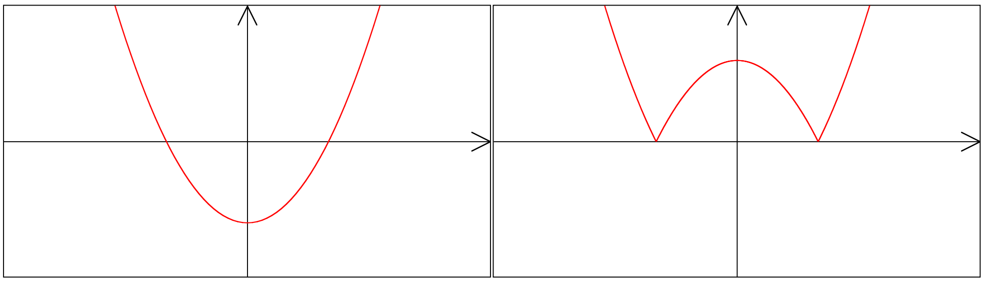
Hans Walser

Mathematik 1 für Naturwissenschaften



Modul 101

Einführung

UNI BASEL

Inhalt

Modul 101 für die Lehrveranstaltung *Mathematik 1 für Naturwissenschaften*

Winter 2001/02	Erstausgabe, auf der Basis des Vorlesungsskriptes von Hans Christoph Im Hof und Hanspeter Kraft
Winter 2003/04	Überarbeitung
Winter 2004/05	Fehlerkorrekturen, Kürzungen
Winter 2005/06	Kürzungen. Geändertes Layout
Winter 2006/07	MathType. Kürzungen
Herbst 2007	Kleine Erweiterung
Herbst 2008	Geändertes Layout
Herbst 2011	Kleine Erweiterung
Herbst 2012	Erweiterung und Kürzung
Herbst 2013	Kürzung

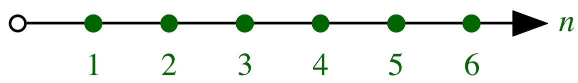
last modified: 19. September 2013

Hans Walser
Mathematisches Institut, Rheinsprung 21, 4051 Basel
www.walser-h-m.ch/hans/

1 Zahlen

1.1 Natürliche Zahlen

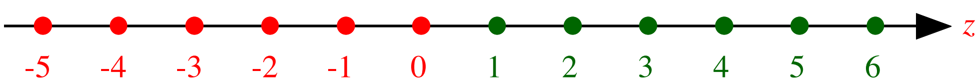
$\mathbb{N}$: Menge der *natürlichen* Zahlen $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ ...\}$



Menge der natürlichen Zahlen

1.2 Ganze Zahlen

$\mathbb{Z}$: Menge der *ganzen* Zahlen $\mathbb{Z} = \{..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ ...\}$



Menge der ganzen Zahlen

1.3 Rationale Zahlen

$\mathbb{Q}$: Menge der *rationalen* Zahlen (Brüche) $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \mid p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N} \right\}$. In $\mathbb{Q}$ sind alle Operationen (Addition, Subtraktion, Multiplikation, Division) in eindeutiger Weise durchführbar, außer der Division durch 0.

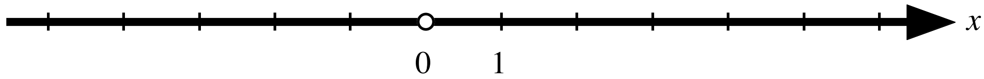
Darstellung als Bruch oder Dezimalbruch:

$\frac{1}{4} = 1:4 = 0.25$	unproblematisch ("kurzer" Dezimalbruch),
$\frac{1}{3} = 1:3 = 0.3333$	nur approximativer Wert (Taschenrechner!)
$\frac{1}{3} = 1:3 = 0.\overline{3}$	Darstellung mit Periodizitätsangabe

1.4 Reelle Zahlen

Es stellt sich heraus, dass viele wichtige Zahlen *nicht* rational sind, etwa $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{5}$, $\ln(3)$, $\sin(10°)$, π, e (Basis der natürlichen Logarithmen). Diese Zahlen werden als *irrationale Zahlen* bezeichnet.

Die rationalen und irrationalen Zahlen werden zur Menge der *reellen Zahlen* zusammengefasst. Die Menge der reellen Zahlen wird mit $\mathbb{R}$ bezeichnet, sie umfasst sämtliche Zahlen auf der Zahlengeraden.



Menge der reellen Zahlen

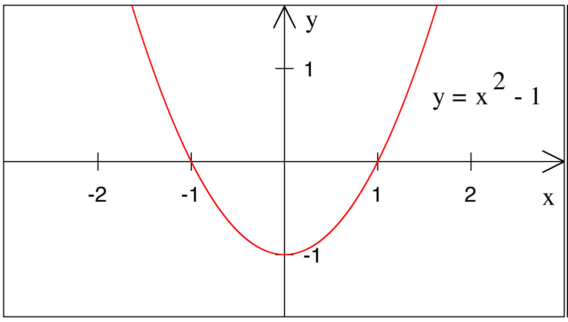
2 Symbole

2.1 Der absolute Betrag

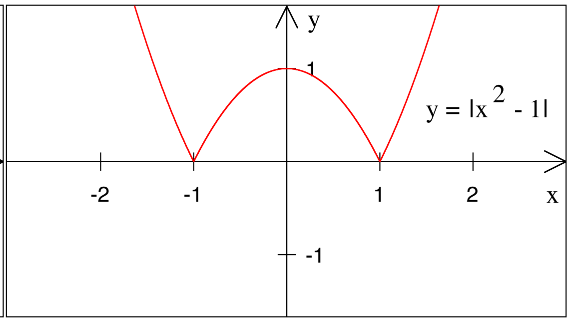
Der *absolute Betrag* einer reellen Zahl ist definiert durch:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{falls } x \geq 0 \\ -x & \text{falls } x < 0 \end{cases}$$

Anschaulich ist $|x|$ der Abstand der Zahl x vom Nullpunkt auf der Zahlengeraden.



$y = x^2 - 1$



$y = \left|x^2 - 1\right|$

2.2 Mengentheoretische Symbole

- $x \in \mathbb{R}$: Dies bedeutet, dass x ist eine reelle Zahl ist, d.h. x gehört zur Menge $\mathbb{R}$ (oder: x ist Element der Menge $\mathbb{R}$).
- $\frac{1}{2} \notin \mathbb{N}$: Dies heißt, dass $\frac{1}{2}$ keine natürliche Zahl ist, d.h. dass $\frac{1}{2}$ nicht zur Menge $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen gehört.
- $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$: Jede ganze Zahl ist rational, d.h. die ganzen Zahlen bilden eine (echte) *Teilmenge* der rationalen Zahlen.
- $A \subseteq \mathbb{R}$: A ist eine Teilmenge der reellen Zahlen (eventuell auch ganz $\mathbb{R}$).
- $\mathbb{R} \setminus A$: Menge der reellen Zahlen, die nicht in A liegen $= \{x \in \mathbb{R} \mid x \notin A\}$.
- $\mathbb{R}^2 =$ Menge der geordneten Zahlenpaare $= \{(x,y) \mid x,y \in \mathbb{R}\}$.
- $A \times B =$ Menge der geordneten Zahlenpaare $= \{(x,y) \mid x \in A, y \in B\}$.
- $[a,b] =$ abgeschlossenes Intervall zwischen a und b $= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$.
- $(a,b) =$ offenes Intervall zwischen a und b $= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$

3 Funktionen

Der Funktionsbegriff ist einer der zentralsten Begriffe in der Mathematik. Er spielt auch bei allen Anwendungen in den Naturwissenschaften eine fundamentale Rolle.

Motivation und Beispiele: Messbare Größen hängen meist von anderen messbaren Größen ab. Diese Abhängigkeit ist oft durch eine „Formel“ beschrieben.

3.1 Beispiel: Zustandsgleichung des idealen Gases

Der Druck eines Gases in einem geschlossenen Gefäß hängt von der Temperatur und dem Volumen ab. Mit Hilfe geeigneter Skalen wird der Druck durch eine Größe $p \in \mathbb{R}$, die (absolute) Temperatur durch $T \in \mathbb{R}$ und das Volumen durch $V \in \mathbb{R}$ angegeben, und jedem bestimmten Wert von V und T entspricht ein Wert von p. Für 1 mol (1 mol = $6.022 \cdot 10^{23}$ Moleküle bzw. Atome (AVOGADROsche Zahl)) eines idealen Gases gilt die Beziehung:

$$p = \frac{RT}{V}, \text{ wobei } R \text{ eine (absolute) Konstante ist.}$$

Halten wir also das Volumen fest, so gilt:

$$p(T) = \frac{R}{V} T$$

Halten wir aber die Temperatur fest, so gilt:

$$p(V) = RT \frac{1}{V}$$

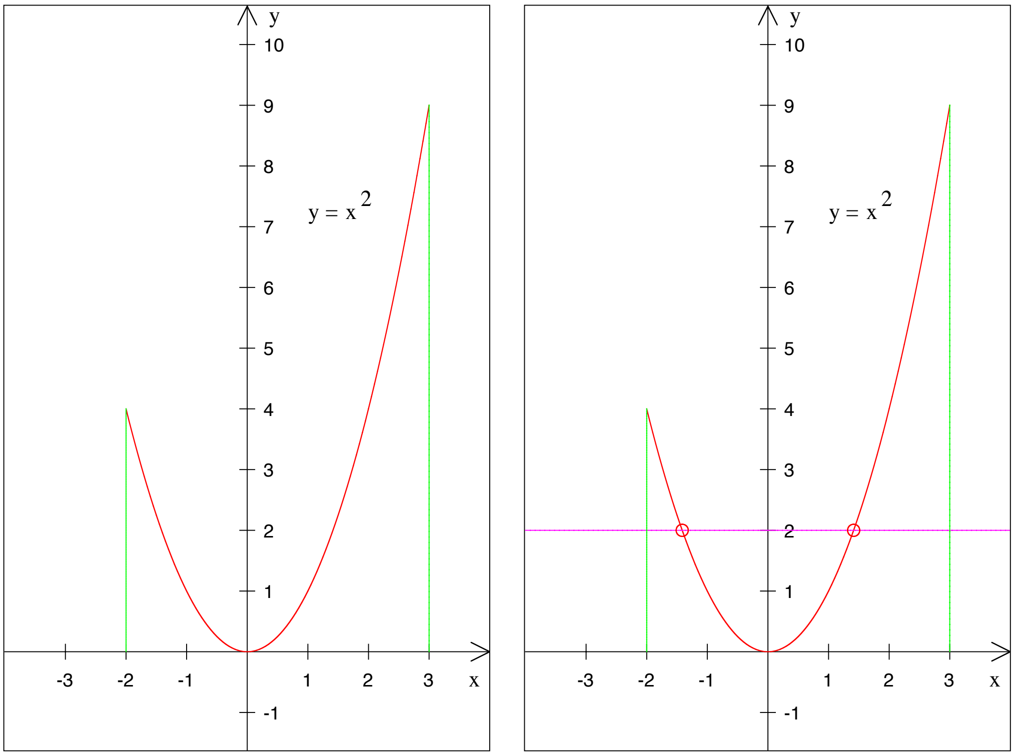
3.2 Definition

Sei $A \subset \mathbb{R}$ eine Teilmenge von $\mathbb{R}$. *Eine Funktion mit Definitionsbereich A* ist eine Vorschrift, welche jeder Zahl $x \in A$ eine Zahl $f(x) \in \mathbb{R}$ zuordnet:

$$f: \quad A \to \mathbb{R}$$

Das Zeichen f symbolisiert die *Vorschrift*, $x \in A$ heißt *Argument* und $f(x) \in \mathbb{R}$ heißt der *Wert* von f für das Argument x oder auch das *Bild* von x unter f.

Der *Graph* einer Funktion besteht aus den Punkten $(x, f(x))$, $x \in A$.



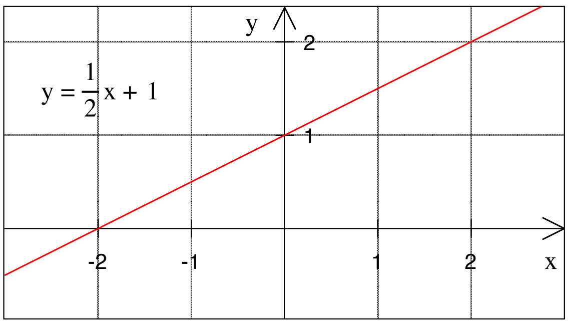
Definitionsbereich [-2, 3] **Mehrere x -Werte mit $y = 2$**

Umgekehrt können jedoch mehreren $x_1, x_2, \ldots \in A$ der gleiche Wert y zugeordnet sein, das heißt, die Parallele zur x-Achse in der Höhe y kann den Graph in mehreren Punkten schneiden.

3.3 Standardbeispiele

3.3.1 Die lineare Funktion

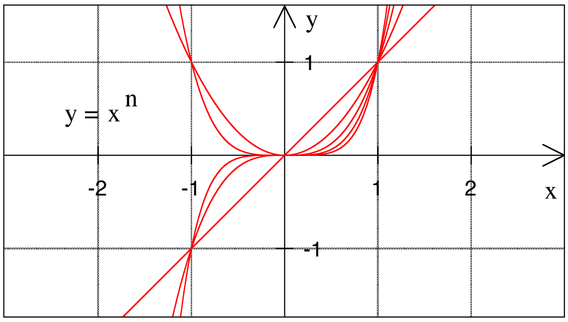
Die lineare Funktion ist von der Form: $f(x) = ax + b$. Ihr Definitionsbereich ist $\mathbb{R}$ und ihr Graph ist eine Gerade mit Steigung a und y-Achsenabschnitt b:



$f(x) = ax + b$

3.3.2 Potenzfunktionen

Die allgemeine Potenzfunktion ist von der Form $f(x) = x^n \quad (n \in \mathbb{N})$. Das folgende Beispiel zeigt die Situation für $n = 1, 2, 3, 4, 5$. Welche Kurve gehört zu welchem n? Welche Symmetrien haben die einzelnen Kurven?



$f(x) = x^n$ **für** $n = 1, 2, 3, 4, 5$

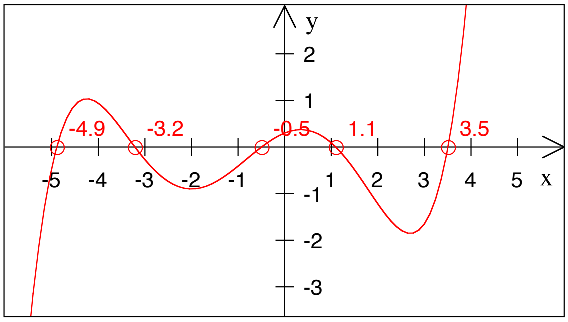
3.3.3 Polynome

Eine *Polynomfunktion* oder kurz *Polynom* vom Grad n ist eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ von der Gestalt:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \quad (a_n \neq 0)$$

Die a_i heißen die *Koeffizienten* des Polynoms. Die konstanten Funktionen sind also Polynome vom Grad 0, die linearen Funktionen solche vom Grad 1, die quadratischen vom Grad 2 und die kubischen vom Grad 3.

Beispiel: $f(x) = 0.01x^5 + 0.04x^4 - 0.16x^3 - 0.5x^2 + 0.4x + 0.3$. Dieses Beispiel enthält fünf Nullstellen.



$f(x) = 0.01x^5 + 0.04x^4 - 0.16x^3 - 0.5x^2 + 0.4x + 0.3$

Allgemein hat ein Polynom vom Grad n höchstens n Nullstellen.

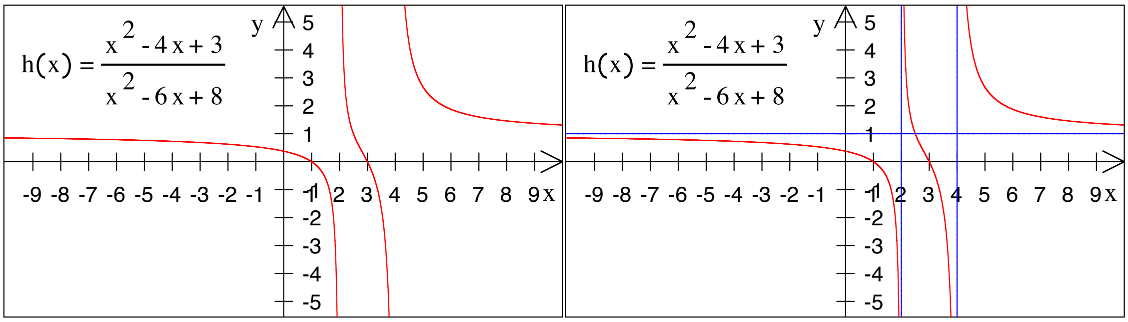
3.3.4 Rationale Funktionen

Eine rationale Funktion hat die Form:

$$h(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \text{ mit Polynomen } f \text{ und } g$$

Der größtmögliche Definitionsbereich von h ist $\left\{x \in \mathbb{R} \mid g(x) \neq 0\right\}$. Die Nullstellen von g müssen entfernt werden. Warum?

Beispiel: $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{(x-1)(x-3)}{(x-2)(x-4)} = \frac{x^2-4x+3}{x^2-6x+8}$



Rationale Funktion, mit Asymptoten

3.4 Allgemeine Potenzen

3.4.1 Potenzieren von Potenzen

Es geht um die Frage „hoch, hoch". Die Reihenfolge ist dabei wesentlich:

$$2^{\left(3^4\right)} = 2^{81} \approx 2.417851639229258 \cdot 10^{24}$$

$$\left(2^3\right)^4 = 8^4 = 4096$$

Aus diesem Grunde ist das Klammersetzen sinnvoll. Die Rechnung beginnt dabei immer in der innersten Klammer.

Wenn Klammern fehlen, gilt die Konvention: „Oben beginnen". Also:

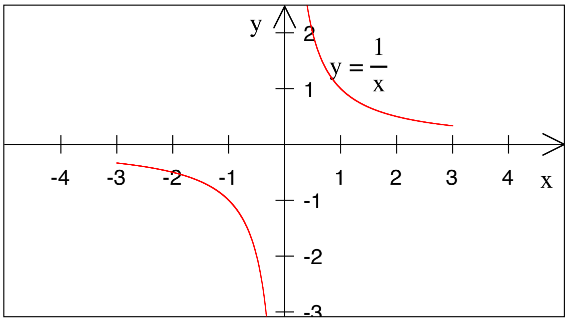
$$2^{3^4} = 2^{\left(3^4\right)} = 2^{81} \approx 2.417851639229258 \cdot 10^{24}$$

3.4.2 Negative Exponenten

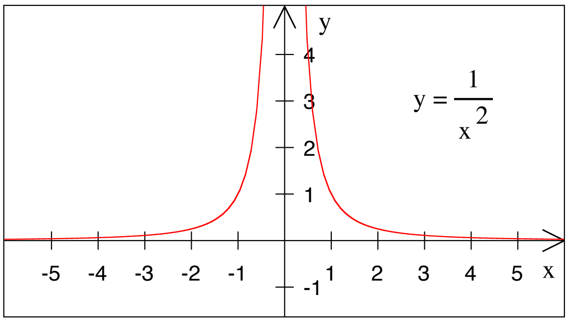
Für natürliche Zahlen $n \in \mathbb{N}$ ist:

$$x^n = \underbrace{x \cdot x \cdot x \cdot \quad \cdots \quad \cdot x}_{n \text{ Faktoren}}$$

Wir definieren nun weiter (für $x \neq 0$): $x^0 = 1$ und $x^{-n} = \frac{1}{x^n}$ für $n \in \mathbb{N}$



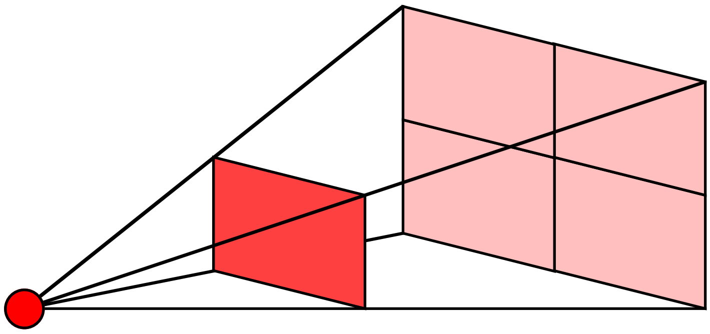
$$f(x) = x^{-1} = \frac{1}{x}$$



$$f(x) = x^{-2} = \frac{1}{x^2}$$

Die Funktion $f(x) = x^{-2} = \frac{1}{x^2}$ tritt in den formal gleichlautenden Kraftgesetzen von NEWTON und COULOMB auf.

Allgemein nimmt die Intensität einer punktförmigen Quelle mit dem Quadrat des Abstandes ab.



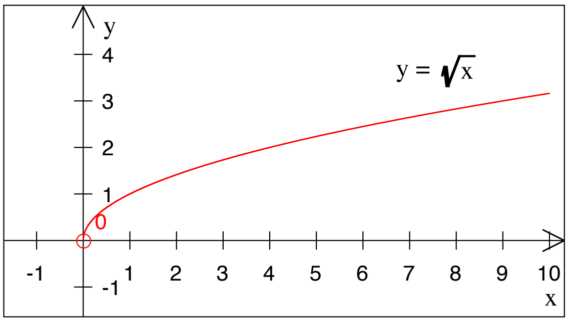
Intensität nimmt mit dem Quadrat des Abstandes ab

3.4.3 Gebrochene Exponenten

Für $x^{\frac{1}{2}}$ überlegen wir, dass auf Grund der Rechenregeln der Potenzrechnung gelten muss:

$$\left(x^{\frac{1}{2}}\right)^2 = x^{\frac{1}{2}} \cdot x^{\frac{1}{2}} = x^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} = x^1 = x$$

Somit ist folgende Definition sinnvoll: $x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x} \quad (x \geq 0)$



$f(x) = \sqrt{x}$

Allgemein definieren wir für $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ (Verschiedene Schreibweisen, die alle dasselbe bedeuten):

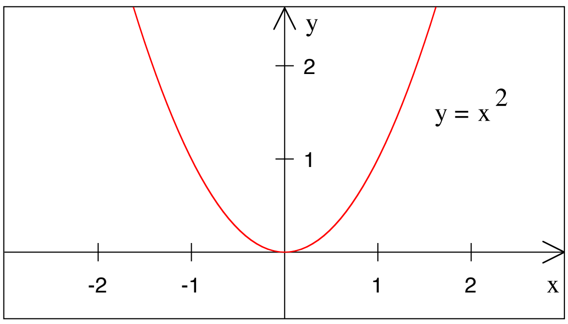
$$x^{\frac{p}{q}} = \left(x^{\frac{1}{q}}\right)^p = \left(\sqrt[q]{x}\right)^p = \sqrt[q]{x^p} = \left(x^p\right)^{\frac{1}{q}} \qquad (x \geq 0)$$

Frage: Wie können wir x^π definieren? ($\pi \notin \mathbb{Q}$).

3.5 Funktion und Umkehrfunktion

Anschaulich ist die Umkehrfunktion $g = f^{[-1]}$ (hier ist das -1 *kein* Exponent, sondern dient zur Bezeichnung der Umkehrfunktion) der Funktion f diejenige Vorschrift, die einer Zahl b diejenige Zahl a zuordnet, für die $f(a) = b$ gilt. Das Problem besteht darin, dass es zu einem b eventuell kein a gibt mit dieser Eigenschaft („Existenzproblem") oder mehrere solche a („Eindeutigkeitsproblem").

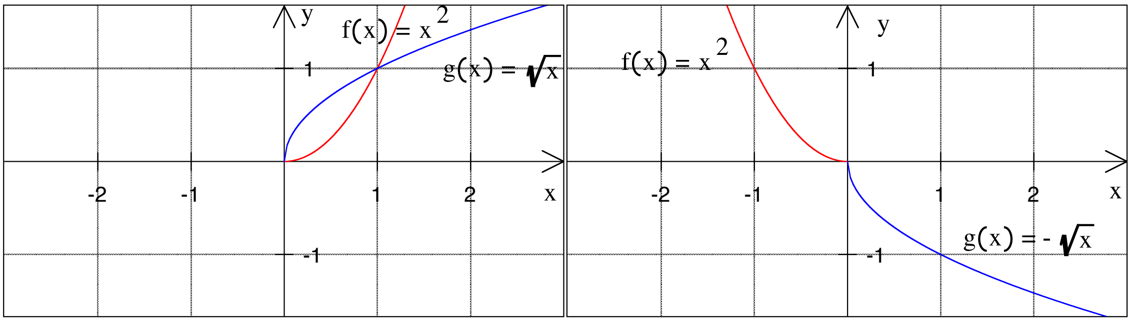
Beide Probleme tauchen zum Beispiel bei der Funktion $f(x) = x^2$ auf:



$f(x) = x^2$

Für ein negatives b gibt es kein passendes a, für ein positives b gleich zwei passende a. Das erste Problem (Existenzproblem) lässt sich durch Einschränken des Definitionsbereiches der Umkehrfunktion $g = f^{[-1]}$ lösen. In unserem Beispiel müssen wir uns auf nicht negative Werte beschränken. Zur Behandlung des zweiten Problems (Eindeutigkeitsproblem) müssen wir selber entscheiden, welches a wir für die Umkehrfunktion verwenden sollen. Das heißt, wir müssen den Definitionsbereich der ursprünglichen Funktion *f* einschränken.

Als Beispiel zwei Lösungen für die Quadratfunktion $y = f(x) = x^2$ und ihre Umkehrfunktion $g(x) = f^{[-1]}(x) = \sqrt{x}$:



Funktion und Umkehrfunktion

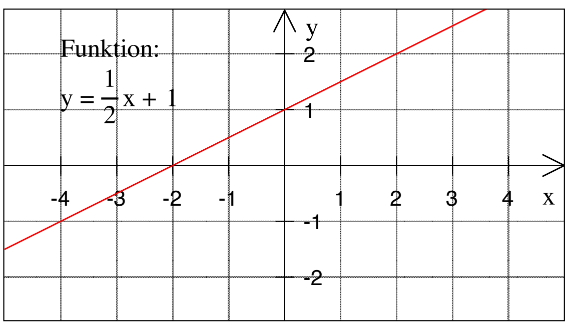
In beiden Fällen liegen die Graphen von *f* und der Umkehrfunktion $g = f^{[-1]}$ spiegelbildlich zur Geraden $y = x$.

3.5.1 Wie finden wir die Umkehrfunktion?

(1) *x* und *y* vertauschen

(2) nach *y* auflösen

Beispiel: $y = \frac{1}{2}x + 1$



Funktion und Umkehrfunktion

3.5.2 Umkehrfunktion von Standardfunktionen

Funktion f	Definitionsbereich von f	Umkehrfunktion $f^{[-1]}$
x^2	$[0,\infty)$	$\sqrt{x}$
x^3	$\mathbb{R}$	$\sqrt[3]{x}$
e^x	$\mathbb{R}$	$\ln(x)$
10^x	$\mathbb{R}$	$\log_{10}(x)$
$\sin(x)$	$\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$	$\arcsin(x)$
$\cos(x)$	$[0,\pi]$	$\arccos(x)$
$\tan(x)$	$\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$	$\arctan(x)$

4 Zusammenfassung

4.1 Zahlen und Symbole

Natürliche Zahlen $\mathbb{N}$, Ganze Zahlen $\mathbb{Z}$, Rationale Zahlen $\mathbb{Q}$, Reelle Zahlen $\mathbb{R}$

Der absolute Betrag $|x|$, Mengentheoretische Symbole, Implikation und Äquivalenz

4.2 Funktionen

Jeder Zahl $x \in A$ wird eine Zahl $f(x) \in \mathbb{R}$ zuordnet: $f: \quad A \to \mathbb{R}$

Beispiele:

Lineare Funktion: $f(x) = ax + b$

Potenzfunktion: $f(x) = x^n \quad (n \in \mathbb{N})$.

Polynomfunktion: $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \quad (a_n \neq 0)$

Rationale Funktion: $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ mit Polynomen *f* und *g*

4.3 Potenzen

$$x^n = \underbrace{x \cdot x \cdot x \cdot \quad \cdots \quad \cdot x}_{n \text{ Faktoren}}$$

$$x^0 = 1 \text{ und } x^{-n} = \frac{1}{x^n}$$

$$x^{\frac{p}{q}} = \left(x^{\frac{1}{q}}\right)^p = \left(\sqrt[q]{x}\right)^p = \sqrt[q]{x^p} = \left(x^p\right)^{\frac{1}{q}} \qquad (x \geq 0)$$

4.4 Umkehrfunktion

Die Umkehrfunktion $g = f^{[-1]}$ (hier ist das -1 *kein* Exponent, sondern dient zur Bezeichnung der Umkehrfunktion) der Funktion *f* ist diejenige Vorschrift, die einer Zahl *b* diejenige Zahl *a* zuordnet, für die $f(a) = b$ gilt.

Probleme: Eindeutigkeit (allenfalls Definitionsbereich von *f* einschränken), Existenz

Vorgehen zum Finden der Umkehrfunktion:

(1) *x* und *y* vertauschen

(2) nach *y* auflösen