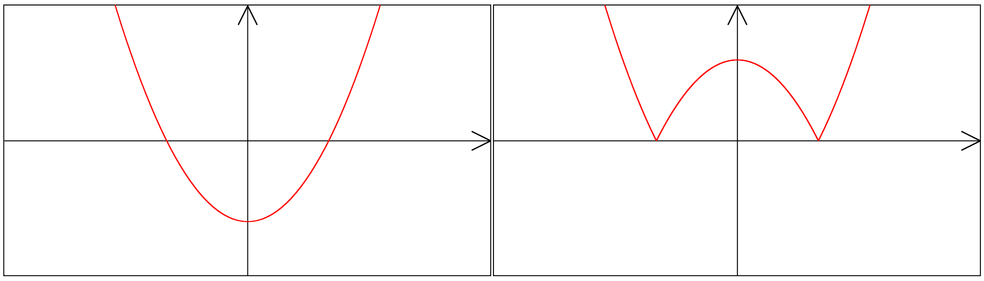
Hans Walser

Mathematik 1 für Naturwissenschaften



Modul 101

Einführung

Lernumgebung Teil 2

Inhalt

Modul 101 für die Lehrveranstaltung: *Mathematik 1 für Naturwissenschaften*

Winter 2003/04 Erstausgabe
Winter 2004/05 Überarbeitung und Erweiterung. Teilweise mit Lösungswegen
Winter 2005/06 Fehlerkorrekturen. Geändertes Layout. Erweiterungen
Winter 2006/07 Erweiterungen. MathType. Unterteilung in 2 Teile. Fehlerkorrekturen
Herbst 2007 Geändertes Layout
Herbst 2008 Erweiterung
Herbst 2009 Fehlerkorrektur

last modified: 2. Oktober 2008

Hans Walser
Mathematisches Institut, Rheinsprung 21, 4051 Basel
www.math.unibas.ch/~walser

1 Where is the flaw?

Behauptung: Alle Zahlen sind gleich.

Beweis: Wir beginnen mit zwei Zahlen *a* und *b*.

Dann ist $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ und $(b-a)^2 = b^2 - 2ba + a^2$.

Da die beiden rechten Seiten gleich sind, sind es auch die beiden linken Seiten, also ist:

$$(a-b)^2 = (b-a)^2$$

Weglassen der Quadrate ergibt:

$$a-b=b-a$$

Wir bringen *a* nach links und *b* nach rechts und erhalten $2a = 2b$ oder $a = b$. $\square$

Kommentar

Aus

$$(a-b)^2 = (b-a)^2$$

folgt lediglich

$$|a-b| = |b-a|$$

2 Intervalle

Sinnvolle Definition für $[a,b)$ und $(a,b]$.

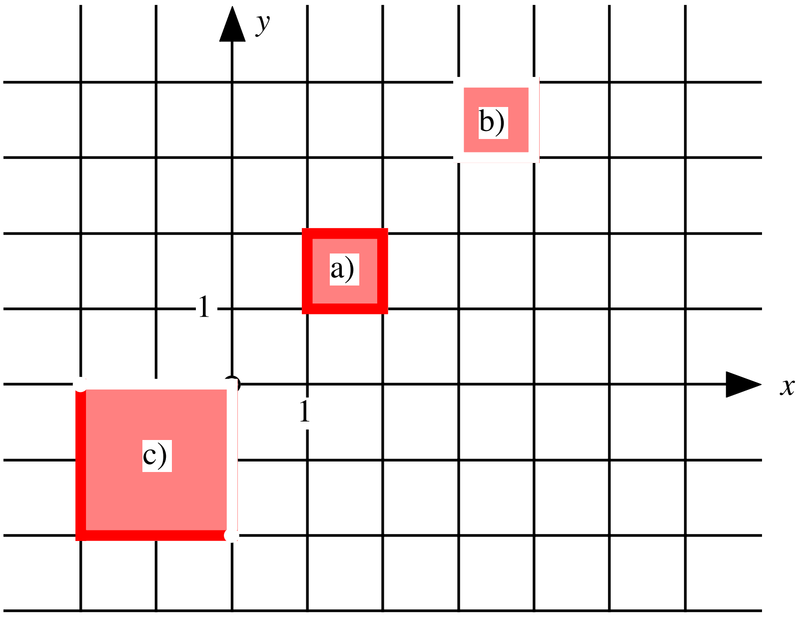
Ergebnis

$[a,b) = \{x | x \in \mathbb{R}, a \leq x < b\}$, $(a,b] = \{x | x \in \mathbb{R}, a < x \leq b\}$

3 Frage der Grenzen

Was ist (Skizze): a) $[1,2]^2$ b) $(3,4)^2$ c) $[-2,0)^2$

Ergebnis



Frage der Grenzen

4 Passendes Symbol

Gesucht ist das passende Symbol (zum Beispiel: $d \notin \{a,b,c\}$)

a	$\{a,b,c\}$	1.5	$[1,3]$	1	$[1,3]$	$[1,2]$	$[1,3]$
$\{a,c\}$	$\{a,b,c,d,e\}$	-1.5	$[1,3]$	1	$[1,3)$	$(1,2)$	$[1,3]$
$\{a,f\}$	$\{a,b,c,d,e\}$	$\sqrt{3}$	$[1,3]$	1	$(1,3)$	$(1,2)$	$(1,3)$
f	$\{a,b,c,d,e\}$	$\left[\sqrt{2},\sqrt{3}\right]$	$[1,3]$	-1	$[1,3]$	$[1,2]$	$(1,3)$
$\{f\}$	$\{a,b,c,d,e\}$	$\left\{\sqrt{2},\sqrt{3}\right\}$	$[1,3]$	$\lvert -1 \rvert$	$[1,3]$	$(1,2]$	$(1,3)$

Ergebnis

$a \in \{a,b,c\}$	$1.5 \in [1,3]$	$1 \in [1,3]$	$[1,2] \subset [1,3]$
$\{a,c\} \subset \{a,b,c,d,e\}$	$-1.5 \notin [1,3]$	$1 \in [1,3)$	$(1,2) \subset [1,3]$
$\{a,f\} \not\subset \{a,b,c,d,e\}$	$\sqrt{3} \in [1,3]$	$1 \notin (1,3)$	$(1,2) \subset (1,3)$
$f \notin \{a,b,c,d,e\}$	$\left[\sqrt{2},\sqrt{3}\right] \subset [1,3]$	$-1 \notin [1,3]$	$[1,2] \not\subset (1,3)$
$\{f\} \not\subset \{a,b,c,d,e\}$	$\left\{\sqrt{2},\sqrt{3}\right\} \subset [1,3]$	$\lvert -1 \rvert \in [1,3]$	$(1,2] \subset (1,3)$

5 Mengen

Wie viele Elemente enthalten die folgenden Mengen:

a) $A = \{\ \}$

b) $B = \{\{\ \}\}$

c) $C = \{\{\ \},\{\{\ \}\}\}$

d) $D = \{\{\ \},\{\{\ \}\},\{\{\ \},\{\{\ \}\}\}\}$

Ergebnis

a) 0 b) 1 c) 2 d) 3

6 Zahlmengen

Gesucht ist das passende Symbol (zum Beispiel: $\pi \notin \mathbb{Z}$)

$5 \quad \mathbb{N}$	$5 \quad \mathbb{Z}$	$5 \quad \mathbb{Q}$	$5 \quad \mathbb{R}$
$-5 \quad \mathbb{N}$	$-5 \quad \mathbb{Z}$	$-5 \quad \mathbb{Q}$	$-5 \quad \mathbb{R}$
$-\frac{1}{5} \quad \mathbb{N}$	$-\frac{1}{5} \quad \mathbb{Z}$	$-\frac{1}{5} \quad \mathbb{Q}$	$-\frac{1}{5} \quad \mathbb{R}$
$\sqrt{5} \quad \mathbb{N}$	$\sqrt{5} \quad \mathbb{Z}$	$\sqrt{5} \quad \mathbb{Q}$	$\sqrt{5} \quad \mathbb{R}$
$\sqrt{-5} \quad \mathbb{N}$	$\sqrt{-5} \quad \mathbb{Z}$	$\sqrt{-5} \quad \mathbb{Q}$	$\sqrt{-5} \quad \mathbb{R}$

Ergebnis

$5 \in \mathbb{N}$	$5 \in \mathbb{Z}$	$5 \in \mathbb{Q}$	$5 \in \mathbb{R}$
$-5 \notin \mathbb{N}$	$-5 \in \mathbb{Z}$	$-5 \in \mathbb{Q}$	$-5 \in \mathbb{R}$
$-\frac{1}{5} \notin \mathbb{N}$	$-\frac{1}{5} \notin \mathbb{Z}$	$-\frac{1}{5} \in \mathbb{Q}$	$-\frac{1}{5} \in \mathbb{R}$
$\sqrt{5} \notin \mathbb{N}$	$\sqrt{5} \notin \mathbb{Z}$	$\sqrt{5} \notin \mathbb{Q}$	$\sqrt{5} \in \mathbb{R}$
$\sqrt{-5} \notin \mathbb{N}$	$\sqrt{-5} \notin \mathbb{Z}$	$\sqrt{-5} \notin \mathbb{Q}$	$\sqrt{-5} \notin \mathbb{R}$

7 Zahlmengen

Gesucht ist das passende Symbol (zum Beispiel: $\pi \notin \mathbb{Z}$)

$37 \quad \mathbb{N}$	$37 \quad \mathbb{Z}$	$37 \quad \mathbb{Q}$	$37 \quad \mathbb{R}$
$-37 \quad \mathbb{N}$	$-37 \quad \mathbb{Z}$	$-37 \quad \mathbb{Q}$	$-37 \quad \mathbb{R}$
$-\frac{1}{37} \quad \mathbb{N}$	$-\frac{1}{37} \quad \mathbb{Z}$	$-\frac{1}{37} \quad \mathbb{Q}$	$-\frac{1}{37} \quad \mathbb{R}$
$\sqrt{37} \quad \mathbb{N}$	$\sqrt{37} \quad \mathbb{Z}$	$\sqrt{37} \quad \mathbb{Q}$	$\sqrt{37} \quad \mathbb{R}$
$\sqrt{-37} \quad \mathbb{N}$	$\sqrt{-37} \quad \mathbb{Z}$	$\sqrt{-37} \quad \mathbb{Q}$	$\sqrt{-37} \quad \mathbb{R}$

Ergebnis

$37 \in \mathbb{N}$	$37 \in \mathbb{Z}$	$37 \in \mathbb{Q}$	$37 \in \mathbb{R}$
$-37 \notin \mathbb{N}$	$-37 \in \mathbb{Z}$	$-37 \in \mathbb{Q}$	$-37 \in \mathbb{R}$
$-\frac{1}{37} \notin \mathbb{N}$	$-\frac{1}{37} \notin \mathbb{Z}$	$-\frac{1}{37} \in \mathbb{Q}$	$-\frac{1}{37} \in \mathbb{R}$
$\sqrt{37} \notin \mathbb{N}$	$\sqrt{37} \notin \mathbb{Z}$	$\sqrt{37} \notin \mathbb{Q}$	$\sqrt{37} \in \mathbb{R}$
$\sqrt{-37} \notin \mathbb{N}$	$\sqrt{-37} \notin \mathbb{Z}$	$\sqrt{-37} \notin \mathbb{Q}$	$\sqrt{-37} \notin \mathbb{R}$

8 Passendes Symbol

Gesucht ist das passende Symbol (zum Beispiel: $d \quad \notin \quad \{a,b,c\}$)

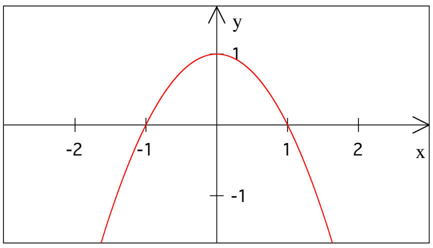
a	$\{a,b,c\}$	-1.5	$[-3,-1]$	-3	$[1,3]$	$[-1,7]$	$(-1,4)$
$\{a,h\}$	$\{a,b,c,d,e\}$	-1.5	$[1,3]$	$\lvert -3 \rvert$	$[1,3]$	$(-1,4)$	$[-1,7]$
$\{a,c\}$	$\{a,b,d,e\}$	$\sqrt{5}$	$[1,3]$	3	$(1,3)$	$[-1,4]$	$(-1,7)$
$[a,c]$	$\{a,b,c,d,e\}$	$\sqrt{9}$	$[1,3]$	1	$[1,3)$	$[-1,4)$	$[-1,7]$
p	$\{a,b,c,d,e\}$	$\sqrt{9}$	$(1,3)$	1	$(1,3]$	$[-1,4)$	$(-1,7]$

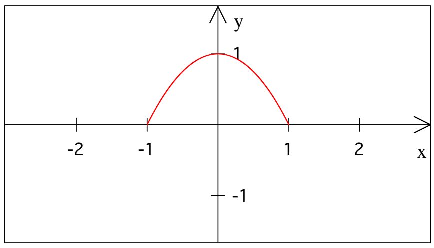
Ergebnis

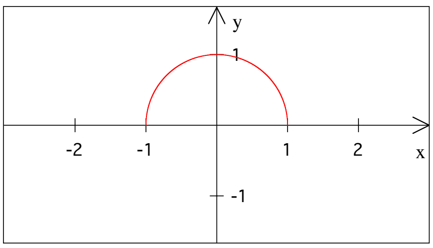
$a \in \{a,b,c\}$	$-1.5 \in [-3,-1]$	$-3 \notin [1,3]$	$[-1,7] \not\subset (-1,4)$
$\{a,h\} \not\subset \{a,b,c,d,e\}$	$-1.5 \notin [1,3]$	$\lvert -3 \rvert \in [1,3]$	$(-1,4) \subset [-1,7]$
$\{a,c\} \not\subset \{a,b,d,e\}$	$\sqrt{5} \in [1,3]$	$3 \notin (1,3)$	$[-1,4] \not\subset (-1,7)$
$[a,c] \subset \{a,b,c,d,e\}$	$\sqrt{9} \in [1,3]$	$1 \in [1,3)$	$[-1,4) \subset [-1,7]$
$p \notin \{a,b,c,d,e\}$	$\sqrt{9} \notin (1,3)$	$1 \notin (1,3]$	$[-1,4) \not\subset (-1,7]$

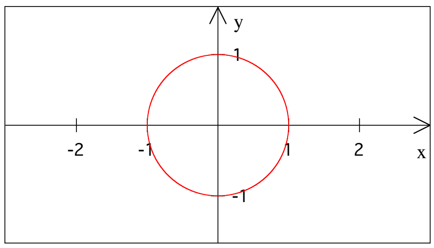
9 Passende Funktion gesucht

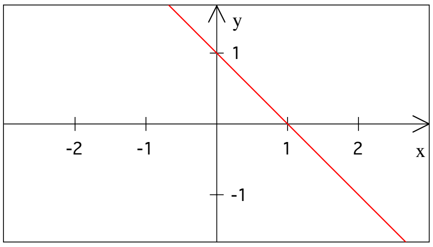
Geben Sie jeweils den Definitionsbereich A und die Funktionsvorschrift $y = f(x)$ an. Die waagrechte Achse ist die x-Achse.

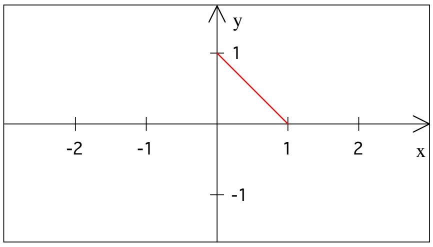
a)


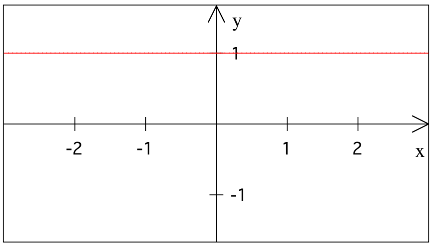
b)


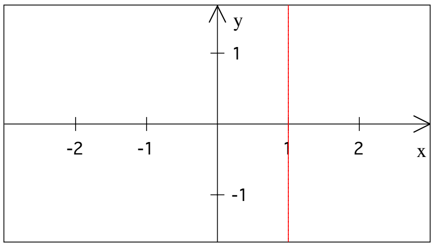
c)


d)


e)


f)


g)


h)


Ergebnis

a) $y = 1 - x^2, \quad A = \mathbb{R}$

b) $y = 1 - x^2, \quad A = [-1,1]$

c) $y = \sqrt{1 - x^2}, \quad A = [-1,1]$

d) Keine Funktion

e) $y = 1 - x, \quad A = \mathbb{R}$

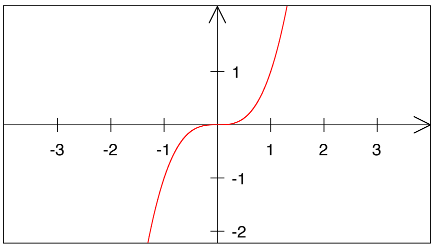
f) $y = 1 - x, \quad A = [0,1]$

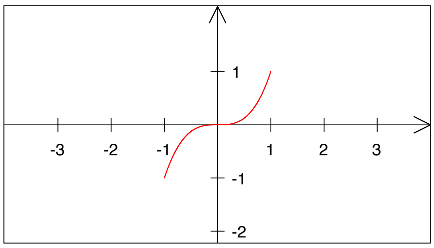
g) $y = 1, \quad A = \mathbb{R}$

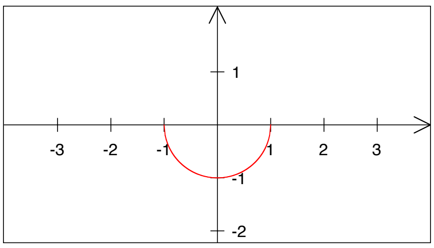
h) Keine Funktion

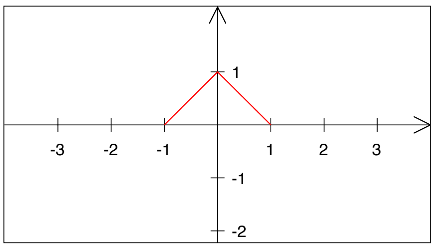
10 Passende Funktion gesucht

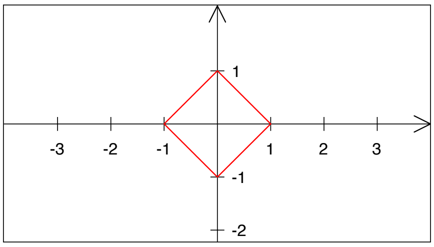
Geben Sie jeweils den Definitionsbereich A und die Funktionsvorschrift $y = f(x)$ an. Die waagrechte Achse ist die x-Achse.

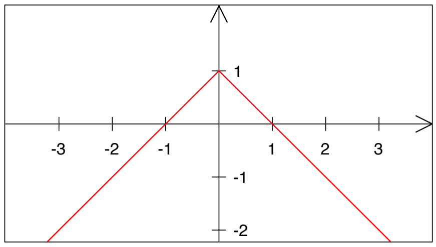
a)


b)


c)


d)


e) 

f) 

Ergebnis

a) $y = f(x) = x^3 \quad A = \mathbb{R}$

b) $y = f(x) = x^3 \quad A = [-1,1]$

c) $y = f(x) = -\sqrt{1-x^2} \quad A = [-1,1]$

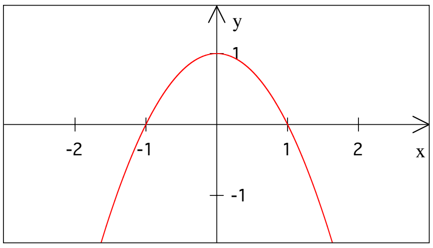
d) $y = f(x) = 1-|x| \quad A = [-1,1]$

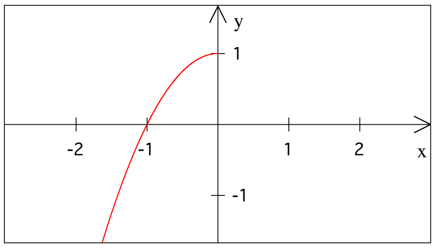
e) Keine Funktion

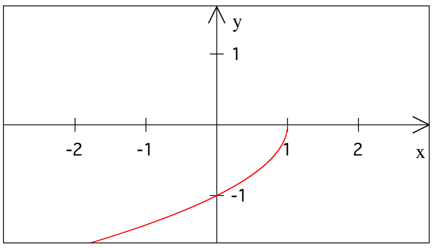
f) $y = f(x) = 1-|x| \quad A = \mathbb{R}$

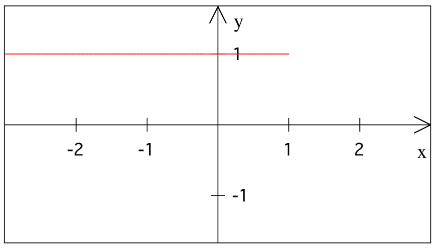
11 Umkehrfunktion

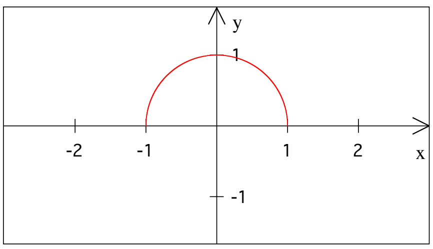
Welche Funktionen sind umkehrbar? Falls umkehrbar: Beschreibung und Skizze des Graphen der Umkehrfunktion.

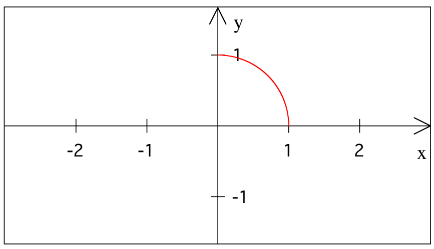
a) 

b) 

c) 

d) 

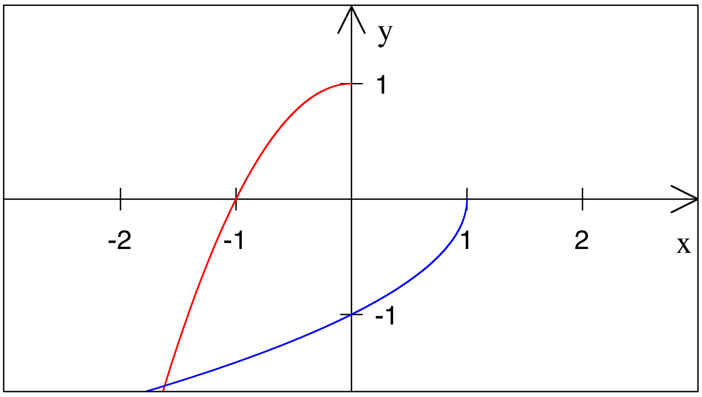
e) 

f) 

Ergebnis

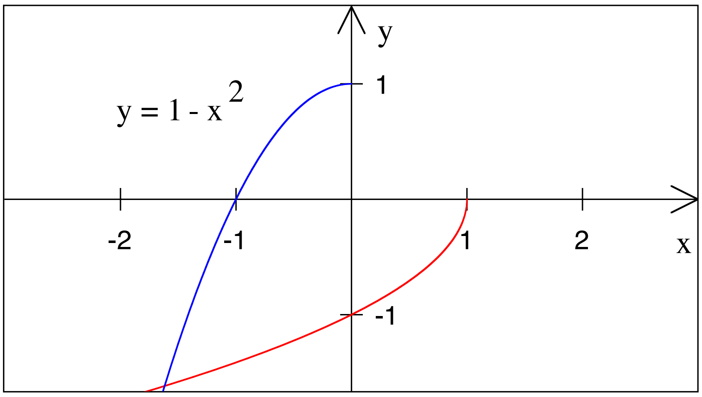
a) Nicht umkehrbar

b) $A = (-\infty, 1]$; $y = -\sqrt{1-x}$



Funktion und Umkehrfunktion

c) $A = (-\infty, 0]$; $y = 1 - x^2$



Funktion und Umkehrfunktion

d) Nicht umkehrbar

e) Nicht umkehrbar

f) $A = [0,1]$ $y = \sqrt{1-x^2}$ (Derselbe Graph wie die Funktion selber)

12 Exponentielles Wachstum

a) Eine Population wächst pro Zeiteinheit um 10%. Wie groß ist die Verdoppelungszeit?

b) Eine Population nimmt pro Zeiteinheit um 10% ab. Wie groß ist die Halbierungszeit?

Ergebnis

a) $x = \frac{\ln(2)}{\ln(1.1)} \approx 7.27$

b) $x = \frac{\ln(0.5)}{\ln(0.9)} \approx 6.58$

13 Zwei Schreibweisen

Zwei Schreibweisen für dieselbe Funktion:

$$N(t) = N(0)\,\mathrm{e}^{kt}$$

$$N(t) = N(0)\left(1 + \tfrac{p}{100}\right)^t$$

Wie hängen k und p zusammen?

a) $k(p) = ?$

b) $p(k) = ?$

Ergebnis

a) $k(p) = \ln\left(1 + \tfrac{p}{100}\right)$

b) $p(k) = 100\mathrm{e}^k - 100$

14 Funktionen

Kann ein Kreis ein Funktionsgraph sein? Welcher Kreisteil kann Funktionsgraph sein? Geben Sie die dazu passende Funktionsvorschrift. Wie viele Lösungen gibt es zu diesem Problem?

Ergebnis

Offene Aufgabe. Der Kreis kann kein Funktionsgraph sein. Unendlich viele Lösungen. Bsp.: Oberer Halbkreis

15 Lineare Funktion

a) Es sei $f(x) = -\tfrac{1}{3}x + 7$. Wie lautet ihre Umkehrfunktion?

b) Eine lineare Funktion habe die Steigung a. Wie groß ist die Steigung ihrer Umkehrfunktion?

c) Eine lineare Funktion $f(x) = ax + b$ habe den y-Achsenabschnitt b. Wie groß ist der y-Achsenabschnitt ihrer Umkehrfunktion?

d) Eine lineare Funktion habe den y-Achsenabschnitt b. Wie groß ist der x-Achsenabschnitt ihrer Umkehrfunktion?

Ergebnis

a) $f^{-1}(x) = -3x + 21$

b) Steigung $\frac{1}{a}$

c) y-Achsenabschnitt = $-\frac{b}{a}$ (a ist die Steigung)

d) b

16 Quadratische Funktion

a) Bestimmen Sie Scheitelpunkt und Symmetrieachse der Parabel
$y = f(x) = x^2 - 8x + 13$.

b) Bestimmen Sie Scheitelpunkt und Symmetrieachse der Parabel
$y = f(x) = (x-4)^2 - 3$.

c) Kommentar?

d) Wo ist der Scheitelpunkt der Parabel $y = f(x) = x^2 - 2px + q$

Ergebnis

a) Scheitelpunkt (4, –3), Symmetrieachse: $x = 4$

b) Scheitelpunkt (4, –3), Symmetrieachse: $x = 4$

c) Zweimal dieselbe Parabel

d) Scheitelpunkt $\left(p, -p^2 + q\right)$

17 Nullstellen

a) Welche Nullstellen hat die Polynomfunktion dritten Grades:
$f(x) = (x+1)(x+2)(x+3)$

b) Welche Nullstellen hat die Polynomfunktion dritten Grades: $f(x) = \left(x^2 + 1\right)(x+2)$

Ergebnis

a) $\{-1, -2, -3\}$

b) –2 (nur eine reelle Nullstelle)

18 Der kleine Unterschied

Es sei $f(x)=x^2$ mit dem Definitionsbereich $A=[0,\infty[$. Was ist nun

a) $\left(f(9)\right)^{-1}$ b) $f^{[-1]}(9)$ c) $\left(f(s)\right)^{-1}$ d) $f^{[-1]}(s)$

Ergebnis

a) $\left(f(9)\right)^{-1}=\frac{1}{81}$ b) $f^{[-1]}(9)=3$

c) $\left(f(s)\right)^{-1}=s^{-2}$ d) $f^{[-1]}(s)=\sqrt{s}$ falls $s\geq 0$

19 Vereinfachung?

a) $\sqrt[3]{\left(\frac{1}{\sqrt{a}}\right)^7}$ b) $\left(\frac{c^3}{\sqrt[3]{c^{-12}}}\right)^2$ c) $d^{\frac{-3}{2}}-\sqrt{\frac{1}{d^3}}$ d) $\left(2^2\right)^3-2^{\left(2^3\right)}$

Ergebnis

a) $\sqrt[3]{\left(\frac{1}{\sqrt{a}}\right)^7}=a^{-\frac{7}{6}}$ b) $\left(\frac{c^3}{\sqrt[3]{c^{-12}}}\right)^2=c^{14}$

c) $d^{\frac{-3}{2}}-\sqrt{\frac{1}{d^3}}=0$ d) $\left(2^2\right)^3-2^{\left(2^3\right)}=-192$

20 Spiel mit Potenzen

a) $1^{2^3}=$ b) $2^{3^1}=$ c) $3^{1^2}=$

d) $1^{3^2}=$ e) $3^{2^1}=$ f) $2^{1^3}=$

Ergebnis

a) $1^{2^3}=1$ b) $2^{3^1}=8$ c) $3^{1^2}=3$

d) $1^{3^2}=1$ e) $3^{2^1}=9$ f) $2^{1^3}=2$

Lösungsweg

a) $1^{2^3}=1^8=1$ b) $2^{3^1}=2^3=8$ c) $3^{1^2}=3^1=3$

d) $1^{3^2}=1^9=1$ e) $3^{2^1}=3^2=9$ f) $2^{1^3}=2^1=2$

21 Hoch-hoch

a) $2^{2^{2^2}} =$ b) $2^{\left(2^2\right)^2} =$

c) $\left(\left(2^2\right)^2\right)^2 =$ d) $\left(2^2\right)^{\left(2^2\right)} =$

Ergebnis

a) $2^{2^{2^2}} = 65536$ b) $2^{\left(2^2\right)^2} = 65536$

c) $\left(\left(2^2\right)^2\right)^2 = 256$ d) $\left(2^2\right)^{\left(2^2\right)} = 256$

Lösungsweg

a) $2^{2^{2^2}} = 2^{2^4} = 2^{16} = 65536$ b) $2^{\left(2^2\right)^2} = 2^{4^2} = 2^{16} = 65536$

c) $\left(\left(2^2\right)^2\right)^2 = \left(4^2\right)^2 = 16^2 = 256$ d) $\left(2^2\right)^{\left(2^2\right)} = 4^4 = 256$

22 Hoch-hoch

a) $2^{2^{2^3}} =$ b) $2^{\left(2^2\right)^3} =$

c) $\left(\left(2^2\right)^2\right)^3 =$ d) $\left(2^2\right)^{\left(2^3\right)} =$

Ergebnis

a) $2^{2^{2^3}} = 1.158 \cdot 10^{77}$ b) $2^{\left(2^2\right)^3} = 1.845 \cdot 10^{19}$

c) $\left(\left(2^2\right)^2\right)^3 = 4096$ d) $\left(2^2\right)^{\left(2^3\right)} = 65536$

Lösungsweg

a) $2^{2^{2^3}} = 2^{2^8} = 2^{256} \approx 1.158 \cdot 10^{77}$ b) $2^{\left(2^2\right)^3} = 2^{4^3} = 2^{64} \approx 1.845 \cdot 10^{19}$

c) $\left(\left(2^2\right)^2\right)^3 = \left(4^2\right)^3 = 16^3 = 4096$ d) $\left(2^2\right)^{\left(2^3\right)} = 4^8 = 65536$

23 Hoch-hoch

a) $2^{1^{2^1}} =$ b) $2^{\left(1^2\right)^1} =$

c) $\left(\left(2^1\right)^2\right)^1 =$ d) $\left(2^1\right)^{\left(2^1\right)} =$

Ergebnis

a) $2^{1^{2^1}} = 2$ b) $2^{\left(1^2\right)^1} = 2$

c) $\left(\left(2^1\right)^2\right)^1 = 4$ d) $\left(2^1\right)^{\left(2^1\right)} = 4$

Lösungsweg

a) $2^{1^{2^1}} = 2^{1^2} = 2^1 = 2$ b) $2^{\left(1^2\right)^1} = 2^{1^1} = 2^1 = 2$

c) $\left(\left(2^1\right)^2\right)^1 = \left(2^2\right)^1 = 4^1 = 4$ d) $\left(2^1\right)^{\left(2^1\right)} = 2^2 = 4$

24 Noch höher

Wie kann das ohne Klammern geschrieben werden:

$\left(a^b\right)^{\left(c^d\right)} =$ $\left(\left(a^b\right)^c\right)^d =$ $a^{\left(b^{\left(c^d\right)}\right)} =$

$\left(a^{b^c}\right)^d =$ $a^{\left(b^c\right)^d} =$ $\left(a^{\left(b^c\right)}\right)^d =$

Ergebnis

$\left(a^b\right)^{\left(c^d\right)} = a^{bc^d}$ $\left(\left(a^b\right)^c\right)^d = a^{bcd}$ $a^{\left(b^{\left(c^d\right)}\right)} = a^{b^{c^d}}$

$\left(a^{b^c}\right)^d = a^{b^c d}$ $a^{\left(b^c\right)^d} = a^{b^{cd}}$ $\left(a^{\left(b^c\right)}\right)^d = a^{b^c d}$