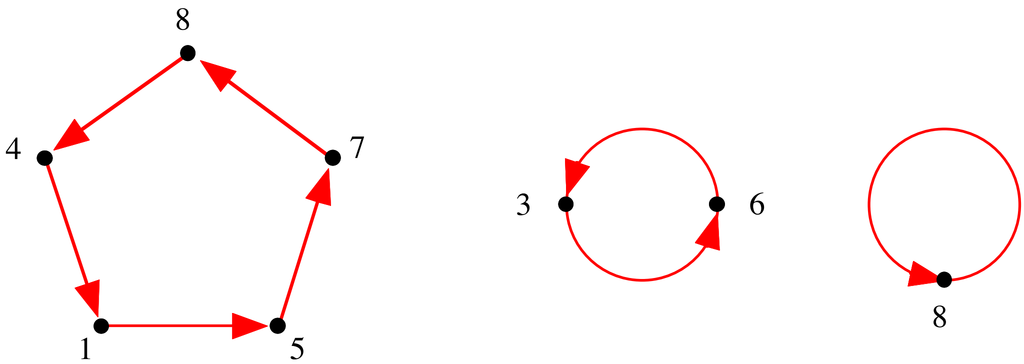
Ergebnis

a) Startwerte 1, 2, ... , 9: Periodenlänge 1, Periode besteht aus Neunen
Startwert 0: Periodenlänge 1, Periode besteht aus Nullen

b)

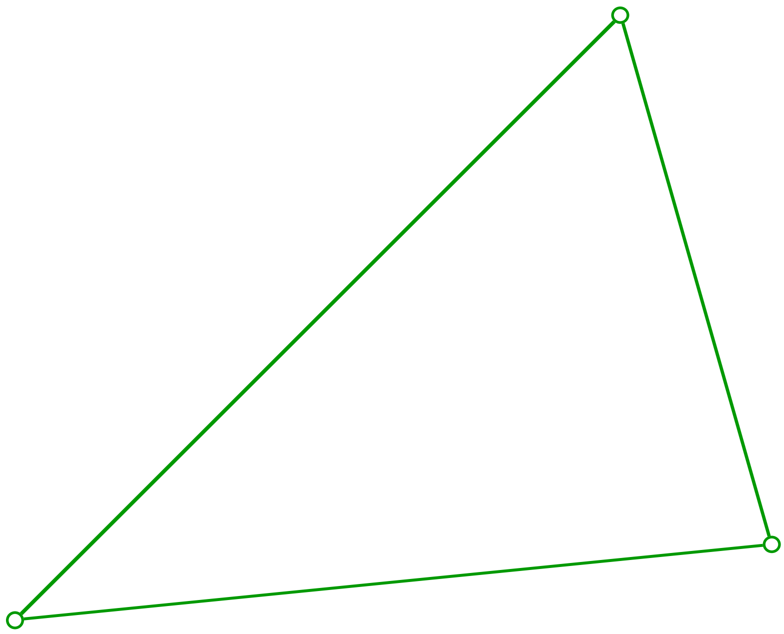


c)



9 Abtragen von Kreisbögen

a) Abtragen von Kreisbögen im Dreieck: Wo muss P_0 gewählt werden, damit bereits $P_3 = P_0$?



Kreisbögen im Dreieck

b) Abtragen von Kreisbögen im Viereck: Ergibt sich auch eine Schließungsfigur? Wenn nein: Gibt es spezielle Vierecke, bei denen sich eine Schließungsfigur ergibt?

Ergebnis

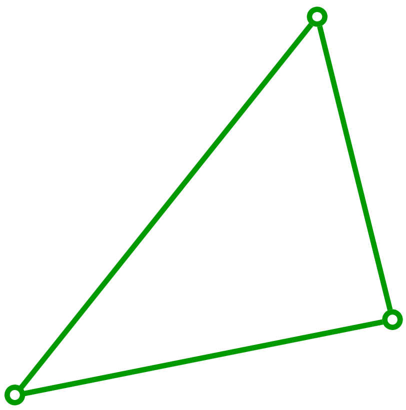
a) P_0 muss ein Berührungspunkt des Inkreises mit einer Dreiecksseite sein.

b) Im allgemeinen Viereck gibt es *keine* Schließungsfigur.
Schließungsfigur $\Leftrightarrow$ Tangentenviereck.

10 Spiegeln an Ecken

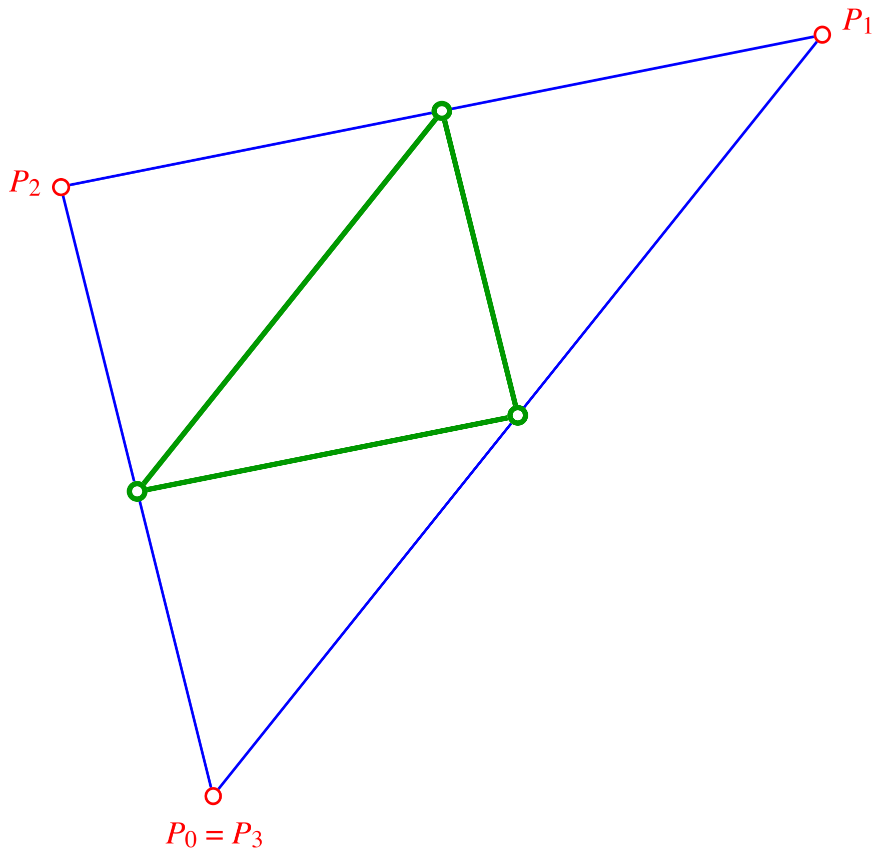
In einem Dreieck wird ein Startpunkt P_0 fortlaufend über die Dreiecksecken gespiegelt. Wir wissen, dass wir dann nach sechs Schritten zum Ausgangspunkt P_0 zurückkommen.

Frage: Wo muss P_0 gewählt werden, damit bereits $P_3 = P_0$?



Spiegeln an Dreiecksecken

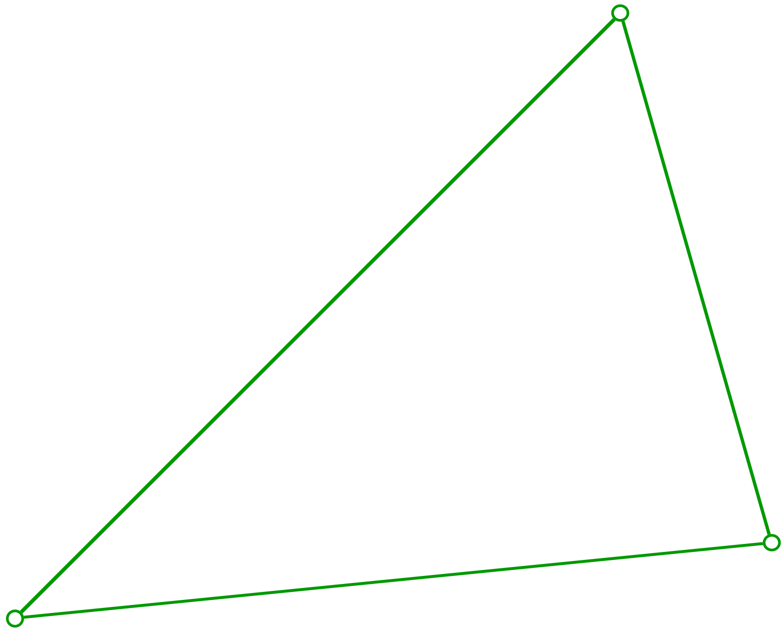
Ergebnis



Ergebnis

11 Parallelen zu den Seiten

Im Dreieck: Wo muss P_0 gewählt werden, damit bereits $P_3 = P_0$?



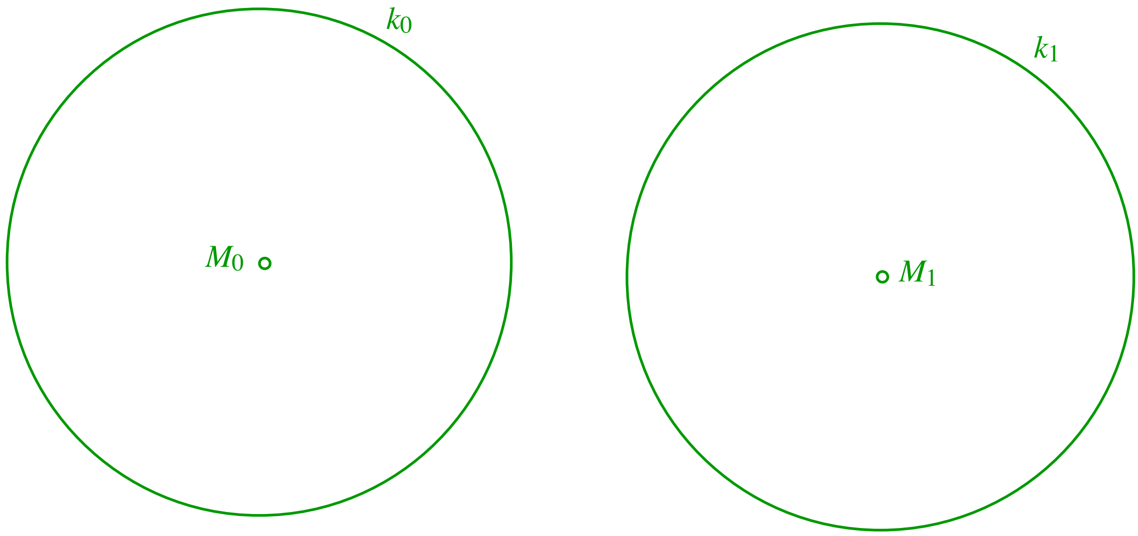
Parallelen zu den Seiten

Ergebnis

Seitenmitte

12 Wechselseitiges Abtragen

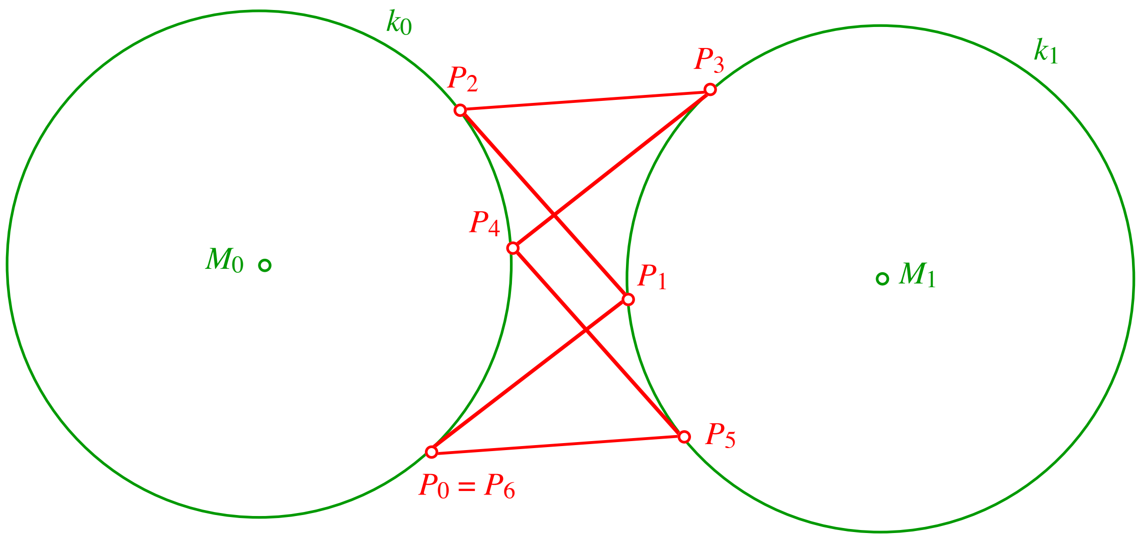
Gegeben sind zwei Kreise k_0 und k_1 mit dem gemeinsamen Radius r. Beginnen Sie mit einem Startpunkt P_0 auf k_0 zeichnen Sie einen Zickzackzug $P_0P_1P_2\ldots$ von Strecken der Länge r, so dass die Punkte P_0, P_1, P_2 und so weiter abwechslungsweise auf den Kreisen k_0 und k_1 liegen. Feststellung? Lässt sich die Feststellung beweisen?



Wechselseitiges Abtragen des Kreisradius

Ergebnis

Es ist $P_6 = P_0$. Die Figur schließt sich.



Schließungsfigur

Wenn wir die Punkte auf den Kreisen mit den zugehörigen Mittelpunkten verbinden, entsteht das Bild eines Spates, bei dem im Bild alle Kanten gleich lang sind. Die Schließungsfigur lässt sich dann mit Parallelitäten beweisen. Das Sechseck $P_0P_1P_2P_3P_4P_5$ ist punktsymmetrisch.

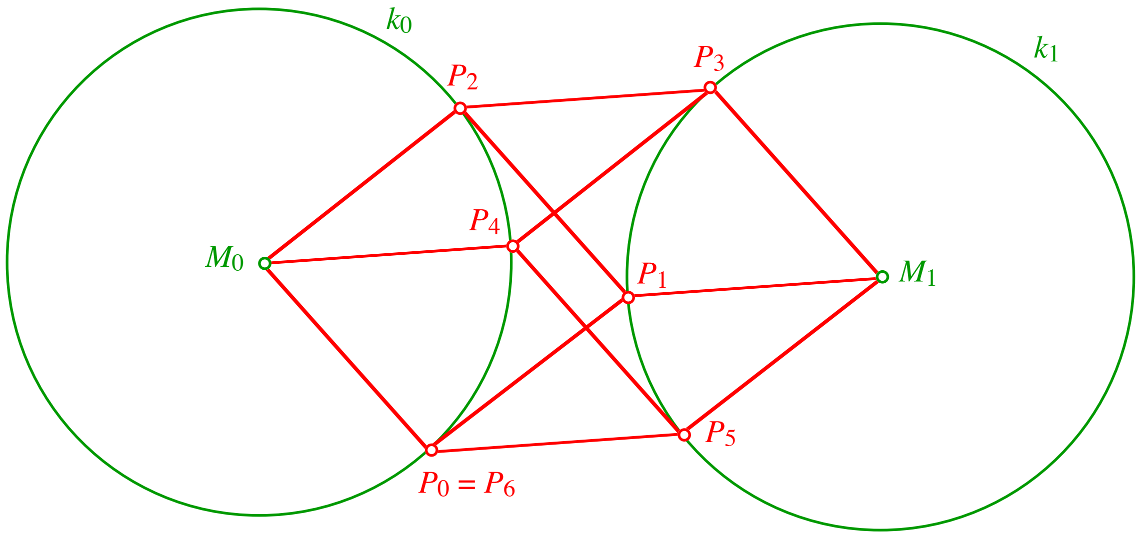


Bild eines Spates