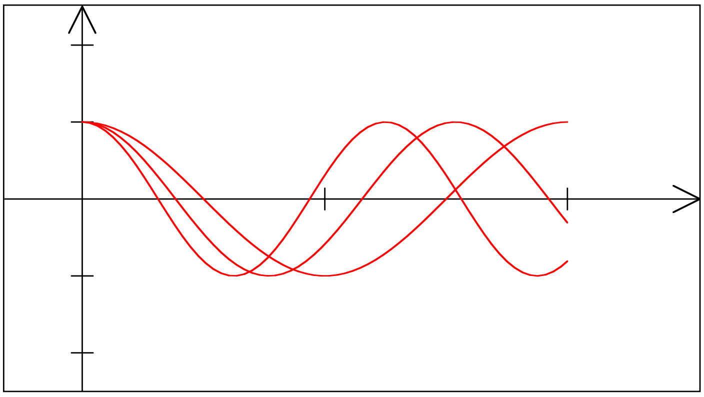
Hans Walser

Mathematik 1 für Naturwissenschaften



Modul 102

Funktionen, Folgen, Grenzwerte

UNI BASEL

Modul 102 für die Lehrveranstaltung *Mathematik 1 für Naturwissenschaften*

Winter 2001/02	Erstausgabe, auf der Basis des Vorlesungsskriptes von Hans Christoph Im Hof und Hanspeter Kraft
Winter 2003/04	Überarbeitung
Winter 2004/05	Grafische Überarbeitung. Kürzungen. Fehlerbereinigung
Winter 2005/06	Fehlerkorrekturen. Grafische Ergänzungen
Winter 2006/07	Technische Überarbeitung. Ergänzungen. MathType
Herbst 2007	Kleine Ergänzung. Fehlerkorrektur
Herbst 2008	Keine Änderung
Herbst 2010	Grafische Überarbeitung
Herbst 2013	Erweiterung und Kürzung

last modified: 19. September 2013

Hans Walser
Mathematisches Institut, Rheinsprung 21, 4051 Basel
www.walser-h-m.ch/hans/

Inhalt

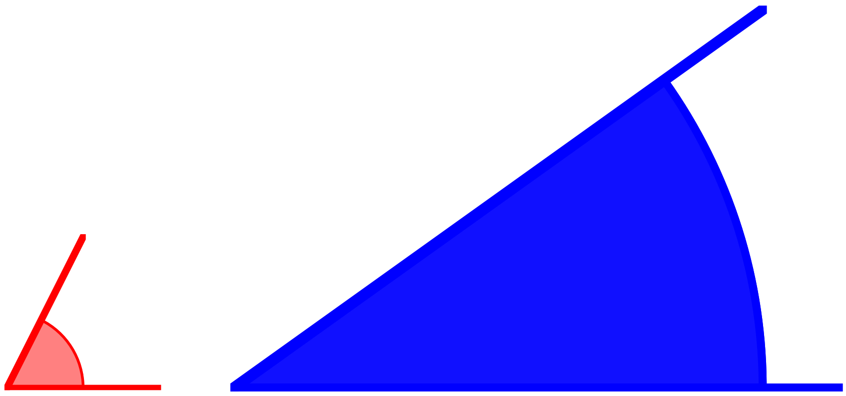
1 Funktionen

Die Funktion der Idee ist die Idee der Funktion

Karl der Kluge

1.1 Winkelfunktionen

1.1.1 Was ist ein Winkel?



Welches ist der größere Winkel?

Was ist der Winkel zwischen zwei Geraden? Was ist ein negativer Winkel?

Definition: Der Winkel ist das Maß einer Rotation, und zwar einer Drehung im positiven Drehsinn (Kreiselsinn). Wir zählen die Drehungen: ganze Drehungen plus Teile von ganzen Drehungen.

Positiver Drehsinn

1.1.2 Das Gradmaß (degrees)

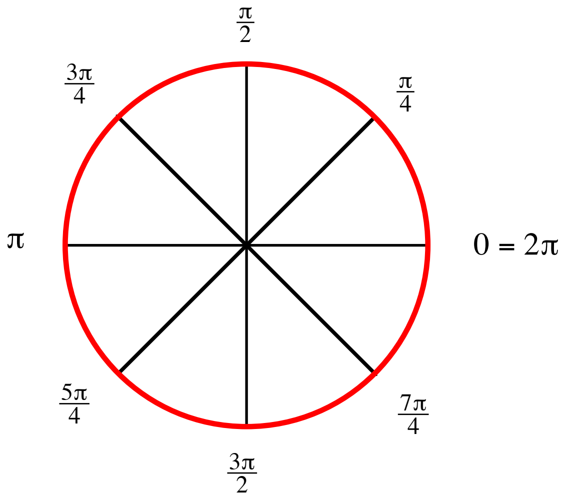
Gradmaß: Maß für ganze Drehung = 360°. Die Babylonier kannten das Gradmaß. Da ihr Zahlensystem auf der Basis 60 (statt auf der Basis 10) beruhte, ist die Unterteilung eines Grades in 60 Minuten und weiter einer Minute in 60 Sekunden sinnvoll. Das Gradmaß wird hauptsächlich in der Schule verwendet.

1.1.3 Neugrade

Der volle Winkel misst 400 gon, der rechte Winkel 100 gon. Die Unterteilung erfolgt dezimal. Dieses Maßsystem ist in der Topografie und Vermessung weit verbreitet.

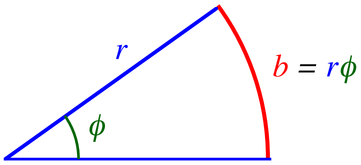
1.1.4 Bogenmaß (radians)

Das Bogenmaß ist das wichtigste Winkelmaß. Das Maß für eine ganze Drehung ist 2π, der rechte Winkel misst $\frac{\pi}{2}$. Das Bogenmaß entspricht (daher der Name) der Länge eines Bogens auf dem Einheitskreis mit dem entsprechenden Zentriwinkel. Die Maßeinheit ist *Radiant*, sie wird aber in der Praxis meistens weggelassen.



Das Bogenmaß

Wird in einem Bogen mit dem Radius r der Zentriwinkel ϕ im Bogenmaß gemessen, so erhalten wir für die Bogenlänge $b = r\phi$ und für die Sektorfläche $A_{\text{Sektor}} = \frac{1}{2}rb = \frac{1}{2}r^2\phi$.



Bogenlänge

Umrechnung:

$\alpha°$ Winkel im Gradmaß $\Rightarrow$ $\phi = \frac{2\pi}{360°}\alpha° = \frac{\pi}{180°}\alpha°$ Winkel im Bogenmaß

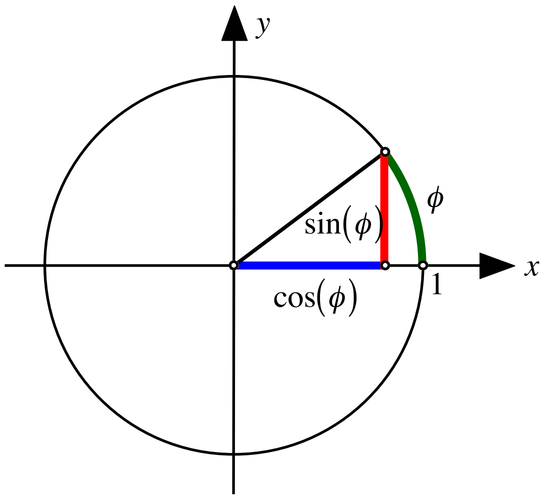
ϕ Winkel im Bogenmaß $\Rightarrow$ $\alpha° = \frac{360°}{2\pi}\phi = \frac{180°}{\pi}\phi$ Winkel im Gradmaß

1.1.5 Übersicht

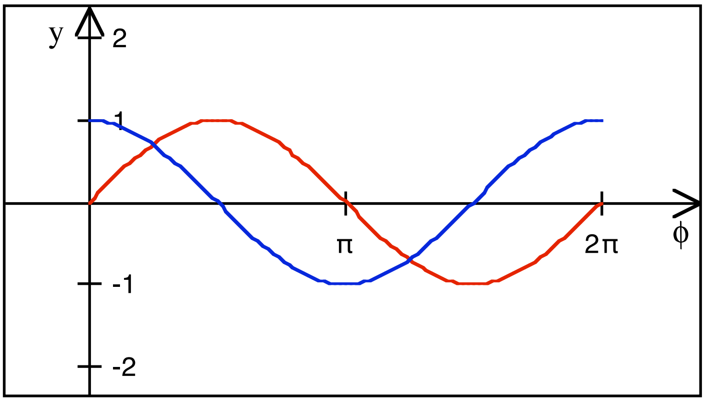
	Grad Degree	Gon Grad	Radiant Radians
Vollwinkel	360°	400 gon	2π
Gestreckter Winkel	180°	200 gon	π
Rechter Winkel	90°	100 gon	$\frac{\pi}{2}$
Winkel im gleichseiti-gen Dreieck	60°	66.667 gon	$\frac{\pi}{3}$
Halber rech-ter Winkel	45°	50 gon	$\frac{\pi}{4}$

Bemerkung: Wir betrachten die Drehung als „Prozess“; daher ist $540° \neq 180°$, $360° \neq 0°$ und $-180° \neq 180°$. Nimmt man jedoch das „Resultat“ der Drehung, d.h. die „Endlage“, so gilt $540° = 180°$, $360° = 0°$ und $-180° = 180°$.

1.1.6 Kosinus und Sinus



Definition der Winkelfunktionen am Einheitskreis

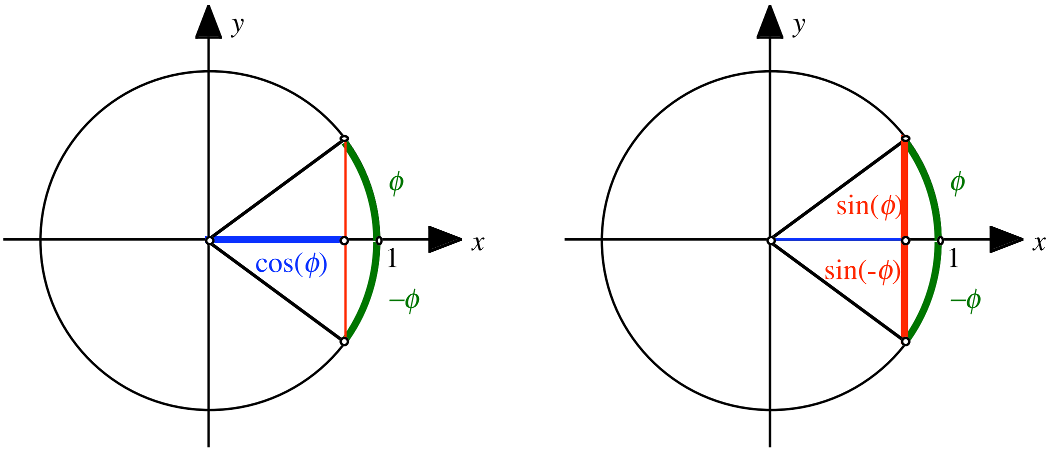


Graphen der Winkelfunktionen

Eigenschaften:

Beide Funktionen sind 2π-periodisch

Symmetrien:

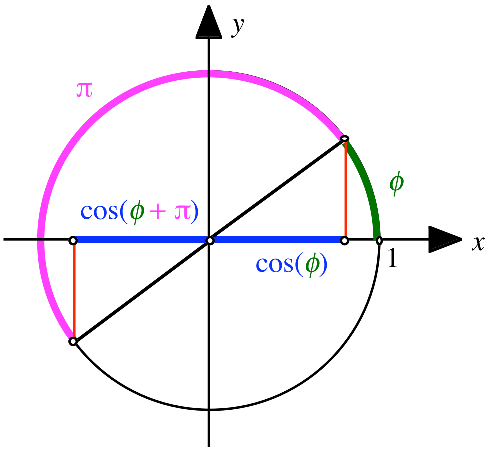


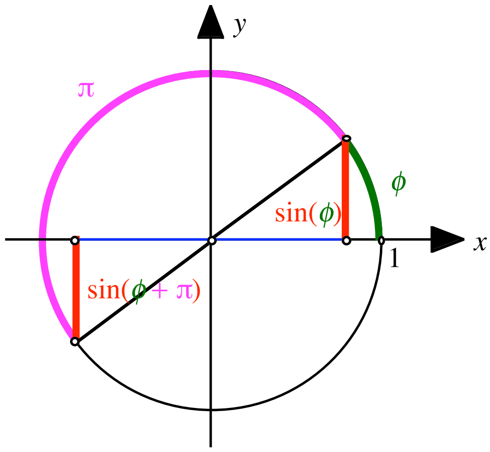
$\cos(-\phi) = \cos(\phi)$	$\sin(-\phi) = -\sin(\phi)$

Der Kosinus ist eine so genannte *gerade Funktion*. Der Output ändert sich nicht, wenn der Input das Vorzeichen ändert. Typische gerade Funktion: $y = x^2$. Der Graf einer geraden Funktion ist achsensymmetrisch zur *y*-Achse.

Der Sinus ist eine so genannte *ungerade Funktion*. Wenn beim Input das Vorzeichen geändert wird, ändert auch das Vorzeichen des Outputs. Typische ungerade Funktion: $y = x$. Der Graf einer ungeraden Funktion ist punktsymmetrisch zum Ursprung.

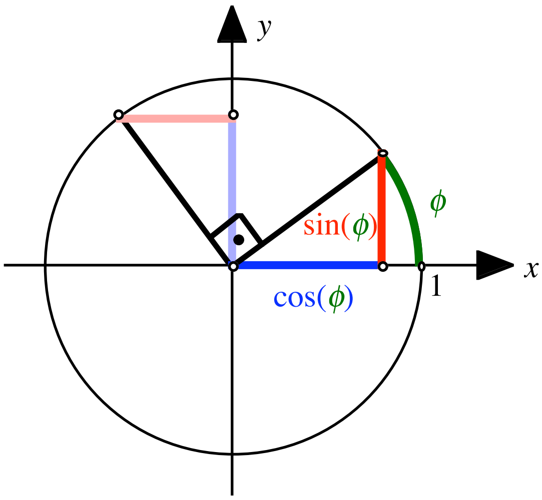
Addition von π:





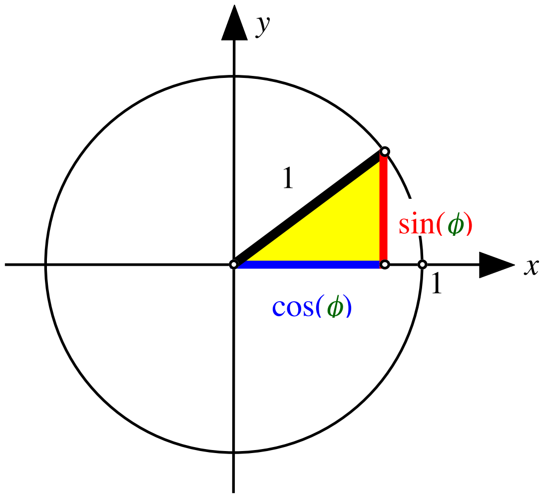
$$\boxed{\cos(\phi+\pi)=-\cos(\phi) \qquad \sin(\phi+\pi)=-\sin(\phi)}$$

Addition von $\frac{\pi}{2}$:



$$\boxed{\cos\left(\phi+\tfrac{\pi}{2}\right)=-\sin(\phi), \qquad \sin\left(\phi+\tfrac{\pi}{2}\right)=\cos(\phi)}$$

Pythagoras:



$$\boxed{(\cos(\phi))^2 + (\sin(\phi))^2 = 1}$$

Bemerkungen zur Schreibweise bei Quadraten

$$\underbrace{\sin^2 \phi \quad = \quad \sin^2(\phi)}_{\text{Kurzschreibweisen}} \quad = \quad \underbrace{(\sin(\phi))^2}_{\text{formal korrekt}}$$

Computerverständlich

Additionstheoreme:

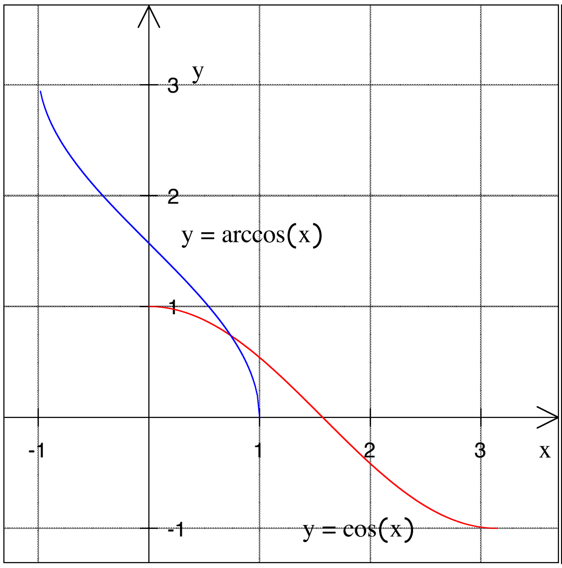
$$\cos(\alpha+\beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta)$$

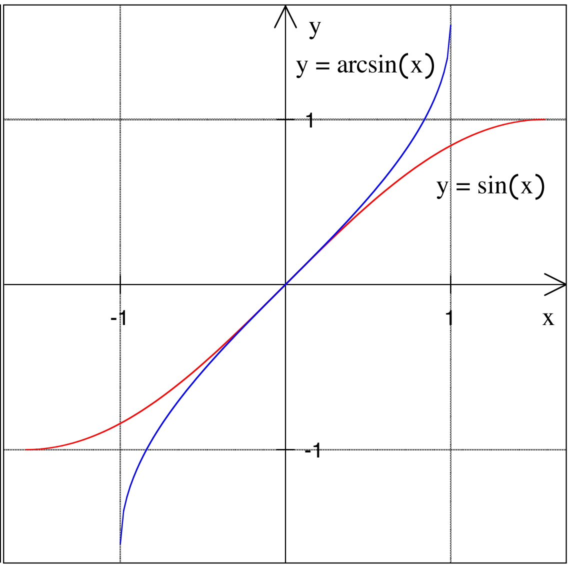
$$\sin(\alpha+\beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\alpha)\sin(\beta)$$

1.1.7 Arcuskosinus und Arcussinus

Für die Umkehrfunktionen der Winkelfunktionen müssen wir die Definitionsbereiche einschränken.

Die folgenden Figuren zeigen die Einschränkungen für arccos und arcsin:

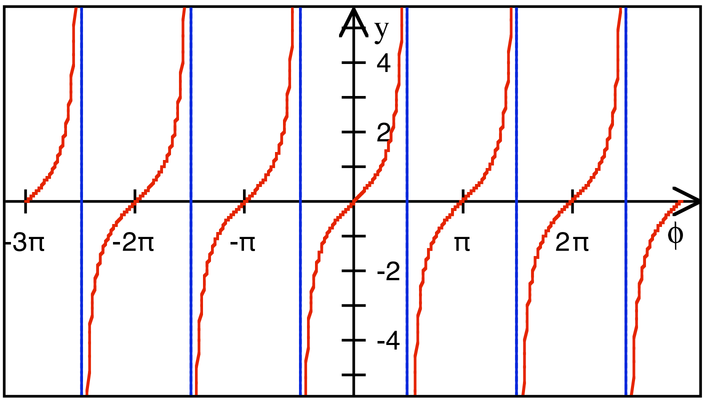




cos und arccos **sin und arcsin**

1.1.8 Tangens

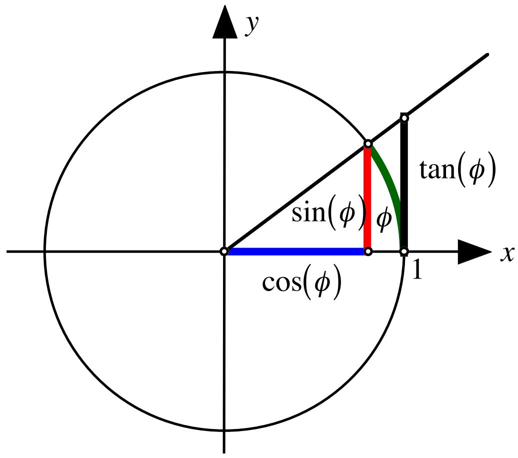
$$\tan(\phi) = \frac{\sin(\phi)}{\cos(\phi)}$$



Tangensfunktion

Der Tangens ist eine ungerade Funktion.

Im Einheitskreis:



Tangens im Einheitskreis

1.2 Manipulationen bei Funktionen

1.2.1 Transformation!

by:
Dane R. Camp, New Trier High School
(campd@nttc.org)

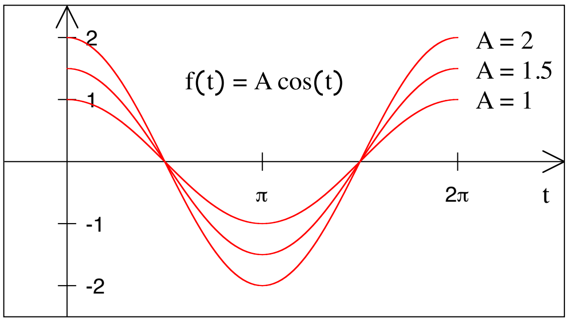
If you add to a function, you'll give it a lift,
for the graph will be moved with a vertical shift.
But if you multiply, take a close look and see,
the graph's stretched by that factor vertically,
and negating the function will cause a reflection,
across the *x*-axis in an up-down direction.

But if you add before the function is used, hey!
The shift's horizontal — the opposite way!
And multiplication by a factor inside reveals,
the graph's being stretched by the reciprocal's.
And negating the values before *f* is applied,
reflects across the *y*-axis — it flips side to side!

1.2.2 Amplitude, Kreisfrequenz und Phasenverschiebung

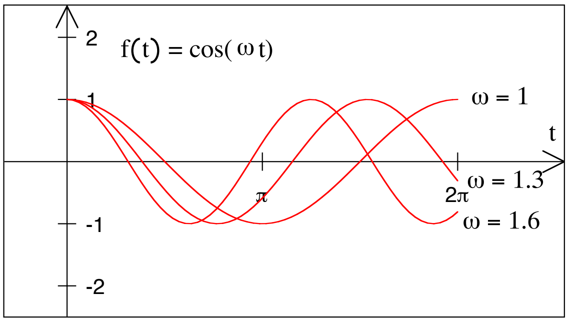
In einer Funktion von der Form $f(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$ oder $g(t) = A\sin(\omega t + \varphi)$ heißt A die Amplitude, ω die Kreisfrequenz und φ die Phasenverschiebung.

Im folgenden Beispiel ist $f(t) = A\cos(t)$ mit $A = 1,\ 1.5,\ 2$; die Amplitude misst den Ausschlag der Wellenlinie.



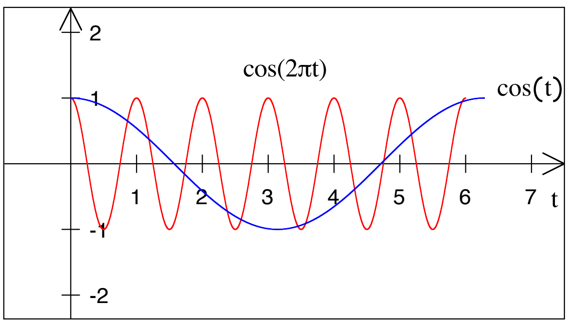
Amplitudenänderung: $f(t) = A\cos(t)$ **mit** $A = 1,\ 1.5,\ 2$

Im folgenden Beispiel ist $f(t) = \cos(\omega t)$ mit $\omega = 1,\ 1.3,\ 1.6$; eine Erhöhung der Kreisfrequenz macht die Kosinuskurve nervös.



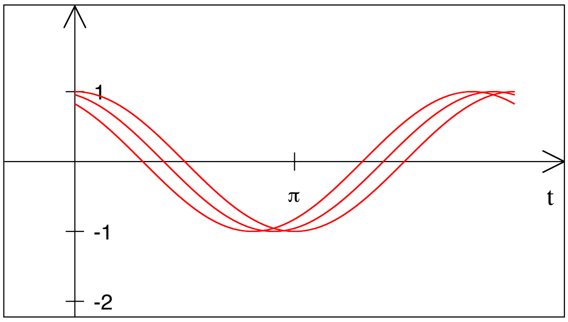
Kreisfrequenzänderung: $f(t) = \cos(\omega t)$ **mit** $\omega = 1,\ 1.3,\ 1.6$

Die folgende Figur illustriert den Zusammenhang zwischen Kreisfrequenz und Frequenz:



Frequenz und Kreisfrequenz

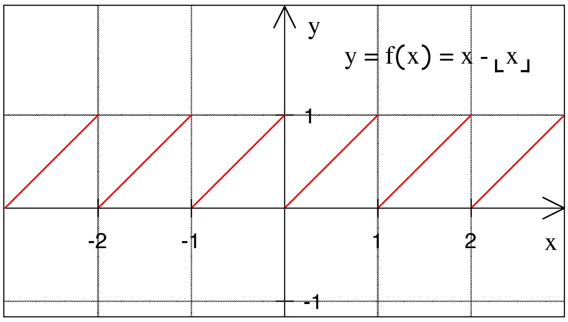
Im folgenden Beispiel ist $f(t)=\cos(t+\varphi)$ mit $\varphi=0,\ 0.3,\ 0.6$; eine positive Phasenverschiebung verschiebt die Wellenlinie nach links.



Phasenverschiebung: $f(t)=\cos(t+\varphi)$ **mit** $\varphi=0,\ 0.3,\ 0.6$

1.2.3 Die Idee von Fourier

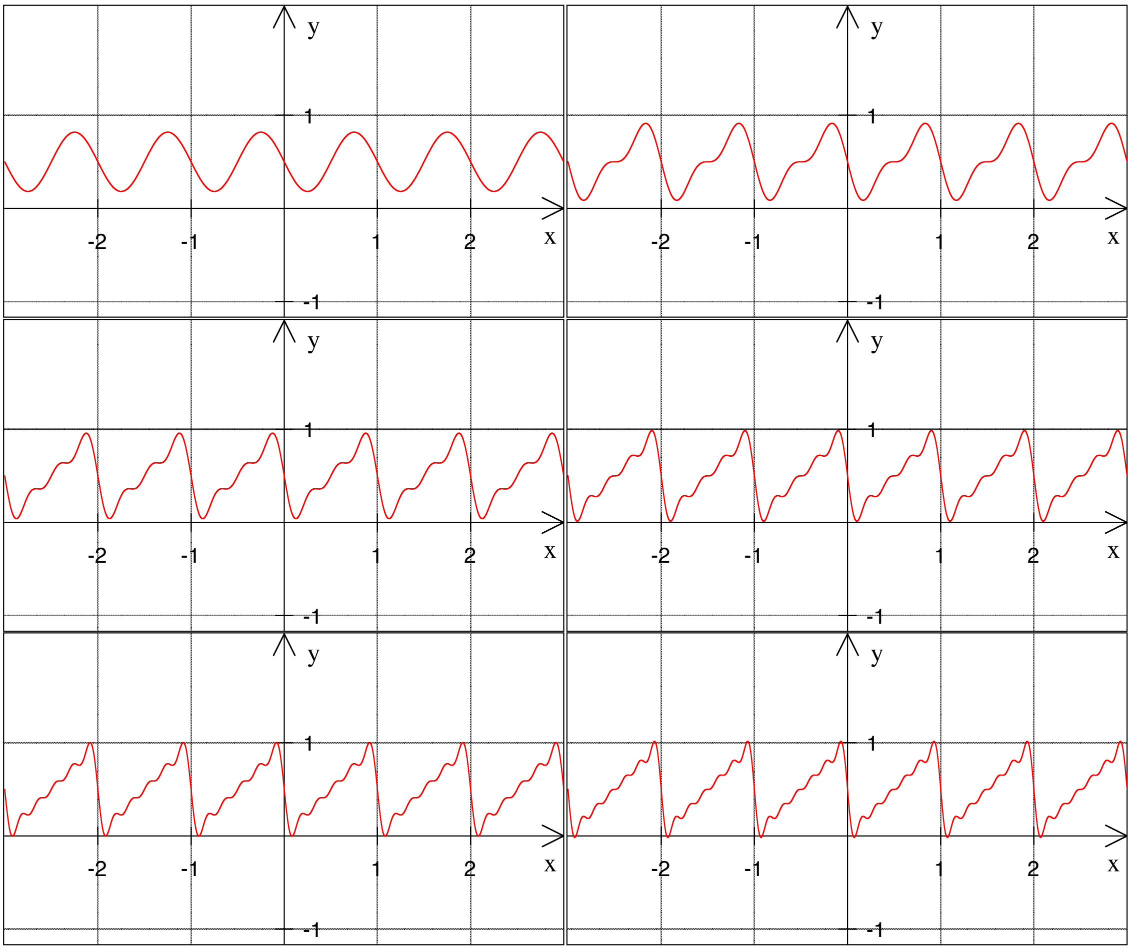
Jean Baptiste Joseph Fourier zeigte, dass periodische Funktionen durch trigonometrische Funktionen zusammengesetzt werden können. Als Beispiel approximieren wir die Funktion $y=f(x)=x-\lfloor x\rfloor$ sukzessive durch Sinusfunktionen.



$y=f(x)=x-\lfloor x\rfloor$

Die erste Approximation ist eine Sinuskurve mit der Frequenz 1. Außer dieser Frequenz hat sie noch nicht viel mit der zu approximierenden Funktion gemeinsam. Dann folgen weitere Approximationen in der Form:

$$y=f(x)=\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\tfrac{1}{k}\sin(2k\pi x) \text{ für } n=1,2,3,4,5,6$$

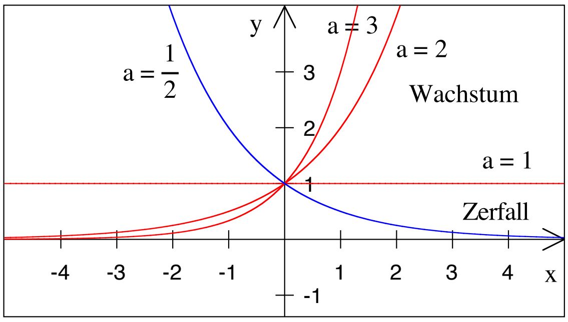


$$y=f(x)=\frac{1}{2}-\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\sin(2k\pi x)$$ **für n = 1, 2, 3, 4, 5, 6**

1.3 Exponential- und Logarithmusfunktion

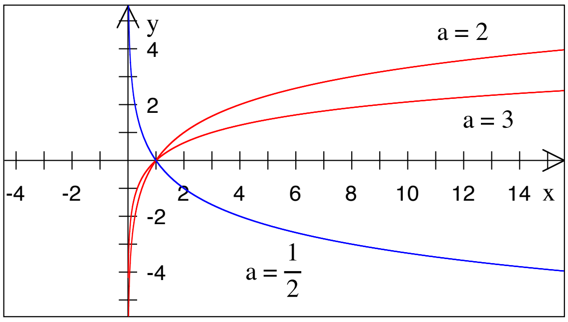
Eine Funktion von der Form $f(x) = a^x$, $a > 0$, heißt *Exponentialfunktion zur Basis a*. Ihre Umkehrfunktion heißt *Logarithmusfunktion zur Basis a*, geschrieben $g(x) = \log_a(x)$.

Exponentialfunktionen treten in der Natur bei (ungebremstem) Wachstumsprozessen auf.



Exponentialfunktionen zu den Basen $a = \frac{1}{2}, 1, 2, 3$

In der folgenden Figur sind die zugehörigen Logarithmusfunktionen dargestellt, bei der Basis $a = 1$ war das allerdings nicht möglich. Warum?



Logarithmusfunktionen zu den Basen $a = \frac{1}{2}, 1, 2, 3$

Rechenregeln für den Logarithmus:

$$\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y) \qquad \log_a\left(\tfrac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y)$$

$$\log_a\left(x^c\right) = c\log_a(x) \qquad \log_a\left(\sqrt[d]{x}\right) = \tfrac{1}{d}\log_a(x)$$

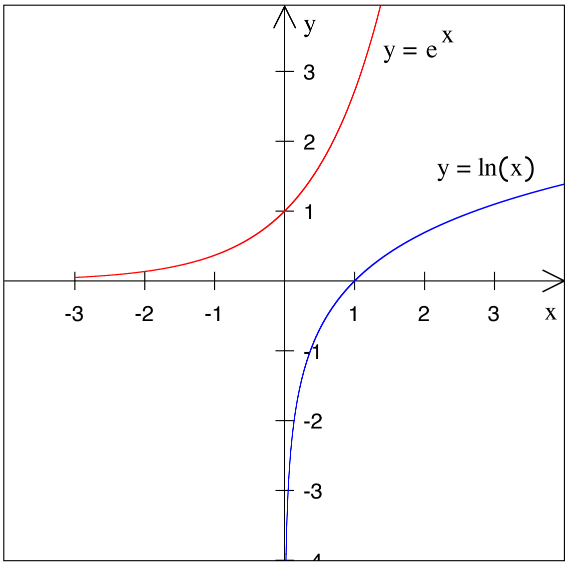
$$\log_b(x) = \frac{\log_a(x)}{\log_a(b)} \text{ (Basiswechselformel)}$$

1.3.1 Natürliche Exponential- und Logarithmusfunktion

Für die Exponentialfunktionen gibt es eine natürliche Basis, die *EULERsche Zahl* e. Diese Zahl ist definiert als Grenzwert der Folge $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ für $n \to \infty$ und hat den Wert $\mathrm{e} \approx 2.718281828$.

Die Eulersche Zahl e ist die Basis der *natürlichen Exponentialfunktion* e^x (auch e–Funktion genannt) und des *natürlichen Logarithmus* $\ln(x) = \log_{\mathrm{e}}(x)$.

Die natürliche Exponentialfunktion e^x ist dadurch unter allen Exponentialfunktionen ausgezeichnet, dass ihr Graph im Punkt (0,1) die Steigung 1 hat. Entsprechendes gilt für den natürlichen Logarithmus $\ln(x)$. Die folgende Figur zeigt ihre Graphen.



e^x und $\ln(x)$

2 Grenzwert und Stetigkeit

Wir alle haben eine anschauliche Vorstellung von *beliebig groß* oder *beliebig klein* oder *beliebig nahe bei...* .In diesem Kapitel geht es darum, diesen vagen Begriffen und damit zusammenhängenden Aussagen eine mathematisch präzise Bedeutung zu geben.

2.1 Folgen

Unendlich

Vergiss

Deine Grenzen

Wandre aus

Das Niemandsland

Unendlich

Nimmt dich auf

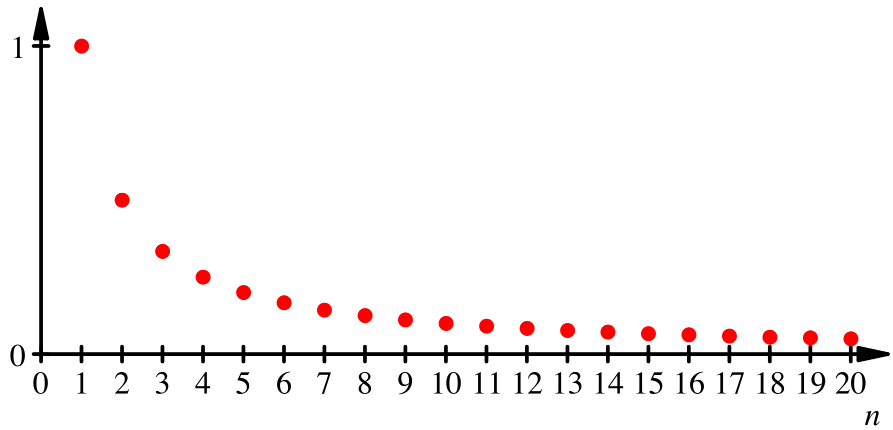
Rose Ausländer (1901-1988)

2.1.1 Beispiele

(1) Die Zahlenfolge $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$ (so genannte *harmonische Folge*) wird beliebig klein, sie strebt gegen den Grenzwert 0. Dafür schreiben wir: Für die Folge $a_n = \frac{1}{n}$ gilt:

$$\lim_{n \to \infty} (a_n) = \lim_{n \to \infty} \left(\frac{1}{n}\right) = 0$$

Damit meinen wir folgendes: Diese Folge unterschreitet jede noch so kleine positive Schranke. Die Abbildung zeigt die ersten 20 Folgenglieder.



Die ersten 20 Folgenglieder

(2) Die Folge der Zahlen $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \ldots$ strebt gegen 1. Also: $\lim_{n \to \infty} \left(\frac{n}{n+1}\right) = 1$

(3) Die Folge der Zahlen 1, –1, 1, –1, 1, –1, … hat keinen Grenzwert. Man nennt sie *divergent*.

2.1.2 Falten eines Papierstreifens

Was geschieht denn da?

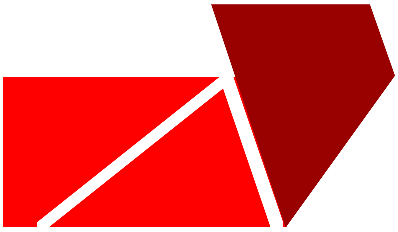
1. Wir beginnen mit einem langen Streifen.

2. Wir falten — in irgend einer Richtung — nach OBEN.

3. Auffalten.

4. Wir falten nach UNTEN — nun *genau* wie dargestellt.

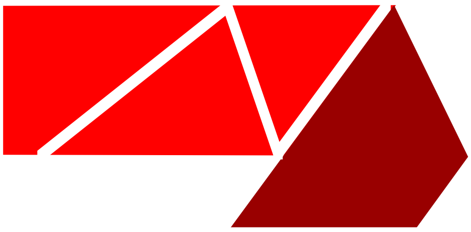
5. Auffalten.



6. Wir falten nach OBEN — *genau* wie dargestellt.

7. Auffalten.

8. Wir falten nach UNTEN — *genau* wie dargestellt.



9. Auffalten.

Für zwei aufeinanderfolgende spitze Winkel zu den Streifenkanten, α_{n-1} und α_n gilt die Rekursionsbeziehung:

$$\alpha_n = \frac{180° - \alpha_{n-1}}{2}$$

Wir vermuten, dass $\lim\limits_{n \to \infty} \left(\alpha_n\right) = 60°$.

Der Startwert α_1 spielt dabei keine Rolle:

n	α_n	α_n	α_n	α_n
1	10.0000000	10000.0000000	70.0000000	-200.0000000
2	85.0000000	-4910.0000000	55.0000000	190.0000000
3	47.5000000	2545.0000000	62.5000000	-5.0000000
4	66.2500000	-1182.5000000	58.7500000	92.5000000
5	56.8750000	681.2500000	60.6250000	43.7500000
6	61.5625000	-250.6250000	59.6875000	68.1250000
7	59.2187500	215.3125000	60.1562500	55.9375000
8	60.3906250	-17.6562500	59.9218750	62.0312500
9	59.8046875	98.8281250	60.0390625	58.9843750
10	60.0976563	40.5859375	59.9804688	60.5078125
11	59.9511719	69.7070313	60.0097656	59.7460938
12	60.0244141	55.1464844	59.9951172	60.1269531
13	59.9877930	62.4267578	60.0024414	59.9365234
14	60.0061035	58.7866211	59.9987793	60.0317383
15	59.9969482	60.6066895	60.0006104	59.9841309
16	60.0015259	59.6966553	59.9996948	60.0079346
17	59.9992371	60.1516724	60.0001526	59.9960327
18	60.0003815	59.9241638	59.9999237	60.0019836
19	59.9998093	60.0379181	60.0000381	59.9990082
20	60.0000954	59.9810410	59.9999809	60.0004959

2.1.2.1 Wie finden wir den Limes?

(1) Annahme: Es gibt einen Limes: $\alpha = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\alpha_n\right)$

(2) In Rekursionsformel einsetzen: $\alpha = \frac{180°-\alpha}{2}$

(3) Nach α auflösen:

2.1.3 Konvergente Folgen. Limes

Das lateinische Wort *Limes* heißt *Grenze*.

Eine Folge a_n *konvergiert gegen den Grenzwert* a, falls sie diesem Wert beliebig nahe kommt. Dafür schreibt man kurz $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n) = a$. Eine andere oft verwendete Schreibweise ist $a_n \to a$ für $n \to \infty$.

Konvergiert die Folge a_n nicht gegen einen Grenzwert a, so heißt sie *divergent*.

2.1.4 Rechenregeln

a) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \lim\limits_{n\to\infty}(a_n) + \lim\limits_{n\to\infty}(b_n)$

b) $\lim\limits_{n\to\infty}(\lambda a_n) = \lambda \lim\limits_{n\to\infty}(a_n)$

c) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = \lim\limits_{n\to\infty}(a_n) \cdot \lim\limits_{n\to\infty}(b_n)$

d) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{\lim\limits_{n\to\infty}(a_n)}{\lim\limits_{n\to\infty}(b_n)}$ falls $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n) \neq 0$

Für eine geometrische Folge q^n gilt:

$$\lim_{n\to\infty}\left(q^n\right) = \begin{cases} 0 \text{ für} |q| < 1 & \text{(konvergent)} \\ 1 \text{ für } q = 1 & \text{(konvergent)} \\ \infty \text{ für } q > 1 & \text{(bestimmt divergent)} \end{cases}$$

Für $q \leq -1$ ist die Folge unbestimmt divergent.

Rechnen mit „unendlichen“ Grenzwerten:

Ist $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n) = \infty$ und $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n) = b$, so gilt:

a) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = \infty$

b) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n b_n) = \begin{cases} \infty & \text{für} \, b > 0 \\ -\infty & \text{für} \, b < 0 \end{cases}$

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{b_n}{a_n}\right) = 0$

Ist $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n) = \infty$ und $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n) = \infty$, so gilt:

a) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \infty$

b) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = \infty$

Rationale Ausdrücke: Man dividiert Zähler und Nenner durch die höchste im Nenner vorkommende Potenz von n und benutzt die obigen Regeln für das Rechnen mit unendlichen Grenzwerten:

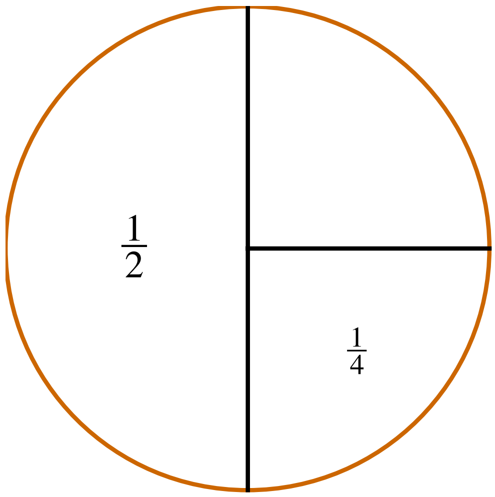
a) $a_n = \frac{n+2}{5n^2-2n+1} = \frac{\frac{1}{n}+\frac{2}{n^2}}{5-\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}} \quad \Rightarrow \quad \lim\limits_{n\to\infty}(a_n) = \frac{0+0}{5-0+0} = 0$

b) $a_n = \frac{n^2-2n}{5n^2+1} = \frac{1-\frac{2}{n}}{5+\frac{1}{n^2}} \quad \Rightarrow \quad \lim\limits_{n\to\infty}(a_n) = \frac{1-0}{5+0} = \frac{1}{5}$

c) $a_n = \frac{n^4-2n^3+1}{5n^2+1} = \frac{n^2\left(1-\frac{2}{n}+\frac{1}{n^4}\right)}{5+\frac{1}{n^2}} \quad \Rightarrow \quad \lim\limits_{n\to\infty}(a_n) = \frac{\infty(1-0+0)}{5+0} = \infty$ (divergent)

2.2 Reihen

2.2.1 So ein Käse



So ein Käse

2.2.2 Partialsummen

Sei $a_1, a_2, a_3, \ldots$ eine beliebige Folge. Wir bilden daraus eine neue Folge durch sukzessives „Aufsummieren“:

$$s_1 = a_1$$
$$s_2 = a_1 + a_2 = s_1 + a_2$$
$$s_3 = a_1 + a_2 + a_3 = s_2 + a_3$$
usw.
$$s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = s_{n-1} + a_n$$

Diese Folge $s_1, s_2, s_3, ...$ der *Partialsummen* s_n ist also *rekursiv* definiert. Schreibweise mit Summenzeichen:

$$s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

Man sagt, die unendliche Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ ist *konvergent*, falls die Folge s_n der Partialsummen konvergiert. Dafür schreibt man kurz

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = s, \text{ falls } s = \lim_{n\to\infty} \left(s_n\right) = \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} a_k \right)$$

Andernfalls heißt die unendliche Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *divergent*. Dies wird oft in der Form $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ geschrieben. Dabei ist aber zu beachten, dass ∞ *keine* Zahl ist.

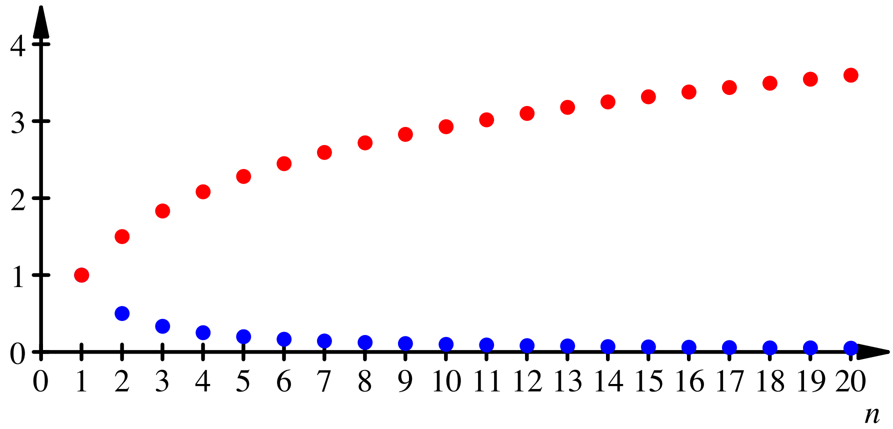
2.2.3 Beispiele

Beispiel 1: Die *harmonische* Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ ist divergent.

In der Partialsumme s_n fassen wir wie folgt zusammen:

$$s_n = 1 + \tfrac{1}{2} + \left(\tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4}\right) + \left(\tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{7} + \tfrac{1}{8}\right) + \left(\tfrac{1}{9} + \tfrac{1}{10} + \cdots + \tfrac{1}{16}\right) + \cdots$$

Die einzelnen Klammerausdrücke sind jeweils größer oder gleich $\frac{1}{2}$. Daher divergiert die Reihe, allerdings sehr langsam.



Divergenz im Schneckentempo

Man sieht an diesem Beispiel, dass es für die Konvergenz einer Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ nicht genügt, dass die Folge der Glieder a_n nach Null strebt.

Beispiel 2: Die unendliche Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ ist konvergent.

Die einzelnen Glieder dieser Reihe haben die Gestalt $\frac{1}{k \cdot k}$. Wir ersetzen sie (ab dem zweiten Glied) durch die größeren Zahlen $\frac{1}{(k-1)k}$ und erhalten so eine neue Reihe mit Partialsummen:

$$t_n = 1 + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{(n-1)n} \geq s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$$

Nun gilt $\frac{1}{(n-1)n} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$, und wir erhalten

$$t_n = 1 + \left(1 - \tfrac{1}{2}\right) + \left(\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{3}\right) + \left(\tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\tfrac{1}{n-1} - \tfrac{1}{n}\right) = 2 - \tfrac{1}{n}$$

Die monoton wachsende Folge s_n ist daher nach oben beschränkt (durch eine Schranke ≤ 2) und folglich konvergent mit einem Grenzwert ≤ 2. EULER zeigte, dass $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$ gilt.

2.2.4 Geometrische Reihen

2.2.4.1 Summieren ab Null

$$\begin{array}{rcl} s_n & = & 1 + q + q^2 + \cdots + q^n \\ q s_n & = & \phantom{1 +{}} q + q^2 + \cdots + q^n + q^{n+1} \\ \hline s_n(1-q) & = & 1 \phantom{{}+ q + q^2 + \cdots + q^n} - q^{n+1} \end{array}$$

Somit wird: $s_n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$. Falls nun $|q|<1 \quad \Rightarrow \quad \lim\limits_{n\to\infty}\left(q^n\right)=0$, und wir erhalten:

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q}$$

2.2.4.2 Summieren ab Eins

Dies war bei unserem Käsebeispiel der Fall.

$$\begin{array}{rcl} s_n & = & q + q^2 + \cdots + q^n \\ q s_n & = & \phantom{q +{}} q^2 + \cdots + q^n + q^{n+1} \\ \hline s_n(1-q) & = & q \phantom{{}+ q^2 + \cdots + q^n} - q^{n+1} \end{array}$$

Somit wird: $s_n = \frac{q-q^{n+1}}{1-q}$. Falls nun $|q|<1 \quad \Rightarrow \quad \lim\limits_{n\to\infty}\left(q^n\right)=0$, und wir erhalten:

$$\sum_{k=1}^{\infty} q^k = \frac{q}{1-q}$$

2.2.4.3 Allgemeiner Fall

$$a_0 + a_1 + a_2 + \cdots = a_0 \sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{a_0}{1-q}$$

$$a_1 + a_2 + \cdots = a_0 \sum_{k=1}^{\infty} q^k = \frac{a_0 q}{1-q} = \frac{a_1}{1-q}$$

Allgemein gilt: Geometrische Folge:

$$a_{n+1} = q a_n$$

Zugehörige geometrische Reihe:

$$\boxed{\sum_{k=\text{Start}}^{\infty} a_k = \frac{\text{Startglied}}{1-q}}$$

2.3 Grenzwerte bei Funktionen

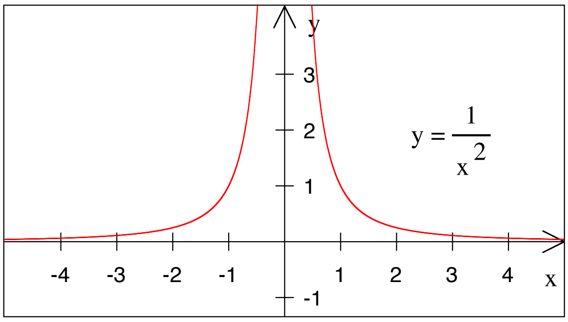
In Analogie zum Grenzwert bei Folgen wollen wir definieren, was es heißt, dass eine beliebige Funktion f gegen einen Grenzwert a strebt für $x \to \infty$, bzw. für $x \to x_0$. Anschaulich bedeutet dies, dass $f(x)$ dem Wert a beliebig nahe kommt, sobald x genügend groß ist, bzw. x genügend nahe bei x_0 ist.

Man beachte, dass der Wert der Funktion an der Stelle x_0 keine Rolle spielt!

Betrachtet man den Graph der Funktion f, so bedeutet $\lim\limits_{x\to\infty}\left(f(x)\right) = a$, dass die horizontale Gerade $y = a$ ein Asymptote für $x \to \infty$ ist.

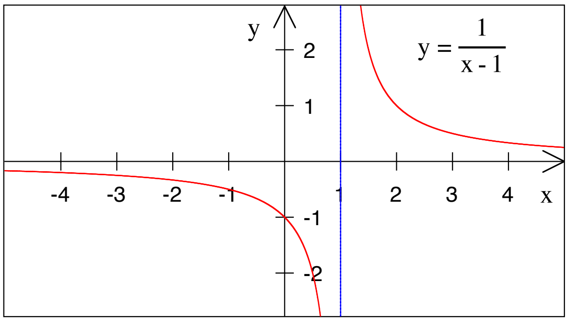
Eine analoge Interpretation gilt für $\lim\limits_{x\to x_0}\left(f(x)\right) = a$.

Beispiel: Sei $f(x) = \frac{1}{x^2}$. Dann ist $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x^2}\right) = 0$, $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{x^2}\right) = 0$, $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}\right) = \infty$



$f(x) = \frac{1}{x^2}$

Beispiel: Sei $f(x) = \frac{1}{x-1}$. Ist $x_0 \neq 1$, so gilt $\lim\limits_{x\to x_0}\left(\frac{1}{x-1}\right) = \frac{1}{x_0-1}$. Ist jedoch x nahe bei 1, so ist $\frac{1}{x-1}$ nahe bei ∞ oder bei $-\infty$ je nachdem ob $x > 1$ oder $x < 1$ gilt.



$f(x) = \frac{1}{x-1}$

Dies führt zur Definition der *einseitigen* Grenzwerte: $\lim\limits_{x\downarrow 1}\left(\frac{1}{x-1}\right) = \infty$ und $\lim\limits_{x\uparrow 1}\left(\frac{1}{x-1}\right) = -\infty$

(Eigentlich haben wir hier überhaupt keine Grenzwerte, da die Funktion für $x \to 1$ divergiert.)

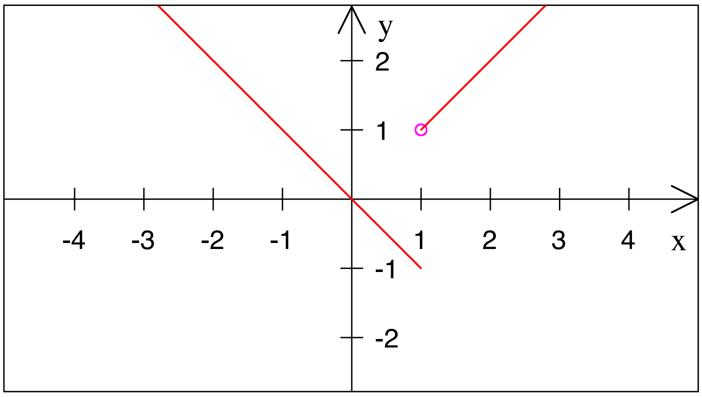
2.4 Stetigkeit

Die Funktion f heißt *stetig* in x_0, falls $\lim\limits_{x \to x_0} \left(f(x)\right) = f(x_0)$ gilt. Sie heißt *stetig* in einem Bereich A, falls sie in jedem $x_0 \in A$ stetig ist.

Anschaulich bedeutet die Stetigkeit von f in einem Punkt x_0, dass der Wert $f(x)$ nahe bei $f(x_0)$ ist, sobald x genügend nahe bei x_0 ist.

Die Stetigkeit ist eine sehr schwache Eigenschaft und trifft für alle „vernünftigen" Funktionen zu. Nicht zugelassen sind jedoch *Sprungstellen*, wie etwa bei der Funktion:

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{für } x \geq 1 \\ -x & \text{für } x < 1 \end{cases}$$



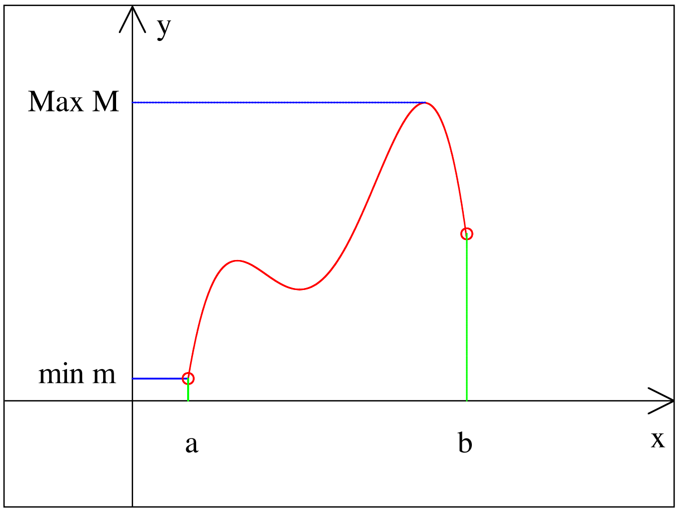
Sprungstelle bei $x_0 = 1$

Diese Funktion ist überall stetig außer im Punkt $x_0 = 1$. Es ist $\lim\limits_{x \downarrow 1}\left(f(x)\right) = +1$ und $\lim\limits_{x \uparrow 1}\left(f(x)\right) = -1$.

Alle elementaren Funktionen (Polynome, rationale Funktionen, allgemeine Potenzen, Winkelfunktionen, Exponential- und Logarithmusfunktionen) sind stetig in ihrem Definitionsbereich.

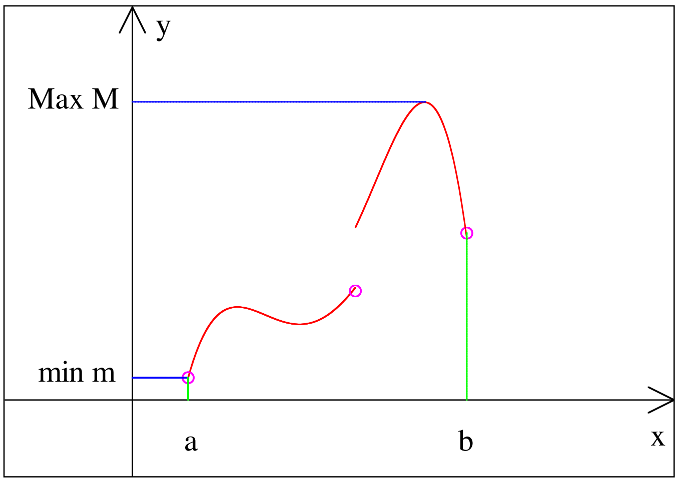
2.4.1 Hauptsatz über stetige Funktionen

Auf dem abgeschlossenen Intervall $[a,b]$ nimmt die stetige Funktion einen minimalen Wert m und einen maximalen Wert M an, und alle anderen Werte von f auf $[a,b]$ liegen dazwischen. Zudem gibt es zu jedem $c \in [m,M]$ (mindestens) ein $x \in [a,b]$ mit $f(x) = c$.



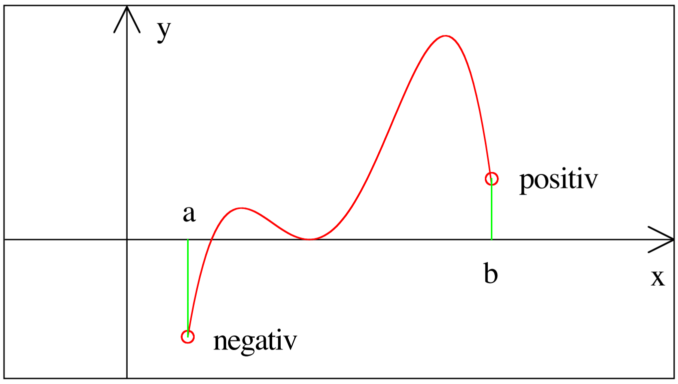
Zu jedem $c \in [m,M]$ gibt es (mindestens) ein $x \in [a,b]$ mit $f(x) = c$

Bei unstetigen Funktionen gilt dies nicht:



Gegenbeispiel

Anwendung: Ist f stetig auf dem Intervall $[a,b]$ und gilt $f(a)<0$ und $f(b)>0$, so hat f (mindestens) eine Nullstelle zwischen a und b.



Existenz von Nullstellen

3 Zusammenfassung

3.1 Bogenmaß

Das Maß für eine ganze Drehung ist 2π, der rechte Winkel misst $\frac{\pi}{2}$.

Bogenlänge b: $b = r\phi$

Umrechnen:

$\alpha°$ Winkel im Gradmaß $\Rightarrow$ $\phi = \frac{2\pi}{360°}\alpha° = \frac{\pi}{180°}\alpha°$ Winkel im Bogenmaß

ϕ Winkel im Bogenmaß $\Rightarrow$ $\alpha° = \frac{360°}{2\pi}\phi = \frac{180°}{\pi}\phi$ Winkel im Gradmaß

3.2 Exponentialfunktion und Logarithmus

Exponentialfunktion: $f(x) = a^x$

Umkehrung: Logarithmus: $g(x) = \log_a(x)$

Spezielle Basis $\mathrm{e} \approx 2.718281828$: e^x und $\ln(x)$

Rechenregeln für den Logarithmus:

$$\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y) \qquad \log_a\left(\tfrac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y)$$

$$\log_a\left(x^c\right) = c\log_a(x) \qquad \log_a\left(\sqrt[d]{x}\right) = \tfrac{1}{d}\log_a(x)$$

$$\log_b(x) = \frac{\log_a(x)}{\log_a(b)} \text{ (Basiswechselformel)}$$

3.3 Folgen und Reihen

Folge: $a_1, a_2, a_3, \ldots$

Reihe: $s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$

Geometrische Folge: $a_{n+1} = q a_n$ Dann ist: $\sum\limits_{k=\text{Start}}^{\infty} a_k = \frac{\text{Startglied}}{1-q}$