Hans Walser
Mathematik 1 für Naturwissenschaften
Herbstsemester 2013

Übung 5 Ableitung. Sensibilität. Mittelwertsatz

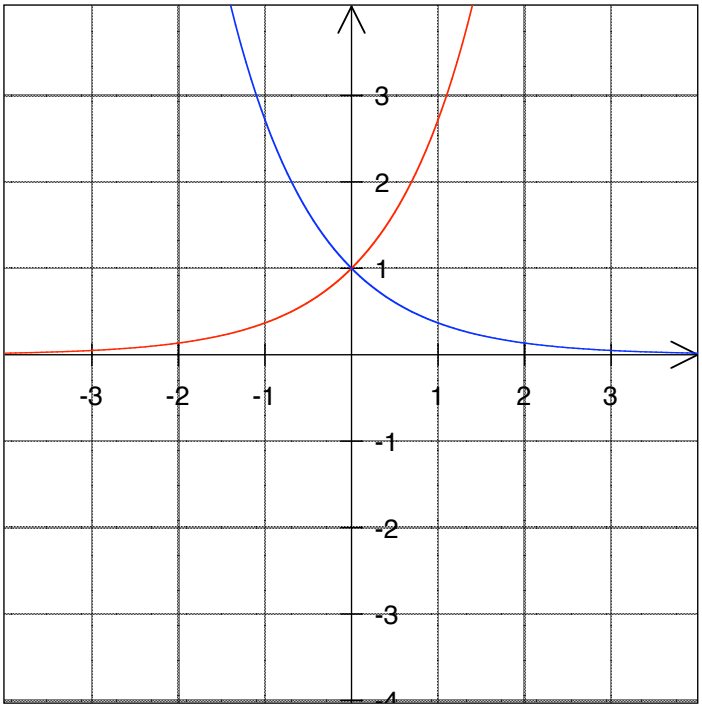
Montag / Dienstag, 21. / 22. Oktober 2013

Aufgabe 5.1 Hyperbelfunktionen

Die Funktionen cosh (”cosinus hyperbolicus” oder ”hyperbolischer Kosinus”) und sinh (”sinus hyperbolicus” oder ”hyperbolischer Sinus”) sind wie folgt definiert:

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \text{und} \quad \sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

a) In der Figur sind die Funktionsgraphen von e^x und e^{-x} eingetragen. Skizzieren Sie dazu die beiden Funktionsgraphen von $\cosh(x)$ und $\sinh(x)$.



Funktionsgraphen von e^x und e^{-x}

Bemerkung: Der Funktionsgraph von $\cosh(x)$ wird als ”Kettenlinie” bezeichnet.

b) Gesucht sind die Ableitungen $\cosh'$ und $\sinh'$. Kommentar?

Aufgabe 5.2 *x* hoch *x*

Gesucht ist die Ableitung der Funktion $y = f(x) = x^x$.

Aufgabe 5.3 Kürzester Weg über die Straße

Der kürzeste Weg über die Straße ist rechtwinklig zum Straßenrand. Warum spielt es praktisch keine Rolle, wenn wir nicht so genau rechtwinklig über die Straße gehen? Beispiel: Die Straße sei 10 m breit. Wie viel länger wird der Weg über die Straße bei einer Abweichung gegenüber dem rechten Winkel von a) 1°, b) 5°?

Aufgabe 5.4 „Null durch Null"

Bestimmen Sie $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x}$ mit Taschenrechner oder Computer.

Aufgabe 5.5 „Null durch Null"

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin(2x)}{\sin(x)}\right) = ?$$

a) mit Additionstheorem

b) mit Bernoulli - de l'Hôpital

Aufgabe 5.6 Bernoulli - de l'Hôpital

$$\lim_{n\to\infty} n\arctan\left(a\tan\left(\frac{\pi}{n}\right)\right) = ?$$

Aufgabe 5.7 Bernoulli - de l'Hôpital

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{x^3}{\sin^2(x)}\right) = ?$$

Aufgabe 5.8 Wer ist stärker?

Es werden keine Beweise verlangt.

a) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2^x}{x^2}\right) =$

b) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^{1000}}{1.001^x}\right) =$

c) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(0.99^x x^{100}\right) =$

d) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{e^x}{\ln(x)}\right) =$

Aufgabe 5.9 Wer ist stärker?

Es werden keine Beweise verlangt.

a) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{e^x}{2^x}\right) =$

b) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{e^x}{3^x}\right) =$

c) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^e}{\ln(x)}\right) =$

d) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{\log_a(x)}{\ln(x)}\right) =$