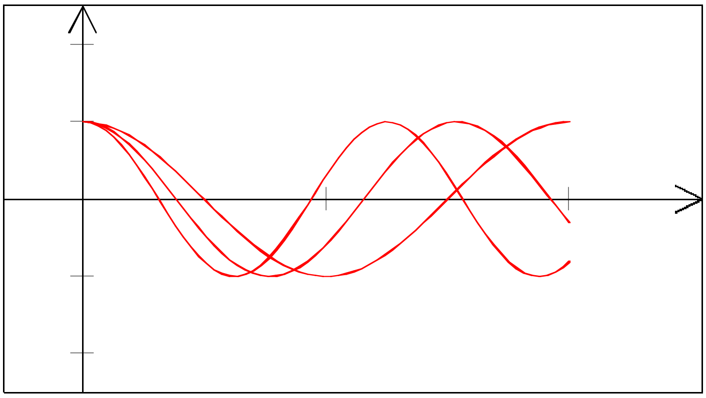
Hans Walser

Mathematik 1 für Naturwissenschaften



Modul 102

Funktionen, Folgen, Grenzwerte

Lernumgebung Teil 1

UNI BASEL

Modul 102 für die Lehrveranstaltung *Mathematik 1 für Naturwissenschaften*

Winter 2003/04 Erstausgabe
Winter 2004/05 Erweiterung
Winter 2005/06 Geändertes Layout. Fehlerkorrekturen
Winter 2006/07 Erweiterungen. MathType (selektiv). Unterteilung in 2 Teile
Herbst 2007 Erweiterung. Fehlerkorrekturen
Herbst 2008 Erweiterung
Herbst 2009 Erweiterung
Herbst 2010 Korrekturen und Erweiterung
Herbst 2012 Erweiterung. Grafische Überarbeitung. Fehlerkorrekturen
Herbst 2013 Erweiterung und Kürzung

last modified: 7. Oktober 2013

Hans Walser
Mathematisches Institut, Rheinsprung 21, 4051 Basel
http://www.walser-h-m.ch/hans

Inhalt

1 Umrechnung

a) Welches Gradmaß entspricht dem Bogenmaß 1?

b) Welches Bogenmaß hat der Winkel von 1°?

Ergebnis

a) 57.2958°

b) 0.01745

2 Umrechnung

Umrechnung ins jeweilige Winkelmaß (Exakter Wert und Näherungswert)

Degree (360°-Teilung)	Grad (400 gon-Teilung)	Radian
46°		
	46 gon	
		$0.4\,\square$

Ergebnis

Umrechnung ins jeweilige Winkelmaß

Degree (360°-Teilung)	Grad (400 gon-Teilung)	Radian
46°	$51.\overline{1}$ gon	$\frac{23}{90}\pi \approx 0.80285$
41.4°	46 gon	$0.23\pi \approx 0.7226$
72°	80 gon	$0.4\,\square$

3 Wer hat recht?

Daniels Taschenrechner liefert: $\sin\left(\frac{\square}{2}\right) = 0.02741213359$

Gerdas Taschenrechner liefert: $\sin\left(\frac{\square}{2}\right) = 0.02467150746$

Rics Taschenrechner liefert: $\sin\left(\frac{\square}{2}\right) = 1$

Kommentar

Alle drei Resultate sind korrekt. Daniels Taschenrechner ist auf Degrees eingestellt, Gerdas auf Grads (Neugrad) und Rics auf Radians.

4 Gerade und ungerade

Gerade Zahl plus gerade Zahl =

Gerade Zahl plus ungerade Zahl =

Ungerade Zahl plus ungerade Zahl =

Gerade Zahl mal gerade Zahl =

Gerade Zahl mal ungerade Zahl =

Ungerade Zahl mal ungerade Zahl =

Gerade Funktion plus gerade Funktion =

Gerade Funktion plus ungerade Funktion =

Ungerade Funktion plus ungerade Funktion =

Gerade Funktion mal gerade Funktion =

Gerade Funktion mal ungerade Funktion =

Ungerade Funktion mal ungerade Funktion =

Ergebnis

Gerade Zahl plus gerade Zahl = gerade Zahl

Gerade Zahl plus ungerade Zahl = ungerade Zahl

Ungerade Zahl plus ungerade Zahl = gerade Zahl

Gerade Zahl mal gerade Zahl = gerade Zahl

Gerade Zahl mal ungerade Zahl = gerade Zahl

Ungerade Zahl mal ungerade Zahl = ungerade Zahl

Gerade Funktion plus gerade Funktion = gerade Funktion

Gerade Funktion plus ungerade Funktion = (keine Aussage möglich)

Ungerade Funktion plus ungerade Funktion = ungerade Funktion

Gerade Funktion mal gerade Funktion = gerade Funktion

Gerade Funktion mal ungerade Funktion = ungerade Funktion

Ungerade Funktion mal ungerade Funktion = gerade Funktion

5 Manipulation an Funktionen

Wie verhalten sich jeweils die beiden Funktionsgraphen?

a) $f(x)$ und $g(x) = f(x-1)$

b) $f(x)$ und $g(x) = f(x) - 1$

c) $f(x)$ und $g(x) = f(x+1) - 1$

d) $f(x)$ und $g(x) = f(x+1) + 1$

e) $f(x)$ und $g(x) = 3f(x)$

f) $f(x)$ und $g(x) = f(3x)$

g) $f(x)$ und $g(x) = 3f(3x)$

h) $f(x)$ und $g(x) = \frac{1}{4}f(x)$

i) $f(x)$ und $g(x) = f\left(\frac{x}{4}\right)$

j) $f(x)$ und $g(x) = \frac{1}{4}f\left(\frac{x}{4}\right)$

Ergebnis

a) $1 \rightarrow$

b) $1 \downarrow$

c) $1 \leftarrow, 1 \downarrow$

d) $1 \leftarrow, 1 \uparrow$

e) Streckung in y-Richtung mit Faktor 3

f) Stauchung in x-Richtung mit Faktor $\frac{1}{3}$

g) Streckung in y-Richtung mit Faktor 3, Stauchung in x-Richtung mit Faktor $\frac{1}{3}$

h) Stauchung in y-Richtung mit Faktor $\frac{1}{4}$

i) Streckung in x-Richtung mit Faktor 4

j) Streckung in x-Richtung mit Faktor 4, Stauchung in y-Richtung mit Faktor $\frac{1}{4}$

6 Manipulation an Funktionen

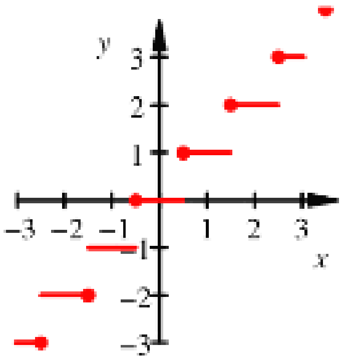
Gesucht ist eine lineare Funktion $f(x) = ax + b$ mit folgender Eigenschaft: Für sämtliche x-Werte gilt: $f(x-2) + 1 = f(x)$

Ergebnis:

$a = \frac{1}{2}$, b beliebig

7 Manipulation an der Rundungsfunktion

Die Funktion $f(x) = \mathtt{round}(x)$ rundet auf die nächste ganze Zahl. Die Punkte illustrieren das Verhalten im halbzahligen Fall. Es ist asymmetrisch.

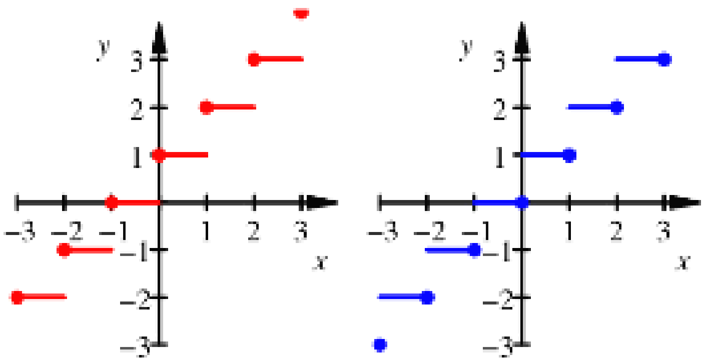


Rundungs-Funktion

Welches sind die Funktionen a) $f(x) = \mathtt{round}\left(x + \frac{1}{2}\right)$ und b) $f(x) = \mathtt{round}\left(x - \frac{1}{2}\right)$?

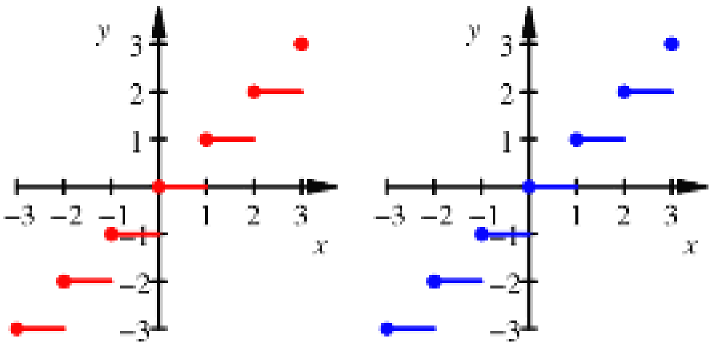
Bearbeitung

a) Der Funktionsgraf wird nach links verschoben. An den Sprungstellen gilt der obere Punkt. Die Funktion $f(x) = \lceil x \rceil = \mathtt{ceil}(x)$ hat an den Sprungstellen ein anderes Verhalten.



$f(x) = \mathtt{round}\left(x + \frac{1}{2}\right)$ **und** $f(x) = \lceil x \rceil = \mathtt{ceil}(x)$

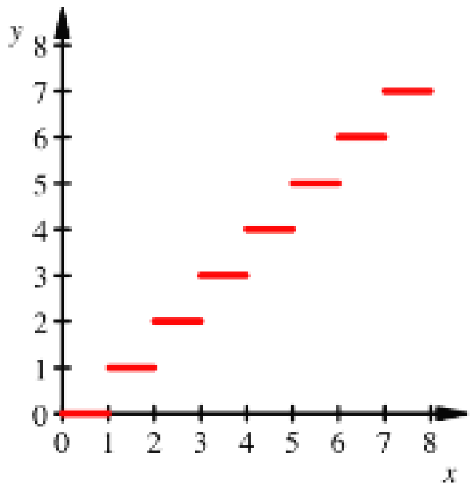
b) Der Funktionsgraf wird nach rechts verschoben. An den Sprungstellen gilt der obere Punkt. Es ist $f(x) = \texttt{round}\left(x - \frac{1}{2}\right) = \lfloor x \rfloor = \texttt{floor}(x)$.



$f(x) = \texttt{round}\left(x - \frac{1}{2}\right)$ **und** $f(x) = \lfloor x \rfloor = \texttt{floor}(x)$

8 Treppe

Die Funktion $y = f(x) = \lfloor x \rfloor$ („Abrunden auf ganze Zahl") hat als Funktionsgraf die Einheitstreppe.



Einheitstreppe

Technisches: Für $x \geq 0$ kann $y = f(x) = \lfloor x \rfloor$ auf dem Computer mit einem der folgenden Befehle generiert werden:

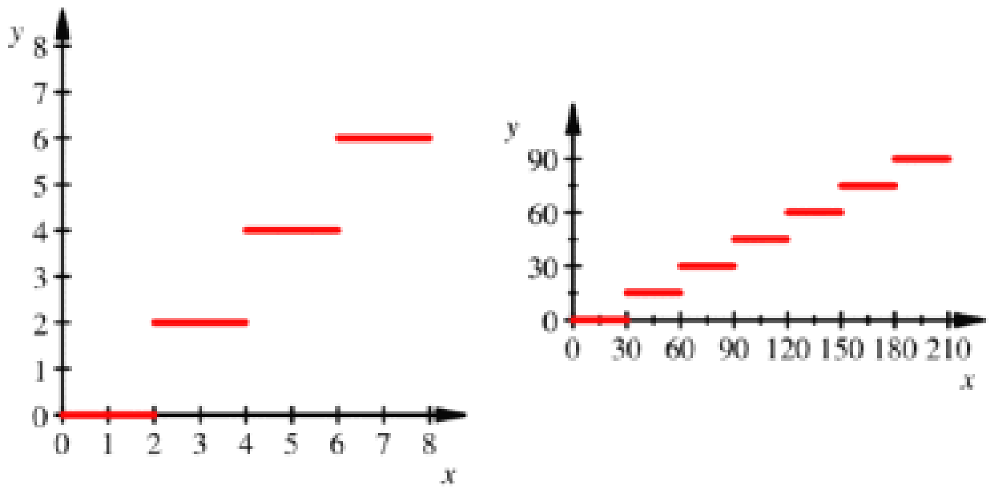
$$y = f(x) = \lfloor x \rfloor = \texttt{floor(x)}$$

$$y = f(x) = \lfloor x \rfloor = \texttt{trunc(x)}$$

$$y = f(x) = \lfloor x \rfloor = \texttt{round(x-0.5)}$$

a) Wie muss die Funktion manipuliert werden, um die „Doppeltreppe" zu erhalten.

b) Wie erhalten wir eine Treppe, deren Stufen 30 lang und 15 hoch sind?



Doppeltreppe. Treppe 30x15

Bearbeitung

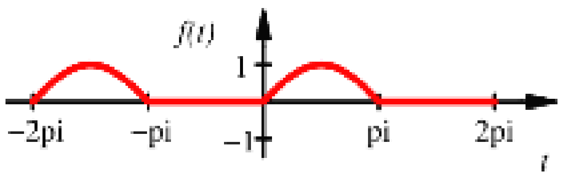
a) $y = f(x) = 2\left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor$

b) $y = f(x) = 15\left\lfloor \frac{x}{30} \right\rfloor$

9 Funktionsgraph

Skizzieren Sie den Graphen der Funktion $f(t) = \frac{1}{2}\left(\sin(t) + \left|\sin(t)\right|\right)$ für $t \in [-2\pi, 2\pi]$.

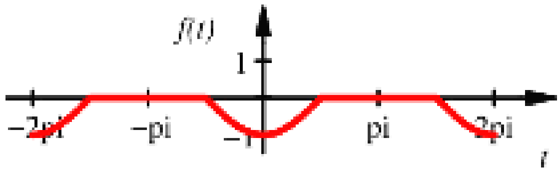
Ergebnis



$f(t) = \frac{1}{2}\left(\sin(t) + \left|\sin(t)\right|\right)$

10 Funktion gesucht

Welche Funktion passt zum gezeichneten Graphen?



Passende Funktion?

Bearbeitung

Erste Lösung

$$f(t) = -\tfrac{1}{2}\left(\cos(t) + \left|\cos(t)\right|\right) \text{ für } t \in [-2\,\square,2\,\square]$$

Zweite Lösung

$$f(t) = -\left(\max\left(\cos(t),0\right)\right) \text{ für } t \in [-2\,\square,2\,\square]$$

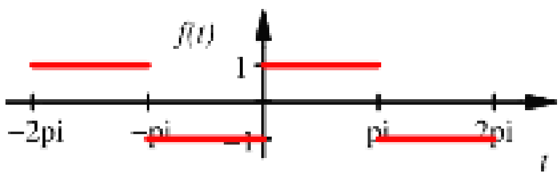
Dritte Lösung

$$f(t) = \min\left(-\cos(t),0\right) \text{ für } t \in [-2\,\square,2\,\square]$$

11 Funktionsgraph

Skizzieren Sie den Graphen der Funktion $f(t) = \frac{\sin(t)}{|\sin(t)|}$ für $t \in [-2\,\square,2\,\square] - \left\{k\square \,\middle|\, k = -2,-1,0,1,2\right\}$.

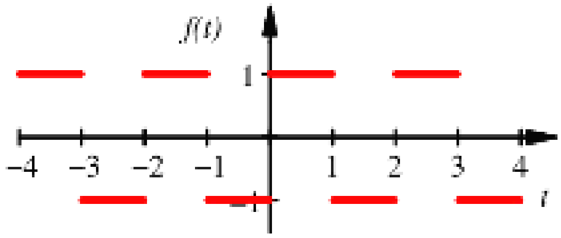
Ergebnis



$$f(t) = \frac{\sin(t)}{|\sin(t)|}$$

12 Funktion gesucht

Welche Funktion passt zum gezeichneten Graphen?



Passende Funktion?

Ergebnis

$f(t)=\frac{\sin(\square t)}{\left|\sin(\square t)\right|}$ für $t\in[-4,4]-\{k \mid k\in \nwarrow\searrow k=-4,\ldots,4\}$

13 Periodenlänge

a) Welche Periodenlänge hat die Funktion $f(t)=\cos(3t)$?

b) Welche Periodenlänge hat die Funktion $g(t)=\sin(\omega t)$?

c) Welche Periodenlänge hat die Funktion $h(t)=\cos(3t+10)$?

Ergebnis

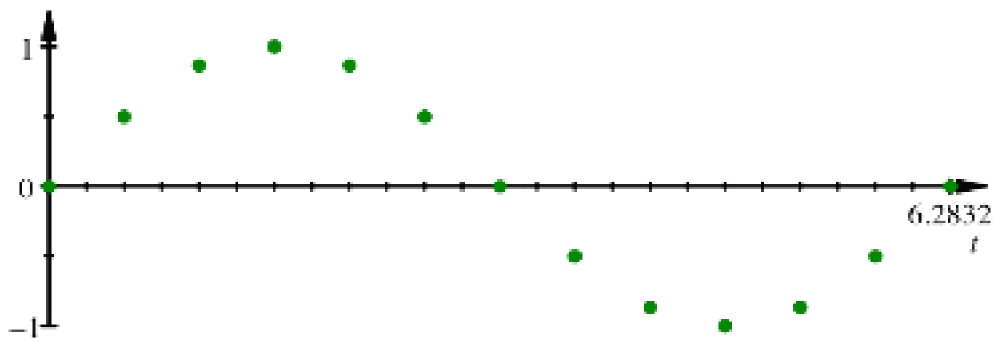
a) $\frac{2}{3}\pi$

b) $\frac{2\pi}{\omega}$

c) $\frac{2}{3}\pi$

14 Ostereier suchen. Freiwillige Kick-Aufgabe

Welche Funktion passt zu den gezeichneten Punkten?

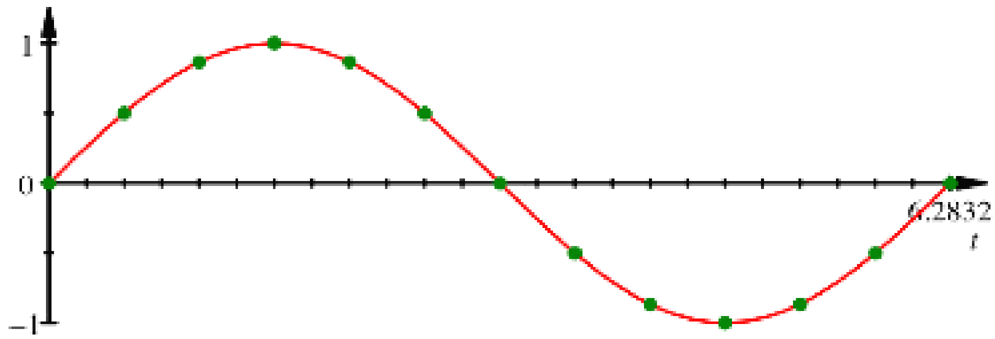


Passende Funktion?

Bearbeitung

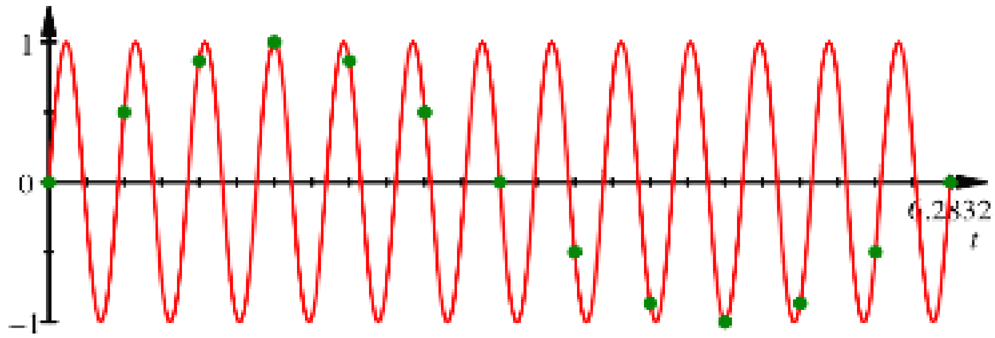
Es gibt unendlich viele Lösungen. Im Folgenden einige Beispiele, die auf der Sinusfunktion basieren.

Natürlich denken wir sofort an die übliche Sinusfunktion $y = \sin(t)$.

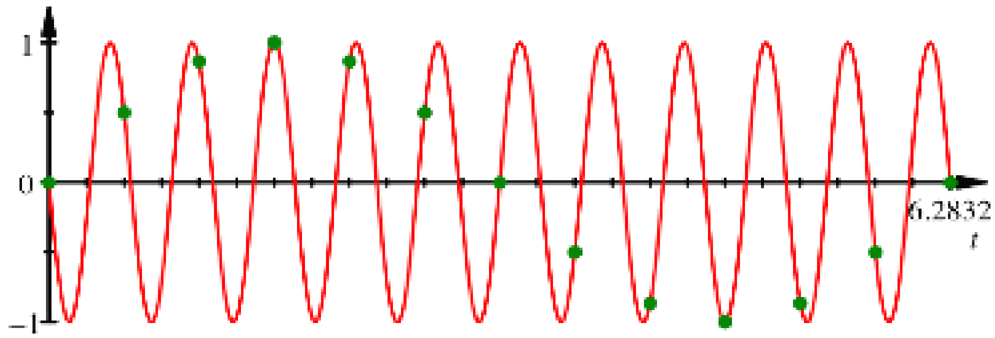


$y = \sin(t)$

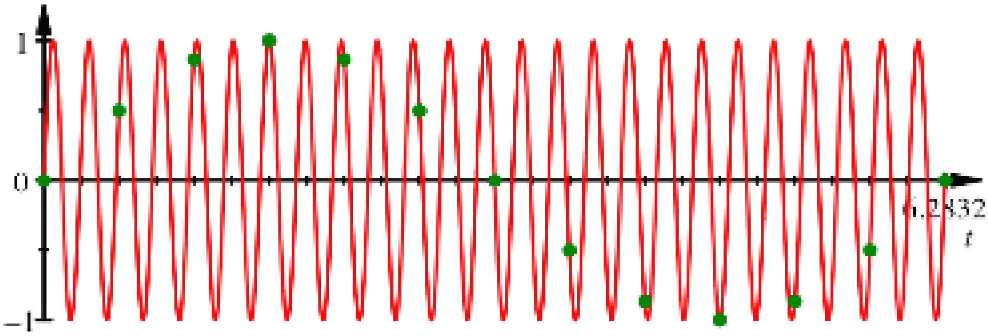
Es gibt aber auch andere Lösungen mit der Sinusfunktion. Beispiele:



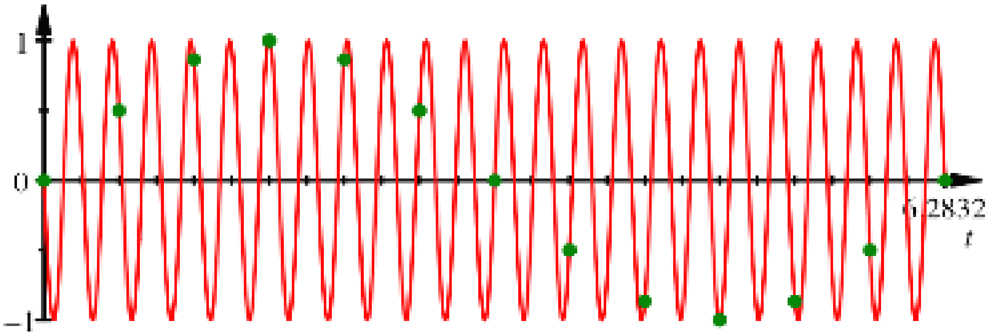
$y = \sin(13t)$



$y = \sin(-11t)$



$y = \sin(25t)$



$y = \sin(-23t)$

Allgemein passt $y = f_j(t) = \sin((12j+1)t),\ j \in \mathbb{Z}$.

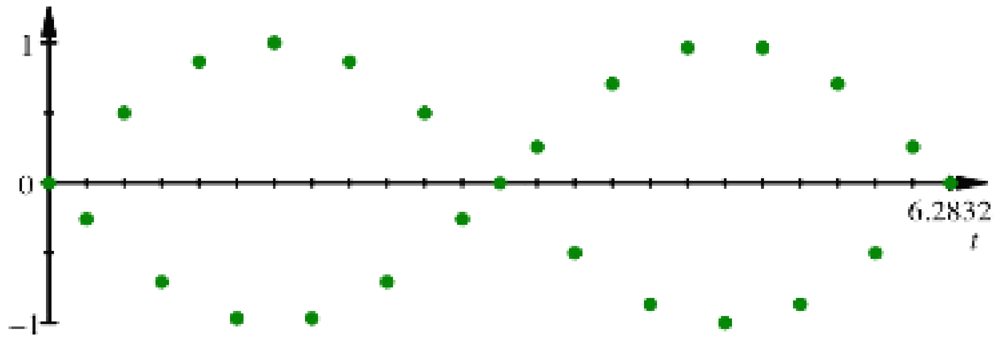
Begründung: Die grünen Punkte sind horizontal in gleichen Abständen gezeichnet, also bei $t_k = k\frac{\pi}{6},\ k \in \{0, 1, \ldots, 12\}$. Nun ist:

$$y = f_j(t_k) = \sin((12j+1)t_k) = \sin\left((12j+1)k\frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(2\pi jk + k\frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(k\frac{\pi}{6}\right)$$

Sämtliche Graphen der Funktionen $y = f_j(t)$ verlaufen also durch die Punkte $\left(k\frac{\pi}{6}, \sin\left(k\frac{\pi}{6}\right)\right)$.

15 Noch mehr Ostereier. Freiwillige Kick-Aufgabe

Welche Funktion passt zu den gezeichneten Punkten?

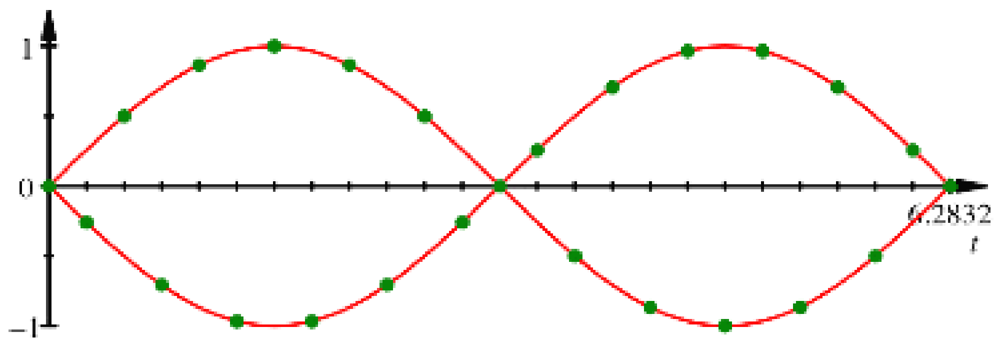


Passende Funktion?

Bearbeitung

Es gibt unendlich viele Lösungen. Im Folgenden einige Lösungen, welche auf der Sinusfunktion basieren.

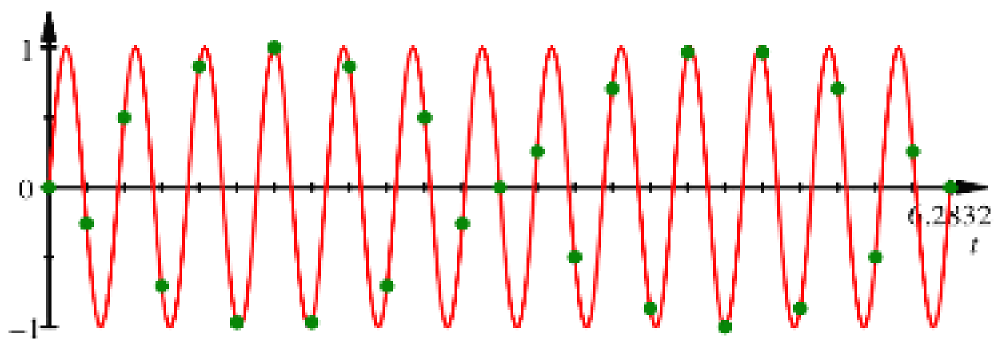
Natürlich denken wir sofort an $y = \pm\sin(t)$. Da sind wir aber auf dem falschen Hocker, denn das ist keine Funktion, da zu gegebenem t-Wert der y-Wert nicht eindeutig zugeordnet ist.



Falsche Idee: $y = \pm\sin(t)$

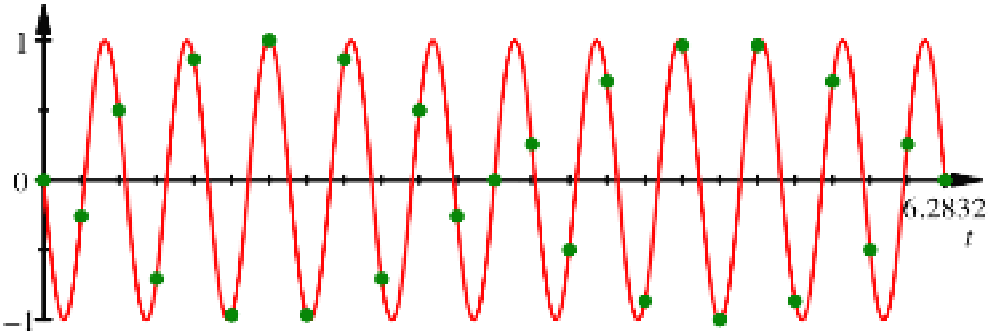
Geht es also nicht?

Die folgende Figur zeigt eine korrekte Lösung.

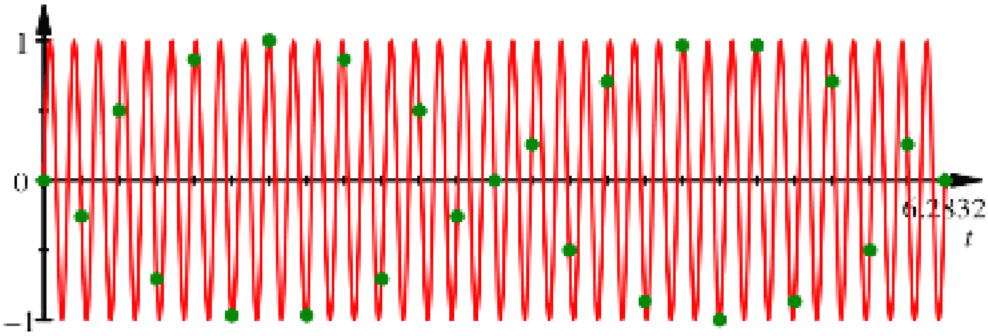


$y = \sin(13t)$

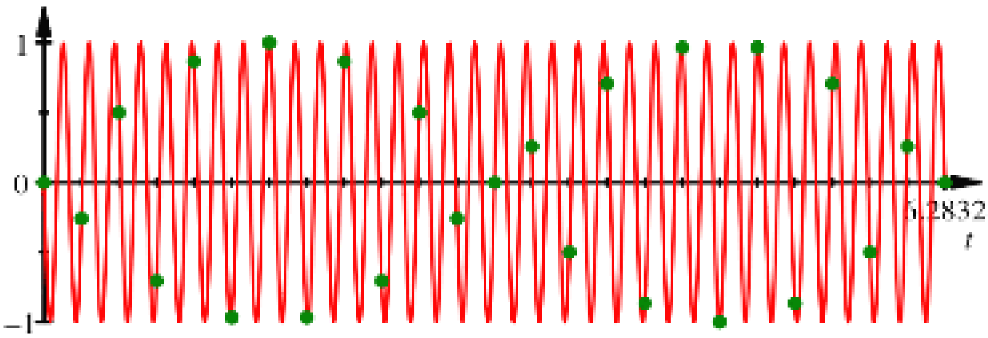
Es gibt noch andere korrekte Lösungen:



$y = \sin(-11t)$



$y = \sin(37t)$



$y = \sin(-35t)$

Allgemeine Lösung: $y = \sin((24j+13)t),\ j \in \mathbb{Z}$.

Begründung: Die grünen Punkte sind horizontal in gleichen Abständen gezeichnet, nämlich bei $t_k = k\frac{\pi}{12},\ k \in \{0, 1, \ldots, 24\}$. Nun ist:

$$y = f_j(t_k) = \sin((24j+13)t_k) = \sin\left((24j+13)k\tfrac{\pi}{12}\right) = \sin\left(2\pi jk + 13k\tfrac{\pi}{12}\right)$$

$$= \sin\left(13k\tfrac{\pi}{12}\right) = \sin\left(k\pi + k\tfrac{\pi}{12}\right) = \begin{cases} \sin\left(k\tfrac{\pi}{12}\right) \text{falls } k \text{ gerade} \\ -\sin\left(k\tfrac{\pi}{12}\right) \text{falls } k \text{ ungerade} \end{cases}$$

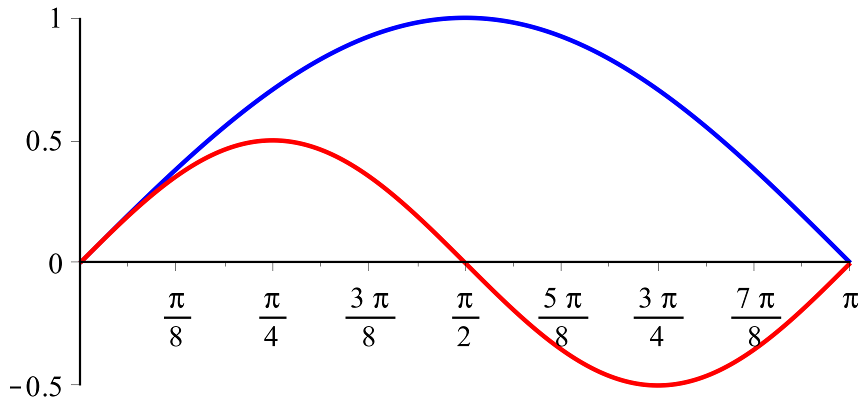
Die grünen Punkte liegen also abwechslungsweise auf $y = \sin(t)$ und $y = -\sin(t)$.

16 Größenvergleich

Ist $\frac{1}{2}\sin(2t)$ im Intervall $t \in [0,\pi]$ größer, gleich oder kleiner wie $\sin(t)$?

Bearbeitung

Die Abbildung zeigt rot den Grafen der Funktion $t \mapsto \frac{1}{2}\sin(2t)$ und blau den Grafen der Sinusfunktion. Die Sinusfunktion ist größer.

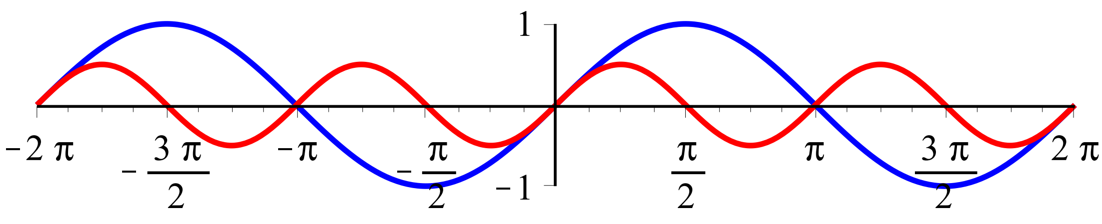


Funktionsgrafen

Formaler Beweis: Aus dem Additionstheorem für den Sinus folgt:

$$\tfrac{1}{2}\sin(2t) = \sin(t)\cos(t)$$

Im Intervall $t \in [0,\pi]$ gilt $\cos(t) \le 1$. Daher ist in diesem Intervall $\frac{1}{2}\sin(2t) \le \sin(t)$. Die Gleichheit gilt für $t \in \{0,\pi\}$. Für ein längeres Intervall gilt diese Ungleichung nicht mehr.



Längeres Intervall

17 arccos

Silvias Taschenrechner ergibt $\arccos(\cos(370)) = 0.7079331208$.

Silvios Taschenrechner ergibt $\arccos(\cos(370)) = 9.999999999$.

Was ist da los?

Kommentar

Silvia rechnet im Bogenmaß (rad). $118\pi - 370 = 0.707933123$. Die restliche Abweichung ist ein Rundungsproblem.

Silvio rechnet im Gradmaß (deg). $370 - 360 = 10$. Die restliche Abweichung ist ein Rundungsproblem.

Die Funktion arccos gibt den passenden Wert zu cos(370) im Intervall $[0, \pi]$ beziehungsweise im Intervall $[0°, 180°]$.

18 arccos

a) Der Taschenrechner gibt $\arccos(\cos(10)) = 2.566370614$. Welche exakte Zahl verbirgt sich hinter 2.566370614? Warum kommt nicht die Zahl 10 heraus, wenn doch arccos die Umkehrfunktion von cos ist?

b) Bei $\cos(\arccos(10))$ kommt eine Fehlermeldung.

Ergebnis:

a) Exakt: $\arccos(\cos(10)) = 4\pi - 10$. Die Funktion arccos gibt den passenden Wert zu cos(10) im Intervall $[0, \pi]$.

b) 10 ist nicht im Definitionsbereich $[-1,1]$ der arccos-Funktion.

19 arcsin

Mein Taschenrechner ergibt (prüfen Sie auf Ihrem Taschenrechner nach):

a) $\arcsin\left(\sin\left(\frac{1}{2}\right)\right) = \frac{1}{2}$, da arcsin die Umkehrfunktion von sin ist.

b) $\sin\left(\arcsin\left(\frac{1}{2}\right)\right) = \frac{1}{2}$, da sin die Umkehrfunktion von arcsin ist.

c) $\arcsin\left(\sin\left(\frac{7}{2}\right)\right) \cong -0.3584073465$, obwohl arcsin die Umkehrfunktion von sin ist. Warum ist ds so? Welche exakte Zahl verbirgt sich hinter -0.3584073465? (Falls Ihr Taschenrechner trotzdem $\frac{7}{2}$ liefert, haben Sie etwas falsch gemacht. Was?)

d) $\sin\left(\arcsin\left(\frac{7}{2}\right)\right) = \text{ERROR}$. Wow!

Bemerkungen

a) kein Kommentar

b) kein Kommentar

c) $\pi - \frac{7}{2} \approx -0.3584073465$. (Falls es trotzdem geht: Taschenrechner war auf DEG statt auf RAD eingestellt.)

d) $\frac{7}{2}$ ist nicht im Definitionsbereich von arcsin.

20 Sinus und Arcussinus

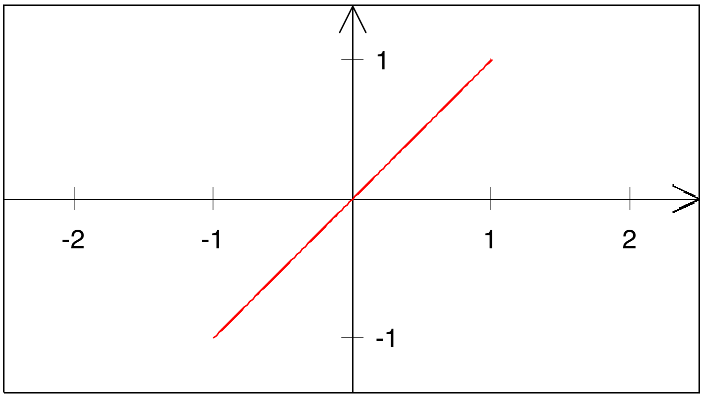
Versuchen Sie, mit dem Definitionsbereich $\mathbb{R}$ die folgenden Funktionen zu skizzieren:

a) $y = f(x) = \sin(\arcsin(x))$

b) $y = f(x) = \arcsin(\sin(x))$

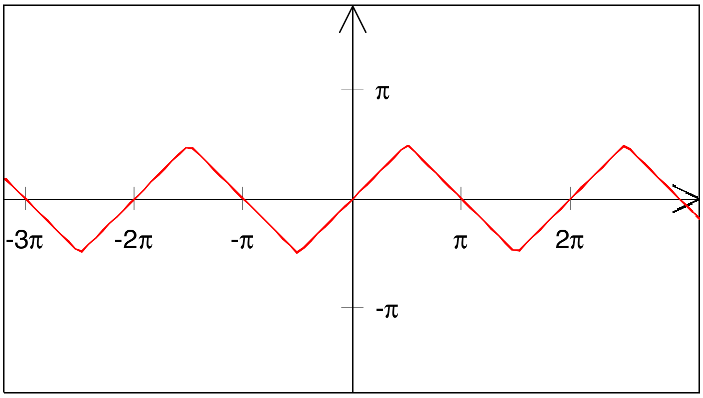
Bearbeitung

a) Nicht möglich. Die Arcussinus-Funktion hat als maximalen Definitionsbereich $[-1,1]$. In diesem Bereich erhalten wir die den Funktionsgraphen:



$y = f(x) = \sin(\arcsin(x))$

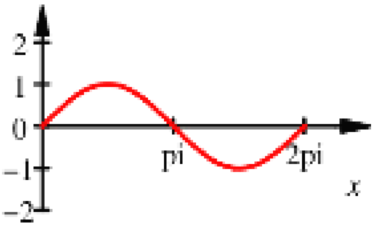
b) Wir erhalten eine Sägezahn-Funktion der Periodenlänge 2□.



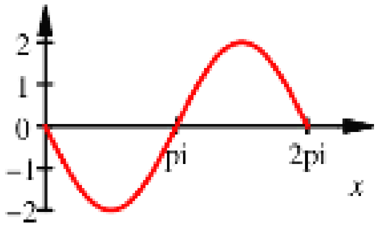
$y = f(x) = \arcsin(\sin(x))$

21 Analyse von Funktionen

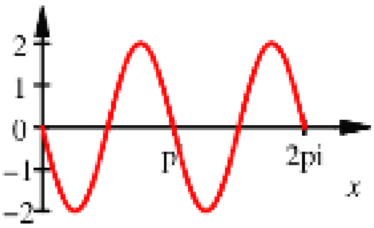
Gesucht sind jeweils Definitionsbereich A und Funktionsvorschrift



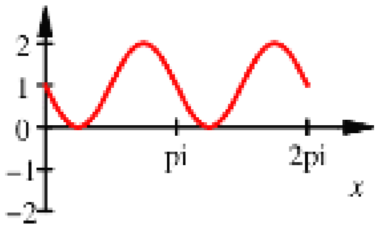
a)



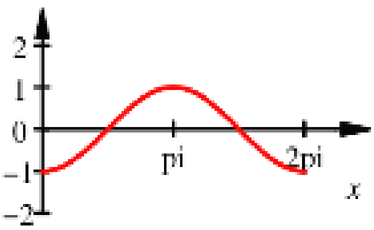
b)



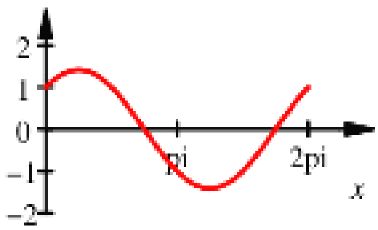
c)



d)



e)



f)

Ergebnis

a) $A = [0, 2\pi]$; $y = \sin(x)$

b) $A = [0, 2\pi]$; $y = -2\sin(x)$

c) $A = [0, 2\pi]$; $y = -2\sin(2x)$

d) $A = [0, 2\pi]$; $y = 1 - \sin(2x)$

e) $A = [0, 2\pi]$; $y = -\cos(x)$

f) $A = [0, 2\pi]$; $y = \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$

22 Nullstellen

Wo sind die Nullstellen der folgenden Funktionen (Skizze)

a) $\cos(t)$

b) $\sin(t)$

c) $\tan(t)$

d) e^t

e) $\ln(t)$

Ergebnis

a) $\frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$ und $\frac{3}{2}\pi + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

b) $k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

c) $k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

d) keine Nullstellen

e) 1

23 Nullstellen

Welches sind die Nullstellen von:

a) $f(x) = \ln(x)$

b) $g(x) = \ln(\ln(x))$

c) $h(x) = \ln(\ln(\ln(x)))$

d) $i(x) = \ln(\ln(\ln(\ln(x))))$

Ergebnis

a) $x_0 = 1$

b) $x_0 = \mathrm{e}$

c) $x_0 = \mathrm{e}^{\mathrm{e}} \approx 15.1543$

d) $x_0 = \mathrm{e}^{\left(\mathrm{e}^{\mathrm{e}}\right)} \approx 3814279.102$

24 Nullstellen

Es sei $f(x) = x^2 - 1$. Welches sind die Nullstellen von

a) $f(x)$

b) $g(x) = f(x-1)$

c) $h(x) = f(x) - 1$

d) $i(x) = 3f(x)$

e) $j(x) = f(3x)$

f) $h(x) = f(x) + 7$

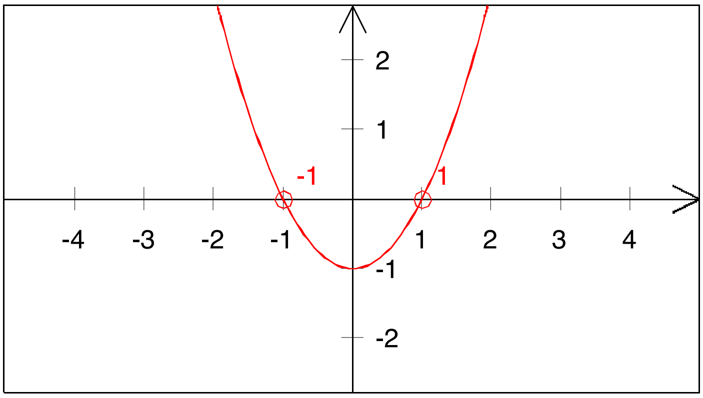
g) $l(x) = 7f(x+7)$

h) $m(x) = 7f(7x)$

Versuchen Sie, die Funktionen zu skizzieren.

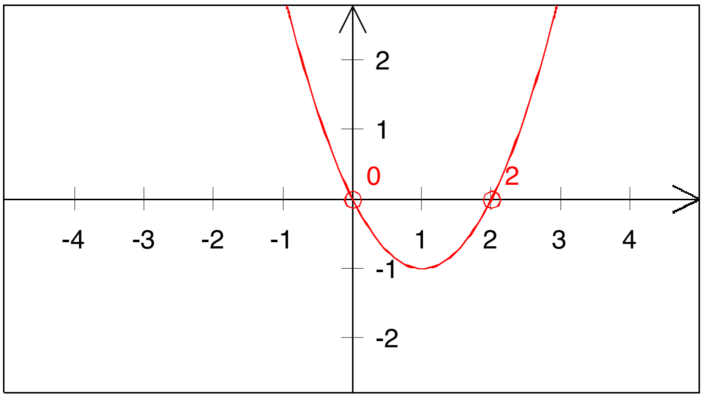
Ergebnis

a) $\{\pm 1\}$



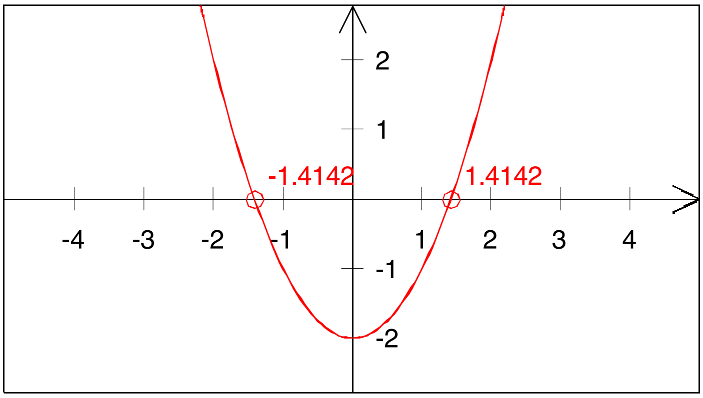
$f(x)$

b) $\{0,2\}$



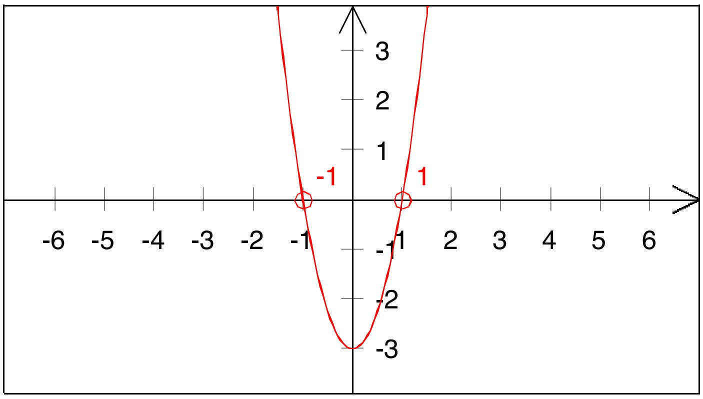
$g(x) = f(x-1)$

c) $\{\pm\sqrt{2}\}$



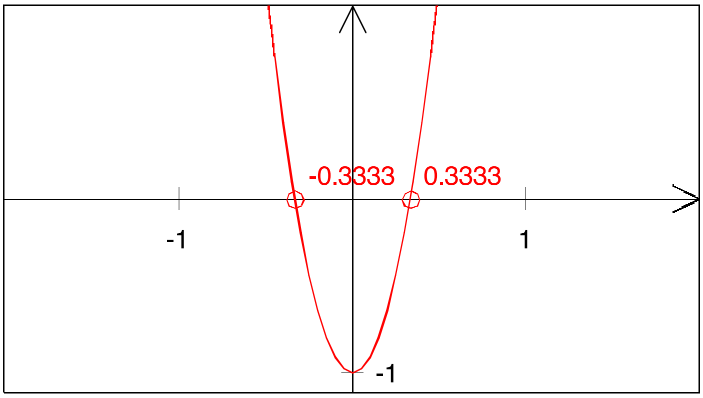
$h(x) = f(x) - 1$

d) $\{\pm 1\}$



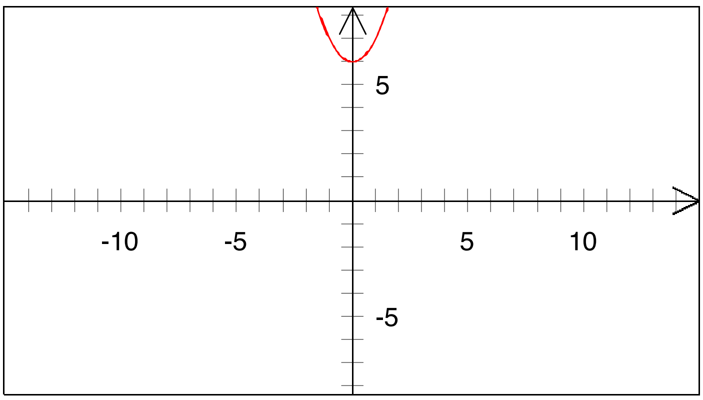
$i(x) = 3f(x)$

e) $\left\{\pm \frac{1}{3}\right\}$



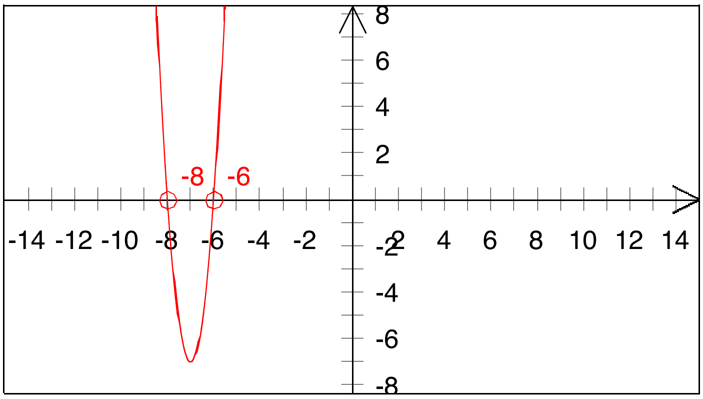
$j(x) = f(3x)$

f) $\{\ \}$, keine Nullstelle



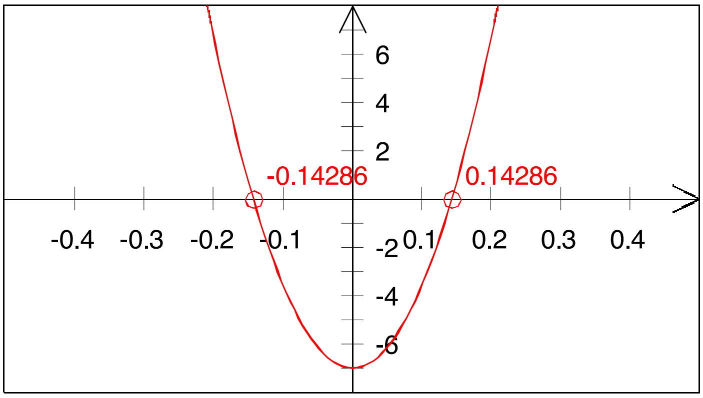
$h(x) = f(x) + 7$

g) $\{-8,-6\}$



$l(x)=7f(x+7)$

h) $\left\{\pm\frac{1}{7}\right\}$



$m(x)=7f(7x)$

25 Nullstellen

Gesucht sind die Nullstellen der folgenden Funktionen:

a) $f(x)=\tan(2x)$

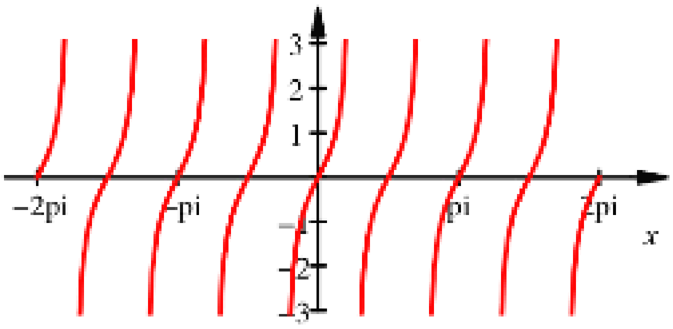
b) $g(x)=\tan\left(\frac{x}{2}\right)$

c) $h(x)=\pi\tan\left(\frac{x}{2}\right)$

d) $j(x)=\frac{1}{2}\tan(\pi x)$

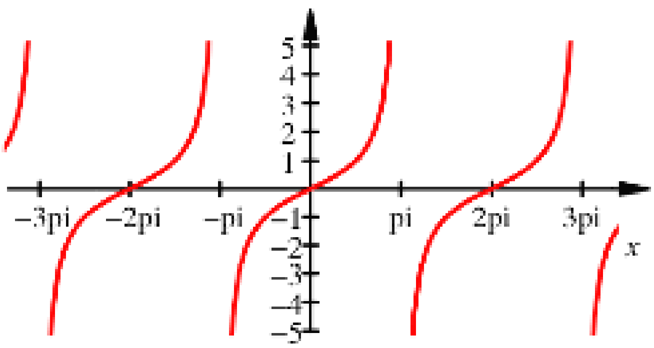
Ergebnis

a) $\left\{k\frac{\pi}{2},\, k \in \mathbb{Z}\right\}$



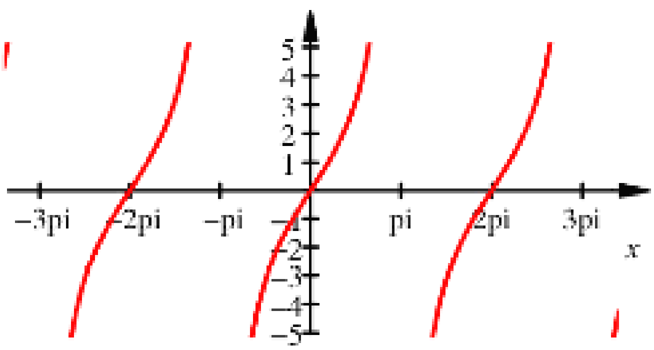
$f(x) = \tan(2x)$

b) $\{2k\pi,\, k \in \mathbb{Z}\}$



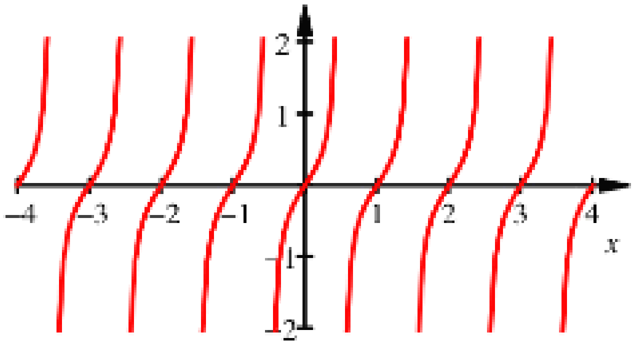
$g(x) = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$

c) $\{2k\pi,\, k \in \mathbb{Z}\}$ (wie bei b))



$h(x) = \pi \tan\left(\frac{x}{2}\right)$

d) ↖↘



$j(x) = \frac{1}{2}\tan(\pi x)$

26 Exponentialfunktion

Gegeben sei der Graph der Exponentialfunktion $f(x) = a^x$. Welche Funktion passt zum Graphen, wenn Sie obigen Graphen spiegeln

a) an der y-Achse

b) an der x-Achse

c) am Koordinatenursprung

d) an der Geraden $y = x$.

Ergebnis

a) $g_a(x) = a^{-x}$

b) $g_b(x) = -a^x$

c) $g_c(x) = -a^{-x}$

d) $g_d(x) = \log_a(x)$

27 Verdoppelungszeit

Gordon Moore war einer der Mitgründer von Intel und machte 1965 die berühmte Vorhersage, dass sich die Packungsdichte von Mikroprozessoren alle 18 bis 24 Monate verdoppeln würde.

Tatsächlich zeigte es sich dann, dass die Packungsdichte durch die Funktion

$$f(t) = 3000\ \mathrm{e}^{0.349\,(t-1970\,)}$$

beschrieben werden kann (t in Jahren). Wie groß ist die Verdoppelungszeit?

Bearbeitung

Es sei Δt die gesuchte Verdoppelungszeit. Dann muss gelten:

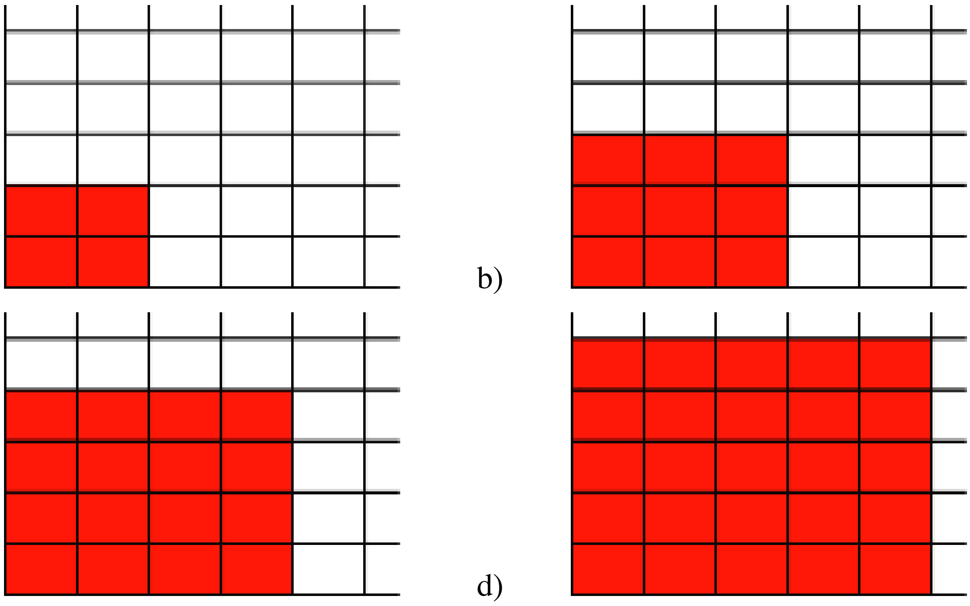
$$f(t+\Delta t)=2f(t)$$
$$3000\ \mathrm{e}^{0.349\,(t+\Delta t-1970)}=2\cdot 3000\ \mathrm{e}^{0.349\,(t-1970)}$$
$$\mathrm{e}^{0.349\,(t+\Delta t-1970)}=2\ \mathrm{e}^{0.349\,(t-1970)}$$
$$0.349\,(t+\Delta t-1970)=\ln(2)+0.349\,(t-1970)$$
$$0.349\,\Delta t=\ln(2)$$
$$\Delta t=\frac{\ln(2)}{0.349}\approx 1.986$$

Die Verdoppelungszeit liegt im Rahmen der Vorhersage von Gordon Moore.

28 DIN-Formate

Wir legen einen Rechtecksraster aus DIN A4 Blättern aus. Ein kleines Rasterrechteck hat also das DIN A4-Format.

Welches DIN-Format haben dann die folgenden roten Rechtecke?



a) b) c) d)

Bearbeitung

Das DIN A-System ist ein Flächensystem. DIN A0 hat den Flächeninhalt 1 m^2, jede weitere DIN A-Nummer halbiert den Flächeninhalt. Ein DIN A4 – Rechteck hat also den Flächeninhalt $\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{1}{16}$ (die Maßeinheit m^2 wird im folgenden weggelassen).

Allgemein ist $\left(\frac{1}{2}\right)^{\text{DIN A-Nummer}}$ der Flächeninhalt eines Rechtecks im DIN A-System.

Die roten Rechtecke haben alle das für das DIN A-Format typische Seitenverhältnis $\sqrt{2}$, es passen aber nicht alle in das ganzzahlige DIN A-System.

Für die einzelnen Beispiele erhalten wir:

a) Der Flächeninhalt ist vier Mal so groß wie beim DIN A4-Rechteck, also $\frac{4}{16} = \frac{1}{4} = \left(\frac{1}{2}\right)^2$. Somit haben wir es mit einem DIN A2-Rechteck zu tun.

b) Der Flächeninhalt ist $\frac{9}{16}$. Gesucht ist nun x so, dass $\frac{9}{16} = \left(\frac{1}{2}\right)^x$. Wir erhalten also eine Exponentialgleichung. Die Lösung ist $x = \frac{\ln\left(\frac{9}{16}\right)}{\ln\left(\frac{1}{2}\right)} \approx 0.8301$. Das rote Rechteck hat also das Format DIN A0.8301. Zwischen a) und b) müsste eigentlich das Rechteck DIN A1 liegen. Wo ist das geblieben?

c) Wir haben analog: $x = \frac{\ln\left(\frac{16}{16}\right)}{\ln\left(\frac{1}{2}\right)} = 0$. Also DIN A0. Hätte man auch ohne Rechnung merken können.

d) $x = \frac{\ln\left(\frac{25}{16}\right)}{\ln\left(\frac{1}{2}\right)} \approx -0.6439$. Wir erhalten eine negative DIN A-Nummer. Das ist jetzt für alle Rechtecke mit dem Seitenverhältnis $\sqrt{2}$ so, welche größer sind als das DIN A0-Rechteck.

29 Rechnen in DIN-Formaten

Addition: Wir addieren die Flächen von zwei DIN-Formaten und möchten das wieder als DIN-Format ausdrücken. Geometrisch also eine Flächenverwandlungsaufgabe. Rechnerisch sieht das Problem so aus: Zu gegebenen x und y ist z so gesucht, dass flächenmäßig gilt:

$$\mathrm{A}x + \mathrm{A}y = \mathrm{A}z$$

Skalare Multiplikation: Wir multiplizieren die Fläche eines DIN-Formates mit der Zahl λ und möchten das wieder als DIN-Format ausdrücken. Also: Zu gegebenen x und λ ist z so gesucht, dass flächenmäßig gilt:

$$\lambda \mathrm{A}x = \mathrm{A}z$$

Bearbeitung

Das DIN A-System ist ein Flächensystem. DIN A0 hat den Flächeninhalt 1 m^2, jede weitere DIN A-Nummer halbiert den Flächeninhalt. Ein DIN A4 – Rechteck hat also den Flächeninhalt $\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}$ (die Maßeinheit m^2 wird im folgenden weggelassen).

Allgemein ist $\left(\frac{1}{2}\right)^{\text{DIN A-Nummer}}$ der Flächeninhalt eines Rechtecks im DIN A-System.

Addition: Zu gegebenen x und y ist z so gesucht, dass flächenmäßig gilt:

$$\mathrm{A}x + \mathrm{A}y = \mathrm{A}z$$

Es muss also gelten:

$$\left(\tfrac{1}{2}\right)^x + \left(\tfrac{1}{2}\right)^y = \left(\tfrac{1}{2}\right)^z$$

Damit wird:

$$z = \frac{\ln\left(\left(\frac{1}{2}\right)^x + \left(\frac{1}{2}\right)^y\right)}{\ln\left(\frac{1}{2}\right)}$$

Mit dem Logarithmus zur Basis 2 (dualer Logarithmus, $\operatorname{ld}(x) = \log_2(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(2)}$) lässt sich das etwas einfacher schreiben:

$$z = -\log_2\left(\left(\tfrac{1}{2}\right)^x + \left(\tfrac{1}{2}\right)^y\right)$$

Beispiel 1: $x = y = 4$. Wir erhalten:

$$z = \frac{\ln\left(\left(\frac{1}{2}\right)^4 + \left(\frac{1}{2}\right)^4\right)}{\ln\left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{\ln\left(\frac{1}{16} + \frac{1}{16}\right)}{\ln\left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{\ln\left(\frac{1}{8}\right)}{\ln\left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{\ln\left(\left(\frac{1}{2}\right)^3\right)}{\ln\left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{3\ln\left(\frac{1}{2}\right)}{\ln\left(\frac{1}{2}\right)} = 3$$

Das hätte man auch einfacher haben können.

Beispiel 2: $x = 4, y = 5$. Wir erhalten:

$$z = \frac{\ln\left(\left(\frac{1}{2}\right)^4 + \left(\frac{1}{2}\right)^5\right)}{\ln\left(\frac{1}{2}\right)} \approx 3.4150$$

Skalare Multiplikation: Zu gegebenen x und λ ist z so gesucht, dass flächenmäßig gilt:

$$\lambda \mathrm{A}x = \mathrm{A}z$$

Es muss also gelten:

$$\lambda\left(\tfrac{1}{2}\right)^x = \left(\tfrac{1}{2}\right)^z$$

Damit wird:

$$z = \frac{\ln\left(\lambda\left(\frac{1}{2}\right)^x\right)}{\ln\left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{\ln(\lambda) + x\ln\left(\frac{1}{2}\right)}{\ln\left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{\ln(\lambda)}{\ln\left(\frac{1}{2}\right)} + x$$

$$z = x + \frac{\ln(\lambda)}{\ln\left(\frac{1}{2}\right)}$$

Man beachte: Für $\lambda > 1$ wird $z < x$.

Mit dem Logarithmus zur Basis 2 sieht das so aus:

$$z = x - \log_2(\lambda)$$

Beispiel: Für $\lambda = 2$ (Verdoppeln der Fläche) reduziert sich die DIN A-Nummer um 1.

30 Logarithmen mit exotischen Basen

a) $\log_2(256) =$

b) $\log_4(256) =$

c) $\log_8(256) =$

d) $\log_{16}(256) =$

e) $\log_{32}(256) =$

Ergebnis

a) $\log_2(256) = 8 = \frac{8}{1}$

b) $\log_4(256) = 4 = \frac{8}{2}$

c) $\log_8(256) = \frac{8}{3}$

d) $\log_{16}(256) = 2 = \frac{8}{4}$

e) $\log_{32}(256) = \frac{8}{5}$

31 Logarithmen mit exotischen Basen

a) $\log_{256}(2) =$

b) $\log_{256}(4) =$

c) $\log_{256}(8) =$

d) $\log_{256}(16) =$

e) $\log_{256}(32) =$

Ergebnis

a) $\log_{256}(2) = \frac{1}{8}$

b) $\log_{256}(4) = \frac{1}{4} = \frac{2}{8}$

c) $\log_{256}(8) = \frac{3}{8}$

d) $\log_{256}(16) = \frac{1}{2} = \frac{4}{8}$

e) $\log_{256}(32) = \frac{5}{8}$

32 Definitionsbereich

Was ist der maximal mögliche Definitionsbereich für

a) $f(x) = \ln(x)$

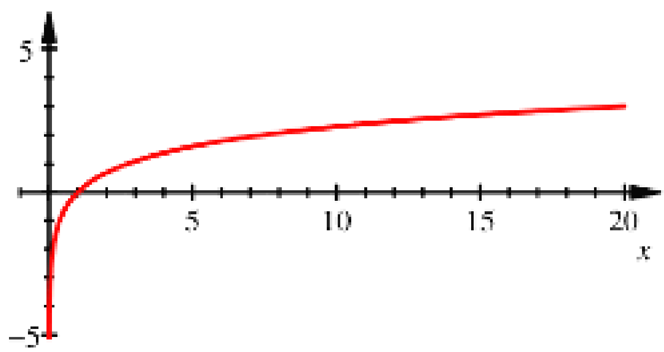
b) $g(x) = \ln(\ln(x))$

c) $h(x) = \ln(\ln(\ln(x)))$

d) $i(x) = \ln(\ln(\ln(\ln(x))))$

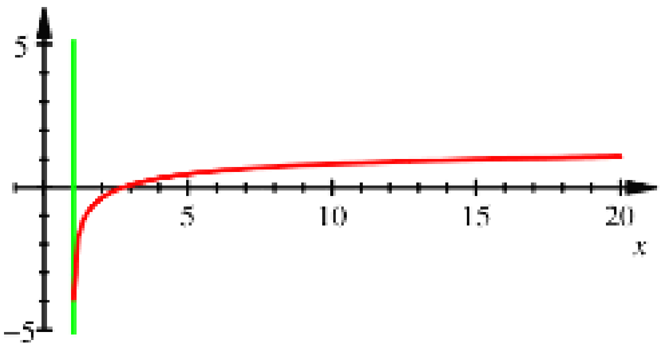
Ergebnis

a) $f(x) = \ln(x)$ $\qquad 0 < x$



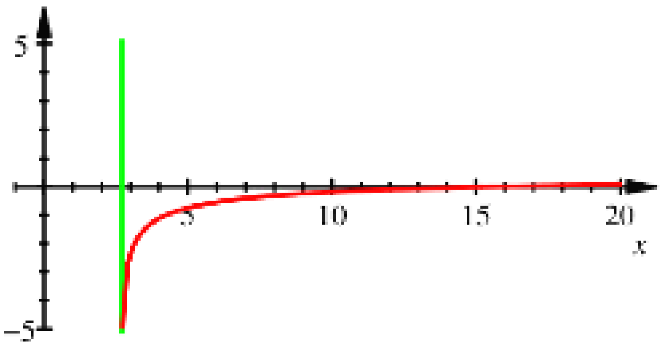
$f(x) = \ln(x)$

b) $g(x)=\ln(\ln(x))$ $\qquad 1<x$



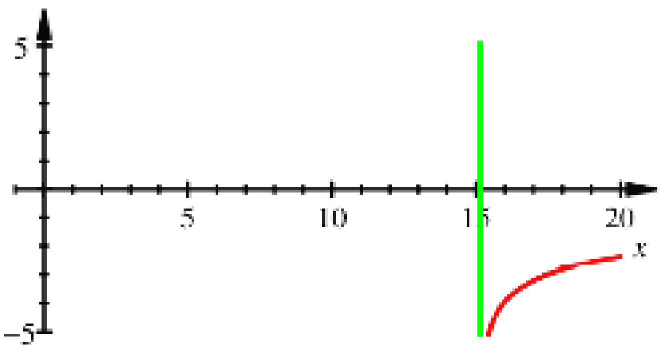
$g(x)=\ln(\ln(x))$

c) $h(x)=\ln(\ln(\ln(x)))$ $\qquad \mathrm{e}<x$



$h(x)=\ln(\ln(\ln(x)))$

d) $i(x)=\ln(\ln(\ln(\ln(x))))$ $\qquad x>\mathrm{e}^{\mathrm{e}}\approx 15.1543$



$i(x)=\ln(\ln(\ln(\ln(x))))$

33 Symmetrien

Welche Symmetrien hat der Graph der Tangens-Funktion?

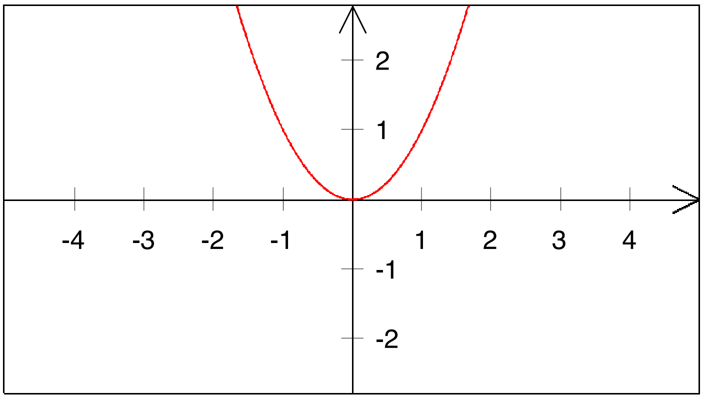
Ergebnis

Punktsymmetrie: Zentrum $(k\pi, 0)$ oder $\left(k\pi + \frac{\pi}{2}, 0\right)$, $k \in \mathbb{Z}$

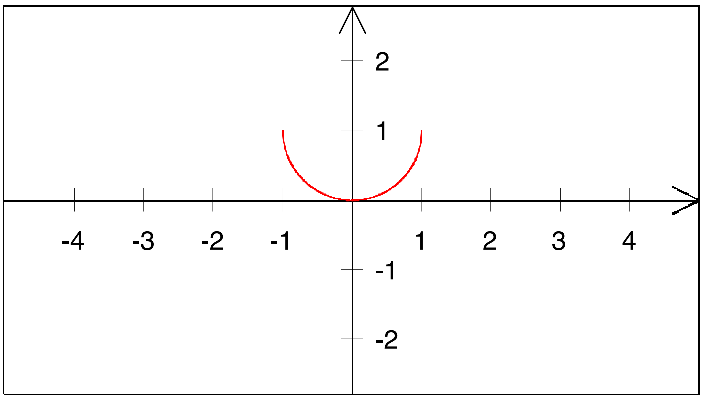
Translationssymmetrie (Periodizität) mit Translationsvektor $\begin{bmatrix} \pi \\ 0 \end{bmatrix}$

34 Ratespiel

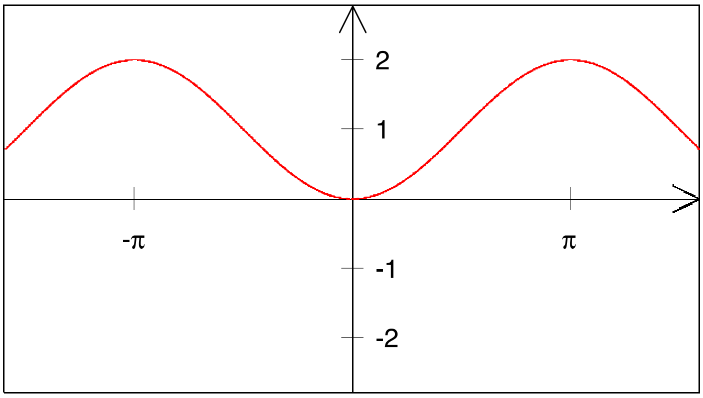
Welche Funktion steckt hinter den gezeichneten Kurven?



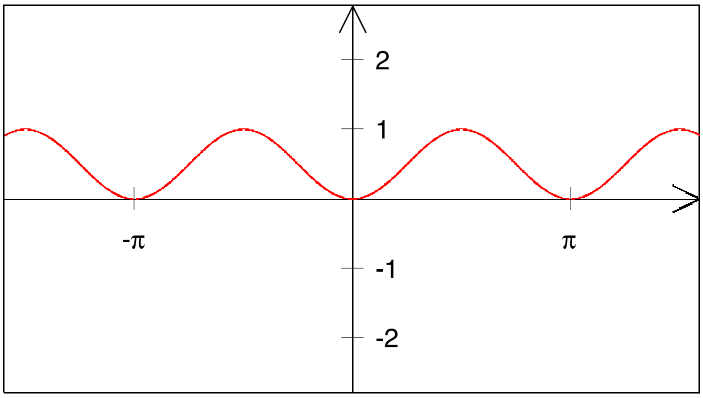
Beispiel a)



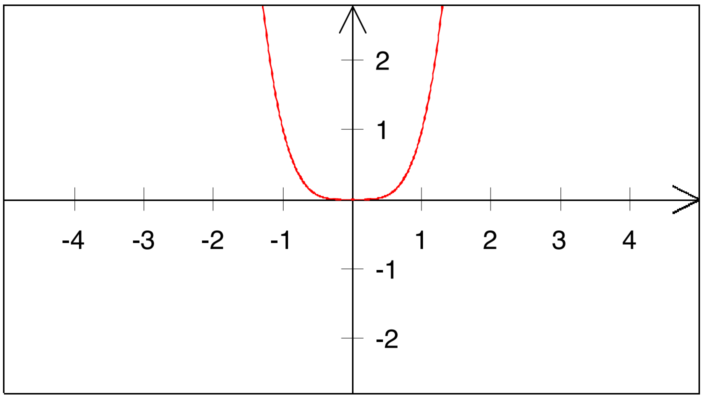
Beispiel b)



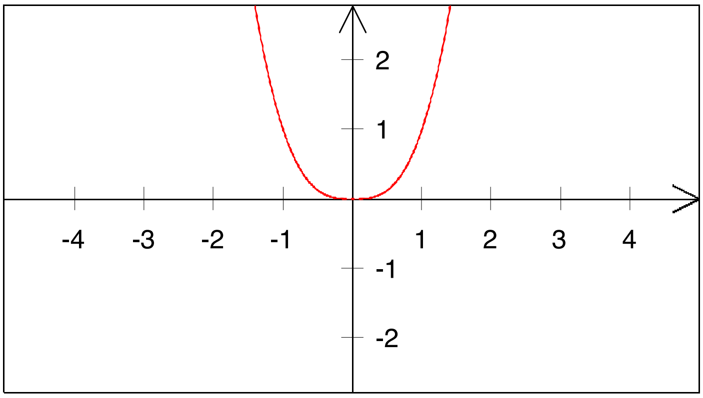
Beispiel c)



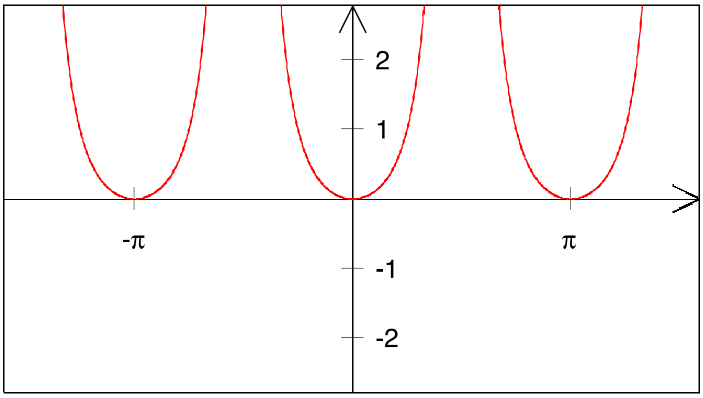
Beispiel d)



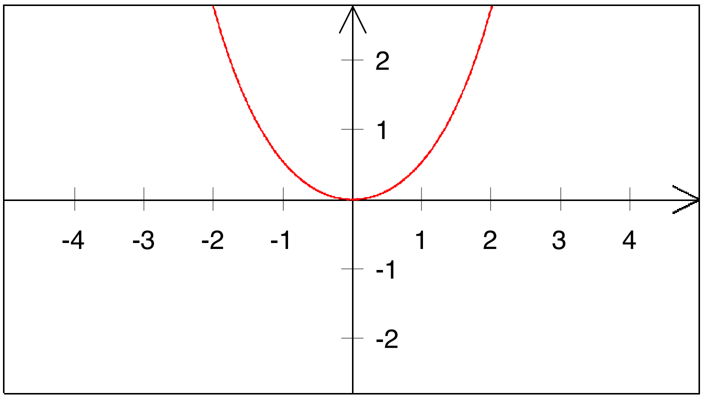
Beispiel e)



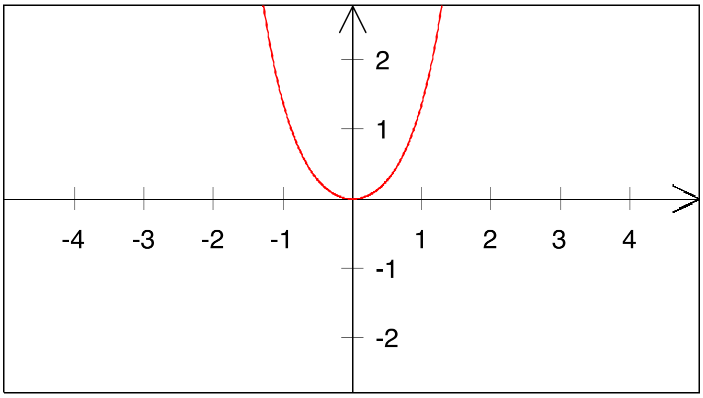
Beispiel f)



Beispiel g)



Beispiel h)



Beispiel i)

Ergebnis

a) $y = f(x) = x^2,\ x \in \mathbb{R}$

b) $y = f(x) = 1 - \sqrt{1 - x^2},\ x \in [-1,1]$ (Halbkreis)

c) $y = f(x) = 1 - \cos(x),\ x \in \mathbb{R}$

d) $y = f(x) = \sin^2(x),\ x \in \mathbb{R}$

e) $y = f(x) = x^4,\ x \in \mathbb{R}$

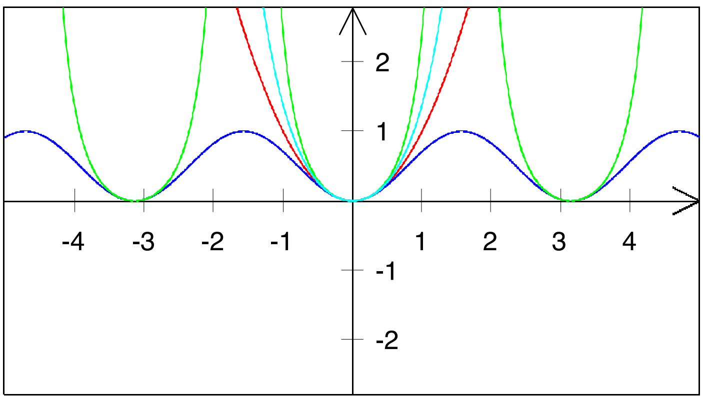
f) $y = f(x) = |x|^3,\ x \in \mathbb{R}$

g) $y = f(x) = \tan^2(x),\ x \in \mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$

h) $y = f(x) = \cosh(x) - 1,\ x \in \mathbb{R}$

i) $y = f(x) = \sinh^2(x),\ x \in \mathbb{R}$

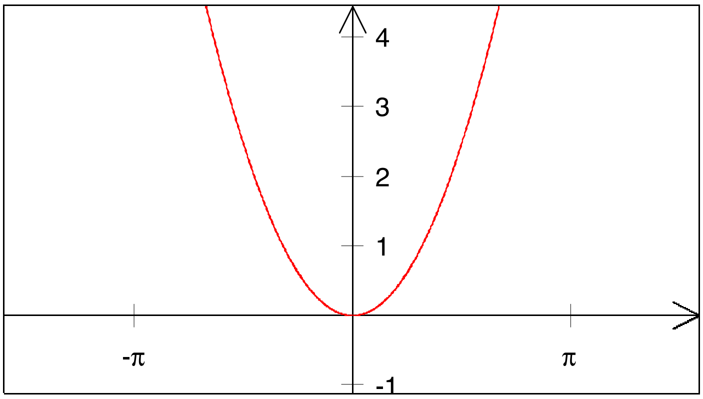
Die folgende Figur zeigt die Beispiele a), d), g), i).



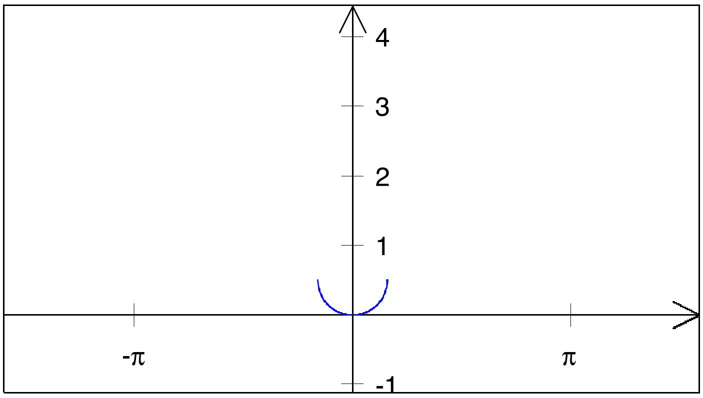
Beispiele a), d), g), i)

35 Ratespiel

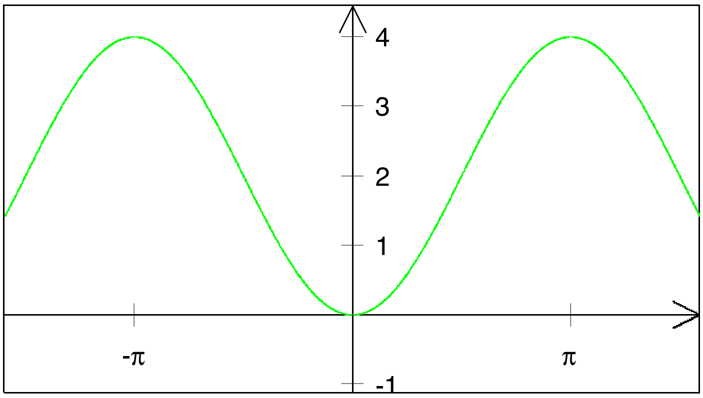
Welche Funktion steckt hinter den gezeichneten Kurven?



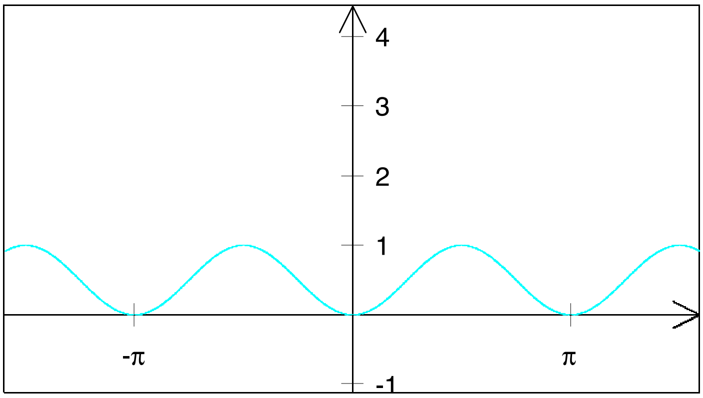
Beispiel a)



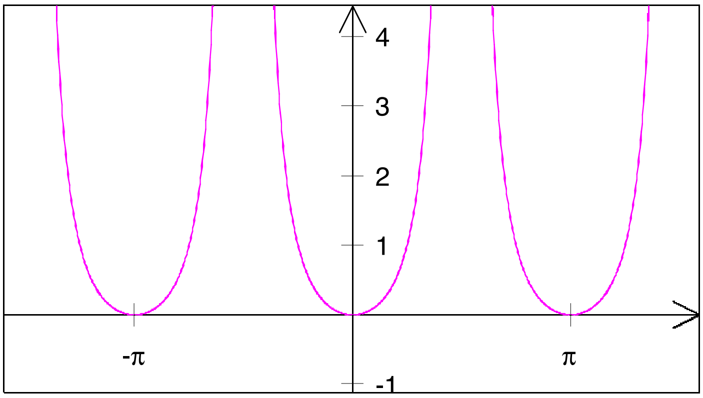
Beispiel b)



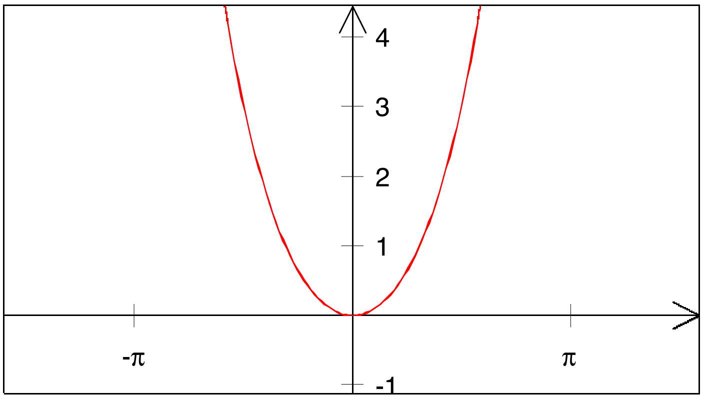
Beispiel c)



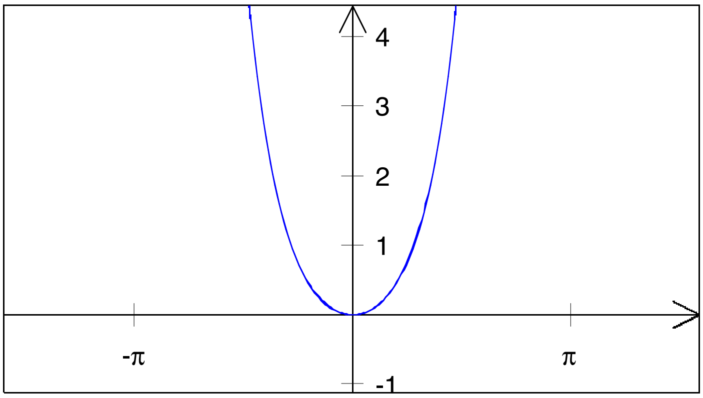
Beispiel d)



Beispiel e)



Beispiel f)



Beispiel g)

Ergebnis

a) $y = f(x) = x^2,\ x \in \mathbb{R}$

b) $y = f(x) = \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} - x^2},\ x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ (Halbkreis)

c) $y = f(x) = 2 - 2\cos(x),\ x \in \mathbb{R}$

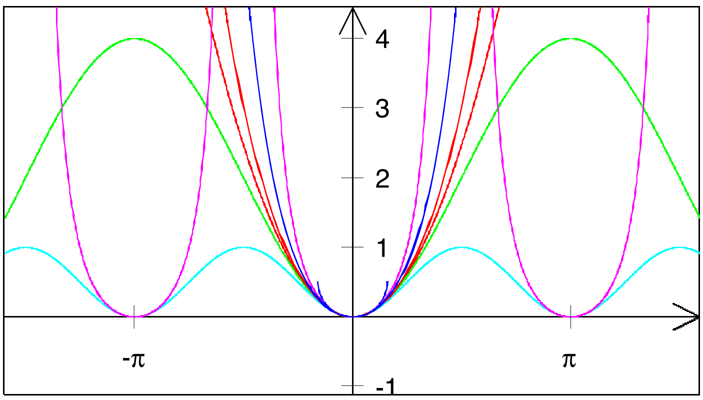
d) $y = f(x) = \sin^2(x),\ x \in \mathbb{R}$

e) $y = f(x) = \tan^2(x),\ x \in \mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$

f) $y = f(x) = 2\cosh(x) - 2,\ x \in \mathbb{R}$

g) $y = f(x) = \sinh^2(x),\ x \in \mathbb{R}$

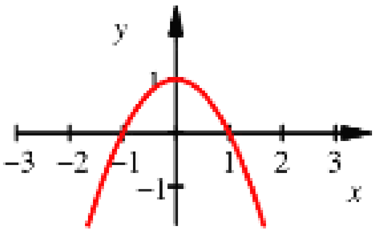
Die folgende Figur zeigt alle Beispiele gemeinsam. Im Ursprung haben alle Kurven dieselbe Krümmung.



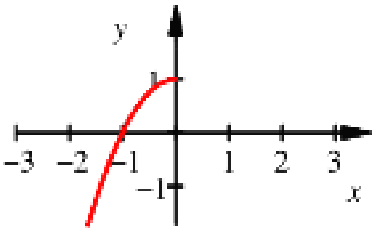
Synopsis

36 Umkehrfunktion

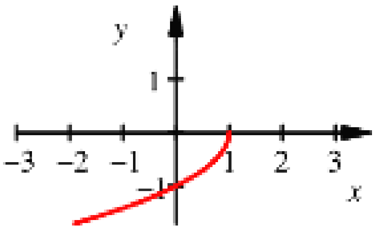
Welche Funktionen sind umkehrbar? Falls umkehrbar: Beschreibung und Skizze des Graphen der Umkehrfunktion.



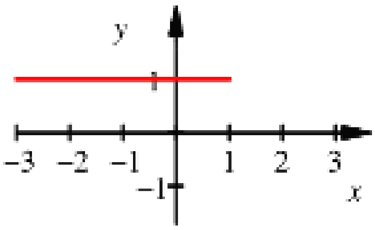
a)



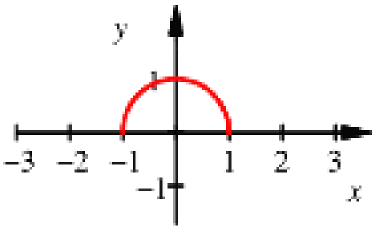
b)



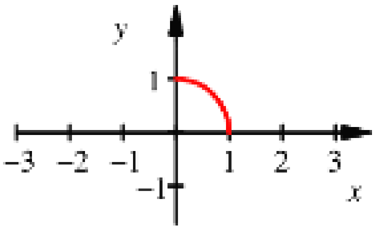
c)



d)



e)

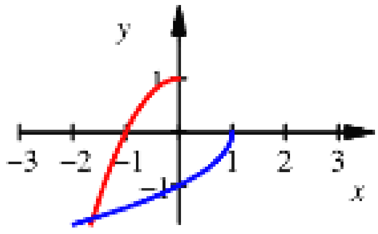


f)

Ergebnis

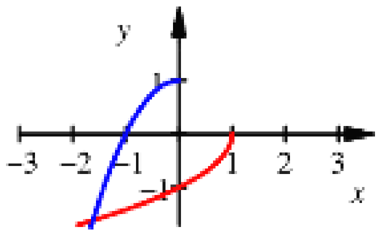
a) Nicht umkehrbar

b) $A = (-\infty, 1]$; $y = -\sqrt{1-x}$



Umkehrfunktion zu b)

c) $A = (-\infty, 0]$; $y = 1 - x^2$



Umkehrfunktion zu c)

d) Nicht umkehrbar

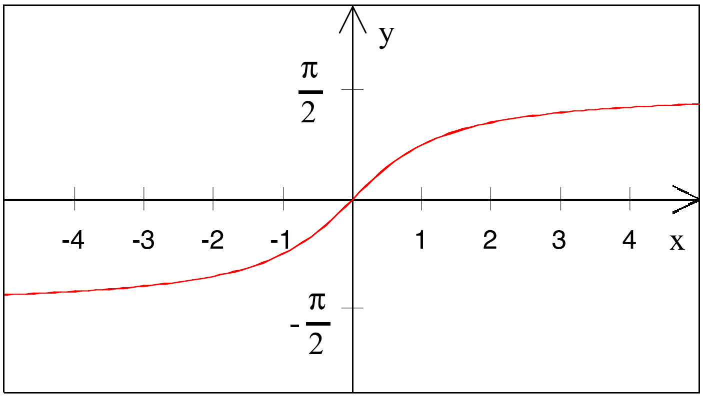
e) Nicht umkehrbar

f) $A = [0,1]$ $y = \sqrt{1-x^2}$

37 Umkehrfunktion

Die Umkehrfunktion der Tangensfunktion heißt Arcustangens (arctan). Skizzieren Sie den Graph von arctan. Was ist $\lim\limits_{x\to\infty} \arctan(x)$ und $\lim\limits_{x\to-\infty} \arctan(x)$?

Ergebnis



$y = \arctan(x)$

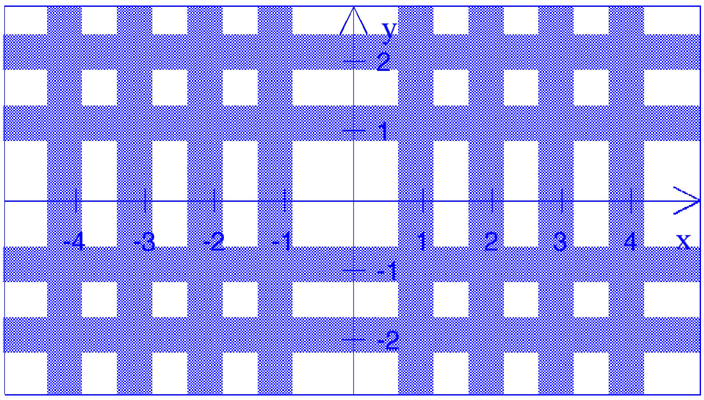
$$\lim_{x\to\infty} \arctan(x) = \tfrac{\pi}{2}$$

$$\lim_{x\to-\infty} \arctan(x) = -\tfrac{\pi}{2}$$

38 Was ist zu erwarten?

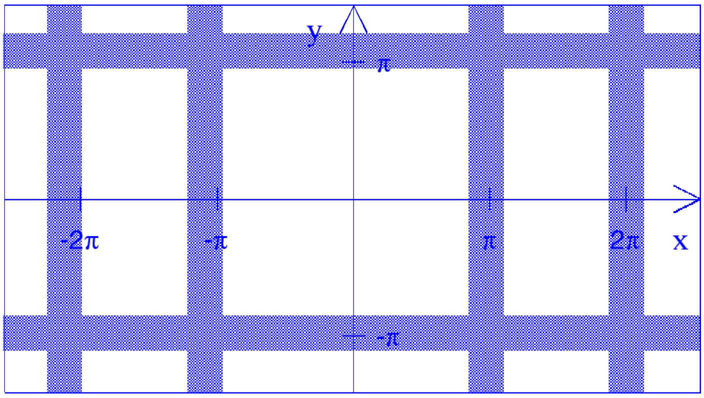
Skizzieren Sie, was bei einem grafikfähigen Computer zu erwarten ist bei (zuerst überlegen, dann mit Computer prüfen):

a) $f(x) = \sin(\arcsin(x))$



$f(x) = \sin(\arcsin(x))$

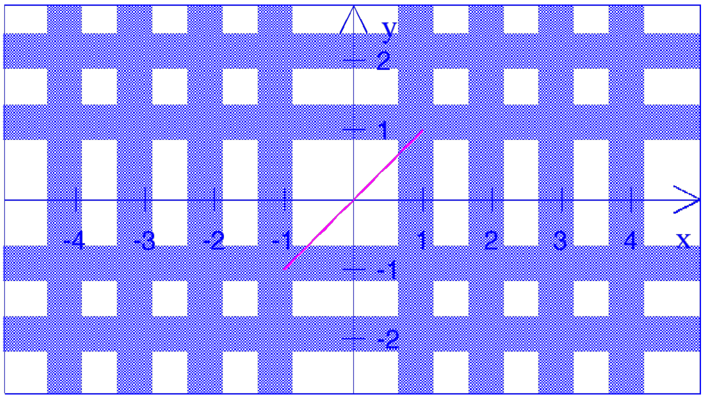
b) $g(x) = \arcsin(\sin(x))$



$g(x) = \arcsin(\sin(x))$

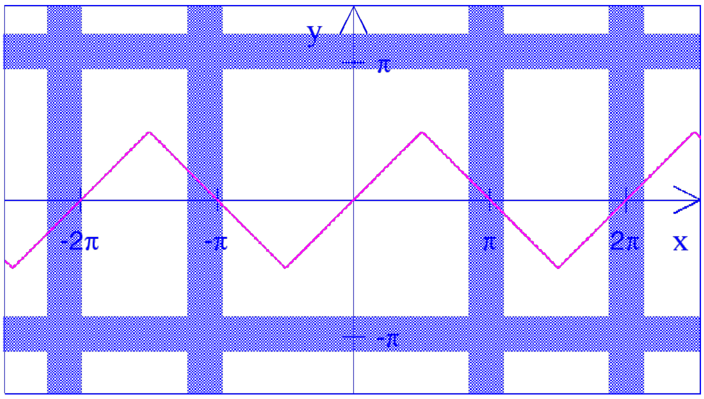
Ergebnis

a) $f(x) = \sin(\arcsin(x))$



$f(x) = \sin(\arcsin(x))$

b) $g(x) = \arcsin(\sin(x))$



$g(x) = \arcsin(\sin(x))$