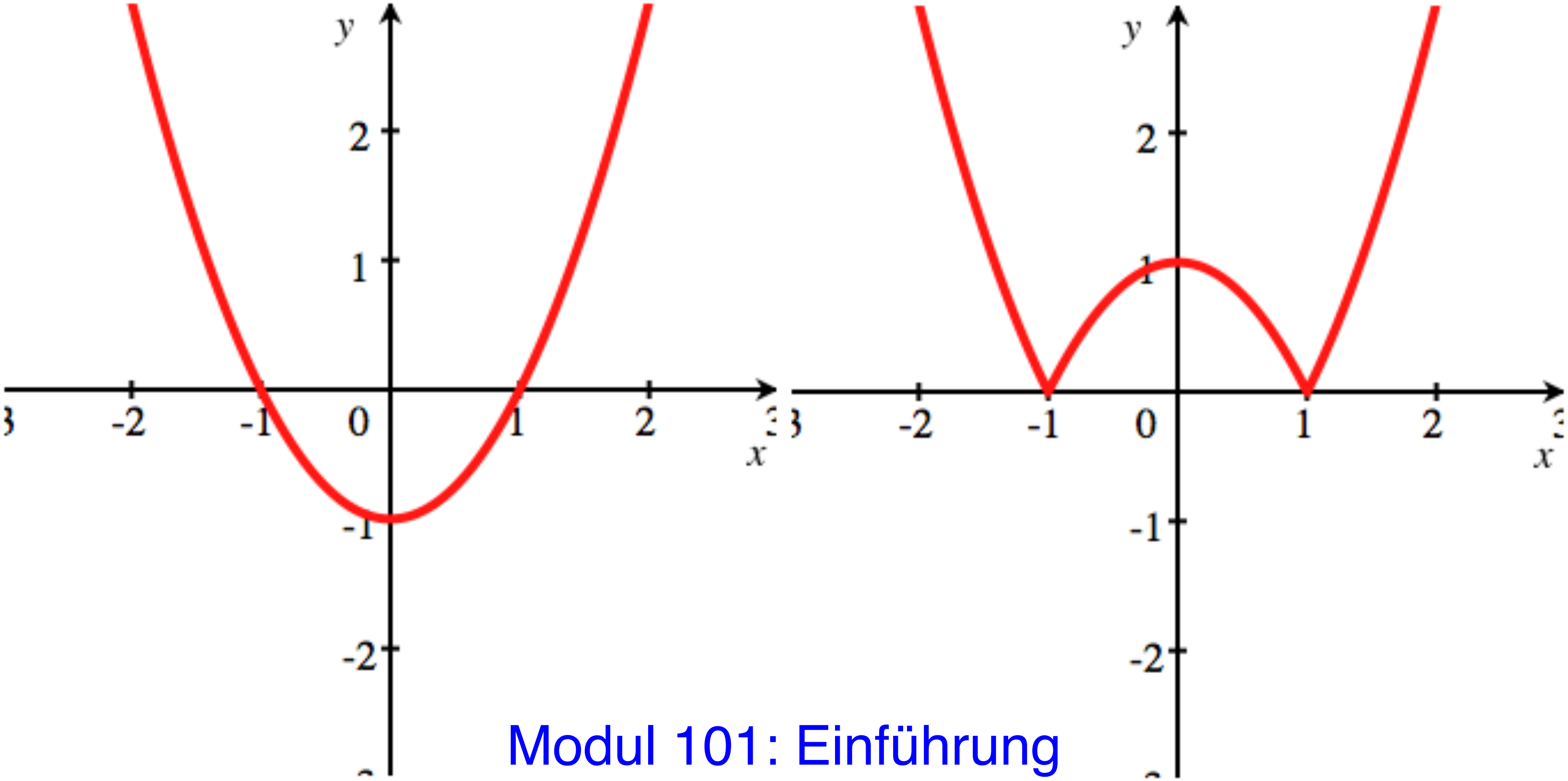


Modul 101: Einführung

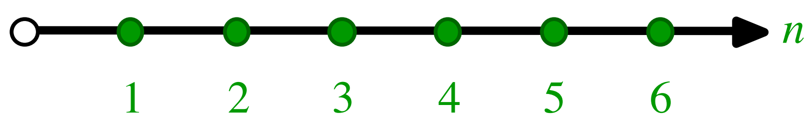
Einführung

- Zahlen und Zahlmengen
- Symbole
- Funktionen
- Umkehrfunktion

Zahlmengen: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$

Zahlmengen: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$

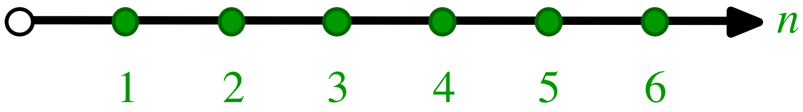
$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, ...\}$



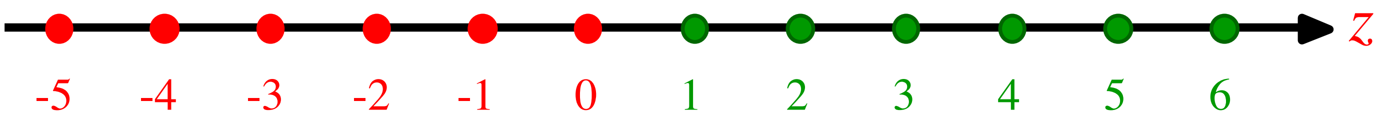
Die natürlichen Zahlen sind von Gott gemacht,
alles andere ist Teufelswerk.

Zahlmengen: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$$

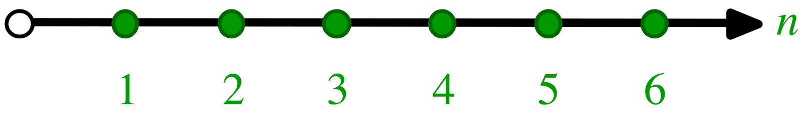


$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$$

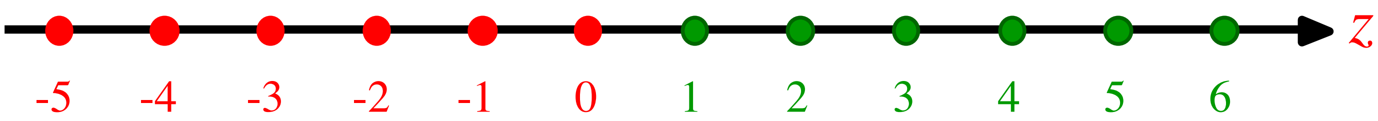


Zahlmengen: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, ...\}$



$\mathbb{Z} = \{..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$



$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \,\middle|\, p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N} \right\}$

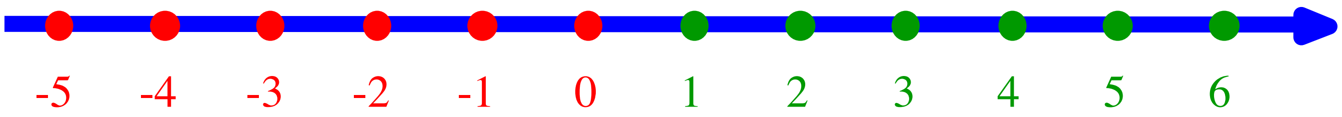
Zeichnung für $\mathbb{Q}$?

$\mathbb{Q}$uotient

Zahlmengen: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \,\middle|\, p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N} \right\}$$

Zeichnung für $\mathbb{Q}$?

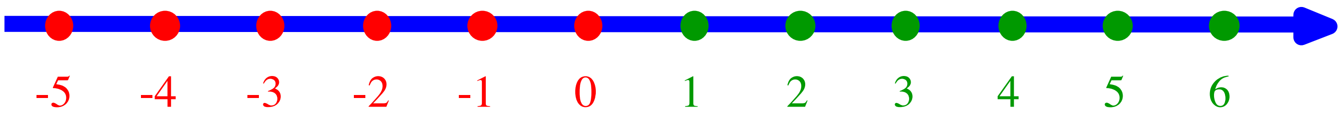


Zahlengerade?

Zahlmengen: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \,\middle|\, p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N} \right\}$$

Zeichnung für $\mathbb{Q}$?



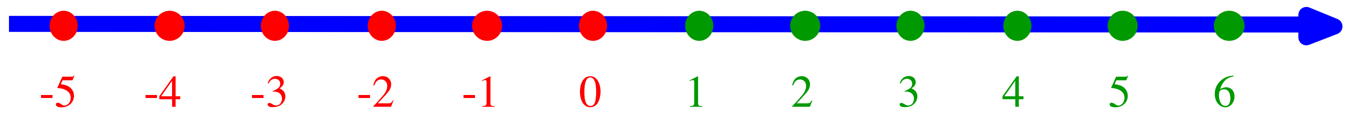
Wo liegen die rationalen Zahlen?

- In jedem Dorf gibt es welche, selbst in Hinterkleinlützelheim.

Zahlmengen: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$

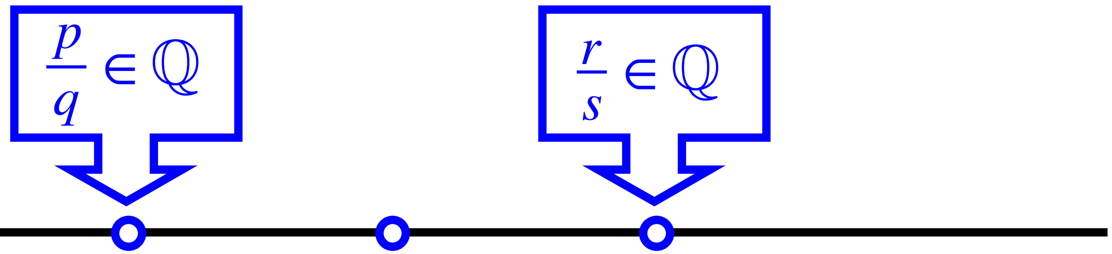
$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \,\middle|\, p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N} \right\}$$

Zeichnung für $\mathbb{Q}$?



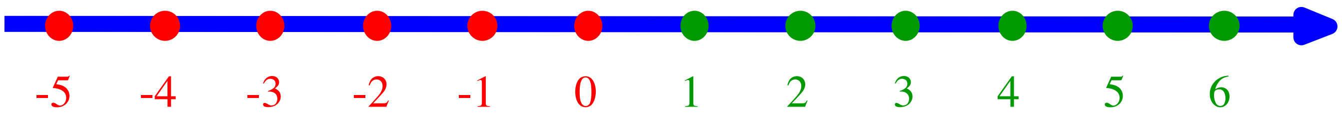
Wo liegen die rationalen Zahlen?

- In jedem Dorf gibt es welche, selbst in Hinterkleinlützelheim.



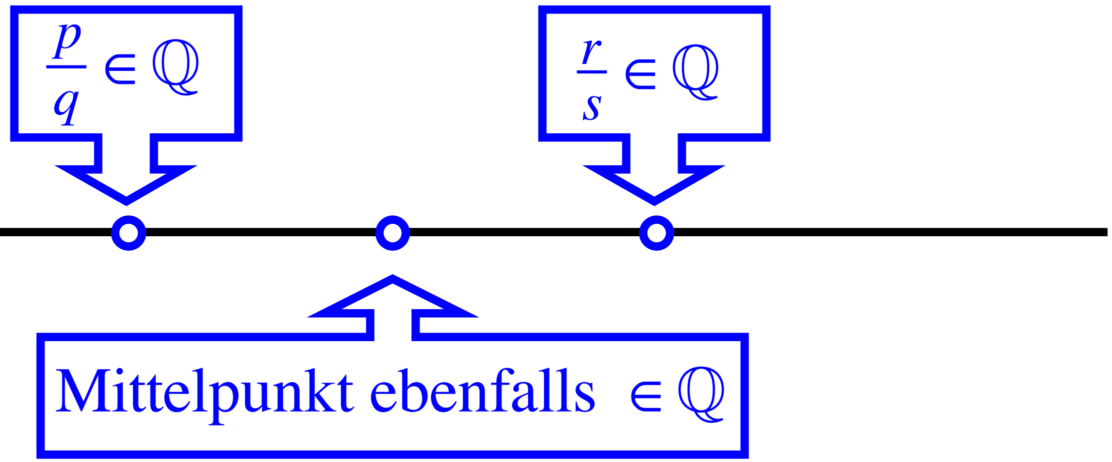
Zahlmengen: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$

$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \,\middle|\, p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N} \right\}$ Zeichnung für $\mathbb{Q}$?



Wo liegen die rationalen Zahlen?

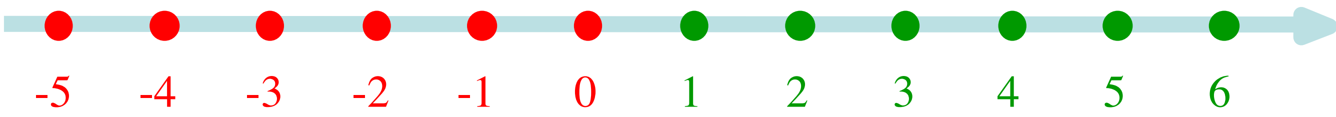
- In jedem Dorf gibt es welche, selbst in Hinterkleinlützelheim.



Zahlmengen: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \,\middle|\, p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N} \right\}$$

Zeichnung für $\mathbb{Q}$?



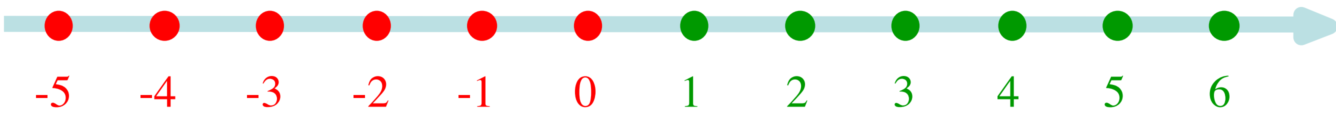
Wo liegen die rationalen Zahlen?

- In jedem Dorf gibt es welche, selbst in Hinterkleinlützelheim.
- Es gibt aber noch viel mehr nicht rationale (irrationale) Zahlen.

Zahlmengen: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$

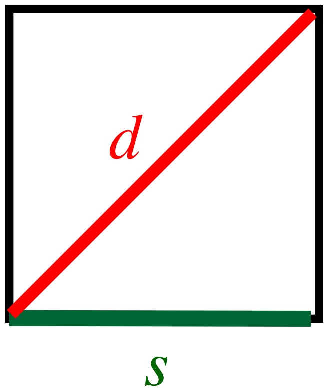
$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \,\middle|\, p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N} \right\}$$

Zeichnung für $\mathbb{Q}$?



Wo liegen die rationalen Zahlen?

- In jedem Dorf gibt es welche, selbst in Hinterkleinlützelheim.
- Es gibt aber noch viel mehr nicht rationale (irrationale) Zahlen.



$d = s\sqrt{2}$; $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ (irrationale Zahl) $\sqrt{2} \in \mathbb{R}$

Zahlmengen: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$

$\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ (irrationale Zahl) $\sqrt{2} \in \mathbb{R}$

Zahlmengen: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$

$\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ (irrationale Zahl) $\sqrt{2} \in \mathbb{R}$

Indirekter Beweis: Gegenteil führt zu Widerspruch

Zahlmengen: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$

$\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ (irrationale Zahl) $\sqrt{2} \in \mathbb{R}$

Indirekter Beweis: Gegenteil führt zu Widerspruch

Annahme $\sqrt{2} = \dfrac{p}{q}$ d.h. $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$

Zahlmengen: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$

$\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ (irrationale Zahl) $\sqrt{2} \in \mathbb{R}$

Indirekter Beweis: Gegenteil führt zu Widerspruch

Annahme $\sqrt{2} = \dfrac{p}{q}$ d.h. $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$

$q\sqrt{2} = p$ mal q

Zahlmengen: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$

$\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ (irrationale Zahl) $\sqrt{2} \in \mathbb{R}$

Indirekter Beweis: Gegenteil führt zu Widerspruch

Annahme $\sqrt{2} = \dfrac{p}{q}$ d.h. $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$

$q\sqrt{2} = p$ mal q

$q^2 2 = p^2$ quadrieren

Zahlmengen: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$

$\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ (irrationale Zahl) $\sqrt{2} \in \mathbb{R}$

Indirekter Beweis: Gegenteil führt zu Widerspruch

Annahme $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ d.h. $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$

$q\sqrt{2} = p$ mal q

$q^2 2 = p^2$ quadrieren

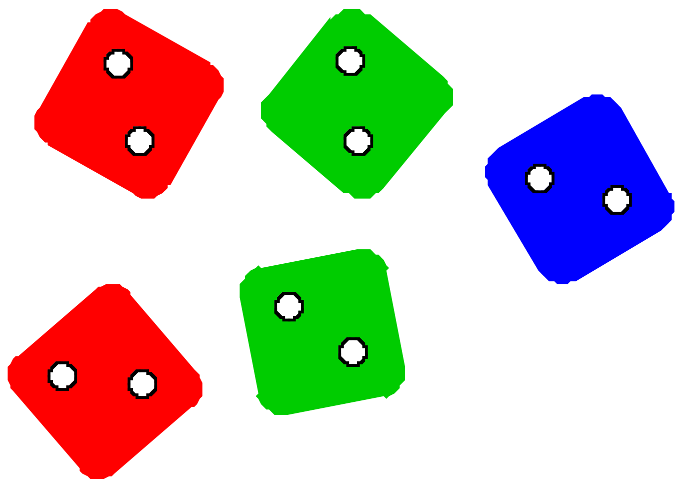
links:
ungerade Anzahl
Primfaktoren 2

Aber 2 ist doch
eine gerade Zahl?

ungerade Anzahl
Primfaktoren 2

Aber 2 ist doch
eine gerade Zahl?

ungerade Anzahl
Primfaktoren 2



Zahlmengen: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$

$\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ (irrationale Zahl) $\sqrt{2} \in \mathbb{R}$

Indirekter Beweis: Gegenteil führt zu Widerspruch

Annahme $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ d.h. $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$

$q\sqrt{2} = p$ mal q

$q^2 2 = p^2$ quadrieren

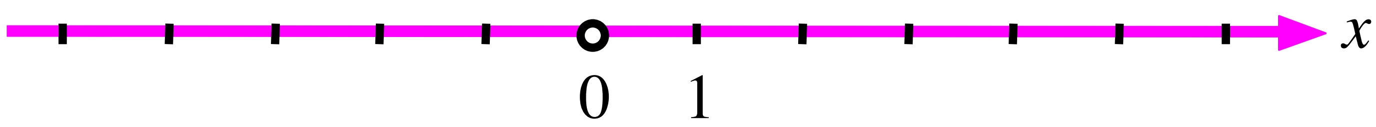
ungerade Anzahl Primfaktoren 2 | gerade Anzahl Primfaktoren 2

Annahme $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$ falsch $\Rightarrow$ $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

Zahlmengen: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$

$\mathbb{R}$eelle Zahlen:

- Menge der rationalen und der irrationalen Zahlen
- Ganze Zahlengerade, lückenlos
- Buchstabe $\mathbb{R}$



Zahlmengen: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$

Komplexe Zahlen ($\mathbb{C}$omplex Numbers)

siehe später

Zahlmengen: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$

Bruch und Dezimalbruch

$\frac{1}{4} = 1 : 4 = 0.25$ no problem

$\frac{1}{3} = 1 : 3 = 0.3333$ Taschenrechner (approximativ)

$\frac{1}{3} = 1 : 3 = 0.\overline{3}$ Periodizitätsangabe (exakt)

Betrag (Absolutbetrag)

Definition:

$$\boxed{|x| = \begin{cases} x & \text{falls } x \geq 0 \\ -x & \text{falls } x < 0 \end{cases}}$$

Betrag (Absolutbetrag)

Definition:

$$\boxed{|x| = \begin{cases} x & \text{falls } x \geq 0 \\ -x & \text{falls } x < 0 \end{cases}}$$

Beispiele:

$$|3.7| = 3.7$$

$$|-3.7| = 3.7$$

Betrag (Absolutbetrag)

Definition:

$$\boxed{|x| = \begin{cases} x & \text{falls } x \geq 0 \\ -x & \text{falls } x < 0 \end{cases}}$$

Beispiele:

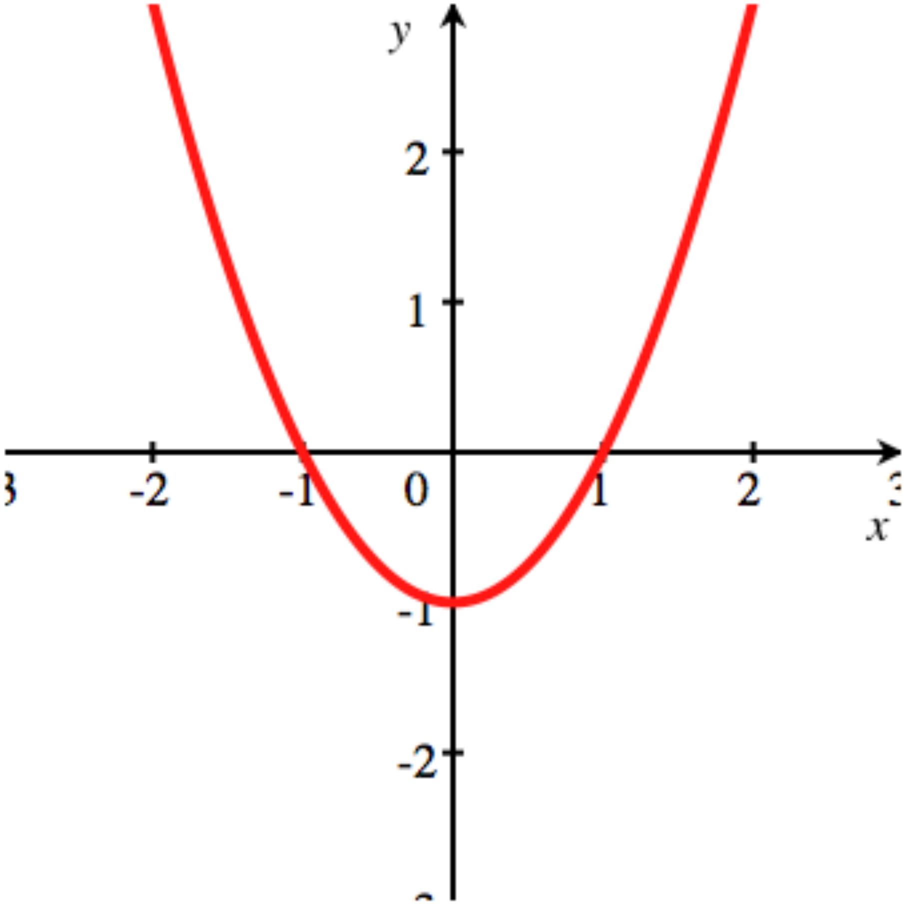
$$|3.7| = 3.7$$

$$|-3.7| = 3.7$$

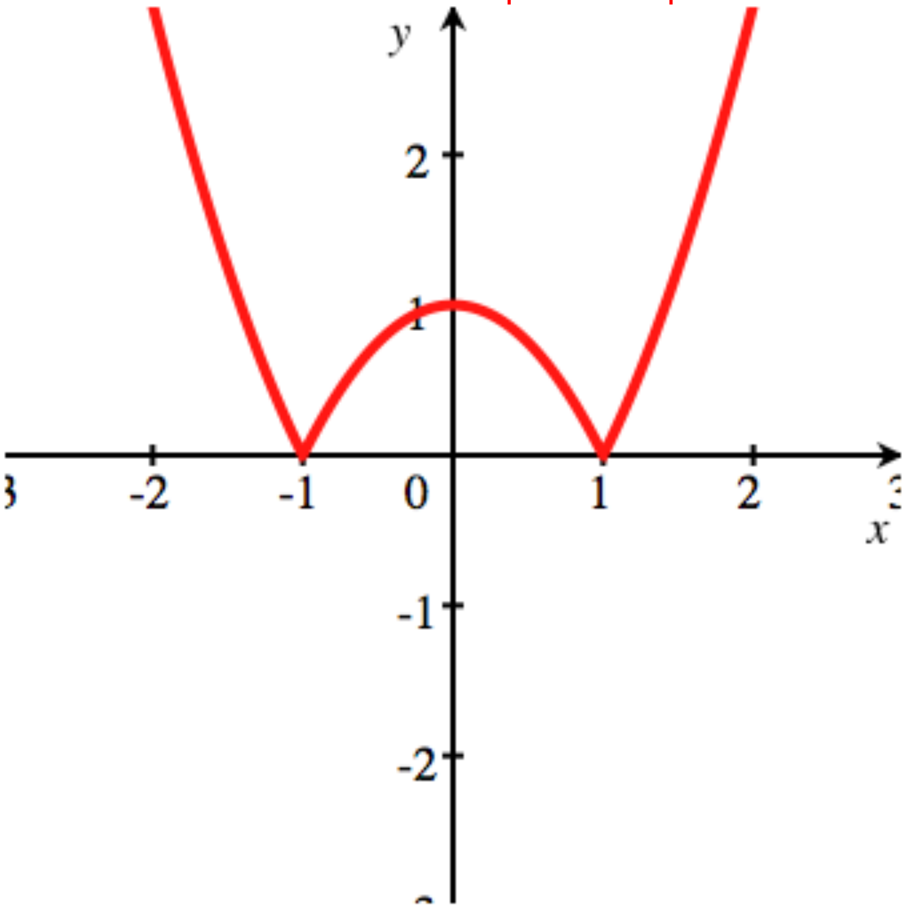
$$|a| = ?$$

$$|-a| = ?$$

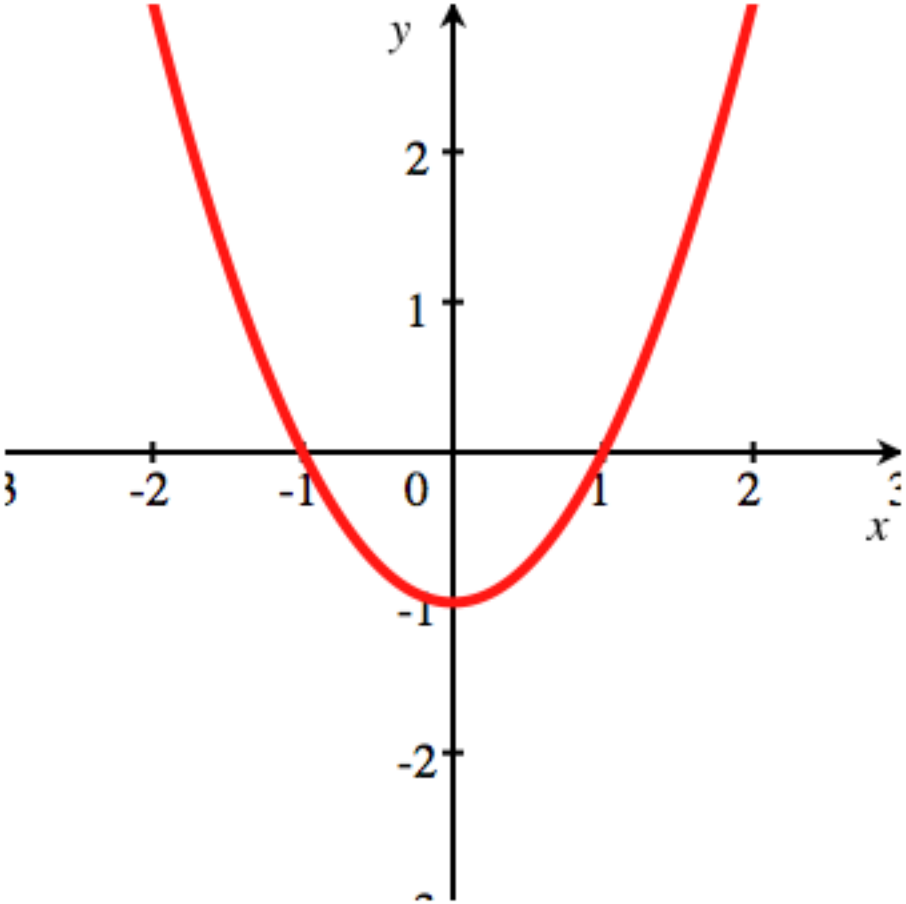
$$y = f(x) = x^2 - 1$$



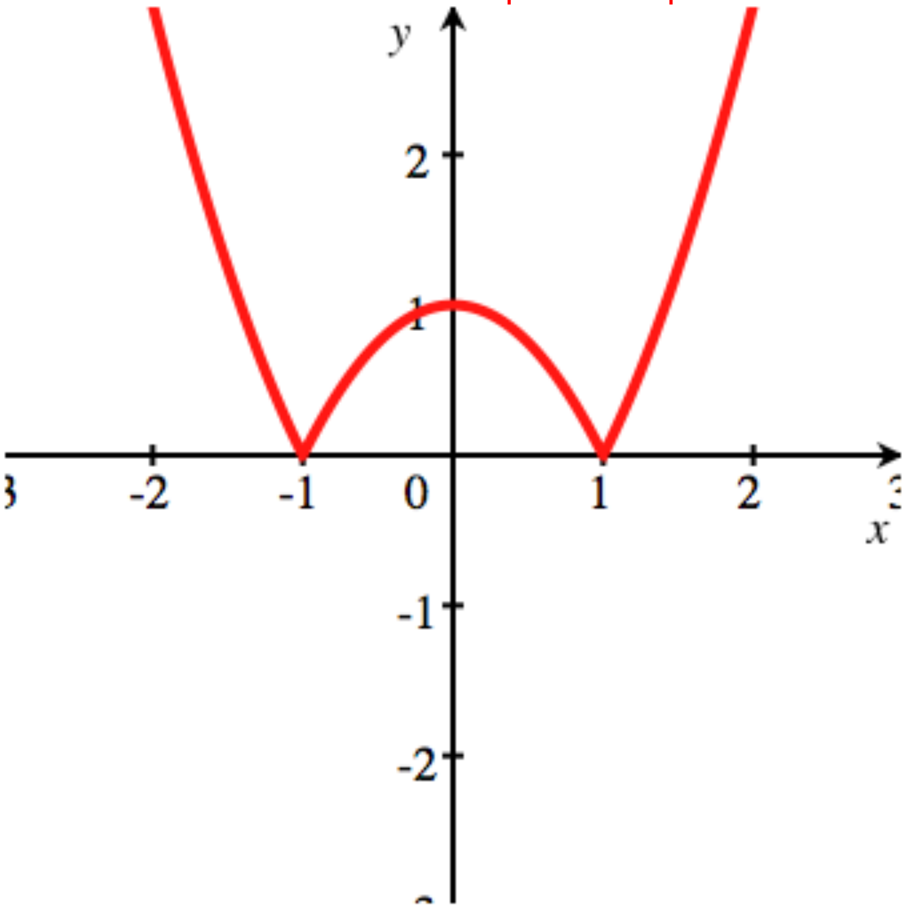
$$y = g(x) = \left| x^2 - 1 \right|$$



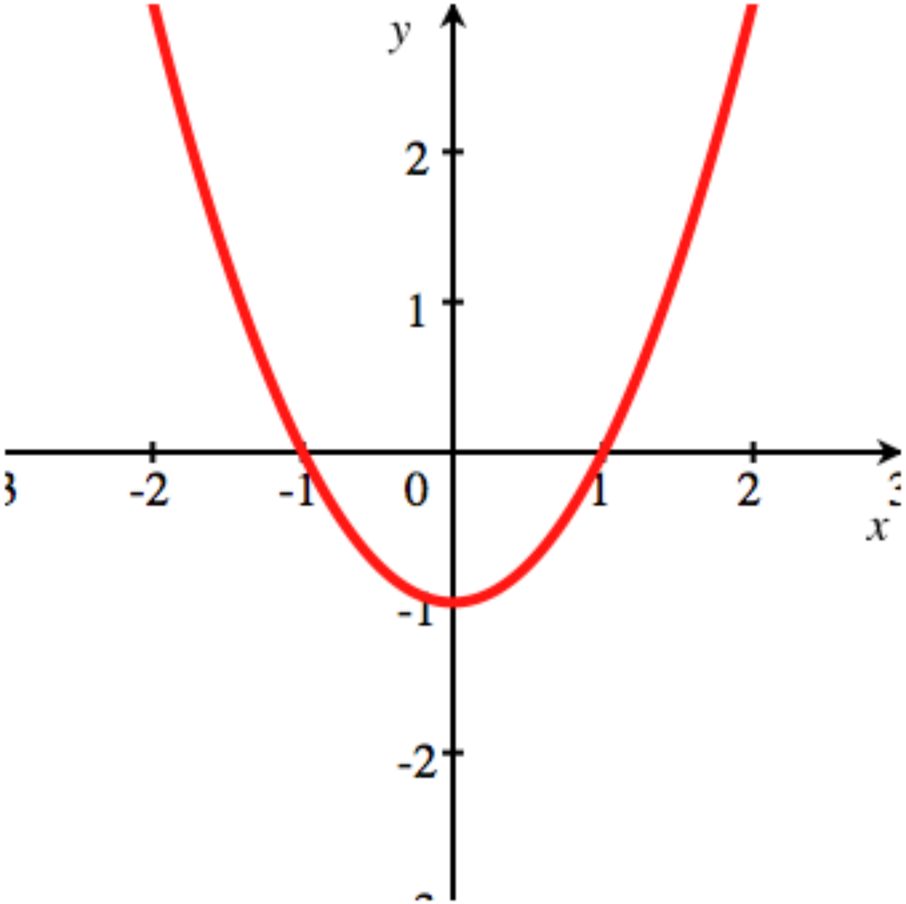
$$y = f(x) = x^2 - 1$$



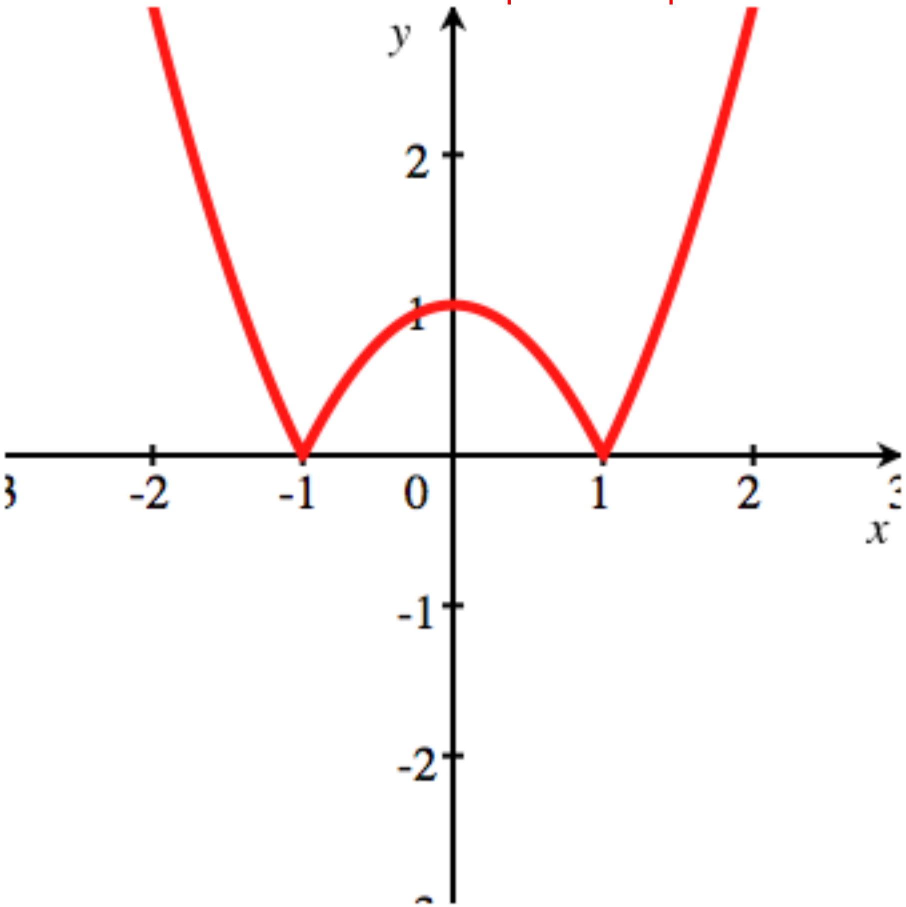
$$y = g(x) = |x^2 - 1|$$



$y = f(x) = x^2 - 1$



$$y = g(x) = \left|x^2 - 1\right|$$



Symbole

$\{\ ...\ \}$	Menge	$\{\ 3, 5, 12\}$
$\in$	Element	$5 \in \{\ 3, 5, 12\}$
$\notin$	kein Element	$4 \notin \{\ 3, 5, 12\}$
$\subset$	Teilmenge	$\{\ 3, 12\} \subset \{3, 5, 12\}$
$\not\subset$	keine Teilmenge	$\{\ 3, 4\} \not\subset \{3, 5, 12\}$
$\setminus$	ohne	$\{3, 5, 12\} \setminus \{\ 3, 12\} = \{5\}$

$$A = \{\ 3, 5, 12\}$$

$$A \times A = A^2 = \{(x, y) \mid x \in A, y \in A\}$$

$$A \times A = A^2 = \begin{Bmatrix} (\ 3, 3), & (\ 3, 5), & (\ 3, 12), \\ (\ 5, 3), & (\ 5, 5), & (\ 5, 12), \\ (\ 12, 3), & (\ 12, 5), & (\ 12, 12) \end{Bmatrix}$$

Menge der geordneten Zahlenpaare

$\uparrow$

$(\ 3, 5) \neq (\ 5, 3)$

$$A = \{\ 3, 5, 12\}, \quad B = \{\ 4, 5, 6, 9\}$$

$$A \times B = \left\{(x, y) \middle|\ x \in A,\ y \in B\right\}$$

$$A \times B = \left\{\begin{array}{llll} (\ 3, 4), & (\ 3, 5), & (\ 3, 6), & (\ 3, 9), \\ (\ 5, 4), & (\ 5, 5), & (\ 5, 6), & (\ 5, 9), \\ (\ 12, 4), & (\ 12, 5), & (\ 12, 6), & (\ 12, 9) \end{array}\right\}$$

$$A = \{\ 3, 5, 12\}, \quad B = \{\ 4, 5, 6, 9\}$$

Vertauschte Reihenfolge

$$B \times A = \{(x, y) \mid x \in B, y \in A\}$$

$$B \times A = \left\{ \begin{matrix} (\ 4, 3), & (\ 4, 5), & (\ 4, 12), \\ (\ 5, 3), & (\ 5, 5), & (\ 5, 12), \\ (\ 6, 3), & (\ 6, 5), & (\ 6, 12), \\ (\ 9, 3), & (\ 9, 5), & (\ 9, 12) \end{matrix} \right\}$$

Intervalle

$$[a,b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$$

abgeschlossenes Intervall [Endpunkte dabei]

Intervalle

$$\left[a,b\right]=\left\{x\in\mathbb{R}\;\middle|\;a\le x\le b\right\}$$

abgeschlossenes Intervall [Endpunkte dabei]

$$\left(a,b\right)=\left]a,b\right[=\left\{x\in\mathbb{R}\;\middle|\;a<x<b\right\}$$

verschiedene Schreibweisen

Intervalle

$$\left[a,b\right] = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid a \le x \le b \right\}$$

abgeschlossenes Intervall [Endpunkte dabei]

$$\left(a,b\right) = \left]a,b\right[= \left\{ x \in \mathbb{R} \mid a < x < b \right\}$$

offenes Intervall (Endpunkte nicht dabei)

Funktionen

Assoziationen?

Funktion
Funktion
Funktion
Funktion
Funktion
Funktion
Funktion
Funktion
Funktion
Funktion
Funktion
Funktion
Funktion
Funktion
Funktion
Funktion
Funktion
Funktion

Funktionen

Beispiel: Ideales Gas

$$p = \frac{RT}{V}$$

$$p(T) = \frac{R}{V}T$$ je mehr Temperatur, desto mehr Druck

$$p(V) = \frac{RT}{V}$$ je mehr Volumen, desto weniger Druck

$$f : \quad A \quad \longrightarrow \quad \mathbb{R}$$

Funktionsvorschrift

$$f: A \to \mathbb{R}$$

Definitionsbereich

Funktionsvorschrift

$$f: \quad A \quad \rightarrow \quad \mathbb{R}$$

Definitionsbereich

$$x \in A \quad \mapsto \quad y = f(x) \in \mathbb{R}$$

Funktionsvorschrift

$$f : A \to \mathbb{R}$$

Definitionsbereich

$$x \in A \mapsto y = f(x) \in \mathbb{R}$$

Argument
Input

Funktionsvorschrift

$$f: \quad A \quad \longrightarrow \quad \mathbb{R}$$

Definitionsbereich

$$x \in A \quad \mapsto \quad y = f(x) \in \mathbb{R}$$

Argument
Input

Funktions-
wert, Bild,
Output

Funktionsvorschrift

$$f : A \to \mathbb{R}$$

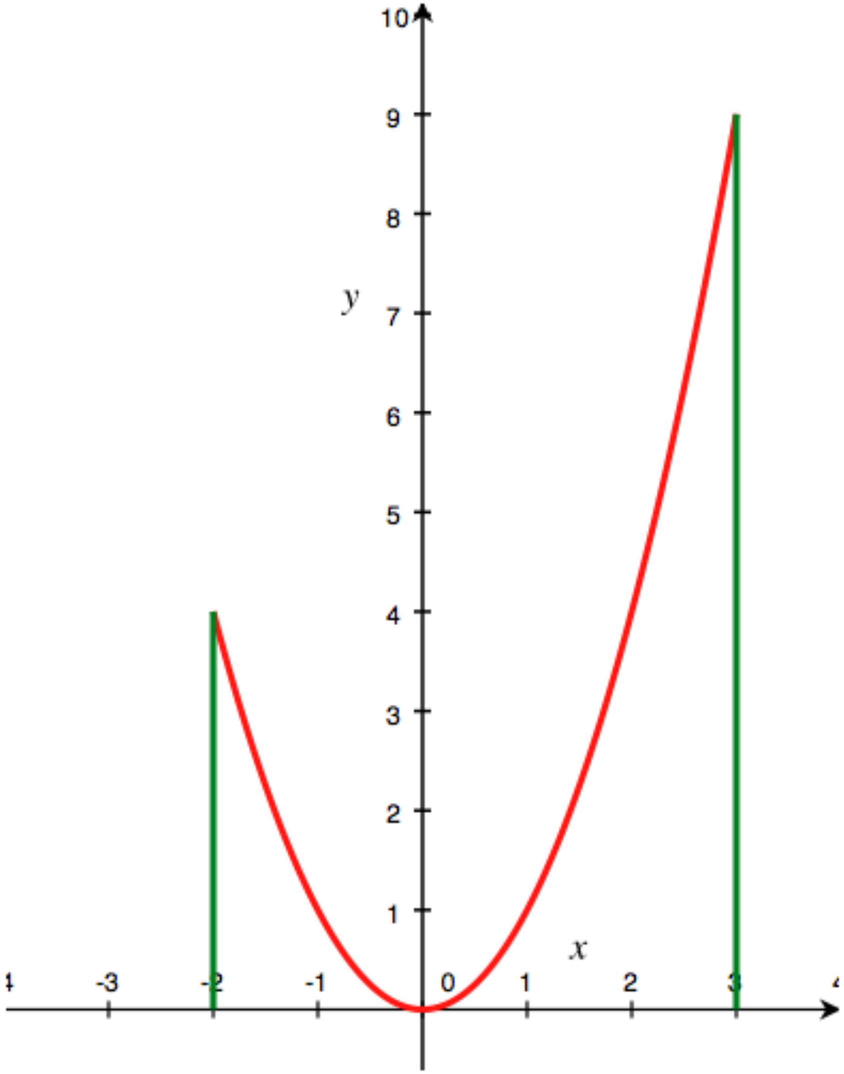
Definitionsbereich

$$x \in A \mapsto y = f(x) \in \mathbb{R}$$

Argument
Input

Funktions-
wert, Bild,
Output

Zu jedem $x \in A$
gehört genau ein $y \in \mathbb{R}$



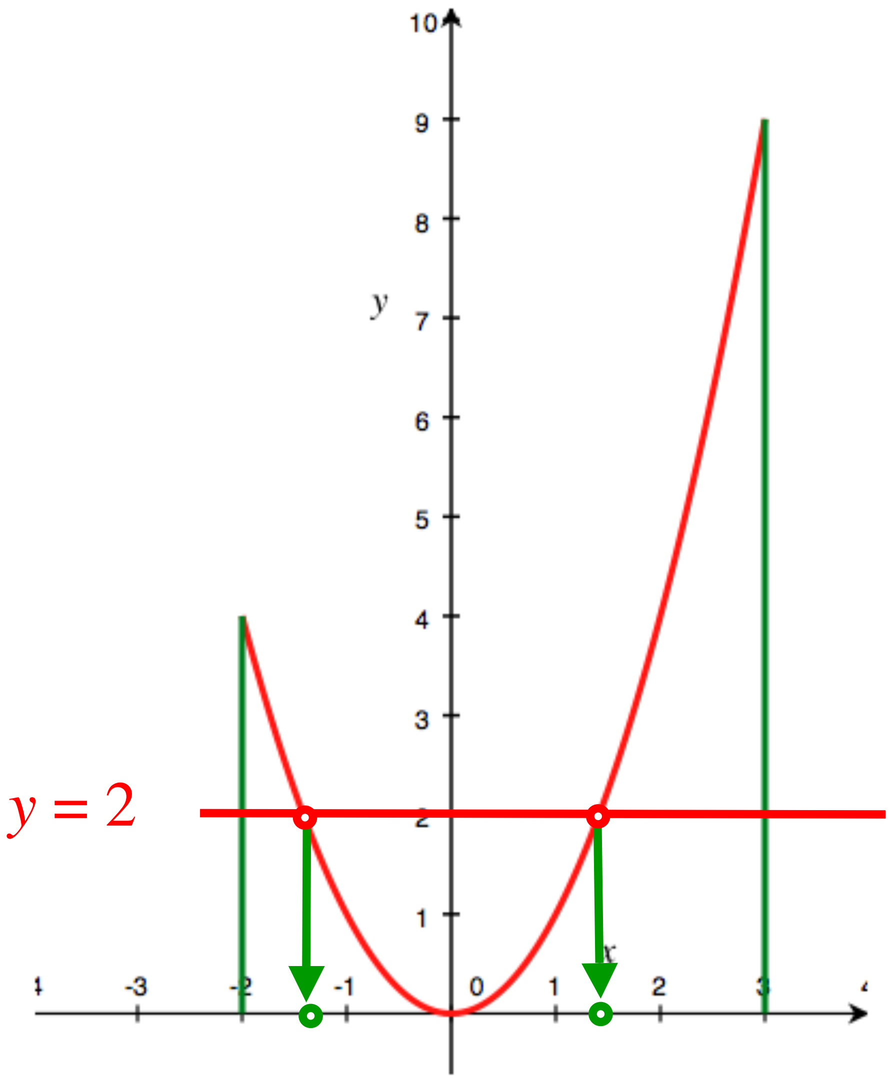
Beispiel

$$f:[-2,3]\to\mathbb{R}$$

$$x\mapsto y=f(x)=x^2$$

Zu jedem $x\in[-2,3]$

gehört genau ein $y\in\mathbb{R}$

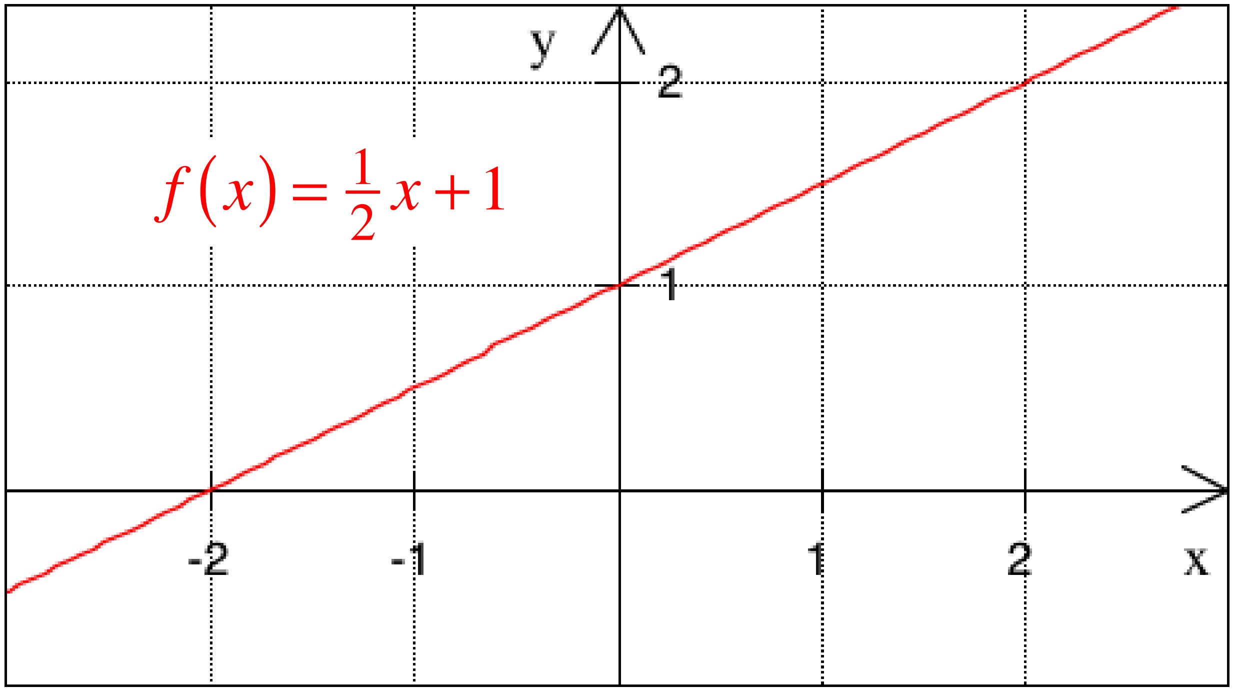


Wie ist es umgekehrt?

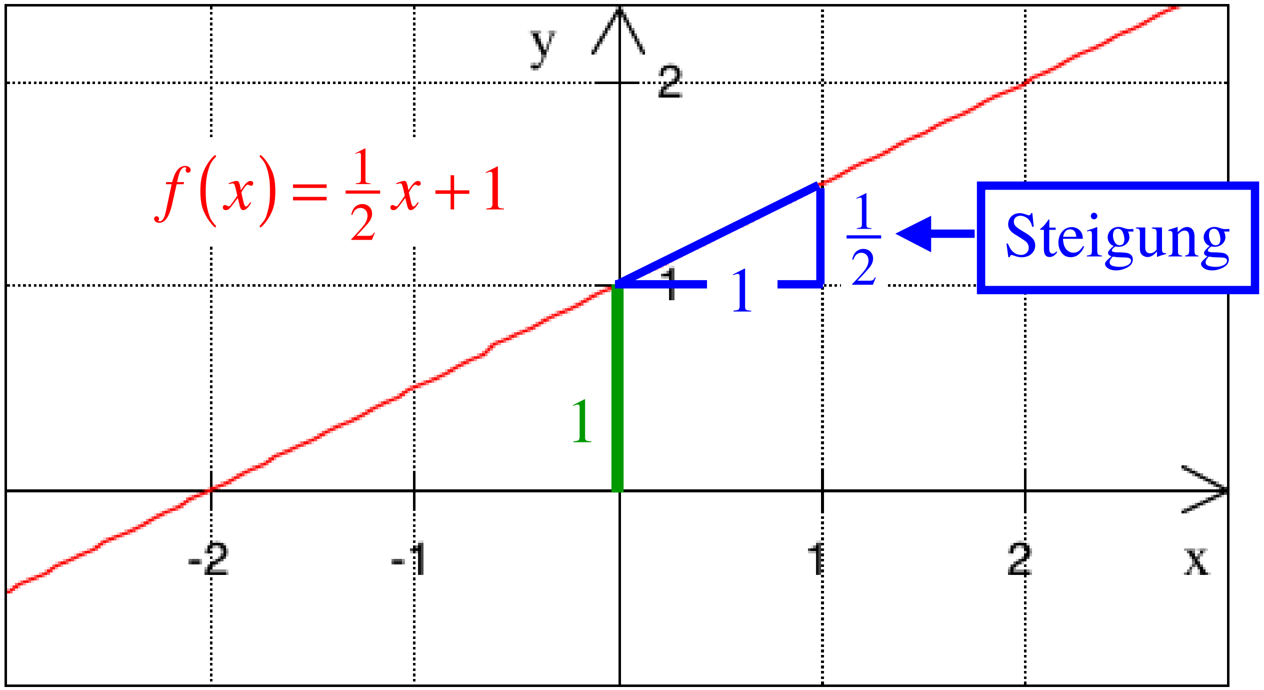
Mehrere x-Werte mit demselben Funktions-wert $y = 2$

Zu jedem $x \in [-2, 3]$ gehört genau ein $y \in \mathbb{R}$

Lineare Funktion: $f(x) = ax + b$



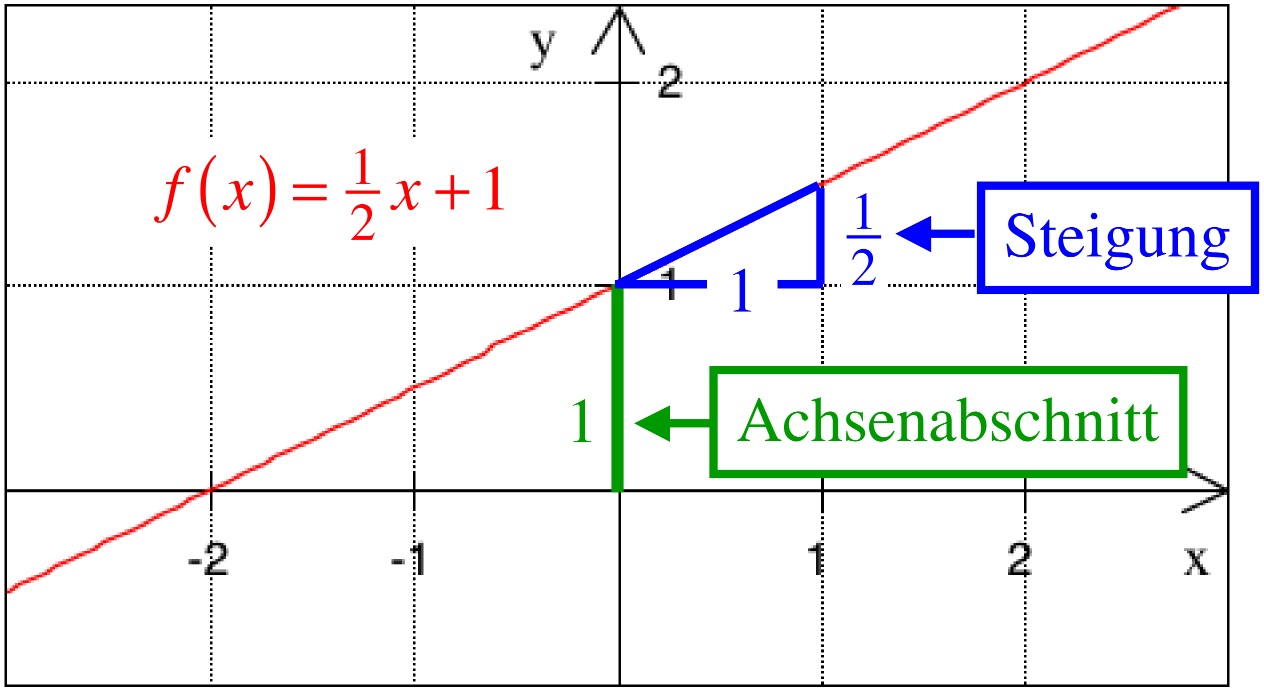
Lineare Funktion: $f(x) = ax + b$



$f(x) = \frac{1}{2}x + 1$

Steigung

Lineare Funktion: $f(x) = ax + b$

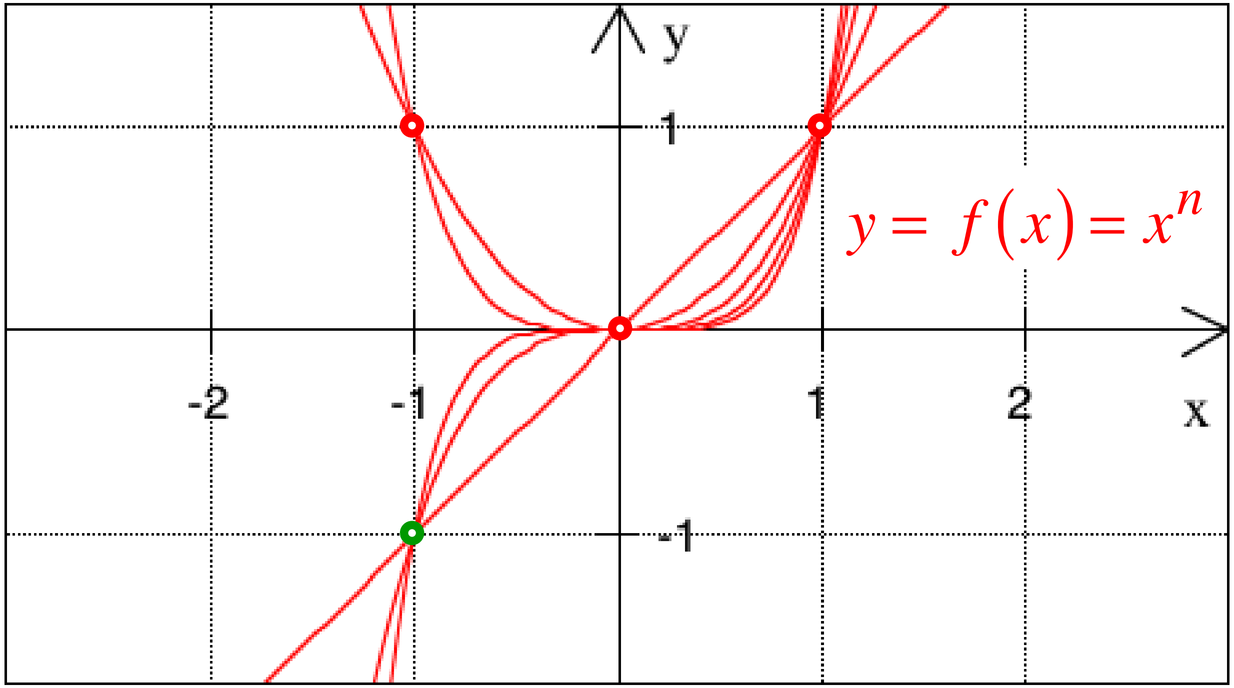


$$f(x) = \frac{1}{2}x + 1$$

Steigung

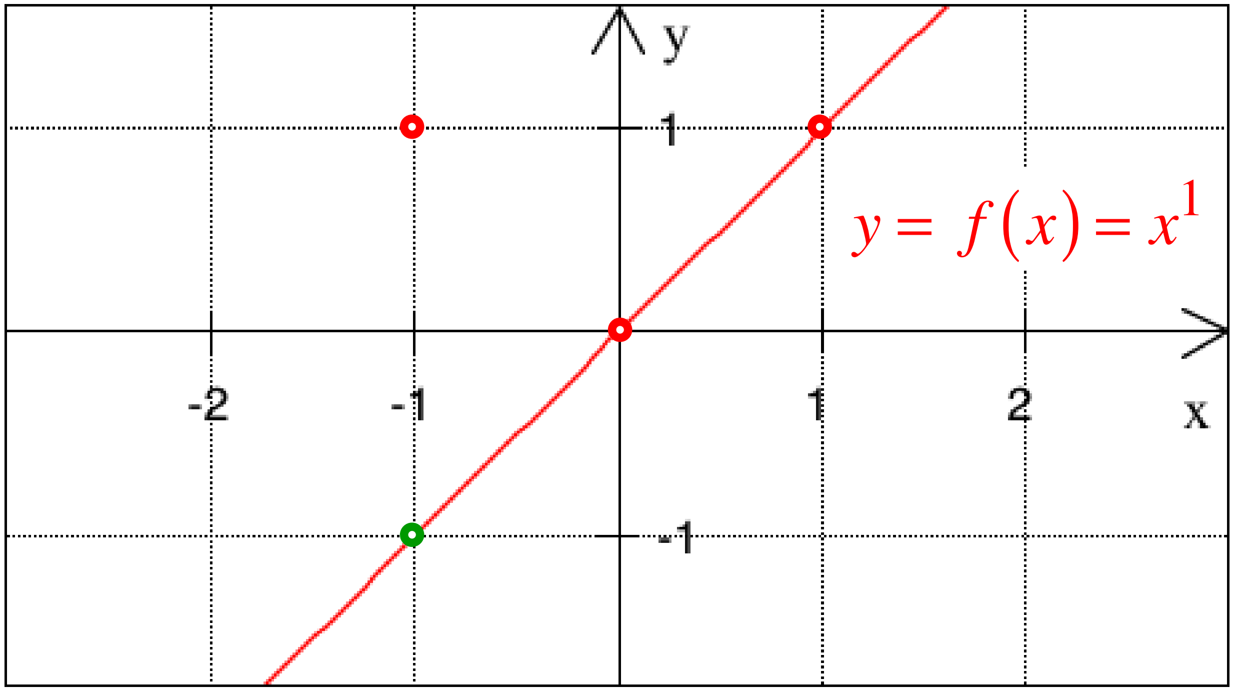
Achsenabschnitt

Potenzfunktion : $f(x) = x^n$



Potenzfunktionen für $n = 1, 2, 3, 4, 5$

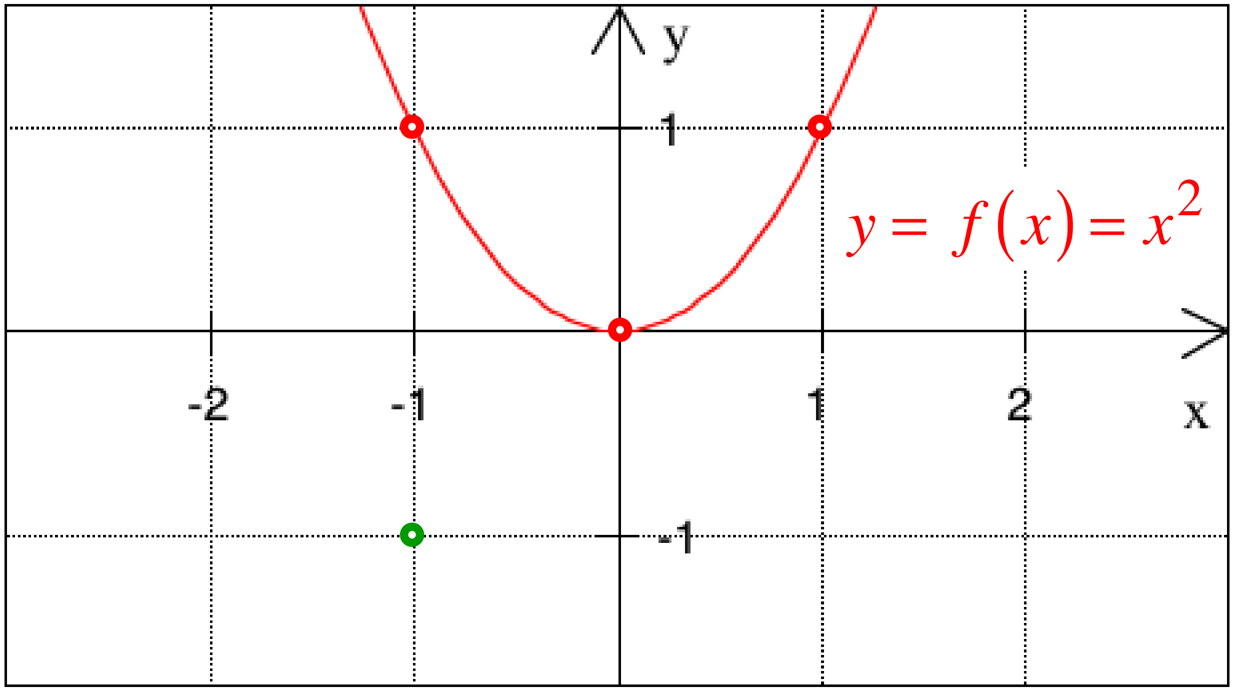
Potenzfunktion : $f(x) = x^n$



Potenzfunktionen für $n = 1, 2, 3, 4, 5$

Gerade

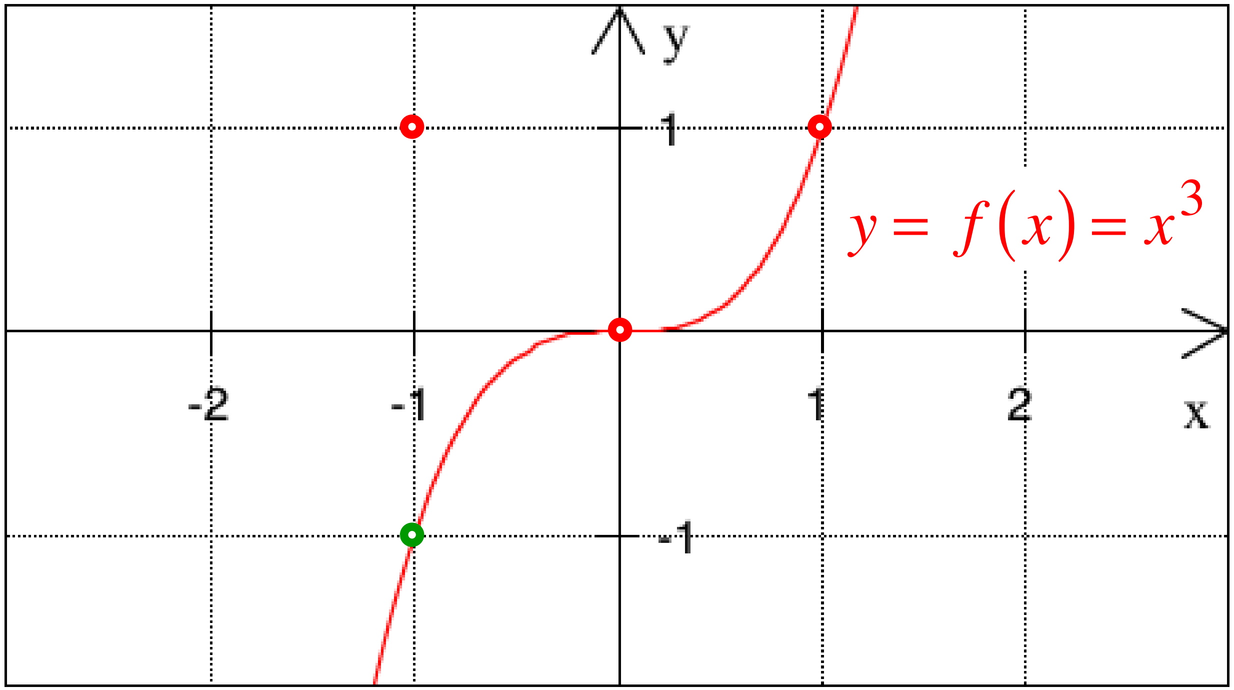
Potenzfunktion : $f(x) = x^n$



Potenzfunktionen für $n = 1, 2, 3, 4, 5$

Parabel

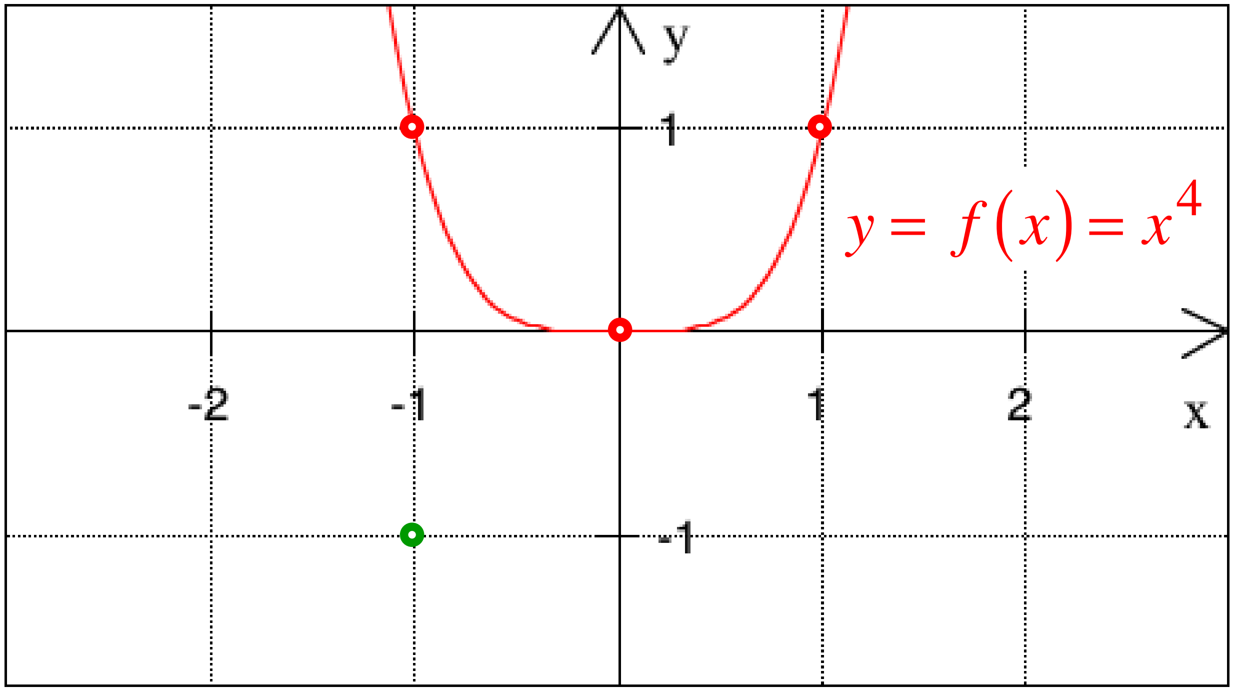
Potenzfunktion : $f(x) = x^n$



Potenzfunktionen für $n = 1, 2, 3, 4, 5$

Kubische Parabel

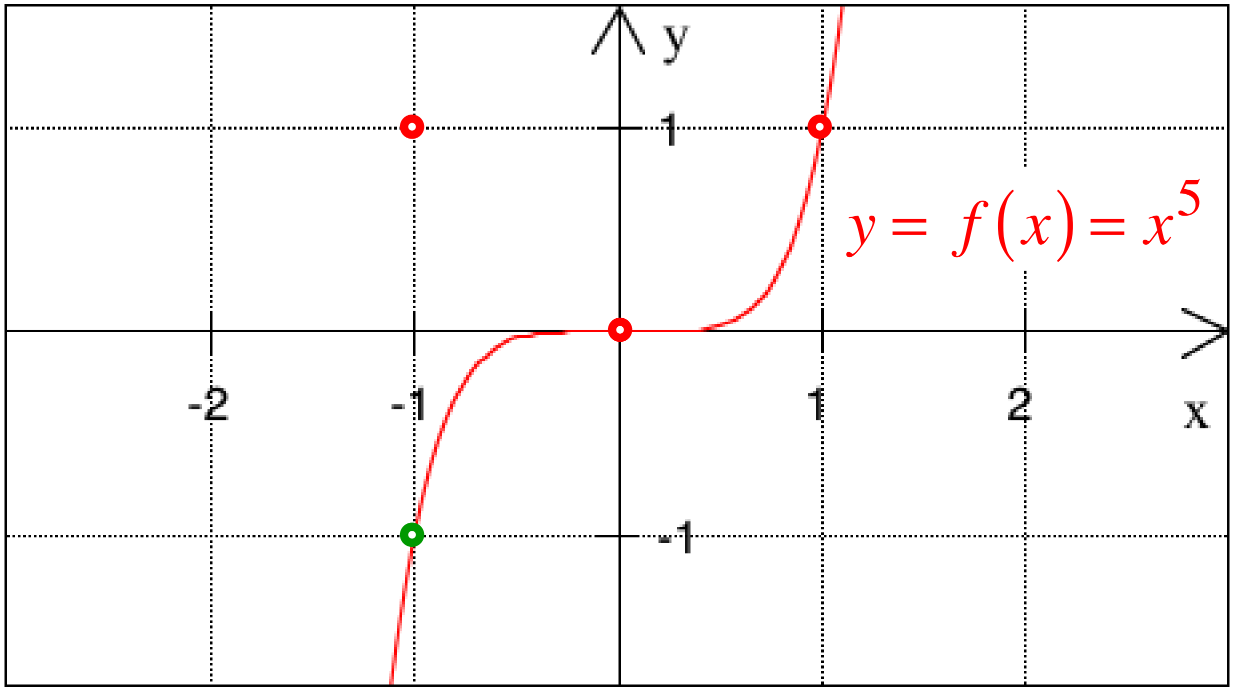
Potenzfunktion : $f(x) = x^n$



Potenzfunktionen für $n = 1, 2, 3, 4, 5$

Parabel vierten Grades

Potenzfunktion : $f(x) = x^n$

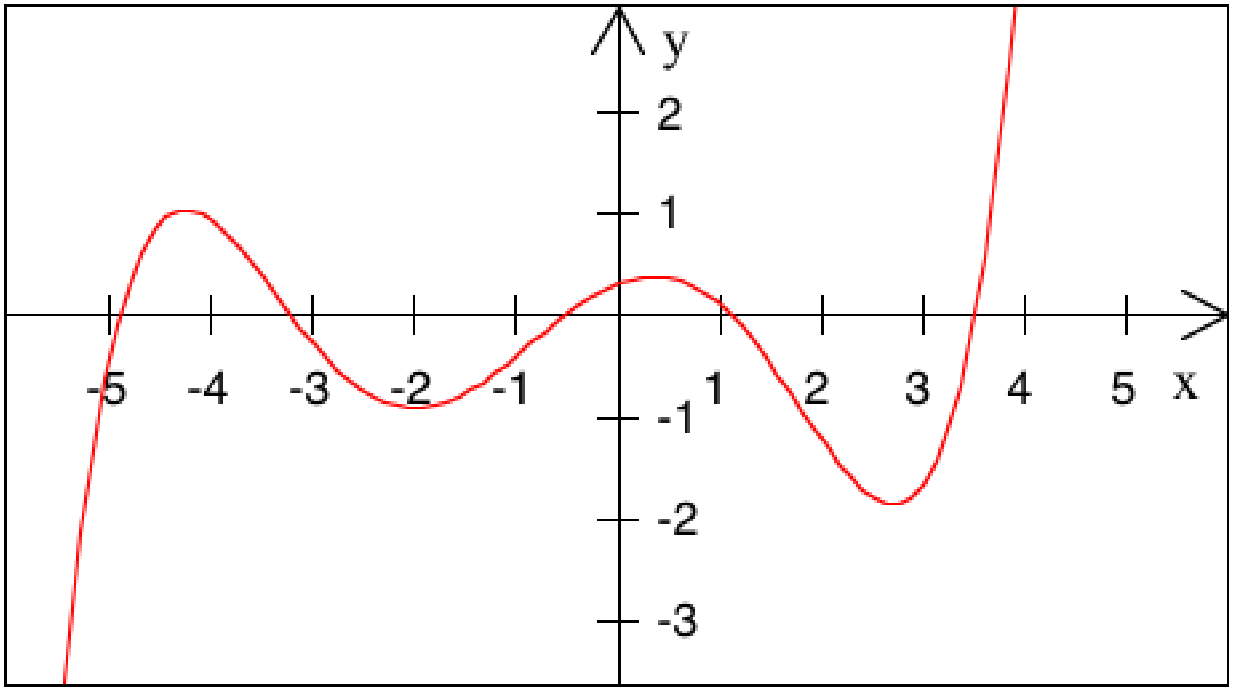


Potenzfunktionen für $n = 1, 2, 3, 4, 5$

Parabel fünften Grades

Polynomfunktion n-ten Grades:

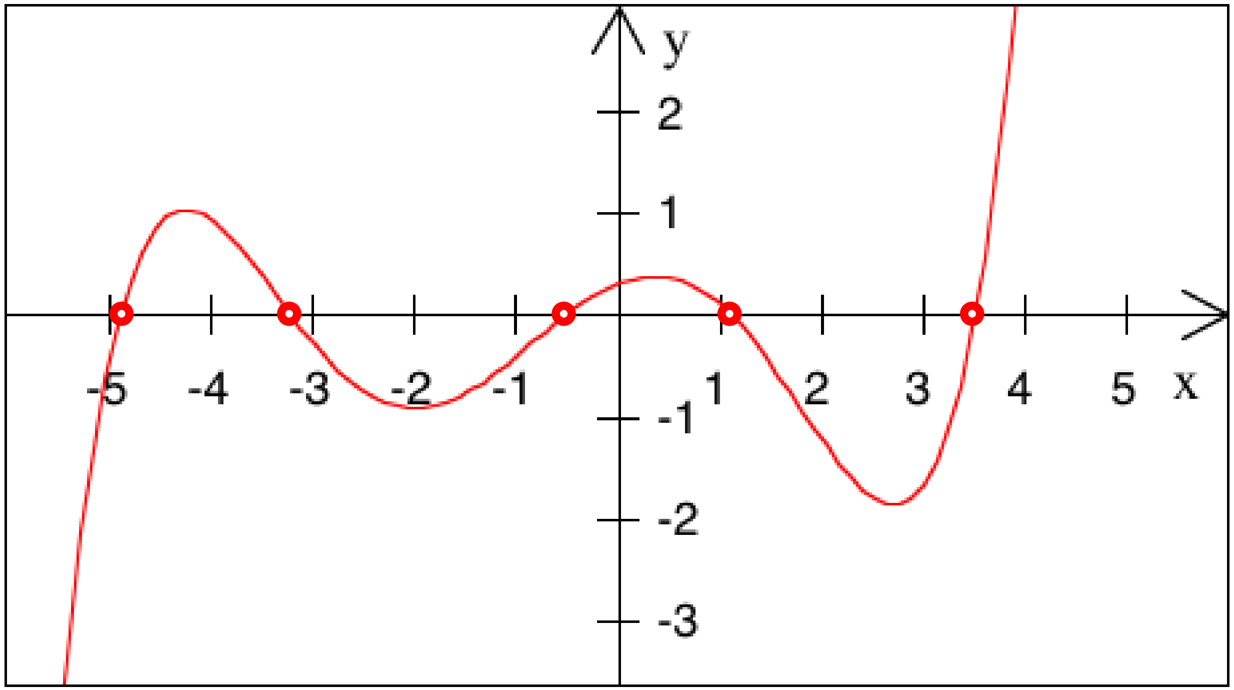
$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$



$$y = f(x) = 0.01x^5 + 0.04x^4 - 0.16x^3 - 0.5x^2 + 0.4x + 0.3$$

Polynomfunktion n-ten Grades:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$



$$y = f(x) = 0.01x^5 + 0.04x^4 - 0.16x^3 - 0.5x^2 + 0.4x + 0.3$$

5 Nullstellen

Polynomfunktion n-ten Grades:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

Allgemein:

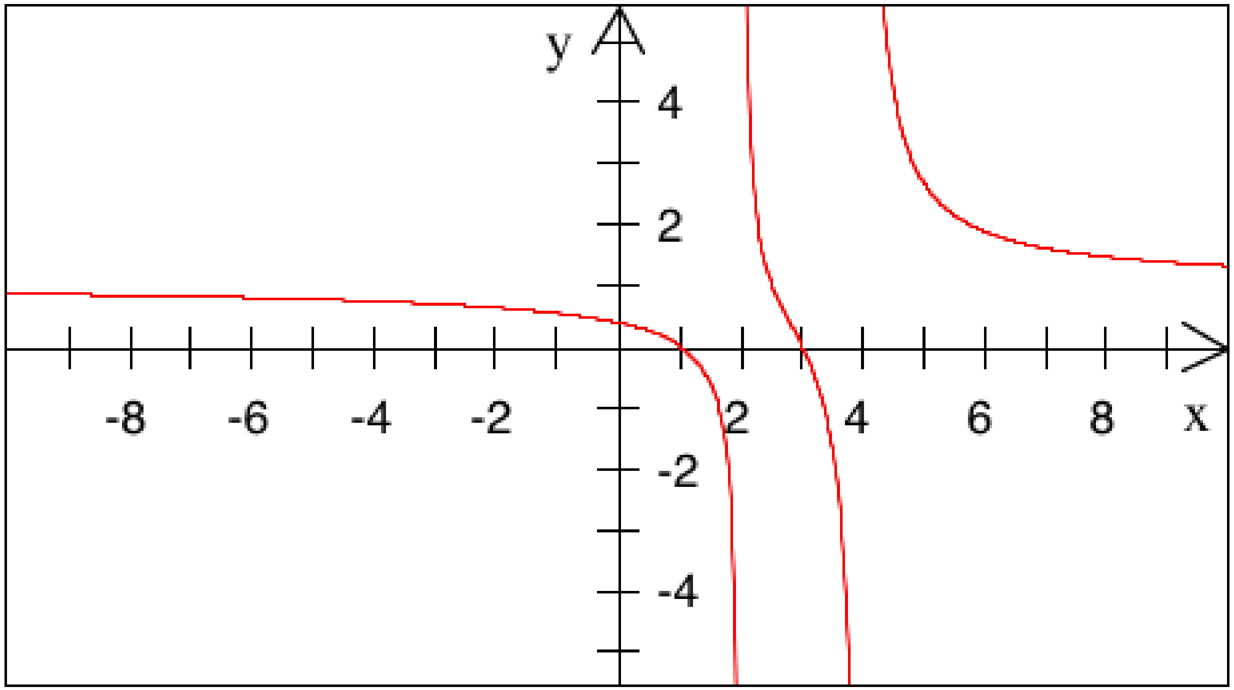
höchstens n Nullstellen

Rationale (gebrochene) Funktionen:

$$h(x) = \frac{\overset{\overset{\text{Polynomfunktion}}{\downarrow}}{f(x)}}{\underset{\underset{\text{Polynomfunktion}}{\uparrow}}{g(x)}}$$

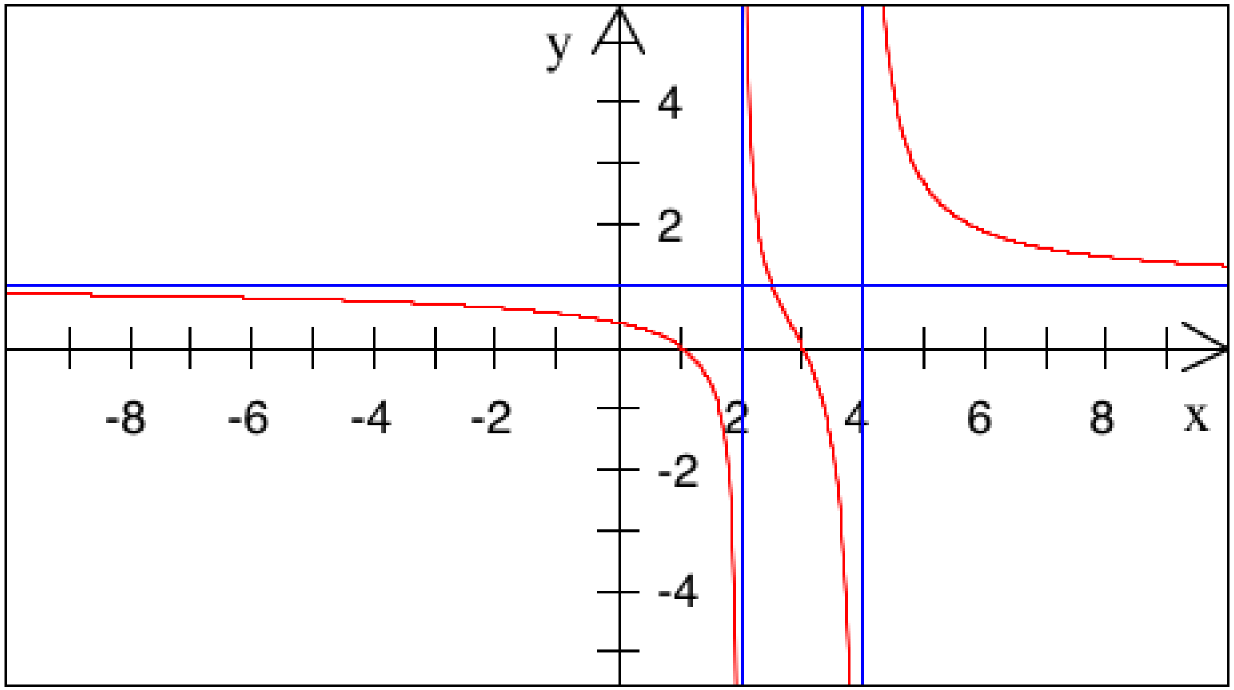
Problem: Nullstellen von $g(x)$

Beispiel: $h(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{(x-1)(x-3)}{(x-2)(x-4)} = \dfrac{x^2-4x+3}{x^2-6x+8}$



Größtmöglicher Definitionsbereich $A = \mathbb{R} \setminus \{2, 4\}$

Beispiel: $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{(x-1)(x-3)}{(x-2)(x-4)} = \frac{x^2-4x+3}{x^2-6x+8}$



Größtmöglicher Definitionsbereich $A = \mathbb{R} \setminus \{2, 4\}$

Asymptoten

Hoch - hoch

$$2^{\left(3^4\right)} =$$

$$\left(2^3\right)^4 =$$

Was gibt mehr?

Hoch - hoch

$$2^{\left(3^4\right)} = 2^{81} \approx 2.417851639229258 \cdot 10^{24}$$

$$\left(2^3\right)^4 =$$

$\boxed{\text{Quadrillionen}}$

Hoch - hoch

$$2^{\left(3^4\right)} = 2^{81} \approx 2.417851639229258 \cdot 10^{24}$$

$$\left(2^3\right)^4 = 8^4 = 4096$$

Hoch - hoch

$$2^{\left(3^4\right)} = 2^{81} \approx 2.417851639229258 \cdot 10^{24}$$

$$\left(2^3\right)^4 = 8^4 = 4096$$

Wenn Klammern fehlen: Oben beginnen

$$2^{3^4} = 2^{\left(3^4\right)} = 2^{81} \approx 2.417851639229258 \cdot 10^{24}$$

$x^4 = xxxx$ 4 gleiche Faktoren x

$x^3 = xxx$

$x^2 = xx$

$$x^4 = xxxx$$

$$x^3 = xxx$$

durch x

$$x^2 = xx$$

$$x^4 = xxxx$$

durch x

$$x^3 = xxx$$

durch x

$$x^2 = xx$$

Da waren es noch zwei!

$$x^4 = xxxx$$

durch x

$$x^3 = xxx$$

durch x

$$x^2 = xx$$

durch x

$$x^1 = x$$

$x^4 = xxxx$

durch x

$x^3 = xxx$

durch x

$x^2 = xx$

durch x

$x^1 = x$

durch x

passend! $x^0 = 1$

$$x^4 = xxxx$$

durch x

$$x^3 = xxx$$

durch x

$$x^2 = xx$$

durch x

$$x^1 = x$$

durch x

$$x^0 = 1$$

durch x

$$x^{-1} = \frac{1}{x}$$

durch x

$$x^{-2} = \frac{1}{x^2}$$

durch x

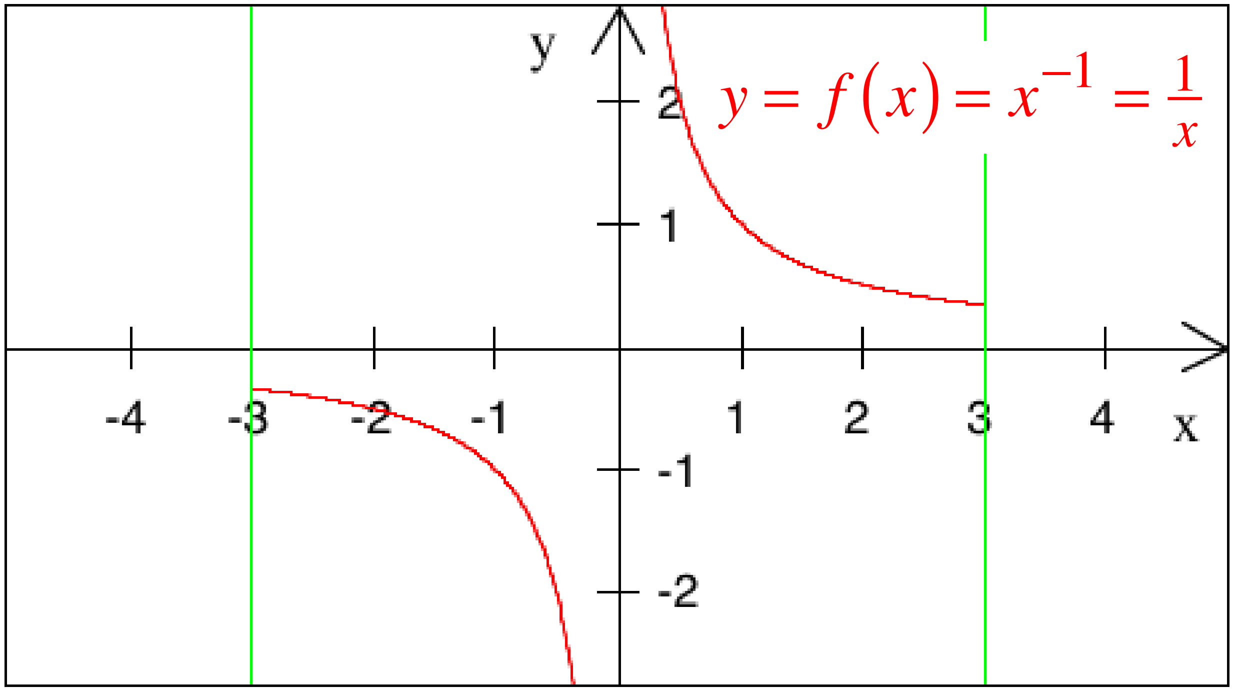
$$x^{-3} = \frac{1}{x^3}$$

durch x

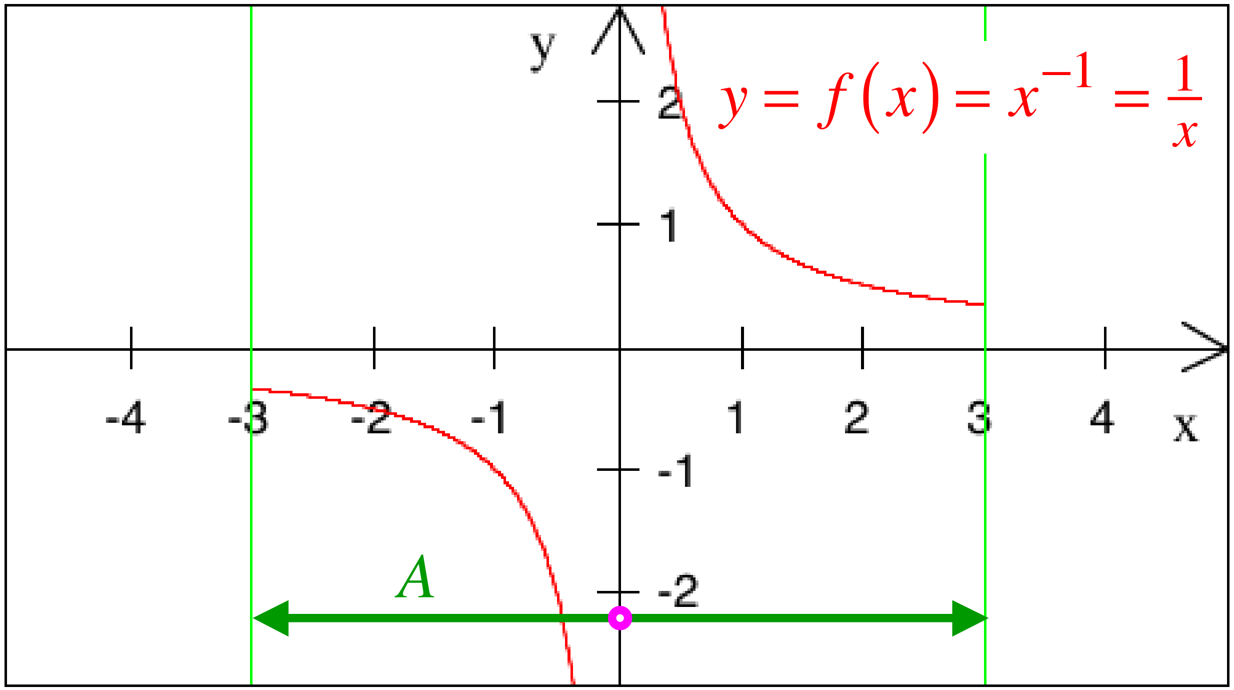
$$x^{-4} = \frac{1}{x4}$$

Negative Exponenten

Potenzfunktionen mit negativen Exponenten



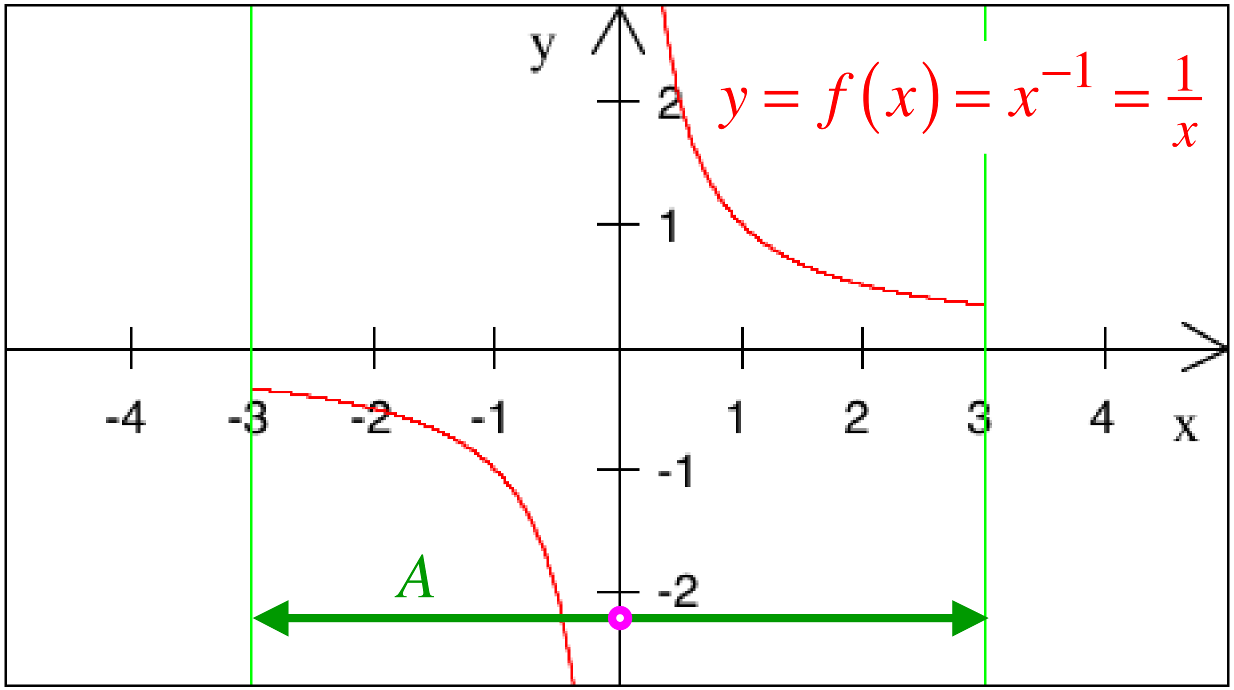
Potenzfunktionen mit negativen Exponenten



Definitionsbereich $A = \{x \mid -3 \le x \le 3, x \neq 0\}$

Division durch Null

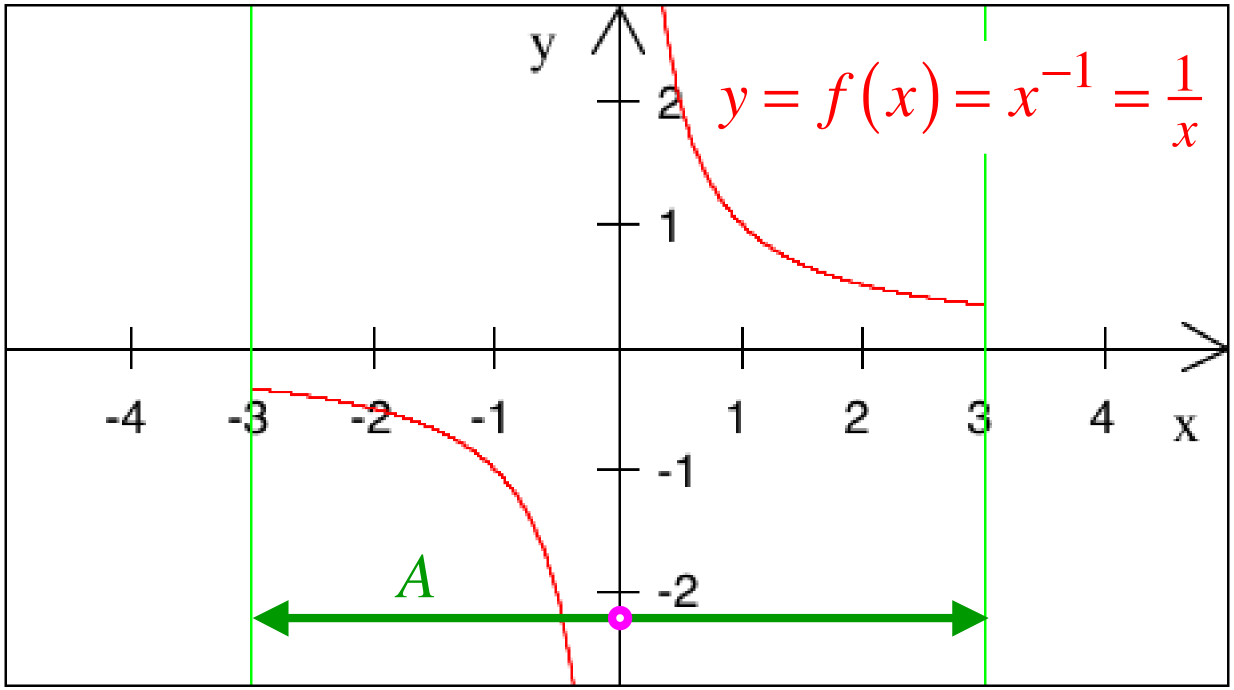
Potenzfunktionen mit negativen Exponenten



Definitionsbereich $A = \{x \mid -3 \le x \le 3, x \ne 0\} = [-3, 3] \setminus \{0\}$

Division durch Null

Potenzfunktionen mit negativen Exponenten

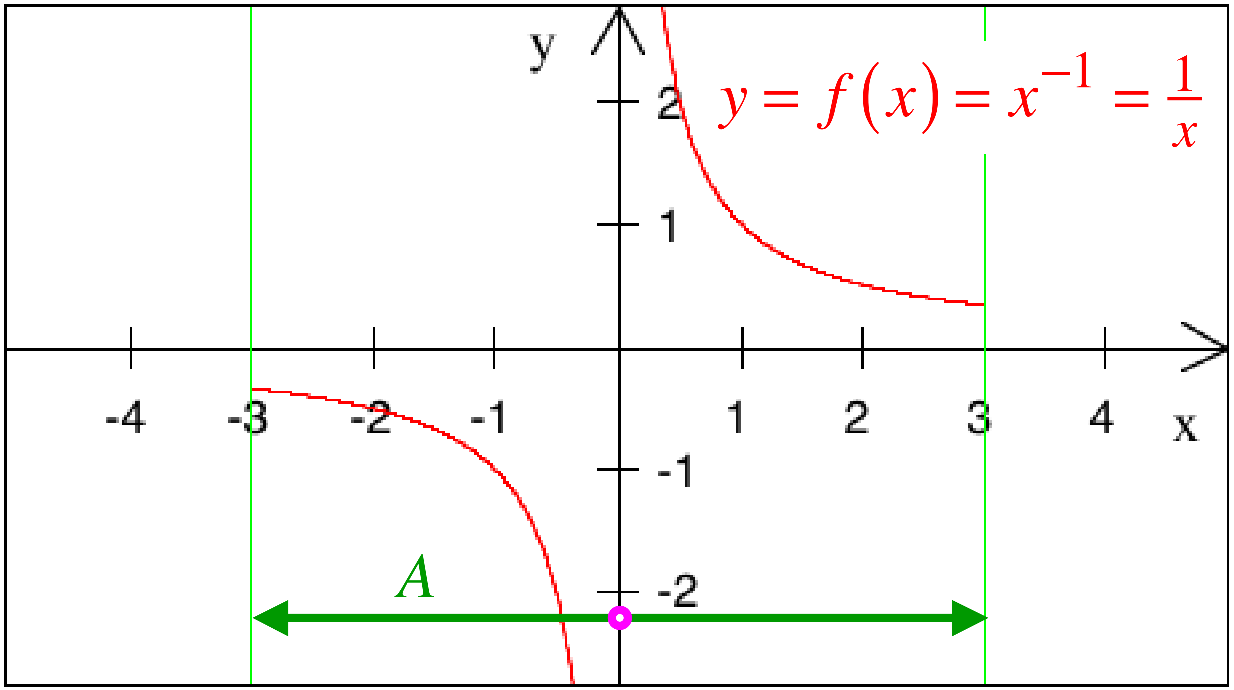


Definitionsbereich $A = \{x | -3 \le x \le 3, x \ne 0\} = [-3, 3] \setminus \{0\}$

$$A = [-3, 0) \cup (0, 3]$$

Vereinigung

Potenzfunktionen mit negativen Exponenten

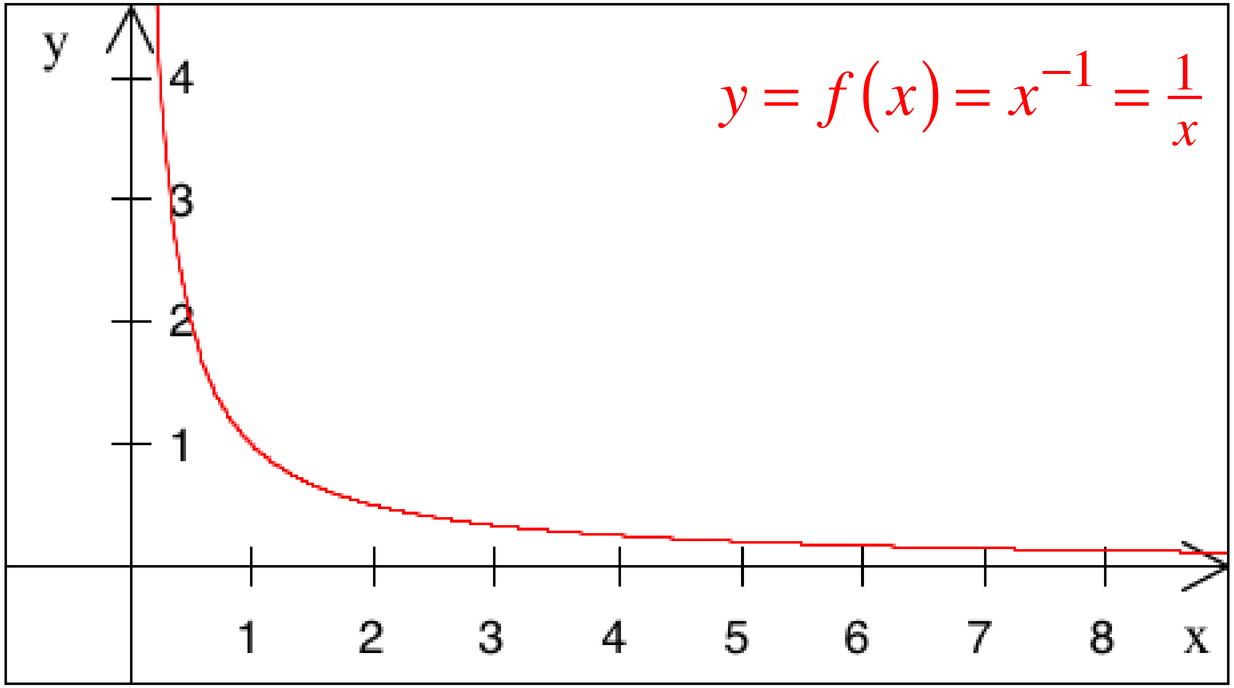


Definitionsbereich $A = \{x | -3 \le x \le 3, x \ne 0\} = [-3, 3] \setminus \{0\}$

$$A = [-3, 0) \cup (0, 3] = [-3, 0[\cup]0, 3]$$

Vereinigung

Potenzfunktionen mit negativen Exponenten



Umgekehrte Proportionalität

Je mehr, desto weniger

Potenzfunktionen mit negativen Exponenten

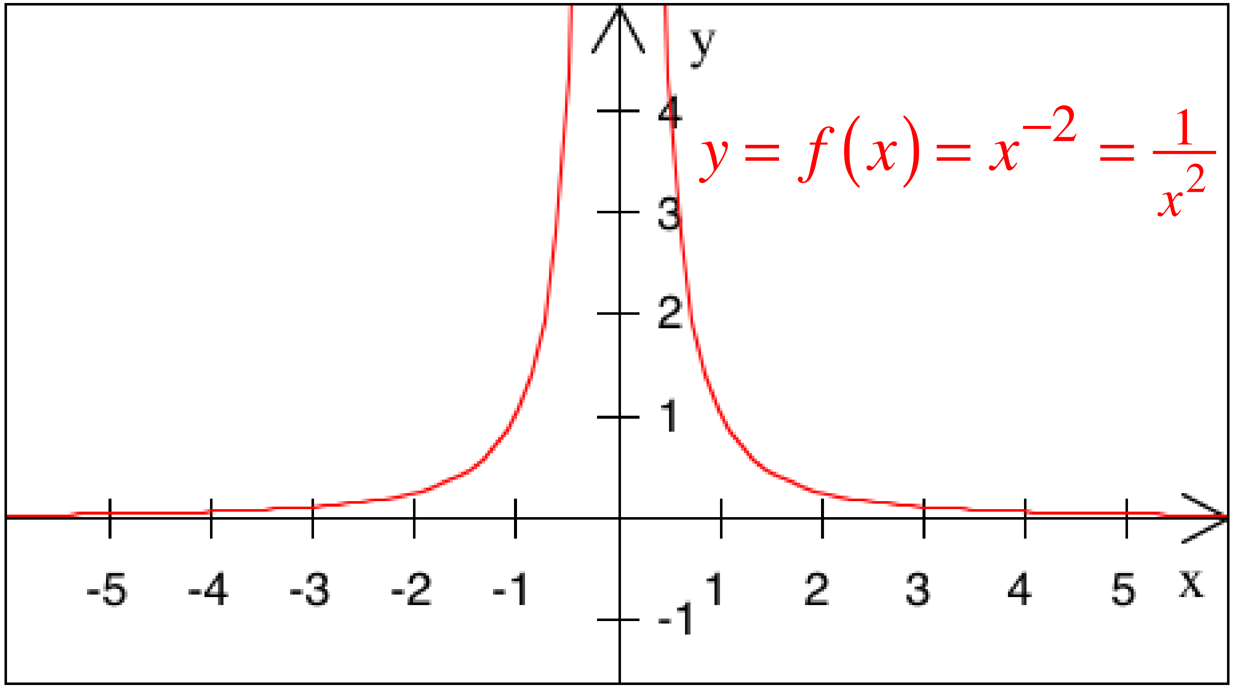
Eine Maschine benötigt 5 Arbeitstage.
Wie viele Arbeitstage brauchen 10 Maschinen?

Umgekehrte Proportionalität
Je mehr, desto weniger

Ein Mississippidampfer braucht 5 Tage,
um den Mississippi hinaufzudampfen.

Wie viele Tage brauchen 10 Dampfer?

Potenzfunktionen mit negativen Exponenten



Definitionsbereich $A = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

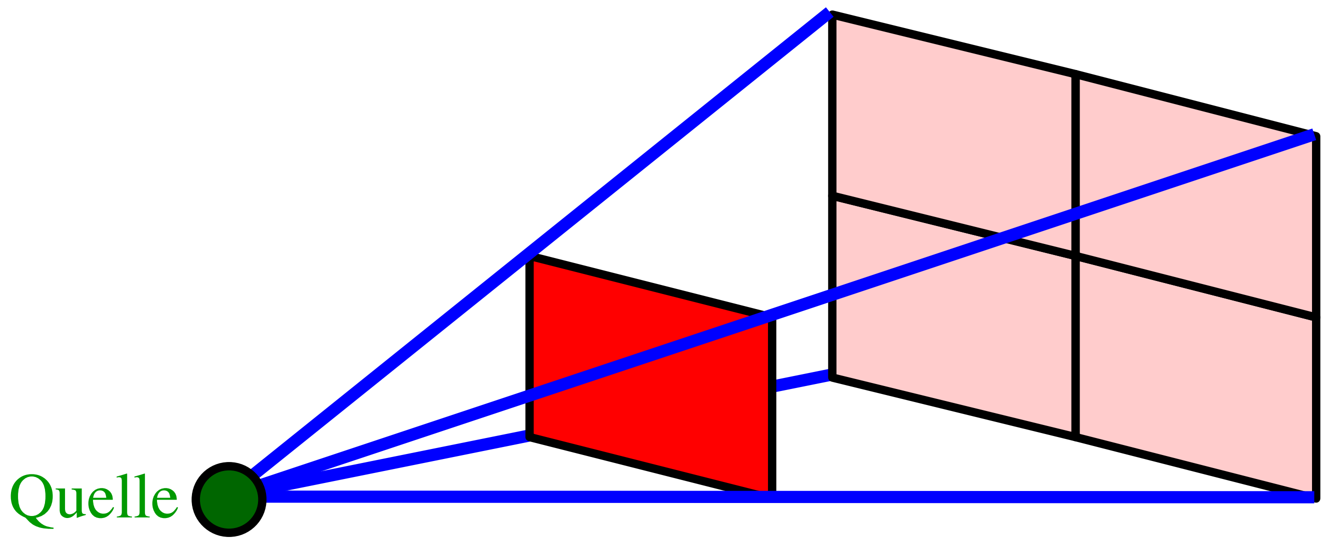
Potenzfunktionen mit negativen Exponenten

Coulomb 1736 - 1806

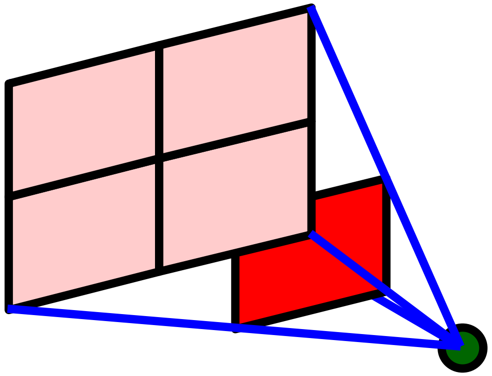
Newton 1643 - 1727

Potenzfunktionen mit negativen Exponenten

Räumliche Ausbreitung



Verdoppelung der Distanz
ein Viertel der Intensität



Sicht von
Michael Faraday
(1791 - 1867)

Gebrochene Exponenten

$$x^{\frac{1}{2}} = ?$$

Gebrochene Exponenten

$$\left(x^{\frac{1}{2}}\right)^2 = x^{\frac{1}{2}} \cdot x^{\frac{1}{2}} = x^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} = x^1 = x$$

Gebrochene Exponenten

$$\left(x^{\frac{1}{2}}\right)^2 = x^{\frac{1}{2}} \cdot x^{\frac{1}{2}} = x^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} = x^1 = x$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x} \qquad (x \geq 0)}$$

Gebrochene Exponenten

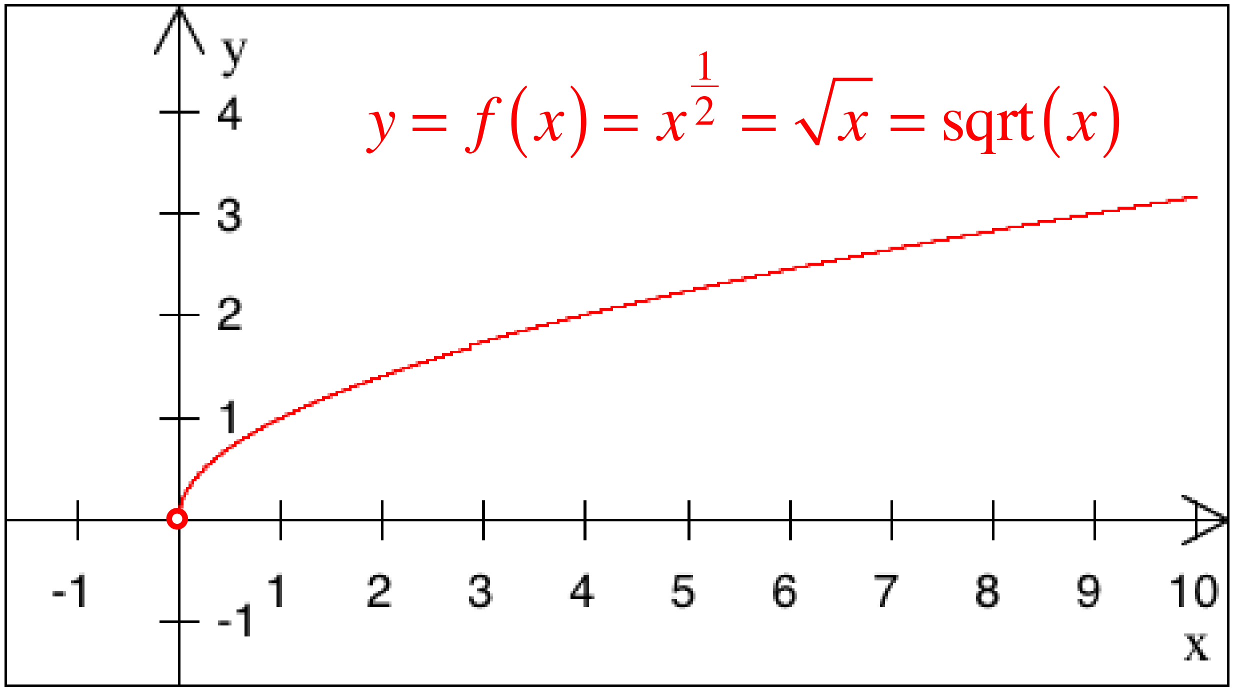
$$\left(x^{\frac{1}{2}}\right)^2 = x^{\frac{1}{2}} \cdot x^{\frac{1}{2}} = x^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} = x^1 = x$$

$$\Rightarrow \qquad \boxed{x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x} \qquad (x \geq 0)}$$

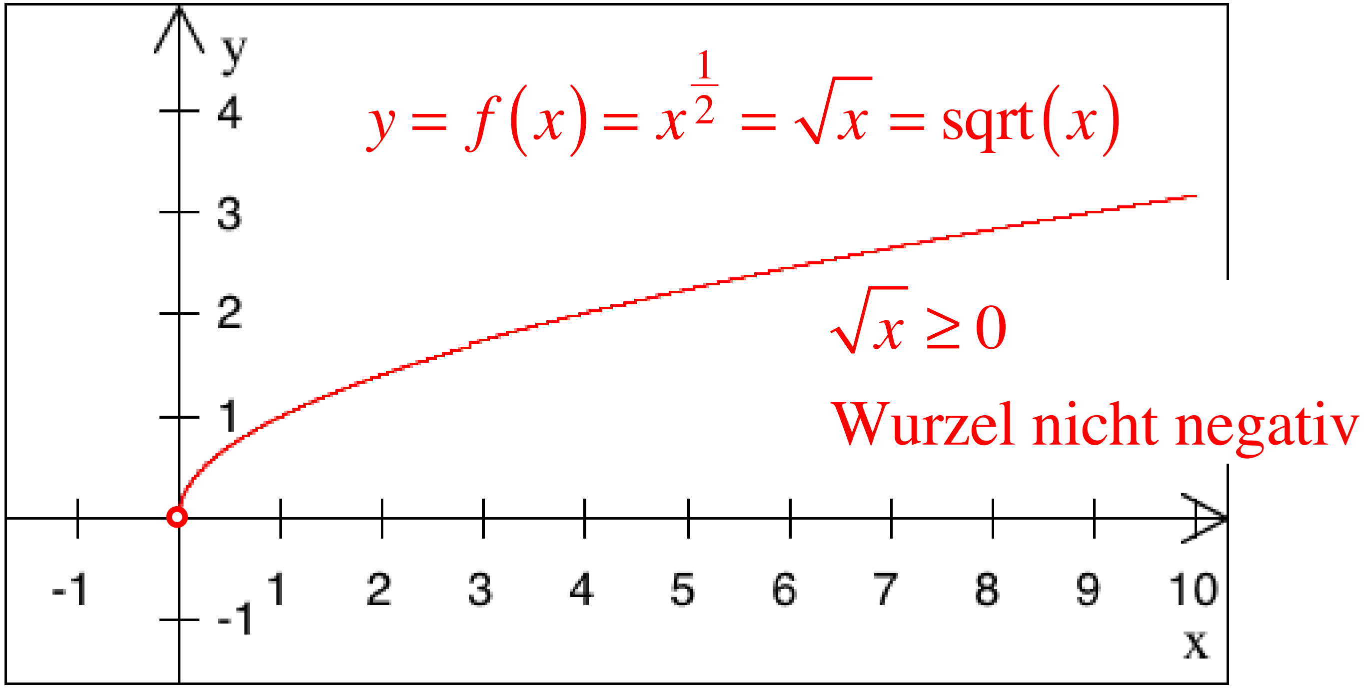
Allgemein:

$$x^{\frac{p}{q}} = \left(x^{\frac{1}{q}}\right)^p = \left(\sqrt[q]{x}\right)^p = \sqrt[q]{x^p} = \left(x^p\right)^{\frac{1}{q}} \qquad (x \geq 0)$$

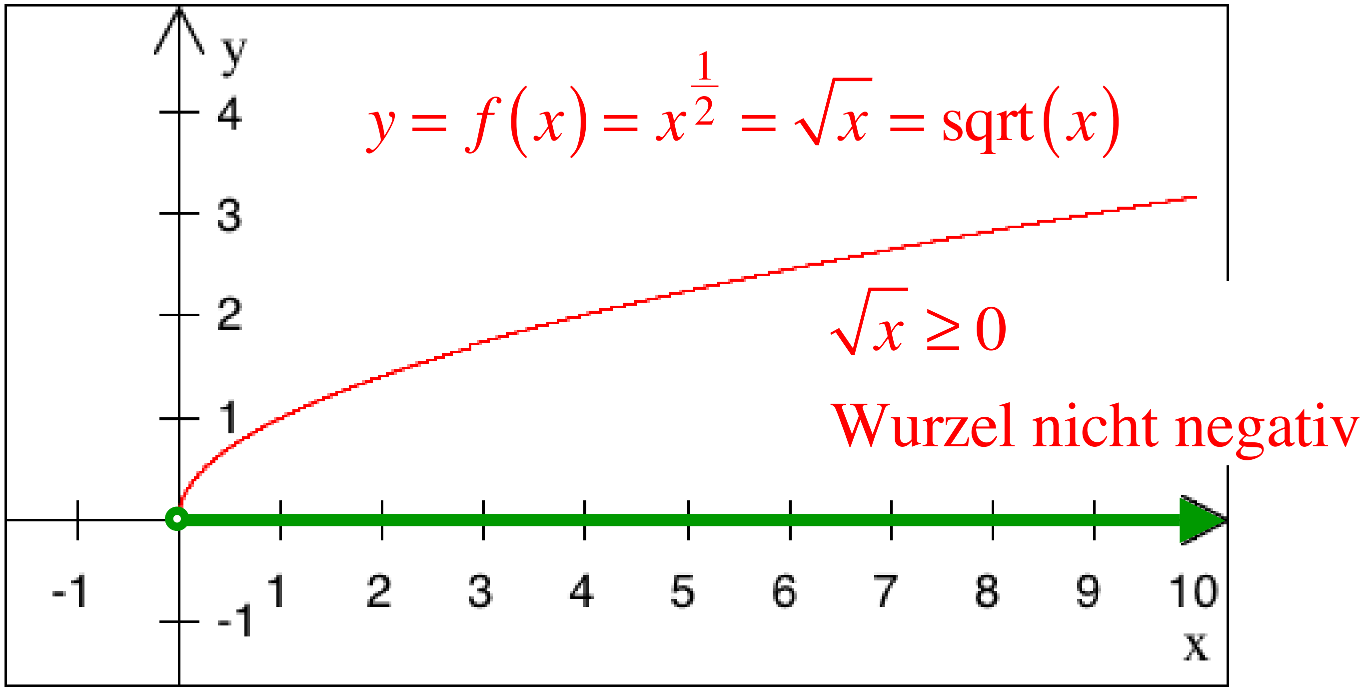
Gebrochene Exponenten



Gebrochene Exponenten



Gebrochene Exponenten



Definitionsbereich $A = \{x | x \geq 0\}$

Umkehrfunktion (inverse Funktion)

Liestal hin und zurück

Umkehrfunktion (inverse Funktion)

Funktion: $x \quad \mapsto \quad y = f\left(x\right)$

Liestal hin und zurück

Umkehrfunktion (inverse Funktion)

Funktion: $x \quad \mapsto \quad y = f(x)$

kein Exponent

Umkehrfunktion: $y \quad \mapsto \quad x = f^{[-1]}(y)$

Liestal hin und zurück

Umkehrfunktion (inverse Funktion)

Funktion: $x \quad \mapsto \quad y = f(x)$

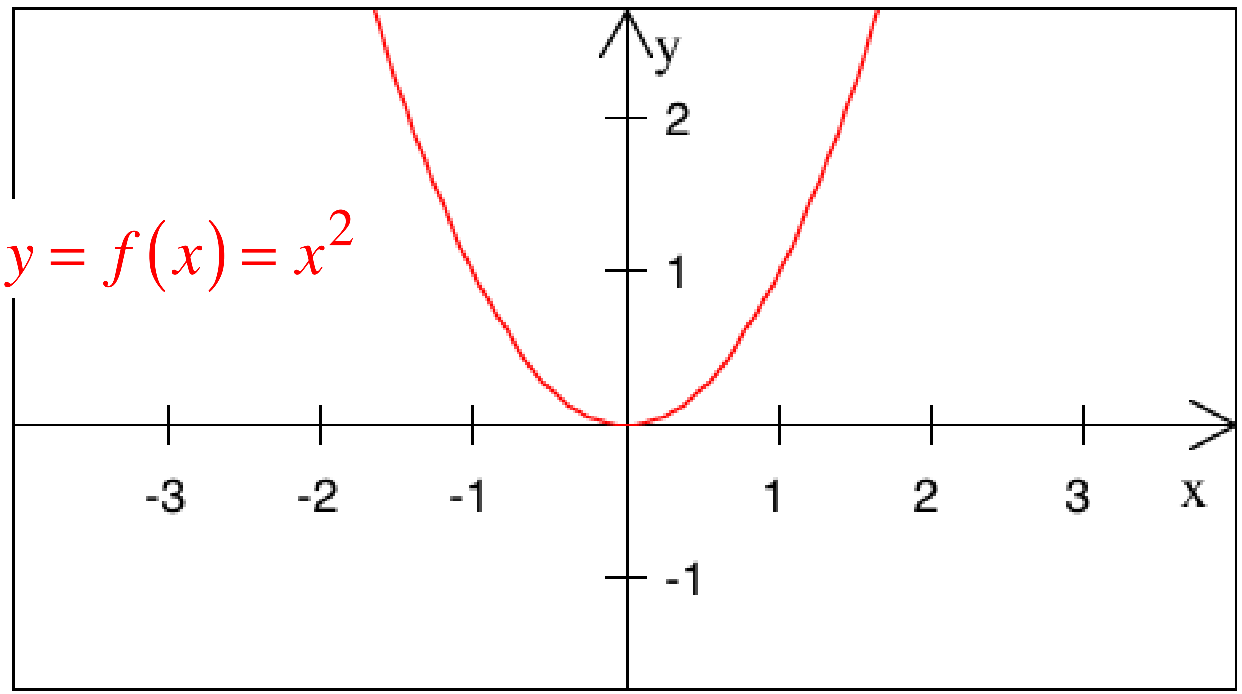
kein Exponent

Umkehrfunktion: $y \quad \mapsto \quad x = f^{[-1]}(y)$

Bezeichnungsproblem: $x \quad \mapsto \quad y = f^{[-1]}(x)$

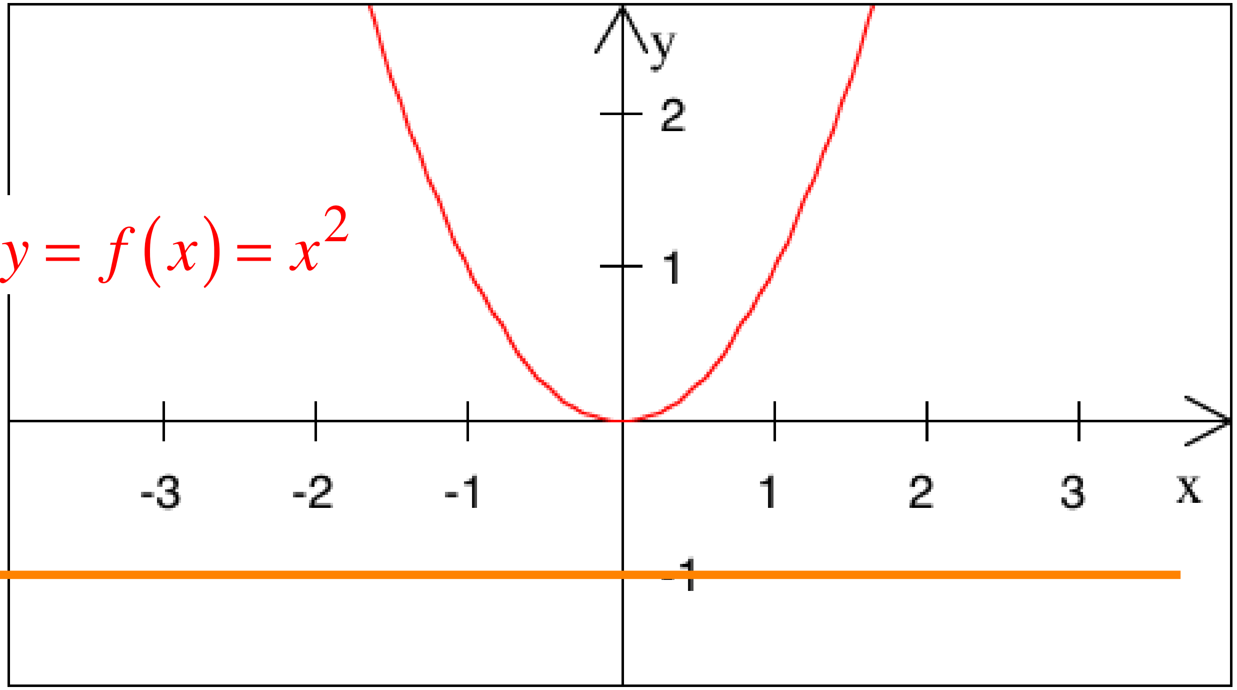
Liestal hin und zurück

$$x \quad \mapsto \quad y = f(x) = x^2$$



Umkehrung: $\quad y \overset{?}{\mapsto} x$

$x \quad \mapsto \quad y = f(x) = x^2$

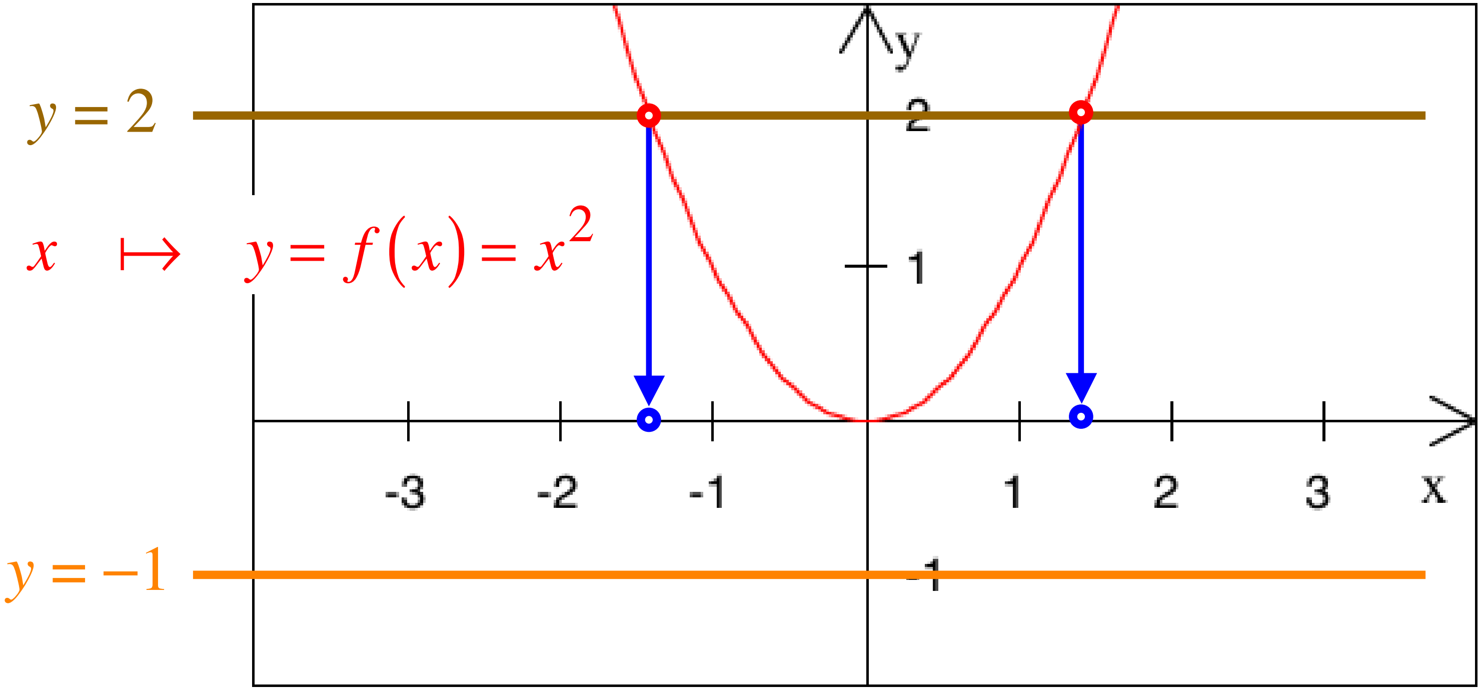


$y = -1$

Umkehrung: $\quad y \quad \overset{?}{\mapsto} \quad x$

Existenzproblem: $\quad y = -1 \quad$ kein passendes x

Tiefstapler

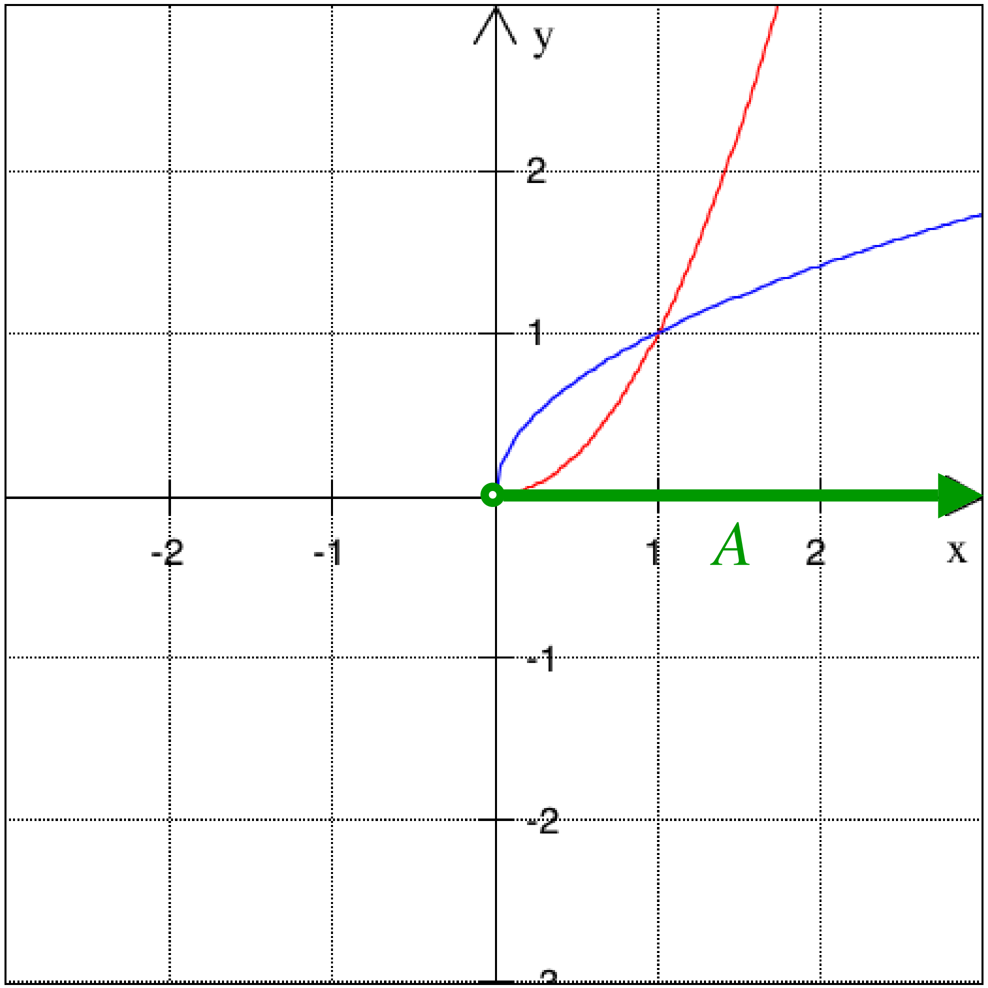


$$\text{Umkehrung:}\quad y \overset{?}{\mapsto} x$$

Existenzproblem: $y = -1$ kein passendes x

Eindeutigkeitsproblem: $y = 2$ zwei passende x: $x_1 = \sqrt{2}$ $x_2 = -\sqrt{2}$

Funktion und Umkehrfunktion



Funktion

$y = f(x) = x^2$

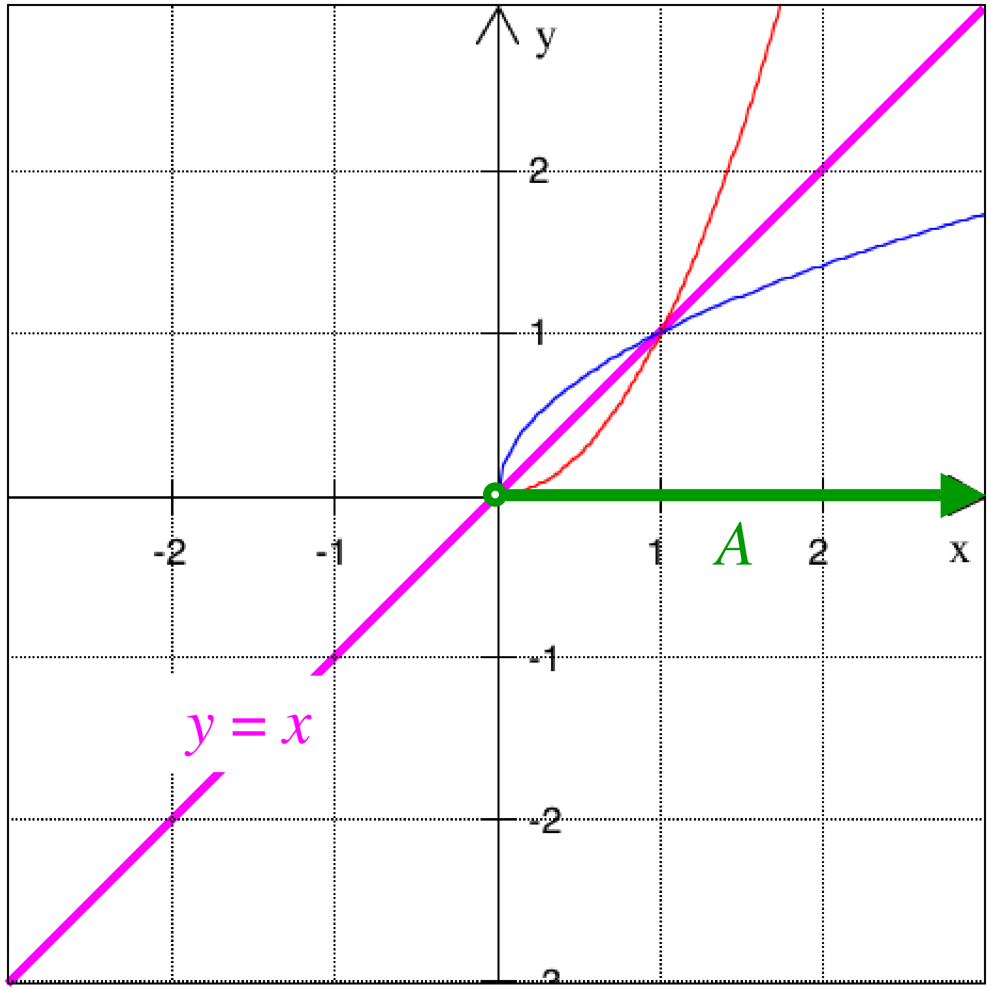
Eingeschränkter Definitionsbereich für f

$A = \{x | x \geq 0\}$

Umkehrfunktion

$g(x) = f^{[-1]}(x) = \sqrt{x}$

Funktion und Umkehrfunktion



Spiegelachse $y = x$

Funktion

$y = f(x) = x^2$

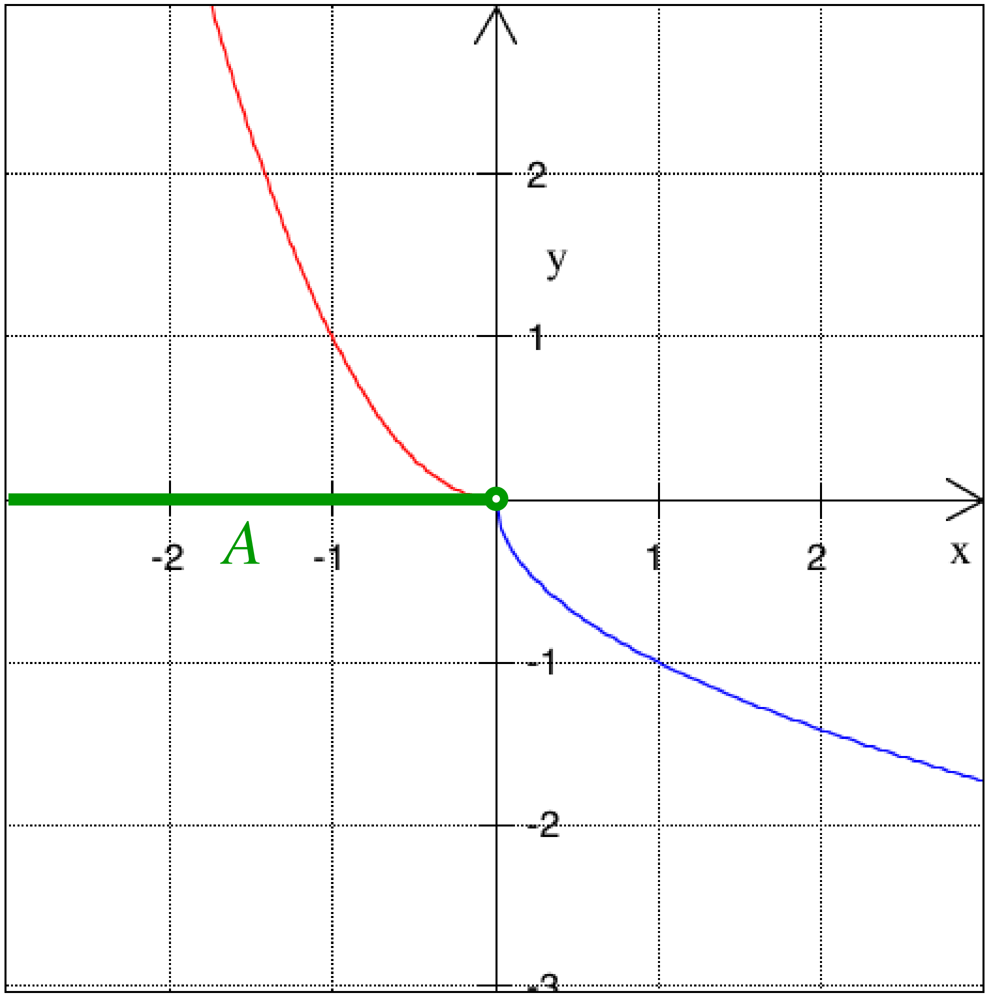
Eingeschränkter Definitionsbereich für f

$A = \{x | x \geq 0\}$

Umkehrfunktion

$g(x) = f^{[-1]}(x) = \sqrt{x}$

Funktion und Umkehrfunktion



Funktion

$$y = f(x) = x^2$$

Eingeschränkter

Definitionsbereich für f

$$A = \{x \mid x \leq 0\}$$

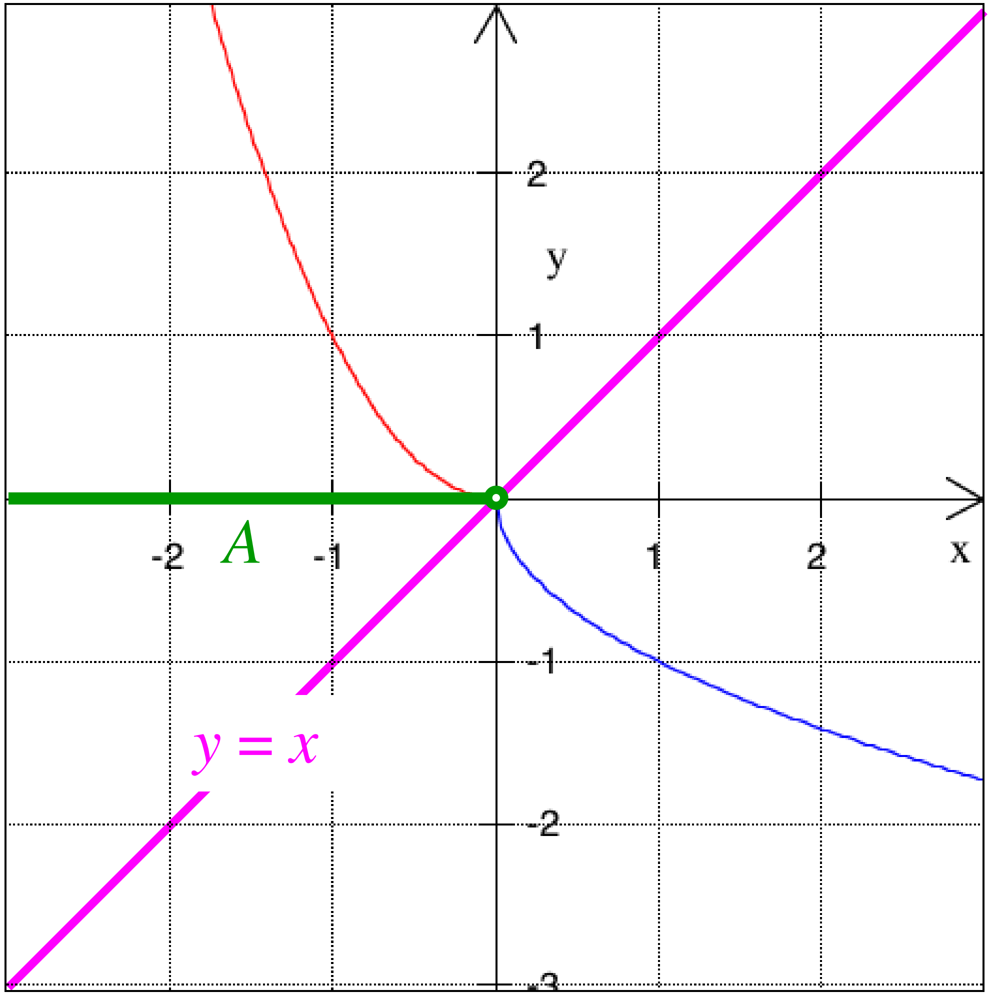
Der kleine Unterschied

Umkehrfunktion

$$g(x) = f^{[-1]}(x) = -\sqrt{x}$$

Der kleine Unterschied

Funktion und Umkehrfunktion



Spiegelachse $y = x$

Funktion

$$y = f(x) = x^2$$

Eingeschränkter Definitionsbereich für f

$$A = \{x \mid x \leq 0\}$$

Umkehrfunktion

$$g(x) = f^{[-1]}(x) = -\sqrt{x}$$

Funktion und Umkehrfunktion

Wie finden wir die Umkehrfunktion?

(1) $x \leftrightarrow y$ $\quad$ x und y vertauschen

(2) nach y auflösen

Funktion und Umkehrfunktion

Beispiel: $$y = \frac{1}{2}x + 1$$

Funktion und Umkehrfunktion

Beispiel: $$y = \frac{1}{2}x + 1$$

(1) $x \quad \leftrightarrow \quad y$ $$x = \frac{1}{2}y + 1$$

Funktion und Umkehrfunktion

Beispiel: $$y = \frac{1}{2}x + 1$$

(1) $x \leftrightarrow y$ $$x = \frac{1}{2}y + 1$$

(2) nach y auflösen $$\frac{1}{2}y = x - 1$$

Funktion und Umkehrfunktion

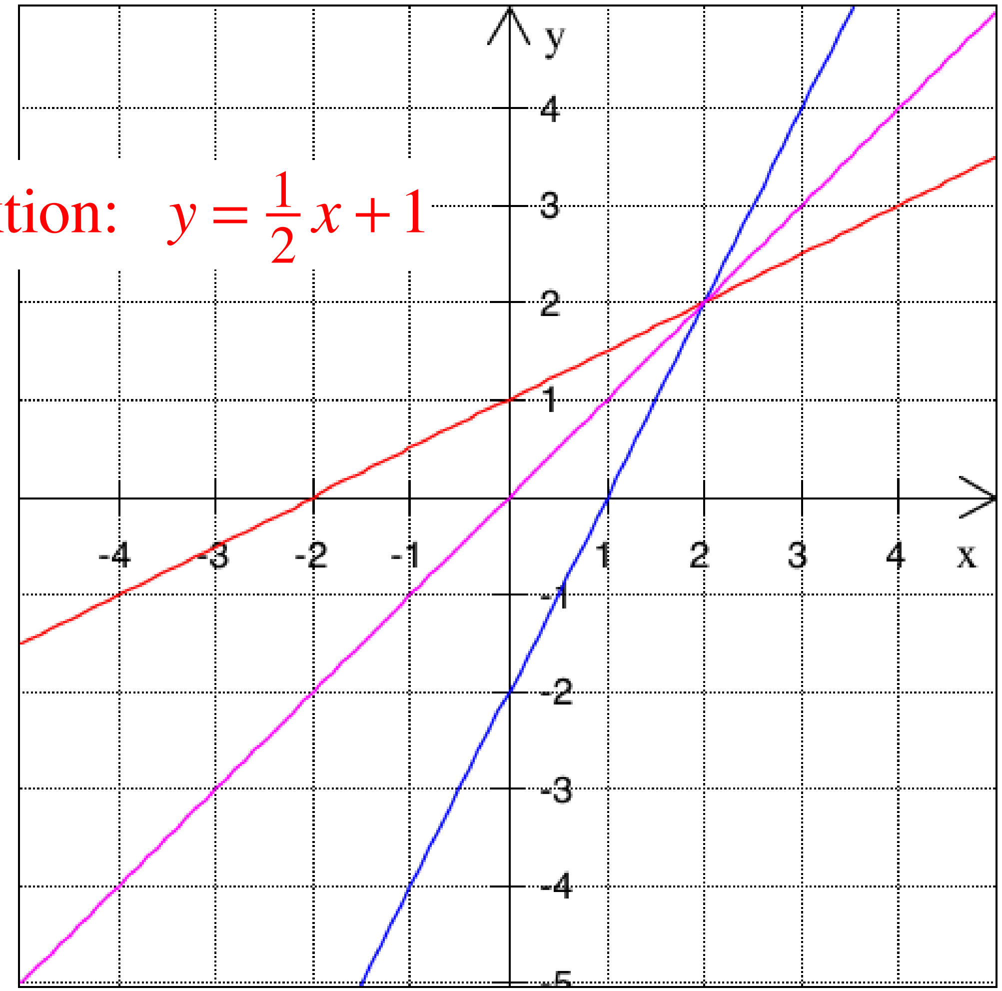
Beispiel: $$y = \frac{1}{2}x + 1$$

(1) $x \quad \leftrightarrow \quad y$ $$x = \frac{1}{2}y + 1$$

(2) nach y auflösen $$\frac{1}{2}y = x - 1$$

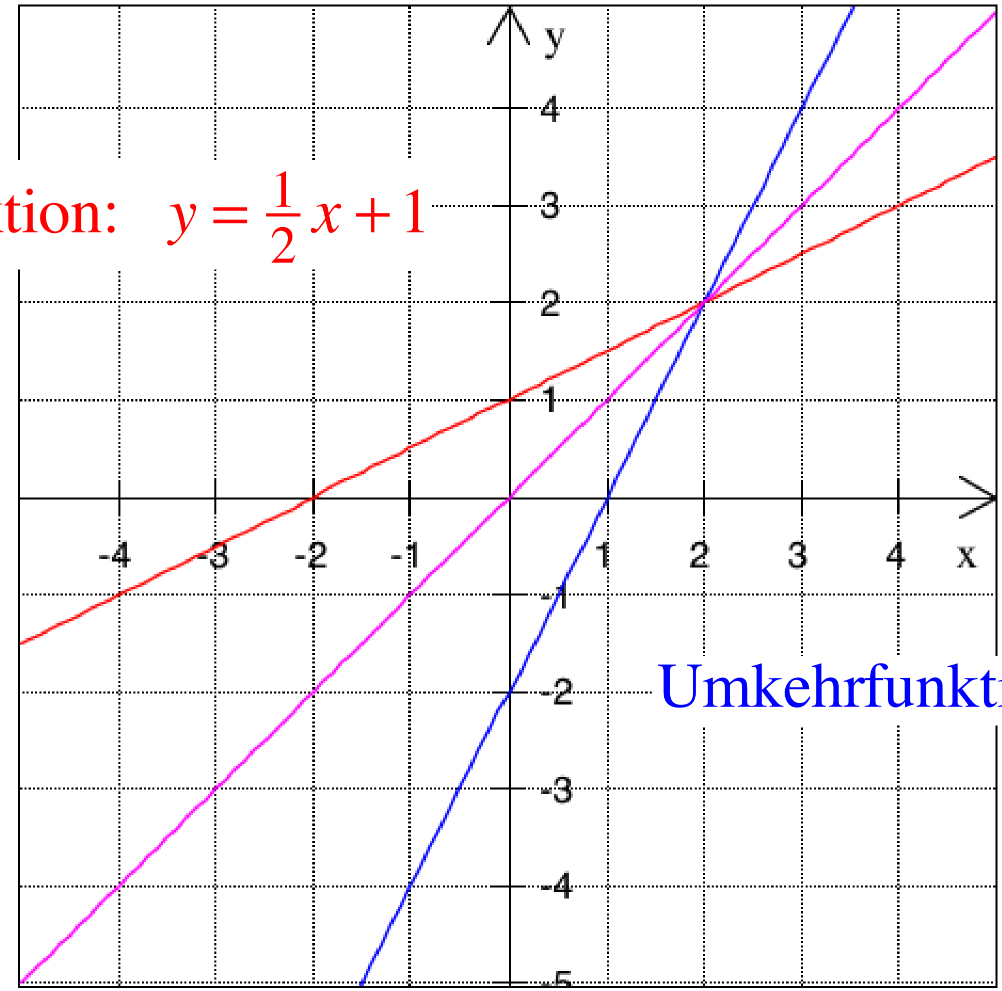
$$y = 2x - 2$$

Funktion und Umkehrfunktion



Funktion: $y = \frac{1}{2}x + 1$

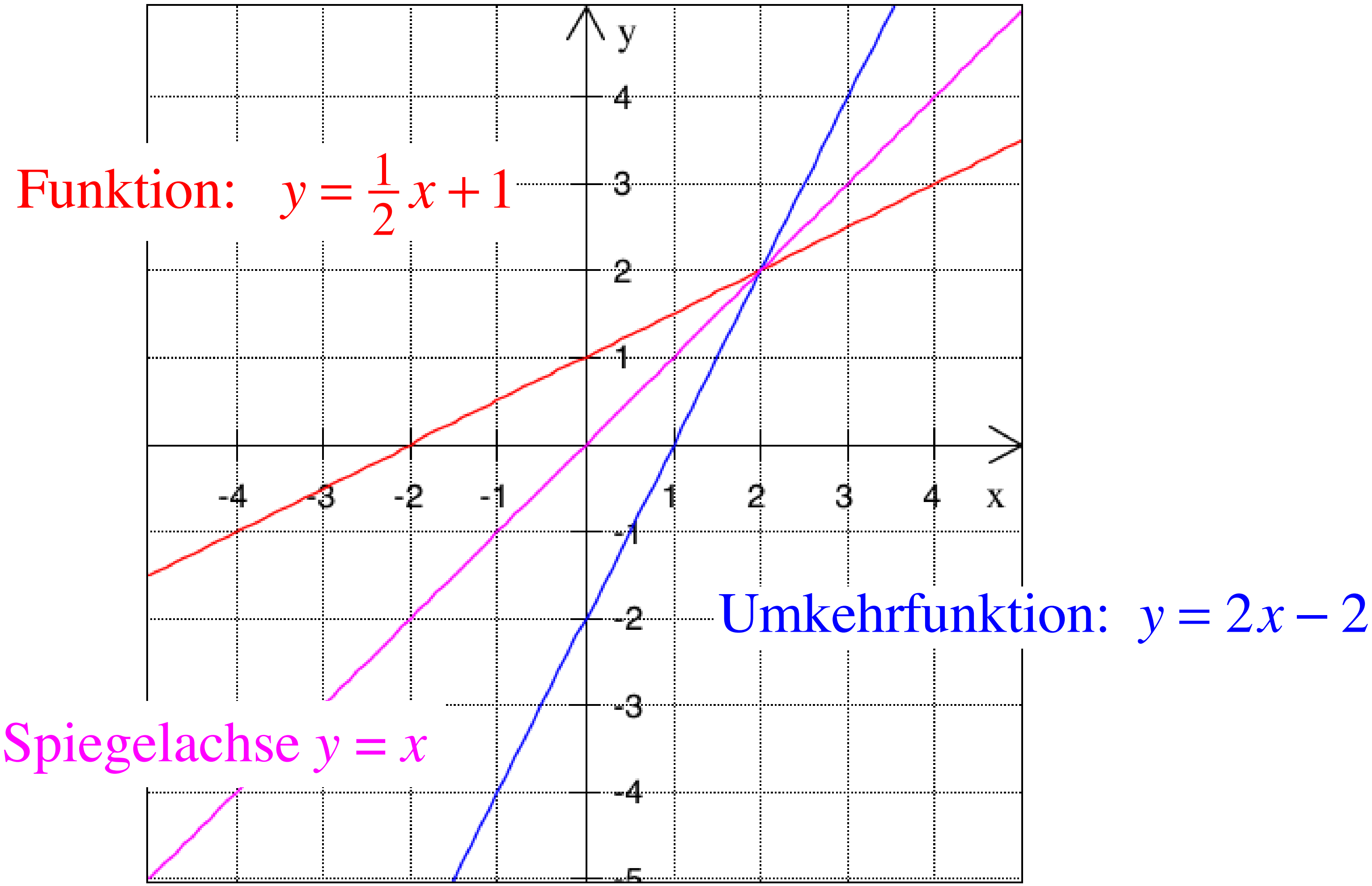
Funktion und Umkehrfunktion



Funktion: $y = \frac{1}{2}x + 1$

Umkehrfunktion: $y = 2x - 2$

Funktion und Umkehrfunktion



Funktion f	Definitionsbereich von f	Umkehrfunktion $f^{[-1]}$
x^2	$[0,\infty)$	$\sqrt{x}$
x^3	$\mathbb{R}$	$\sqrt[3]{x}$
e^x	$\mathbb{R}$	$\ln(x)$
10^x	$\mathbb{R}$	$\log_{10}(x)$
$\sin(x)$	$\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$	$\arcsin(x)$
$\cos(x)$	$[0,\pi]$	$\arccos(x)$
$\tan(x)$	$\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$	$\arctan(x)$