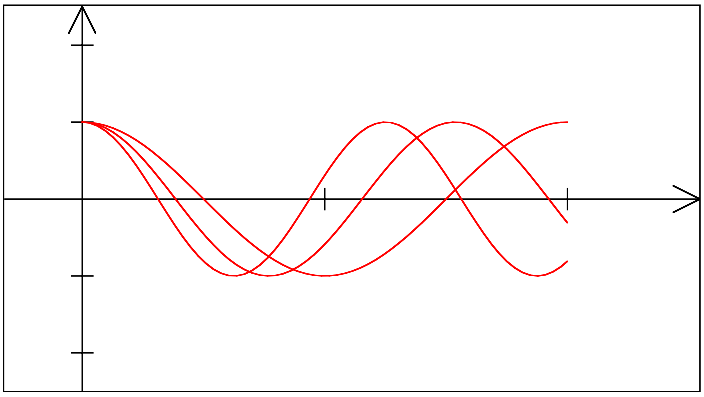
Hans Walser

Mathematik 1 für Naturwissenschaften



Modul 102

Funktionen, Folgen, Grenzwerte

Lernumgebung Teil 2

UNI BASEL

Modul 102 für die Lehrveranstaltung *Mathematik 1 für Naturwissenschaften*

Winter 2003/04 Erstausgabe
Winter 2004/05 Erweiterung
Winter 2005/06 Geändertes Layout. Fehlerkorrekturen
Winter 2006/07 Erweiterungen. MathType (selektiv). Unterteilung in 2 Teile
Herbst 2007 Geändertes Layout
Herbst 2008 Erweiterung
Herbst 2009 Erweiterung
Herbst 2010 Erweiterung
Herbst 2011 Fehlerkorrektur
Herbst 2013 Erweiterung
Herbst 2014 Erweiterung

last modified: 17. November 2013

Hans Walser
Mathematisches Institut, Rheinsprung 21, 4051 Basel
www.walser-h-m.ch/hans

Inhalt

1 Limes

Es sei $a_n = \frac{3n}{2n-5}$. Berechnen Sie die ersten fünf Folgenglieder. Wie groß ist $a = \lim\limits_{n\to\infty}(a_n) = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{3n}{2n-5}\right)$? Von welcher Folgennummer an sind sämtliche Folgenglieder weniger als 0.001 vom Grenzwert entfernt?

Ergebnis

n	1	2	3	4	5
a_n	-1	-6	9	4	3

$$a = \lim_{n\to\infty}(a_n) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n}{2n-5}\right) = \frac{3}{2}$$

$n \geq 3753$

2 Folgen und Grenzwerte

a) $a_n = \frac{(n+1)^3}{n^3+1} \qquad \lim\limits_{n\to\infty}(a_n) =$

b) $b_n = \frac{7-7n+7n^2-7n^3}{3n^3+3n^2+3n+3} \qquad \lim\limits_{n\to\infty}(b_n) =$

c) $c_n = \frac{n^3+2n^2+3n+4}{(n+1)^2} \qquad \lim\limits_{n\to\infty}(c_n) =$

d) $d_n = \frac{(n+1)^2}{n^3+3n^2+3n+1} \qquad \lim\limits_{n\to\infty}(d_n) =$

Ergebnis

a) $a_n = \frac{(n+1)^3}{n^3+1} \qquad \lim\limits_{n\to\infty}(a_n) = 1$

b) $b_n = \frac{7-7n+7n^2-7n^3}{3n^3+3n^2+3n+3} \qquad \lim\limits_{n\to\infty}(b_n) = -\frac{7}{3}$

c) $c_n = \frac{n^3+2n^2+3n+4}{(n+1)^2} \qquad \lim\limits_{n\to\infty}(c_n)$ existiert nicht, Divergenz

d) $d_n = \frac{(n+1)^2}{n^3+3n^2+3n+1} \qquad \lim\limits_{n\to\infty}(d_n) = 0$

3 Rekursive Folge

Die Folge a_n hat den Startwert $a_1 = 1$ und die Rekursionsformel $a_n = 3 - \frac{a_{n-1}}{3}$. Bestimmen Sie die ersten vier Folgenglieder und den Grenzwert.

Ergebnis

n	1	2	3	4
a_n	1	$2.\overline{6}$	$2.\overline{1}$	$2.\overline{296}$

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \frac{9}{4}$

4 Rekursive Folge

a) Die Folge a_n hat den Startwert $a_1 = 7$ und die Rekursionsformel $a_n = \frac{5-a_{n-1}}{2}$. Bestimmen Sie die ersten vier Folgenglieder und den Grenzwert.

b) Die Folge a_n hat den Startwert $a_1 = 7$ und die Rekursionsformel $a_n = \frac{2-a_{n-1}}{5}$. Bestimmen Sie die ersten vier Folgenglieder und den Grenzwert.

Ergebnis

a)

n	a_n
1	7.00000000
2	-1.00000000
3	3.00000000
4	1.00000000
5	2.00000000
6	1.50000000
7	1.75000000
8	1.62500000
9	1.68750000
10	1.65625000
11	1.67187500
12	1.66406250
13	1.66796875
14	1.66601563
15	1.66699219
16	1.66650391
17	1.66674805
18	1.66662598
19	1.66668701

20	1.66665649

$\lim\limits_{n\to\infty}(a_n) = \frac{5}{3}$

b)

n	a_n
1	7.00000000
2	-1.00000000
3	0.60000000
4	0.28000000
5	0.34400000
6	0.33120000
7	0.33376000
8	0.33324800
9	0.33335040
10	0.33332992
11	0.33333402
12	0.33333320
13	0.33333336
14	0.33333333
15	0.33333333

$\lim\limits_{n\to\infty}(a_n) = \frac{1}{3}$

5 Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3^n}{n!}\right) =$$

Bearbeitung

Die Folge $a_n = \frac{3^n}{n!}$ hat die Rekursion:

$$a_n = a_{n-1}\frac{3}{n}$$

Der Faktor $\frac{3}{n}$ strebt gegen Null. Daher ist $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{3^n}{n!}\right) = 0$.

Excel:

n	a_n
0	1
1	3
2	4.5
3	4.5
4	3.375
5	2.025
6	1.0125
7	0.433928571
8	0.162723214
9	0.054241071
10	0.016272321

6 Die Fibonacci-Folge

a) Die Folge a_n hat die beiden Startwerte $a_1 = 1$ und $a_2 = 1$ und die Rekursionsformel $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$. Bestimmen Sie die ersten zwölf Folgenglieder und, sofern vorhanden, den Grenzwert. Bemerkung: Diese Folge heißt ***Fibonacci-Folge***.

b) Die Folge b_n sei durch $b_n = \frac{a_{n+1}}{a_n}$ definiert. Bestimmen Sie die ersten zwölf Folgenglieder. Vermutung? (Ein Beweis der Vermutung wird nicht verlangt.)

Ergebnis

a)

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
a_n	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144

Kein Limes, die Fibonacci-Folge divergiert.

b)

n	a_n	b_n
1	1	1.000000
2	1	2.000000
3	2	1.500000
4	3	1.666667
5	5	1.600000
6	8	1.625000
7	13	1.615385
8	21	1.619048

9	34	1.617647
10	55	1.618182
11	89	1.617978
12	144	1.618056
13	233	

$\lim\limits_{n\to\infty}(b_n) = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.618033989$ (Goldener Schnitt)

7 Rekursiv definierte Folge

a) Die Folge a_n hat zwei Startwerte a_1 und a_2, welche Sie selber wählen, und die Rekursionsformel $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$. Bestimmen Sie die ersten zwölf Folgenglieder und, sofern vorhanden, den Grenzwert.

b) Die Folge b_n sei durch $b_n = \frac{a_{n+1}}{a_n}$ definiert. Bestimmen Sie die ersten zwölf Folgenglieder. Vermutung? (Ein Beweis der Vermutung wird nicht verlangt.)

Ergebnis

a) offene Aufgabe

b) $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n) = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right) = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.618033989$ (Goldener Schnitt)

8 Rekursiv definierte Folge

a) Die Folge a_n hat die beiden Startwerte $a_1 = 1$ und $a_2 = 1$ und die Rekursionsformel $a_{n+2} = a_{n+1} - a_n$. Bestimmen Sie die ersten zwölf Folgenglieder und, sofern vorhanden, den Grenzwert.

b) Die Folge a_n hat zwei Startwerte a_1 und a_2, welche Sie selber wählen, und die Rekursionsformel $a_{n+2} = a_{n+1} - a_n$. Bestimmen Sie die ersten zwölf Folgenglieder und, sofern vorhanden, den Grenzwert.

c) Ist es möglich, geeignete Startwerte zu finden, so dass die Folge einen Grenzwert hat?

Ergebnis

a) 1, 1, 0, -1, -1, 0, 1, 1, 0, -1, -1, 0, ... (Periodische Folge mit der Periodenlänge 6, kein Limes)

b) $a_1, a_2, (a_2 - a_1), -a_1, -a_2, -(a_2 - a_1), a_1, a_2, (a_2 - a_1), -a_1, -a_2, -(a_2 - a_1), \ldots$ (Periodische Folge mit der Periodenlänge 6, im Allgemeinen kein Limes)

c) $a_1 = a_2 = 0$; Limes $= 0$.

9 Rekursiv definierte Folge

a) Die Folge a_n hat die beiden Startwerte $a_1 = 49$ und $a_2 = 133$ und die Rekursionsformel $a_{n+2} = |a_{n+1} - a_n|$. Bestimmen Sie die ersten zwanzig Folgenglieder und, sofern vorhanden, den Grenzwert.

b) Die Folge a_n hat zwei Startwerte a_1 und a_2, welche Sie selber wählen, und die Rekursionsformel $a_{n+2} = |a_{n+1} - a_n|$. Bestimmen Sie die ersten zwanzig Folgenglieder und, sofern vorhanden, den Grenzwert.

c) Kommentar?

Ergebnis

a)

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
a_n	49	133	84	49	35	14	21	7	14	7	7	0	7	7	0	7	7	0	7	7	0

Kein Grenzwert. Periodisches Verhalten mit der Periodenlänge 3. Die Zahl 7 ist der größte gemeinsame Teiler der beiden Zahlen 49 und 133.

b) Kein Grenzwert. Periodisches Verhalten mit der Periodenlänge 3. Die Periode hat die Form $\mathrm{ggT}(a_1, a_2), \mathrm{ggT}(a_1, a_2), 0$

c) Verfahren zur Bestimmung des größten gemeinsamen Teilers, verwandt mit dem Euklidischen Algorithmus, aber weniger schnell als dieser.

10 Blutdrucksenkendes Mittel

Jemand nimmt täglich eine Pille eines blutdrucksenkenden Mittels, das 6 mg Wirkstoff enthält.

Von dem im Körper vorhandenen Wirkstoff baut der Körper täglich 75% ab.

Wie verändert sich die Menge des im Körper vorhandenen Wirkstoffs? Zeigen Sie, dass diese Menge sich stabilisiert.

Bearbeitung

Wir bezeichnen mit w_n den am n-ten Tag im Körper vorhandenen Wirkstoff.

Es ist:

$$\begin{aligned} w_0 &= 0 \\ w_1 &= 6 \\ w_2 &= 6 + 0.25 \cdot 6 = 7.5 \\ w_3 &= 6 + 0.25 \cdot 7.5 = 7.875 \\ w_4 &= 6 + 0.25 \cdot 7.875 = 7.96875 \end{aligned}$$

Wir haben eine Folge mit dem Startwert $w_0 = 0$ und der Rekursionsformel:

$$w_n = 6 + 0.25 \cdot w_{n-1}$$

Begründung der Rekursionsformel: Zufuhr durch neue Pille plus 25% des Vortages. Mit Excel ergibt sich:

Tag	Zufuhr Wirkstoff	Wirkstoff im Körper
0	0	0
1	6	6
2	6	7.5
3	6	7.875
4	6	7.96875
5	6	7.9921875
6	6	7.998046875
7	6	7.999511719
8	6	7.99987793
9	6	7.999969482
10	6	7.999992371
11	6	7.999998093
12	6	7.999999523
13	6	7.999999881
14	6	7.99999997
15	6	7.999999993
16	6	7.999999998
17	6	8
18	6	8

Die Menge des Wirkstoffes stabilisiert sich bei 8. Dann wird der tägliche Abbau durch die Neuzufuhr kompensiert.

Die folgende Tabelle zeigt, was passiert, wenn am fünften Tag die Einnahme der Pille vergessen wird.

Tag	Zufuhr Wirkstoff	Wirkstoff im Körper
0	0	0
1	6	6
2	6	7.5
3	6	7.875
4	6	7.96875
5	0	1.9921875
6	6	6.498046875
7	6	7.624511719
8	6	7.90612793
9	6	7.976531982

10	6	7.994132996
11	6	7.998533249
12	6	7.999633312
13	6	7.999908328
14	6	7.999977082
15	6	7.999994271
16	6	7.999998568
17	6	7.999999642
18	6	7.99999991
19	6	7.999999978
20	6	7.999999994
21	6	7.999999999
22	6	8
23	6	8

Es gibt einen Rückschlag der Menge des im Körper vorhandenen Wirkstoffes, aber diese Menge stabilisiert sich wieder.

Die folgende Tabelle zeigt, was passiert, wenn am fünften Tag aus Versehen zwei Pillen eingenommen werden.

Tag	Zufuhr Wirkstoff	Wirkstoff im Körper
0	0	0
1	6	6
2	6	7.5
3	6	7.875
4	6	7.96875
5	12	13.9921875
6	6	9.498046875
7	6	8.374511719
8	6	8.09362793
9	6	8.023406982
10	6	8.005851746
11	6	8.001462936
12	6	8.000365734
13	6	8.000091434
14	6	8.000022858
15	6	8.000005715
16	6	8.000001429
17	6	8.000000357
18	6	8.000000089
19	6	8.000000022
20	6	8.000000006

21	6	8.000000001
22	6	8
23	6	8

Es gibt eine Überdosis der Menge des im Körper vorhandenen Wirkstoffes, die aber auf das Stabilisationsniveau abgebaut wird. Solche Überdosen können gefährlich sein.

Schließlich noch der Fall, dass am fünften Tag zwei Pillen eingenommen werden, dafür am nächsten Tag keine.

Tag	Zufuhr Wirkstoff	Wirkstoff im Körper
0	0	0
1	6	6
2	6	7.5
3	6	7.875
4	6	7.96875
5	12	13.9921875
6	0	3.498046875
7	6	6.874511719
8	6	7.71862793
9	6	7.929656982
10	6	7.982414246
11	6	7.995603561
12	6	7.99890089
13	6	7.999725223
14	6	7.999931306
15	6	7.999982826
16	6	7.999995707
17	6	7.999998927
18	6	7.999999732
19	6	7.999999933
20	6	7.999999983
21	6	7.999999996
22	6	7.999999999
23	6	8

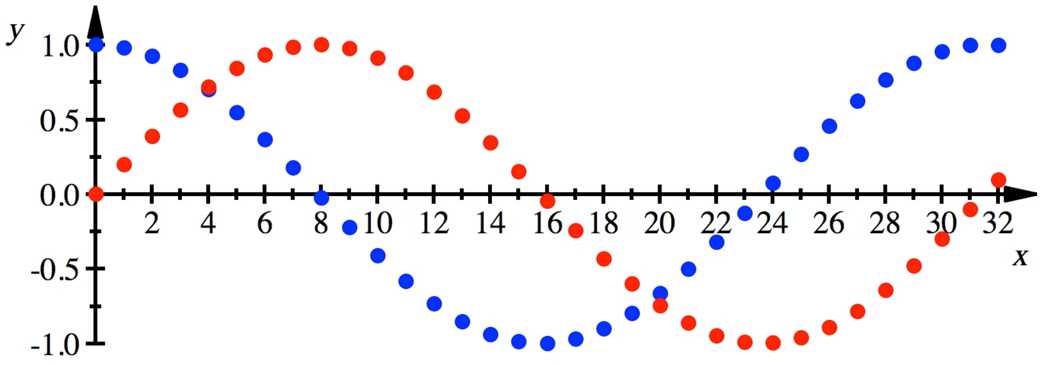
11 Gekoppelte Rekursionsformel

Frage: Welche beiden Folgen c_n und s_n ergeben sich aus den Startwerten $c_0 = 1$ und $s_0 = 0$ sowie der gekoppelten Rekursionsformel:

$$c_n = \frac{99}{101} c_{n-1} - \frac{20}{101} s_{n-1}$$
$$s_n = \frac{20}{101} c_{n-1} + \frac{99}{101} s_{n-1}$$

Bearbeitung

In der Abbildung sind die Punkte (n,c_n) in blau und die Punkte (n,s_n) in rot eingetragen.



Visualisierung der beiden Folgen

Wir vermuten, dass die Kosinus- und die Sinusfunktionen hinter den beiden Folgen stecken.

Das kann wie folgt eingesehen werden. Wir definieren:

$$\Delta t = \arccos\left(\tfrac{99}{101}\right) \approx 0.199337305 \approx 11.42118627°$$

Es ist also $\cos(\Delta t) = \frac{99}{101}$. Wegen $\left(\frac{99}{101}\right)^2 + \left(\frac{20}{101}\right)^2 = 1$ ist dann $\sin(\Delta t) = \frac{20}{101}$.

Mit dieser Bezeichnung gilt:

$$c_n = \cos(n\Delta t) \quad \text{und} \quad s_n = \sin(n\Delta t)$$

Beweis induktiv: Zunächst ist $c_0 = 1 = \cos(0)$ und $s_0 = 0 = \sin(0)$.

Es sei nun: $c_{n-1} = \cos((n-1)\Delta t)$ und $s_{n-1} = \sin((n-1)\Delta t)$

Aus der Rekursion folgt:

$$\begin{aligned} c_n &= \tfrac{99}{101} c_{n-1} - \tfrac{20}{101} s_{n-1} = \cos(\Delta t)\cos((n-1)\Delta t) - \sin(\Delta t)\sin((n-1)\Delta t) \\ s_n &= \tfrac{20}{101} c_{n-1} + \tfrac{99}{101} s_{n-1} = \sin(\Delta t)\cos((n-1)\Delta t) + \cos(\Delta t)\sin((n-1)\Delta t) \end{aligned}$$

Mit den Additionstheoremen ergibt sich:

$$\begin{aligned} c_n &= \cos(\Delta t + (n-1)\Delta t) = \cos(n\Delta t) \\ s_n &= \sin(\Delta t + (n-1)\Delta t) = \sin(n\Delta t) \end{aligned}$$

Verallgemeinerung: Mit $f \in (0,1)$ und $g = \sqrt{1-f^2}$, den Startwerten $c_0 = 1$ und $s_0 = 0$ sowie der gekoppelten Rekursionsformel:

$$\begin{aligned} c_n &= f c_{n-1} - g s_{n-1} \\ s_n &= g c_{n-1} + f s_{n-1} \end{aligned}$$

ergibt sich für $\Delta t = \arccos(f)$ analog: $c_n = \cos(n\Delta t)$ und $s_n = \sin(n\Delta t)$

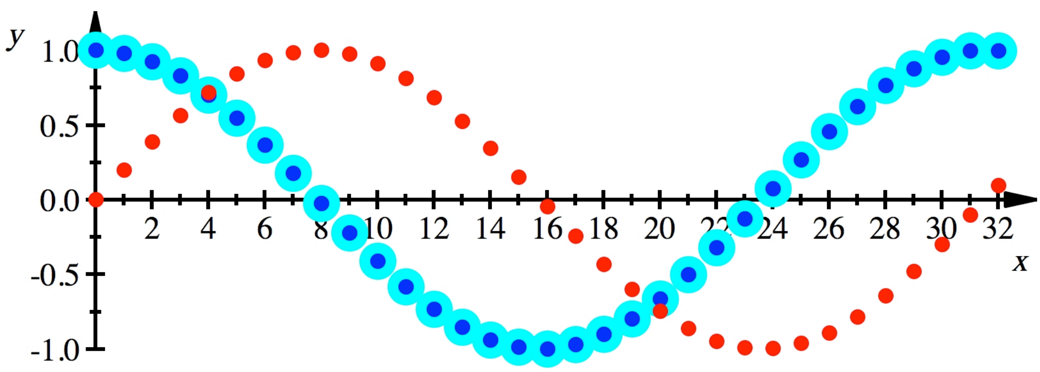
Wir können die beiden Folgen entflechten. Aus der Rekursionsformel folgt zunächst:

$$\begin{aligned} c_{n-1} &= fc_{n-2} - gs_{n-2} \\ s_{n-1} &= gc_{n-2} + fs_{n-2} \end{aligned}$$

Die erste Zeile liefert: $s_{n-2} = -\frac{1}{g}\left(c_{n-1} - fc_{n-2}\right)$. Damit erhalten wir:

$$\begin{aligned} c_n &= fc_{n-1} - gs_{n-1} = fc_{n-1} - g\left(gc_{n-2} + fs_{n-2}\right) \\ &= fc_{n-1} - g\left(gc_{n-2} + f\left(-\tfrac{1}{g}\left(c_{n-1} - fc_{n-2}\right)\right)\right) = 2fc_{n-1} - \underbrace{\left(g^2 + f^2\right)}_{=1} c_{n-2} \\ &= 2fc_{n-1} - c_{n-2} \end{aligned}$$

Das ist eine Rekursionsformel vom verallgemeinerten Fibonacci-Typ. Wir benötigen zwei Startwerte. Mit den beiden Startwerten $c_0 = 1$ und $c_1 = f = \cos(\Delta t)$ erhalten wir dieselbe Folge wie oben. In der Abbildung sind zusätzlich die Punkte nach dieser neuen Berechnungsart hellblau eingezeichnet.



Kontrollzeichnung

12 Eine rekursiv definierte Folge

Eine Folge x_n soll die Bedingung

$$\int_{x_{n+1}}^{x_{n+2}} t \, \mathrm{d}t = \int_{x_n}^{x_{n+1}} t \, \mathrm{d}t$$

erfüllen.

a) Gesucht ist eine Rekursionsformel zur Berechnung von x_{n+2} aus x_{n+1} und x_n.

b) Welche Folge ergibt sich mit den Startwerten $x_0 = 1$ und $x_1 = 2$?

c) Welche Folge ergibt sich mit den Startwerten $x_0 = 1$ und $x_1 = a$?

d) Welche Folge ergibt sich mit den Startwerten $x_0 = 0$ und $x_1 = 1$?

e) Welche Folge ergibt sich mit den Startwerten $x_0 = 0$ und $x_1 = b$?

Bearbeitung

a) Wir erhalten:

$$\int_{x_{n+1}}^{x_{n+2}} t\,\mathrm{d}t = \int_{x_n}^{x_{n+1}} t\,\mathrm{d}t$$

$$\tfrac{1}{2}x_{n+2}^2 - \tfrac{1}{2}x_{n+1}^2 = \tfrac{1}{2}x_{n+1}^2 - \tfrac{1}{2}x_n^2$$

$$x_{n+2} = \sqrt{2x_{n+1}^2 - x_n^2}$$

b) Mit den Startwerten $x_0 = 1$ und $x_1 = 2$ ergibt sich $x_n = \sqrt{3n+1}$.

c) Mit den Startwerten $x_0 = 1$ und $x_1 = a$ ergibt sich $x_n = \sqrt{na^2 - n + 1}$.

d) Mit den Startwerten $x_0 = 0$ und $x_1 = 1$ ergibt sich $x_n = \sqrt{n}$.

e) Mit den Startwerten $x_0 = 0$ und $x_1 = a$ ergibt sich $x_n = a\sqrt{n}$.

13 Eine rekursiv definierte Folge

Eine Folge x_n soll die Bedingung

$$\int_{x_{n+1}}^{x_{n+2}} \tfrac{1}{t}\,\mathrm{d}t = \int_{x_n}^{x_{n+1}} \tfrac{1}{t}\,\mathrm{d}t$$

erfüllen.

f) Gesucht ist eine Rekursionsformel zur Berechnung von x_{n+2} aus x_{n+1} und x_n.

g) Welche Folge ergibt sich mit den Startwerten $x_0 = 1$ und $x_1 = 2$?

h) Welche Folge ergibt sich mit den Startwerten $x_0 = 1$ und $x_1 = a$?

Bearbeitung

a) Wir erhalten:

$$\int_{x_{n+1}}^{x_{n+2}} \tfrac{1}{t}\,\mathrm{d}t = \int_{x_n}^{x_{n+1}} \tfrac{1}{t}\,\mathrm{d}t$$

$$\ln(x_{n+2}) - \ln(x_{n+1}) = \ln(x_{n+1}) - \ln(x_n)$$

$$\ln(x_{n+2}) = 2\ln(x_{n+1}) - \ln(x_n) = \ln\left(\frac{x_{n+1}^2}{x_n}\right)$$

$$x_{n+2} = \frac{x_{n+1}^2}{x_n}$$

b) Mit den Startwerten $x_0 = 1$ und $x_1 = 2$ ergibt sich $x_n = 2^n$.

c) Mit den Startwerten $x_0 = 1$ und $x_1 = a$ ergibt sich $x_n = a^n$.

14 Rekursion

Wählen Sie einen beliebigen Startwert x_0 und bilden Sie damit die rekursiv definierte Folge:

$$x_{n+1} = \sin(x_n)$$

Was ist $\lim_{n\to\infty}(x_n) = ?$

Ergebnis

$\lim_{n\to\infty}(x_n) = 0$

Beispiel

$x_0 = 1$

n	x[n]
0	1.00000
1	0.84147
2	0.74562
3	0.67843
4	0.62757
5	0.58718
6	0.55402
7	0.52611
8	0.50217
9	0.48133
10	0.46296
11	0.44660
12	0.43190
13	0.41860
14	0.40648
15	0.39538
16	0.38516
17	0.37570
18	0.36693
19	0.35875
20	0.35110
21	0.34393
22	0.33719
23	0.33084
24	0.32484
25	0.31915
26	0.31376
27	0.30864
28	0.30376

29	0.29911
30	0.29467

Die Konvergenz ist sehr langsam.

15 Summenzeichen

Wie kann das ohne Summenzeichen geschrieben werden?

a) $\sum\limits_{k=0}^{5}(k+2)x^{3k} =$

b) $\sum\limits_{\alpha=1}^{4}(2\alpha-1)x^{\alpha}y^{4-\alpha} =$

c) $\sum\limits_{j=0}^{3}\left(1+j^2\right)x^{3j} =$

d) $\sum\limits_{i=5}^{8}(i-2)x^{i}y^{2i} =$

e) $\sum\limits_{r=1}^{4}(-1)^r r^x y^r =$

Ergebnis

a) $\sum\limits_{k=0}^{5}(k+2)x^{3k} = 2+3x^3+4x^6+5x^9+6x^{12}+7x^{15}$

b) $\sum\limits_{\alpha=1}^{4}(2\alpha-1)x^{\alpha}y^{4-\alpha} = xy^3+3x^2y^2+5x^3y+7x^4$

c) $\sum\limits_{j=0}^{3}\left(1+j^2\right)x^{3j} = 1+2x^3+5x^6+10x^9$

d) $\sum\limits_{i=5}^{8}(i-2)x^{i}y^{2i} = 3x^5y^{10}+4x^6y^{12}+5x^7y^{14}+6x^8y^{16}$

e) $\sum\limits_{r=1}^{4}(-1)^r r^x y^r = -y+2^xy^2-3^xy^3+4^xy^4$

16 Summenzeichen

Wie kann das mit dem Summenzeichen geschrieben werden?

a) $1+2+3+\cdots+37 =$

b) $1-2+3\mp\cdots+37=$

c) $7+8+9+\cdots+37=$

d) $1+3+5+\cdots+37=$

e) $1+3x+5x^2+\cdots+37x^{18}=$

f) $y^{18}+3xy^{17}+5x^2y^{16}+\cdots+37x^{18}=$

g) $y^{12}+xy^{10}+x^2y^8+\cdots+x^6=$

Ergebnis

a) $1+2+3+\cdots+37=\sum\limits_{k=1}^{37}k$

b) $1-2+3\mp\cdots+37=\sum\limits_{k=1}^{37}(-1)^{k-1}k$

c) $7+8+9+\cdots+37=\sum\limits_{j=7}^{37}j=\sum\limits_{j=1}^{31}(j+6)=\sum\limits_{j=0}^{30}(7+j)$

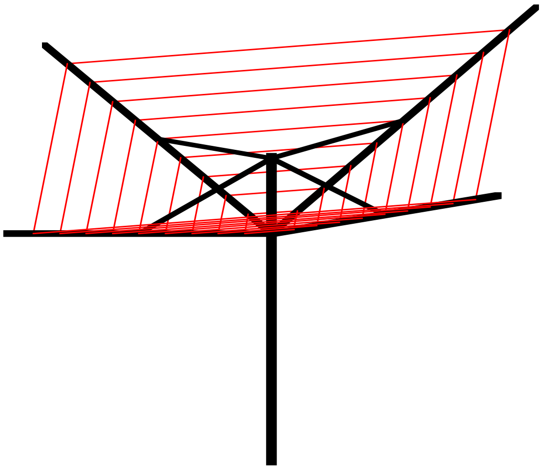
d) $1+3+5+\cdots+37=\sum\limits_{i=1}^{19}(2i-1)=\sum\limits_{s=0}^{18}(2s+1)$

e) $1+3x+5x^2+\cdots+37x^{18}=\sum\limits_{m=0}^{18}(2m+1)x^m$

f) $y^{18}+3xy^{17}+5x^2y^{16}+\cdots+37x^{18}=\sum\limits_{m=0}^{18}(2m+1)x^m y^{18-m}$

g) $y^{12}+xy^{10}+x^2y^8+\cdots+x^6=\sum\limits_{q=0}^{6}y^{12-2q}x^q$

17 Wäschetrockner (arithmetische Folge)



Stewi

Eine Wäschetrocknungsspinne soll neu bespannt werden. Die Spinne besteht aus vier Sektoren mit je neun Wäscheleinen. Die mittlere Leine in einem Sektor ist 1.70 m lang. Reichen 50 m Leine für die Neubespannung aus?

Ergebnis

Nein. Die Nettogesamtlänge der Leine ist 61.2 m. Zusätzlich braucht es etwas Leine für die Knoten und den Übergang von einem Rundgang zum nächsten.

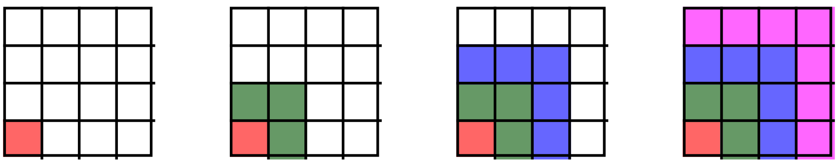
18 Summe der ungeraden Zahlen

Wie groß ist die Summe der n ersten ungeraden Zahlen?

Ergebnis

Die Summe ist n^2.

Bearbeitung



Proof without words

19 Grenzwert

Die Folge:

$$a_1 = \tfrac{1}{2}$$
$$a_2 = \tfrac{1+2}{3+4}$$
$$a_3 = \tfrac{1+2+3}{4+5+6}$$
$$a_4 = \tfrac{1+2+3+4}{5+6+7+8}$$

Wie geht es weiter? Formulierung in Worten? Formulierung mit einer Formel? Was ist der Grenzwert?

Bearbeitung

$$\begin{aligned}
a_1 &= \tfrac{1}{2} = 0.5 \\
a_2 &= \tfrac{1+2}{3+4} = \tfrac{3}{7} = 0.\overline{428571} \\
a_3 &= \tfrac{1+2+3}{4+5+6} = \tfrac{6}{15} = \tfrac{2}{5} = 0.4 \\
a_4 &= \tfrac{1+2+3+4}{5+6+7+8} = \tfrac{10}{26} = \tfrac{5}{13} = 0.\overline{384615} \\
a_5 &= \tfrac{1+2+3+4+5}{6+7+8+9+10} = \tfrac{15}{40} = \tfrac{3}{8} = 0.375 \\
a_6 &= \tfrac{1+2+3+4+5+6}{7+8+9+10+11+12} = \tfrac{21}{57} = \tfrac{7}{19} \approx 0.36842105263
\end{aligned}$$

Zur Berechnung von a_n dividieren wir die Summe der ersten n natürlichen Zahlen durch die Summe der zweiten n natürlichen Zahlen.

$$a_n = \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} k}{\sum\limits_{k=n+1}^{2n} k}$$

Zähler und Nenner sind je eine Partialsumme einer arithmetischen Folge (der einfachsten, die es gibt). Eine Partialsumme einer arithmetischen Folge berechnen wir, indem wir das arithmetische Mittel des ersten und des letzten Summanden mit der Anzahl der Summanden multiplizieren. In unserem Fall heißt das;

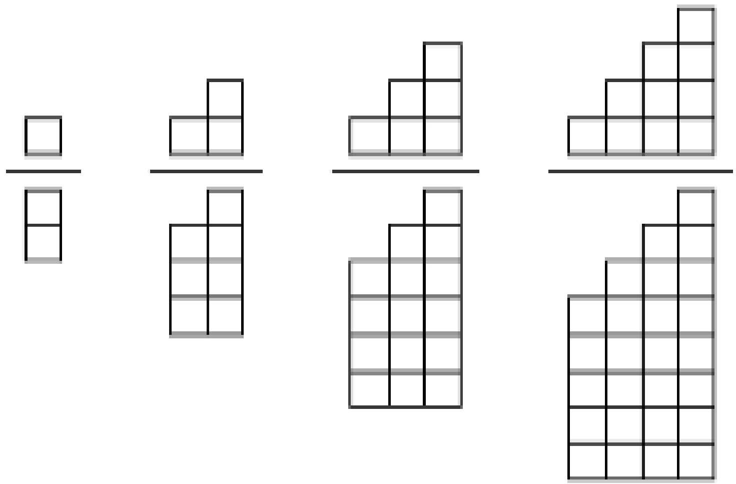
$$a_n = \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} k}{\sum\limits_{k=n+1}^{2n} k} = \frac{\frac{1}{2}(1+n)n}{\frac{1}{2}(n+1+2n)n} = \frac{1+n}{1+3n}$$

Somit erhalten wir für den Grenzwert:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1+n}{1+3n} = \frac{1}{3}$$

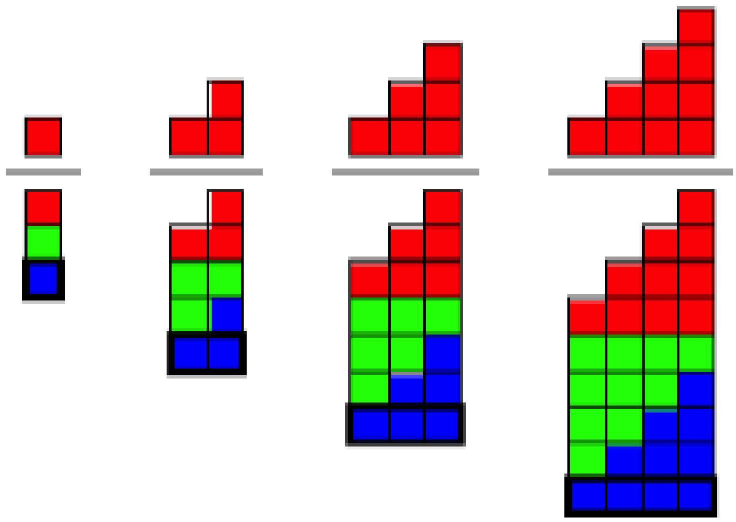
Visualisierung

Wir stellen Zähler und Nenner grafisch je durch ein Staffelbild dar:



Staffelbilder

Die Zähler haben fast drei Mal Platz in den Nennern; wir müssen jeweils unten noch eine Konsole hinzufügen.



Der Zähler hat fast drei Mal Platz im Nenner

Da die angefügte Konsole relativ zum Gesamtnenner immer kleiner wird, ergibt sich der Grenzwert $\frac{1}{3}$.

20 Überleben mit Käse

Zu Beginn einer Hungersnot ist noch ein ganzer Käse vorhanden. Es sei a_n die Tagesportion, die am Tag n von diesem Käse gegessen werden darf.

Überlebensstrategie 1: Wir essen jeden Tag einen Drittel dessen, was wir am Vortag gegessen haben. Was ist a_n, $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n)$, $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$?

Überlebensstrategie 2: Wir essen jeden Tag einen Drittel des noch vorhandenen Käses.

Was ist nun a_n, $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n)$, $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$?

Ergebnis

Überlebensstrategie 1

$a_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n$, $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n) = 0$, $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k = \frac{1}{2}$

Überlebensstrategie 2

$a_n = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^n$, $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n) = 0$, $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k = 1$

21 Geometrische Reihe

a) Der periodische Dezimalbruch $x = 0.\overline{13} = 0.13131313..$ kann wie folgt umgeformt werden:

$$x = 0.\overline{13} = 0.131313.. = 13 \cdot 0.010101.. = 13\sum_{k=1}^{\infty} 0.01^k$$

Stellen Sie nun x als Bruchzahl mit ganzzahligem Zähler und Nenner dar.

Bearbeiten Sie entsprechend:

b) $y = 0.\overline{12345}$

c) $z = 0.12\overline{345}$

Ergebnis

a) $x = 0.\overline{13} = \frac{13}{99}$

b) $y = 0.\overline{12345} = \frac{4115}{33333}$

c) $z = 0.12\overline{345} = \frac{4111}{33300}$

Erster Lösungsweg

$$x = 0.\overline{13} = 0.131313.. = 13 \cdot 0.010101.. = 13\sum_{k=1}^{\infty} 0.01^k = 13 \cdot \frac{0.01}{1-0.01} = 13 \cdot \frac{0.01}{0.99} = \frac{13}{99}$$

Zweiter Lösungsweg

Die Periode hat die Länge 2. Wir multiplizieren daher mit $10^2 = 100$:

$$\begin{aligned} x &= 0.\overline{13} \\ 100x &= 13.\overline{13} \\ 100x - x &= 13 \\ 99x &= 13 \\ x &= \tfrac{13}{99} \end{aligned}$$

22 Geometrische Reihe

Für eine geometrische Folge a_n gilt: $a_1 = 9$ und $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k = 27$.

a) Gesucht sind a_2, a_3 und a_4.

b) Gesucht ist p so, dass $a_n < 0.001$ für alle $n > p$.

Ergebnis

a) Es ist $q = \frac{2}{3}$ und weiter: $a_2 = 6, \quad a_3 = 4, \quad a_4 = \frac{8}{3}$

b) $p = 23$

23 Algebra Made Difficult

Problem: Solve $x = ax + b$ for x.

Bearbeitung

Fallunterscheidung:

(i): $|a| < 1$

$$\begin{aligned} x &= ax + b \\ &= a(ax+b) + b = a^2x + ab + b \\ &= a\left(a^2x + ab + b\right) = a^3x + a^2b + ab + b \\ &= a\left(a^3x + a^2b + ab + b\right) + b = a^4x + a^3b + a^2b + ab + b \\ &\vdots \\ &= \lim_{n \to \infty} a^n x + b\sum_{i=0}^{\infty} a^i = 0 + b\tfrac{1}{1-a} \end{aligned}$$

(ii): $|a| > 1$

Wir formen die Gleichung um zu $x = \frac{1}{a}x - \frac{b}{a}$. Es ist $\left|\frac{1}{a}\right| < 1$.

$$
\begin{aligned}
x &= \tfrac{1}{a}x - \tfrac{b}{a} \\
&= \tfrac{1}{a}\left(\tfrac{1}{a}x - \tfrac{b}{a}\right) - \tfrac{b}{a} = \left(\tfrac{1}{a}\right)^2 x - \left(\tfrac{1}{a}\right)^2 b - \tfrac{1}{a}b \\
&= \tfrac{1}{a}\left(\left(\tfrac{1}{a}\right)^2 x - \left(\tfrac{1}{a}\right)^2 b - \tfrac{b}{a}\right) - \tfrac{b}{a} = \left(\tfrac{1}{a}\right)^3 x - \left(\tfrac{1}{a}\right)^3 b - \left(\tfrac{1}{a}\right)^2 b - \tfrac{1}{a}b \\
&= \tfrac{1}{a}\left(\left(\tfrac{1}{a}\right)^3 x - \left(\tfrac{1}{a}\right)^3 b - \left(\tfrac{1}{a}\right)^2 b - \tfrac{1}{a}b\right) - \tfrac{b}{a} = \left(\tfrac{1}{a}\right)^4 x - \left(\tfrac{1}{a}\right)^4 b - \left(\tfrac{1}{a}\right)^3 b - \left(\tfrac{1}{a}\right)^2 b - \tfrac{1}{a}b \\
&\;\vdots \\
&= \lim_{n\to\infty}\left(\tfrac{1}{a}\right)^n x - b\sum_{i=1}^{\infty}\left(\tfrac{1}{a}\right)^i = 0 - b\frac{\frac{1}{a}}{1-\frac{1}{a}} = -b\frac{1}{a-1} = b\frac{1}{1-a}
\end{aligned}
$$

(iii) $|a| = 1$

(iiia) $a = 1$. Falls $b = 0$, kann jede reelle Zahl für x eingesetzt werden. Falls $b \neq 0$, gibt es keine Lösung.

(iiib) $a = -1$. $x = \frac{b}{2}$.

Literatur

Propp, James (2013). Algebra Made Difficult. MATHEMATICS MAGAZINE, VOL. 86, NO. 3, June 2013. 219.

24 Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2+k}$$

Bearbeitung

Abschätzung

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2+k} < \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2} \underset{\underset{\text{Euler}}{\uparrow}}{=} \frac{\pi^2}{6} \approx 1.645$$

Die Reihe konvergiert also.

Excel

k	1/(k^2+k)	Summe
1	0.5000000000	0.5000000000
2	0.1666666667	0.6666666667
3	0.0833333333	0.7500000000
4	0.0500000000	0.8000000000
5	0.0333333333	0.8333333333
6	0.0238095238	0.8571428571
7	0.0178571429	0.8750000000

8	0.0138888889	0.8888888889
9	0.0111111111	0.9000000000
10	0.0090909091	0.9090909091
11	0.0075757576	0.9166666667
12	0.0064102564	0.9230769231
13	0.0054945055	0.9285714286
14	0.0047619048	0.9333333333
15	0.0041666667	0.9375000000
16	0.0036764706	0.9411764706
17	0.0032679739	0.9444444444
18	0.0029239766	0.9473684211
19	0.0026315789	0.9500000000
20	0.0023809524	0.9523809524

Wir vermuten: $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2+k} = 1$

Beweis

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2+k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \left(\tfrac{1}{k} - \tfrac{1}{k+1}\right) = \left(1 - \tfrac{1}{2}\right) + \left(\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{3}\right) + \left(\tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\tfrac{1}{n} - \tfrac{1}{n+1}\right)$$

$$= 1 \underbrace{- \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}}_{=0} \underbrace{- \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{3}}_{=0} - \tfrac{1}{4} + \cdots + \tfrac{1}{n} - \tfrac{1}{n+1} = 1 - \tfrac{1}{n+1}$$

Für $n \to \infty$ erhalten wir:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2+k} = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \tfrac{1}{n+1}\right) = 1$$

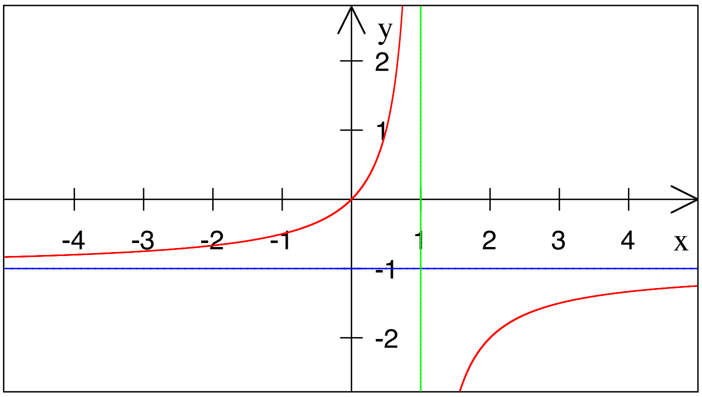
25 Grenzwerte einer Funktion

Es sei $f(x) = \frac{x}{1-x}$. Wie groß sind

a) $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(f(x)\right)$ b) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(f(x)\right)$ c) $\lim\limits_{x\to 0} \left(f(x)\right)$ d) $\lim\limits_{x\downarrow 1} \left(f(x)\right)$

e) $\lim\limits_{x\uparrow 1} \left(f(x)\right)$

Ergebnis



$f(x) = \frac{x}{1-x}$

a) -1 b) -1 c) 0 d) $-\infty$ e) $+\infty$

26 Grenzwerte einer Funktion

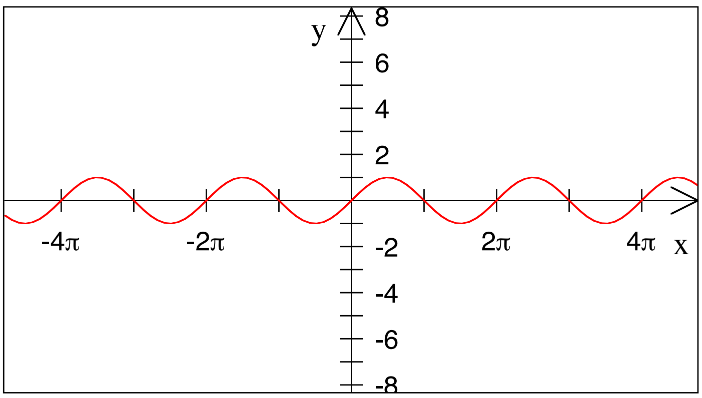
$f(x) = \sin(x)$

a) $\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)) =$

b) $\lim\limits_{x\to 0}(f(x)) =$

c) $\lim\limits_{x\to -\infty}(f(x)) =$

Ergebnis



$f(x) = \sin(x)$

a) $\lim\limits_{x\to\infty}(f(x))$ existiert nicht

b) $\lim\limits_{x\to 0}(f(x)) = 0$

c) $\lim\limits_{x\to -\infty}(f(x))$ existiert nicht

27 Grenzwerte einer Funktion

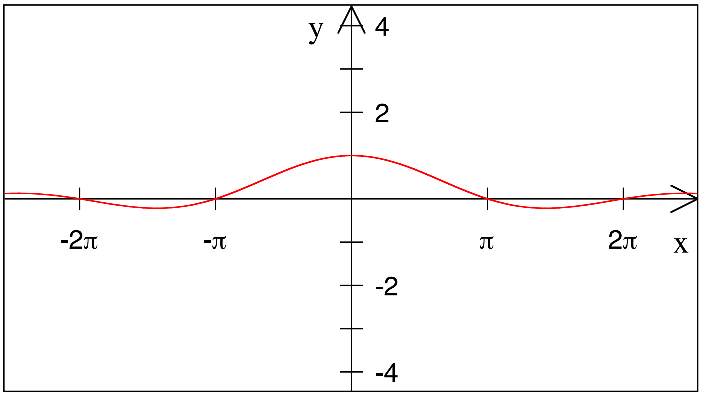
$f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$

a) $\lim\limits_{x \to \infty} \left(f(x) \right) =$

b) $\lim\limits_{x \to 0} \left(f(x) \right) =$

c) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(f(x) \right) =$

Ergebnis



$f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$

a) $\lim\limits_{x \to \infty} \left(f(x) \right) = 0$

b) $\lim\limits_{x \to 0} \left(f(x) \right) = 1$

c) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(f(x) \right) = 0$

28 Grenzwerte einer Funktion

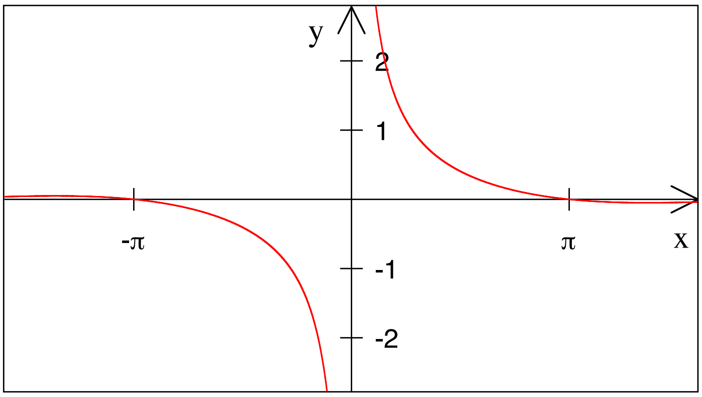
$f(x) = \frac{\sin(x)}{x^2}$

a) $\lim\limits_{x \to \infty} \left(f(x) \right) =$

b) $\lim\limits_{x \to 0} \left(f(x) \right) =$

c) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(f(x) \right) =$

Ergebnis



$$f(x) = \frac{\sin(x)}{x^2}$$

a) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(f(x)\right) = 0$

b) $\lim\limits_{x\downarrow 0}\left(f(x)\right) = +\infty\,;\ \lim\limits_{x\uparrow 0}\left(f(x)\right) = -\infty$; Grenzwert existiert nicht

c) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(f(x)\right) = 0$

29 Stetigkeit

Ist folgende Funktion stetig:

$f(s) =$ Fahrpreis der Basler Verkehrsbetriebe für eine Strecke von s Metern

Ergebnis

nein

30 Stetigkeit

Im Intervall $[0,1]$ seien die Funktionen $f_n(x) = x^n$; $n \in \mathbb{N}$ definiert. Sind diese Funktionen stetig?

Im gleichen Intervall $[0,1]$ sei nun die Funktion $g(x)$ wie folgt definiert: $g(x) = \lim\limits_{n\to\infty}\left(f_n(x)\right)$. Skizzieren Sie dies Funktion $g(x)$. Ist sie stetig?

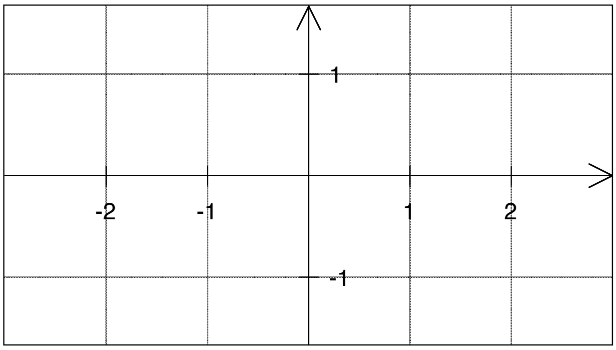
Ergebnis

nein

31 Stetigkeit

a) Skizzieren Sie die Funktion:

$$y = f(x) = \begin{cases} +1 & \text{falls } \operatorname{frac}(x) < \frac{1}{2} \\ -1 & \text{falls } \operatorname{frac}(x) \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$

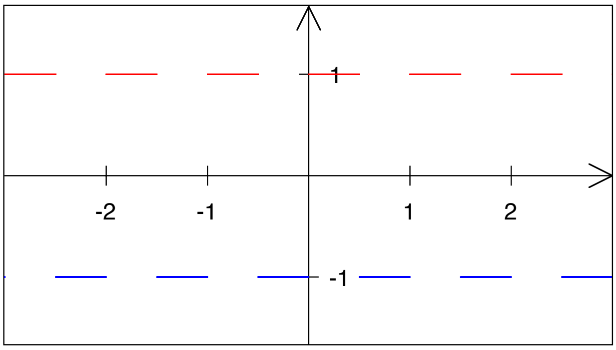


$$y = f(x) = \begin{cases} +1 & \text{falls } \operatorname{frac}(x) < \frac{1}{2} \\ -1 & \text{falls } \operatorname{frac}(x) \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$

b) Wo ist diese Funktion unstetig?

Ergebnis

a)



$$y = f(x) = \begin{cases} +1 & \text{falls } \operatorname{frac}(x) < \frac{1}{2} \\ -1 & \text{falls } \operatorname{frac}(x) \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$

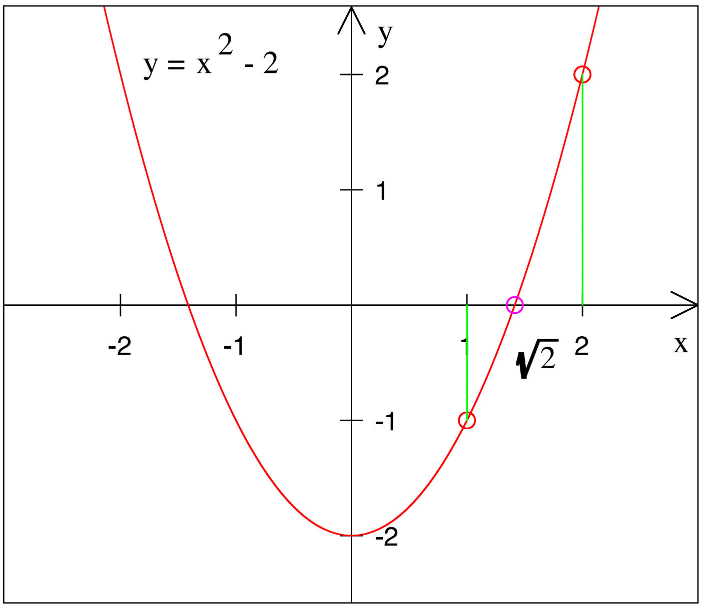
b) Bei $x = \frac{k}{2}, \quad k \in \mathbb{Z}$

32 Stetigkeit

Warum ist $1 < \sqrt{2} < 2$?

Begründung

Sei $f(x) = x^2 - 2$. Dann ist $f(1) = -1$ und $f(2) = 2$. Wegen der Stetigkeit von *f* gibt es eine Nullstelle zwischen 1 und 2 (nämlich $\sqrt{2}$).



Existenz einer Nullstelle

33 Stetige Funktionen

Sei $f(x) = a_n x^n + \cdots + a_0$ ein Polynom *ungeraden* Grades. Dann hat $f(x)$ mindestens eine Nullstelle. Warum?

Beweis

Wir können annehmen, dass der höchste Koeffizient $a_n > 0$ ist (sonst betrachte man das Polynom $-f(x)$). Dann gilt $\lim\limits_{x\to\infty}\big(f(x)\big) = \infty$ und $\lim\limits_{x\to-\infty}\big(f(x)\big) = -\infty$. Also gibt es Zahlen a und b mit $f(a) < 0$ und $f(b) > 0$, und aus der Stetigkeit der Funktion folgt die Behauptung.