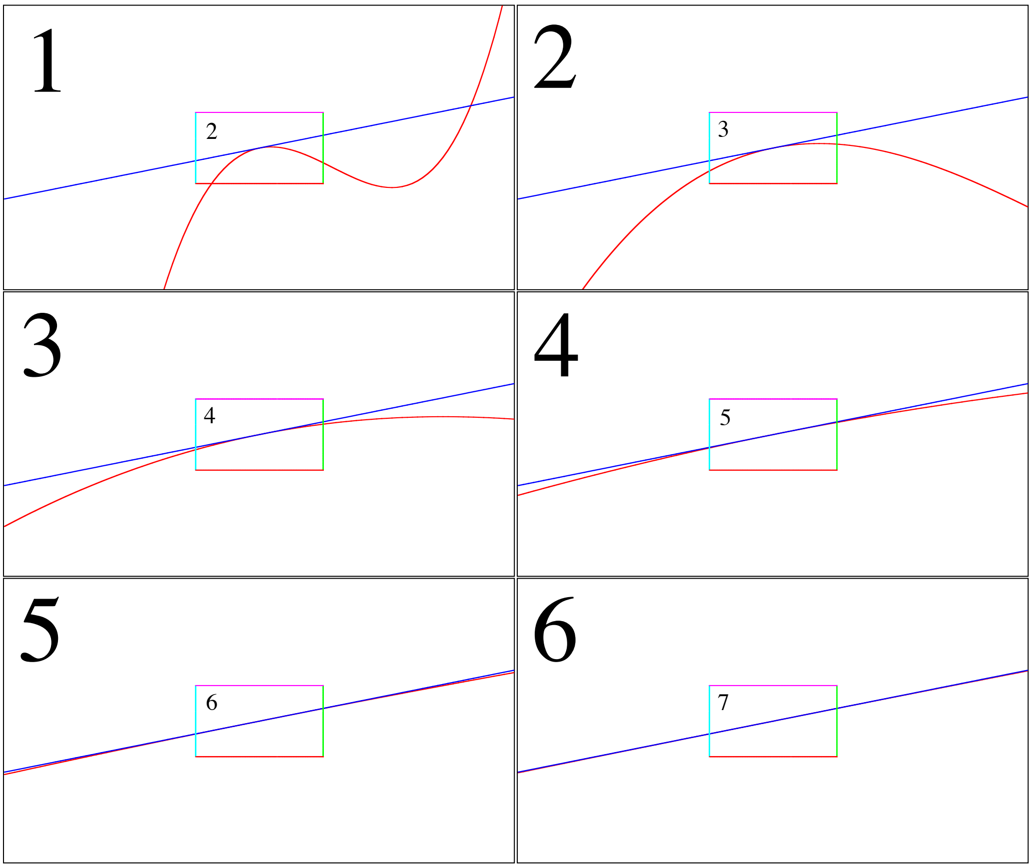
Hans Walser

Mathematik 1 für Naturwissenschaften



Modul 103

Differenzialrechnung

Lernumgebung

UNI
BASEL

Modul 103 für die Lehrveranstaltung *Mathematik 1 für Naturwissenschaften*

Winter 2003/04 Erstausgabe
Winter 2004/05 Erweiterung. Fehlerkorrekturen
Winter 2005/06 Geändertes Layout
Winter 2006/07 Formel Editor revidiert. Fehlerkorrekturen. Ergänzungen
Herbst 2007 Ergänzungen. Korrekturen
Herbst 2009 Erweiterung
Herbst 2010 Erweiterung
Herbst 2012 Erweiterung
Herbst 2013 Fehlerkorrekturen. Grafische Überarbeitung. Kürzung

last modified: 1. Oktober 2013

Hans Walser
Mathematisches Institut, Rheinsprung 21, 4051 Basel
www.walser-h-m.ch/hans

Inhalt

1 Steigung

Steigung 12% ?

Was stimmt an dieser Verkehrstafel nicht?

Bearbeitung

Die eingezeichnete Rampe hat einen Steigungswinkel von 30° und daher eine Steigung:

$$\tan(30°) \approx 0.5774 = 57.74\% \neq 12\% .$$

Ein Steigungswinkel von 30° führt zu einer Steigung von ca. 58%

Umgekehrt führt eine Steigung von 12% zu einem Steigungswinkel von:

$$\arctan(0.12) \approx 6.843° .$$

12% Steigung, echt

Steigungen werden am Schreibtisch und in der Realität ganz unterschiedlich wahrgenommen. Eine Steigung von 12% sieht am Schreibtisch recht klein aus, für einen Radfahrer mit Gepäck ist das aber schon happig.

Die offizielle Verkehrstafel enthält eine pictografische Vereinfachung.

2 Steigung

Was stimmt hier nicht?

Was stimmt hier nicht?

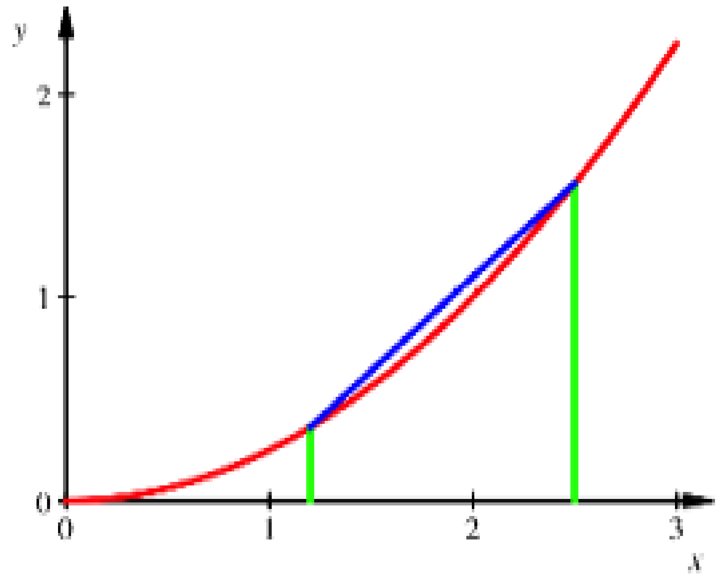
Bearbeitung

Das mittlere Gefälle ist nur 6.67%. Vielleicht gibt 12% das maximale Gefälle auf dieser Strecke an.

3 Lineare Interpolation

Von einer Funktion $f : x \mapsto y$ sind zwei Stützwerte $f(x_0)$ und $f(x_1)$ bekannt. Für $\xi \in [x_0, x_1]$ kann dann die Funktion linear interpoliert werden:

$$f(\xi) \approx f(x_0) + (\xi - x_0)\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$



Funktionsgraf und lineare Interpolation

4 Bilineare Interpolation

Wir verallgemeinern das auf eine Funktion von zwei Variablen $f:(x,y)\mapsto z$. Es seien vier Stützwerte $f(x_0,y_0), f(x_0,y_1), f(x_1,y_0), f(x_1,y_1)$ bekannt. Wir interpolieren an der Stelle $(\xi,\eta)\in[x_0,x_1]\times[y_0,y_1]$.

Zunächst ist:

$$f(\xi,y_0)\approx f(x_0,y_0)+(\xi-x_0)\frac{f(x_1,y_0)-f(x_0,y_0)}{x_1-x_0}$$

und

$$f(\xi,y_1)\approx f(x_0,y_1)+(\xi-x_0)\frac{f(x_1,y_1)-f(x_0,y_1)}{x_1-x_0}$$

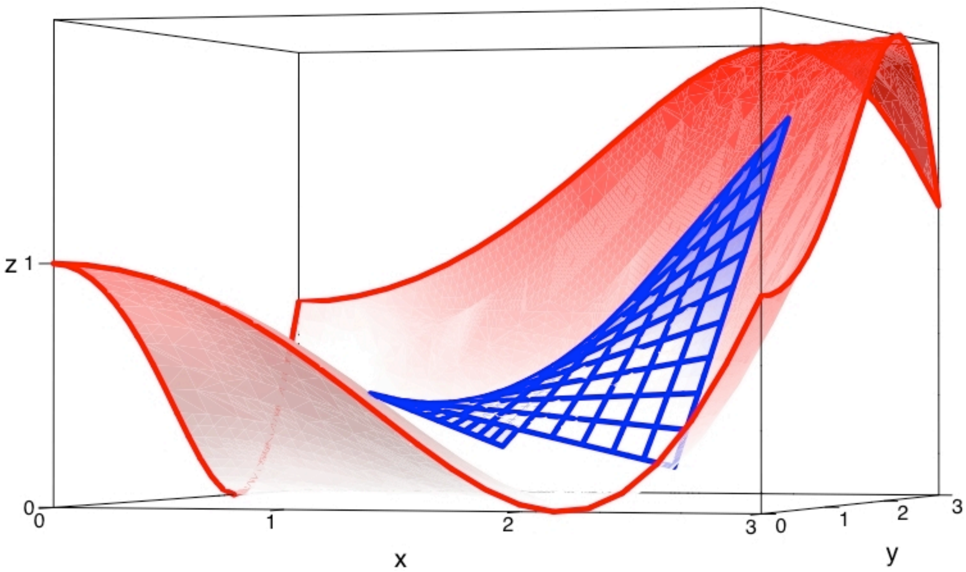
Weiter:

$$f(\xi,\eta)\approx f(\xi,y_0)+(\eta-y_0)\frac{f(\xi,y_1)-f(\xi,y_0)}{y_1-y_0}$$

Nun setzen wir die obigen Approximationen ein:

$$
\begin{aligned}
f(\xi,\eta) &\approx f(\xi,y_0)+(\eta-y_0)\frac{f(\xi,y_1)-f(\xi,y_0)}{y_1-y_0}\\
&\approx f(x_0,y_0)+(\xi-x_0)\frac{f(x_1,y_0)-f(x_0,y_0)}{x_1-x_0}\\
&\quad+(\eta-y_0)\frac{\left(f(x_0,y_1)+(\xi-x_0)\frac{f(x_1,y_1)-f(x_0,y_1)}{x_1-x_0}\right)-\left(f(x_0,y_0)+(\xi-x_0)\frac{f(x_1,y_0)-f(x_0,y_0)}{x_1-x_0}\right)}{y_1-y_0}\\
&= f(x_0,y_0)\left(1-\frac{\xi-x_0}{x_1-x_0}-\frac{\eta-y_0}{y_1-y_0}+\frac{\xi-x_0}{x_1-x_0}\frac{\eta-y_0}{y_1-y_0}\right)\\
&\quad+f(x_0,y_1)\left(\frac{\eta-y_0}{y_1-y_0}-\frac{\xi-x_0}{x_1-x_0}\frac{\eta-y_0}{y_1-y_0}\right)+f(x_1,y_0)\left(\frac{\xi-x_0}{x_1-x_0}-\frac{\xi-x_0}{x_1-x_0}\frac{\eta-y_0}{y_1-y_0}\right)\\
&\quad+f(x_1,y_1)\left(\frac{\xi-x_0}{x_1-x_0}\frac{\eta-y_0}{y_1-y_0}\right)\\
&= f(x_0,y_0)+\frac{\xi-x_0}{x_1-x_0}\big(f(x_1,y_0)-f(x_0,y_0)\big)+\frac{\eta-y_0}{y_1-y_0}\big(f(x_0,y_1)-f(x_0,y_0)\big)\\
&\quad+\frac{\xi-x_0}{x_1-x_0}\frac{\eta-y_0}{y_1-y_0}\big(f(x_1,y_1)-f(x_1,y_0)-f(x_0,y_1)+f(x_0,y_0)\big)
\end{aligned}
$$

Die Interpolationsfläche ist ein Hyperboloid. Es ist eine gekrümmte Fläche, sie enthält aber zwei Scharen von Geraden.



Funktionsgraf und bilineare Approximation

5 Beweis?

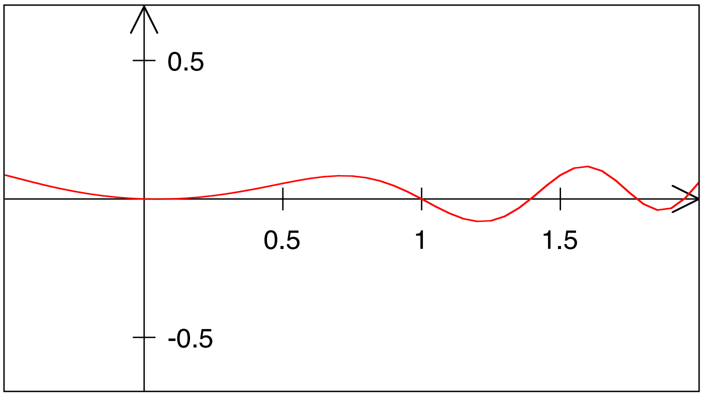
Es ist $(x^4)' = 4x^3$. Wie lässt sich dieser Sachverhalt beweisen?

Ergebnis

Analog Vorlesung

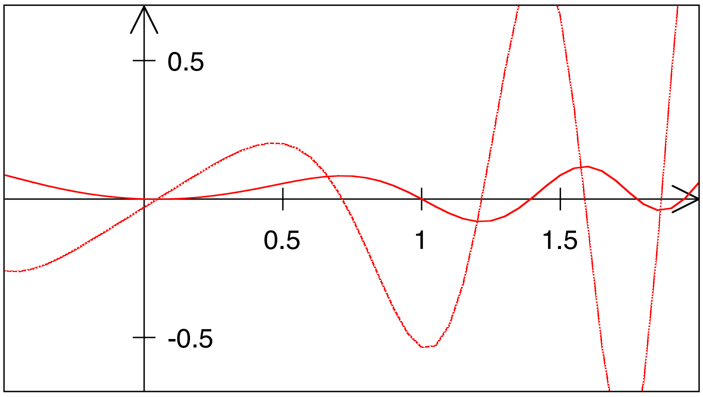
6 Skizze der Ableitung

Skizzieren Sie (ins gleiche Koordinatensystem) die Ableitungsfunktion der durch den Graphen gegebenen Funktion.



Ableitung?

Ergebnis



Funktion und Ableitung

7 Ableitung der Sinusfunktion

Beweisen Sie die Ableitungsformel:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sin(t) = \cos(t)$$

Bearbeitung

Nach Definition der Ableitung ist:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sin(t) = \lim_{\Delta t \to \infty} \frac{\sin(t+\Delta t) - \sin(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to \infty} \frac{\sin(t)\cos(\Delta t) + \cos(t)\sin(\Delta t) - \sin(t)}{\Delta t}$$

Wegen $\lim\limits_{\Delta t \to \infty} \cos(\Delta t) = 1$ erhalten wir:

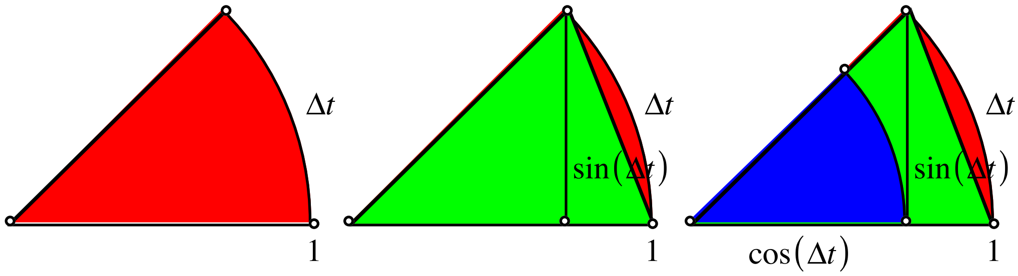
$$\frac{d}{dt}\sin(t) = \lim_{\Delta t \to \infty} \frac{\sin(t+\Delta t)-\sin(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to \infty} \frac{\sin(t)\cos(\Delta t)+\cos(t)\sin(\Delta t)-\sin(t)}{\Delta t}$$

$$= \lim_{\Delta t \to \infty} \frac{\sin(t)\cdot 1+\cos(t)\sin(\Delta t)-\sin(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to \infty} \frac{\cos(t)\sin(\Delta t)}{\Delta t} = \cos(t) \lim_{\Delta t \to \infty} \frac{\sin(\Delta t)}{\Delta t}$$

Wir haben also noch das Restproblem:

$$\lim_{\Delta t \to \infty} \frac{\sin(\Delta t)}{\Delta t} = ?$$

Dazu betrachten wir folgende Figurenfolge:



ineinander geschachtelte Figuren

Für die drei Figuren erhalten wir folgende Flächeninhalte:

$$A_{\text{Roter Sektor}} = \tfrac{1}{2}\Delta t$$

$$A_{\text{Grünes Dreieck}} = \tfrac{1}{2}\sin(\Delta t)$$

$$A_{\text{Blauer Sektor}} = \tfrac{1}{2}\cos^2(\Delta t)\Delta t$$

Es gilt der Größenvergleich:

$$A_{\text{Blauer Sektor}} < A_{\text{Grünes Dreieck}} < A_{\text{Roter Sektor}}$$

$$\tfrac{1}{2}\cos^2(\Delta t)\Delta t < \tfrac{1}{2}\sin(\Delta t) < \tfrac{1}{2}\Delta t$$

$$\cos^2(\Delta t) < \frac{\sin(\Delta t)}{\Delta t} < 1$$

$$\underbrace{\lim_{\Delta t \to \infty} \cos^2(\Delta t)}_{=1} \leq \lim_{\Delta t \to \infty} \frac{\sin(\Delta t)}{\Delta t} \leq \underbrace{\lim_{\Delta t \to \infty} 1}_{=1}$$

Daher ist $\lim_{\Delta t \to \infty} \frac{\sin(\Delta t)}{\Delta t} = 1$ .Wir erhalten also:

$$\frac{d}{dt}\sin(t) = \cos(t)$$

8 Umkehrung der Ableitung?

Gesucht ist jeweils ein Beispiel einer Funktion $f(x)$ so, dass

a) $f'(x) = x^4$ b) $f''(x) = x^4$ c) $f'''(x) = x^4$ d) $f'''(x) = (x^4)'$

Ergebnis

a) $f(x) = \frac{1}{5}x^5 + C$

b) $f(x) = \frac{1}{30}x^6 + Cx + D$

c) $f(x) = \frac{1}{210}x^7 + \frac{C}{2}x^2 + Dx + E$

d) $f(x) = \frac{1}{30}x^6 + \frac{C}{2}x^2 + Dx + E$

9 Umkehrung der Ableitung?

Gesucht ist jeweils ein Beispiel einer Funktion $f(t)$ so, dass

a) $f'(t) = \sin(t)$ b) $f''(t) = \sin(t)$ c) $f'''(t) = \sin(t)$ d) $f'''(t) = (\sin(t))'$

Ergebnis

a) $f(t) = -\cos(t) + C$

b) $f(t) = -\sin(t) + Ct + D$

c) $f(t) = \cos(t) + \frac{C}{2}t^2 + Dt + E$

d) $f(t) = -\sin(t) + \frac{C}{2}t^2 + Dt + E$

10 Subtiles

$f(p) = p^q \quad \Rightarrow \quad f'(p) = ?$

$f(q) = p^q \quad \Rightarrow \quad f'(q) = ?$

Ergebnis

$f(p) = p^q \quad \Rightarrow \quad f'(p) = q\,p^{q-1}$

$f(q) = p^q \quad \Rightarrow \quad f'(q) = \ln(p)\,p^q$

11 Mehrfaches Ableiten. Formel von Leibniz

f'' bedeutet die *zweite* Ableitung von f, also $f'' = (f')'$, entsprechend f''' die *dritte* Ableitung, $f^{(4)}$ die vierte Ableitung, usw.. (Beispiel: $f(x) = x^7$, $f'(x) = 7x^6$, $f''(x) = 42x^5$, $f'''(x) = 210x^4$, $f^{(4)}(x) = 840x^3$). Wie lautet die entsprechende Produktregel?

a) $(fg)' =$ b) $(fg)'' =$ c) $(fg)''' =$ d) $(fg)^{(4)} =$ e) $(fg)^{(5)} =$

f) Kommentar?

Ergebnis

f) $(fg)^{(n)} = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}$ (Formel von Leibniz, verwandt mit binomischer Formel)

12 Zahlendreieck beim Tangens

Was geschieht, wenn wir die Tangensfunktion mehrfach ableiten?

Bearbeitung

Wir verwenden die Ableitungsformel:

$$\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\tan(t) = 1 + \tan^2(t)$$

Damit erhalten wir:

$$\begin{aligned}
\tfrac{\mathrm{d}^0}{\mathrm{d}t^0}\tan(t) &= \tan(t)\\
\tfrac{\mathrm{d}^1}{\mathrm{d}t^1}\tan(t) &= 1 + \tan^2(t)\\
\tfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\tan(t) &= 2\tan(t) + 2\tan^3(t)\\
\tfrac{\mathrm{d}^3}{\mathrm{d}t^3}\tan(t) &= 2 + 8\tan^2(t) + 6\tan^4(t)\\
\tfrac{\mathrm{d}^4}{\mathrm{d}t^4}\tan(t) &= 16\tan(t) + 40\tan^3(t) + 24\tan^5(t)\\
\tfrac{\mathrm{d}^5}{\mathrm{d}t^5}\tan(t) &= 16 + 136\tan^2(t) + 240\tan^4(t) + 120\tan^6(t)\\
\tfrac{\mathrm{d}^6}{\mathrm{d}t^6}\tan(t) &= 272\tan(t) + 1232\tan^3(t) + 1680\tan^5(t) + 720\tan^7(t)
\end{aligned}$$

Aus Systemgründen wurde oben noch die nullte Ableitung, also die Funktion selber, eingefügt.

Wir interessieren uns um das Koeffizientendreieck. Es sei a_{ij} der Koeffizient von $\tan^j(t)$ in der i-ten Ableitung $\tfrac{\mathrm{d}^i}{\mathrm{d}t^i}\tan(t)$. Für diese Koeffizienten erhalten wir die Tabelle:

i \ j	0	1	2	3	4	5	6	7
0		1						
1	1		1					
2		2		2				
3	2		8		6			
4		16		40		24		
5	16		136		240		120	
6		272		1232		1680		720

In der letzten Schrägzeile erkennen wir die Fakultäten.

Mit den Startwerten $a_{00} = 0$, $a_{01} = 1$ und $a_{i,-1} = 0$ für alle i gilt die Rekursion:

$$a_{ij} = (j-1)a_{i-1,j-1} + (j+1)a_{i-1,j+1}$$

Dies wird aus dem Ableitprozedere induktiv ersichtlich.

Die Zahlen wachsen sehr rasch.

i\j	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	2	0	2	0	0	0	0	0	0
3	0	2	0	8	0	6	0	0	0	0	0
4	0	0	16	0	40	0	24	0	0	0	0
5	0	16	0	136	0	240	0	120	0	0	0
6	0	0	272	0	1232	0	1680	0	720	0	0
7	0	272	0	3968	0	12096	0	13440	0	5040	0
8	0	0	7936	0	56320	0	129024	0	120960	0	40320

13 Passende Funktionen gesucht

a) Gesucht ist ein Beispiel einer Funktion $f(x)$ so, dass $f'(x) = f(x)$.

b) Gesucht sind sind zwei verschiedene Funktionen $f(x)$ so, dass $f''(x) = f(x)$.

c) Gesucht sind zwei verschiedene Funktionen $f(x)$ so, dass $f''(x) = -f(x)$.

d) Gesucht sind drei verschiedene Funktionen $f(x)$ so, dass $f^{(4)}(x) = f(x)$.

Ergebnis

a) $f(x) = a\mathrm{e}^x$, $f(x) = 0$ (langweilige Funktion, die in allen diesen Beispielen geht)

b) $f(x) = a\mathrm{e}^x$, $f(x) = b\mathrm{e}^{-x}$, $f(x) = 0$

c) $f(x) = a\cos(x)$, $f(x) = b\sin(x)$, $f(x) = 0$

d) $f(x) = a\cos(x)$, $f(x) = b\sin(x)$, $f(x) = c\mathrm{e}^x$, $f(x) = d\mathrm{e}^{-x}$, $f(x) = 0$

14 Produktregel für mehrere Faktoren

Es ist $(fg)' = f'g + fg'$. Gesucht ist eine entsprechende Formel für

a) $(fgh)'$ b) $(fghi)'$ c) $(f^4)' = (ffff)'$ d) $(fgh)''$

Ergebnis

a) $(fgh)' = f'gh + fg'h + fgh'$

b) $(fghi)' = f'ghi + fg'hi + fgh'i + fghi'$

c) $(f^4)' = (ffff)' = 4f^3 f'$ (Produktregel oder Kettenregel)

d) $(fgh)'' = f''gh + fg''h + fgh'' + 2(f'g'h + f'gh' + fg'h')$

15 Zusammensetzung von linearen Funktionen

Es sei $f(x) = x - 1$. Was ist dann:

a) $g = f \circ f$

b) $h = f \circ f \circ f$

c) Welches sind die Nullstellen von f, g, h?

Bearbeitung

Aus $f(x) = x - 1$ ergibt sich:

$$
\begin{aligned}
&f(x) = x - 1\\
&g = f \circ f = (x-1) - 1 = x - 2\\
&h = f \circ f \circ f = ((x-1)-1) - 1 = x - 3
\end{aligned}
$$

Nullstellen: f hat die Nullstelle 1, g hat die Nullstelle 2, h hat die Nullstelle 3.

16 Zusammensetzung von linearen Funktionen

Es sei $f(x) = 2x - 1$. Was ist dann:

a) $f^{[2]} = f \circ f$

b) $f^{[3]} = f \circ f \circ f$

c) Allgemein?

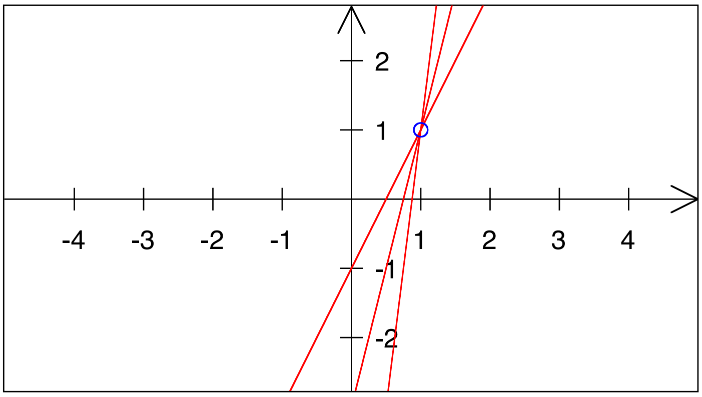
Bearbeitung

Aus $f(x) = 2x - 1$ ergibt sich:

$$
\begin{aligned}
&f(x) = 2x - 1\\
&f^{[2]}(x) = f \circ f(x) = 4x - 3\\
&f^{[3]}(x) = f \circ f \circ f(x) = 8x - 7
\end{aligned}
$$

$$
f^{[n]}(x) = 2^n x - (2^n - 1)
$$

Die Figur zeigt die Funktionsgraphen von $f, f^{[2]}, f^{[3]}$.



Die drei Geraden

Es fällt auf, dass die drei Geraden einen gemeinsamen Schnittpunkt haben.

17 Zusammensetzung von linearen Funktionen

Es sei $f(x) = ax + b$. Was ist dann:

a) $f^{[2]} = f \circ f$

b) $f^{[3]} = f \circ f \circ f$

c) Allgemein?

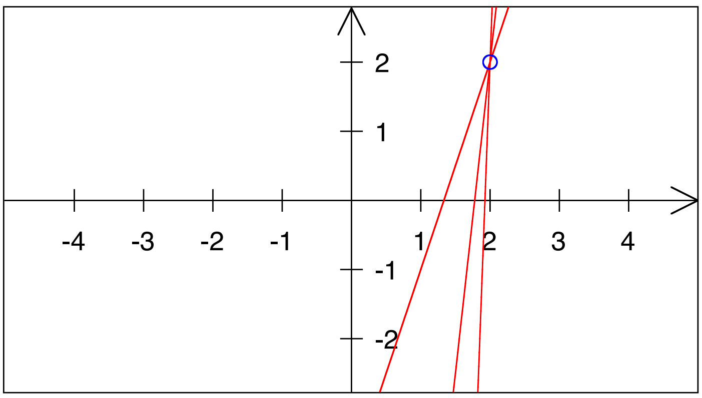
d) Wie groß wird die Ableitung?

Bearbeitung

Aus $f(x) = ax + b$ ergibt sich:

$$f(x) = ax + b$$
$$f^{[2]}(x) = f \circ f(x) = a(ax+b) + b = a^2x + ab + b$$
$$f^{[3]}(x) = f \circ f \circ f(x) = a^2(ax+b) + ab + b = a^3x + a^2b + ab + b$$

Die Figur zeigt die Situation für $a = 3, b = -4$.



Die drei Geraden

Es fällt auf, dass die drei Geraden einen gemeinsamen Schnittpunkt haben.

Allgemein gilt bei n-facher Zusammensetzung von f:

$$f^{[n]}(x) = \underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{n \text{ Mal}}(x) = a^n x + b\left(1 + a + \cdots + a^{n-1}\right) = a^n x + b\tfrac{1-a^n}{1-a}$$

Zur Berechnung der Ableitung gibt es zwei Möglichkeiten.

Erster Rechenweg:

Wir leiten die oben berechnete Funktion $f^{[n]}(x) = a^n x + b\tfrac{1-a^n}{1-a}$ nach x ab und erhalten:

$$\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(f^{[n]}(x)\right) = \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(a^n x + b\tfrac{1-a^n}{1-a}\right) = a^n$$

Zweiter Rechenweg:

Wir verwenden die Kettenregel. Da die Funktion $f(x) = ax + b$ linear ist, ergibt sich in jedem Schritt der Kettenregel die Konstante a als Ableitung. Damit erhalten wir:

$$\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(f^{[n]}(x)\right) = \underbrace{a \cdot a \cdot \cdots \cdot a}_{n \text{ Mal}} = a^n$$

18 Zusammensetzungen von zwei linearen Funktionen

Es sei

$$\begin{aligned} f(x) &= x + 1 \\ g(x) &= 2x \end{aligned}$$

Was ist dann:

$$\begin{aligned} f \circ f \circ f \circ f \circ g \circ g(x) &= \\ f \circ f \circ g \circ f \circ g(x) &= \\ g \circ f \circ f \circ g(x) &= \\ g \circ g \circ f(x) &= \end{aligned}$$

Bearbeitung

$$\begin{aligned} f \circ f \circ f \circ f \circ g \circ g(x) &= 2(2x) + 1 + 1 + 1 + 1 = 4x + 4 \\ f \circ f \circ g \circ f \circ g(x) &= 2(2x + 1) + 1 + 1 = 4x + 4 \\ g \circ f \circ f \circ g(x) &= 2(2x + 1 + 1) = 4x + 4 \\ g \circ g \circ f(x) &= 2 \cdot 2(x + 1) = 4x + 4 \end{aligned}$$

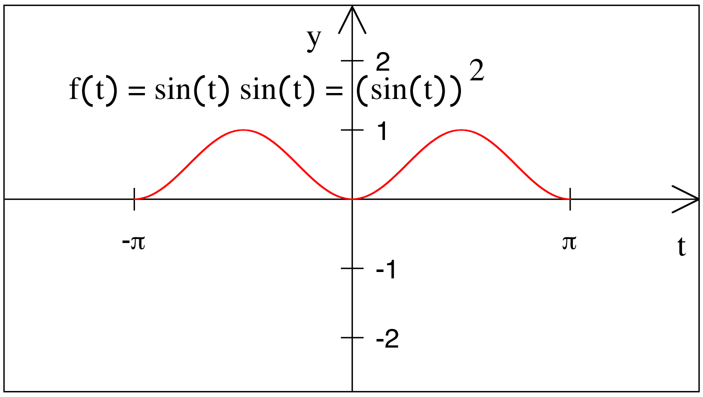
19 Zweimal Sinus

a) Skizzieren Sie den Graphen der Funktion $f(x) = \sin(t)\sin(t)$; $t \in [-\pi,\pi]$. (Erst überlegen, dann im Computer nachsehen!)

b) Skizzieren Sie den Graphen der Funktion $g(x) = \sin(\sin(t))$; $t \in [-\pi,\pi]$. (Erst überlegen, dann im Computer nachsehen!)

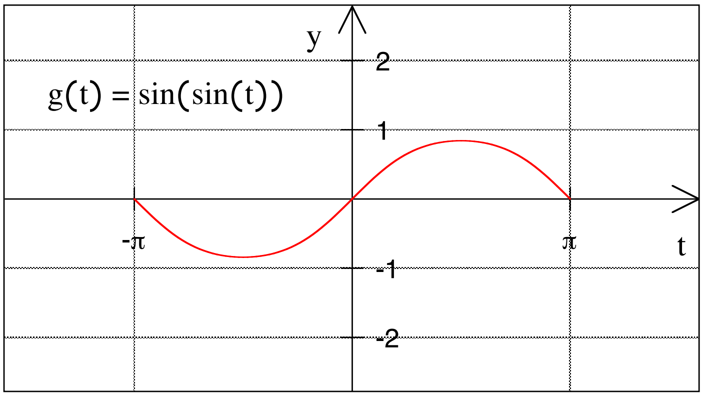
Ergebnis

a)



$f(x) = \sin(t)\sin(t); \quad t \in [-\pi,\pi]$

b)



$g(x) = \sin(\sin(t)); \quad t \in [-\pi,\pi]$

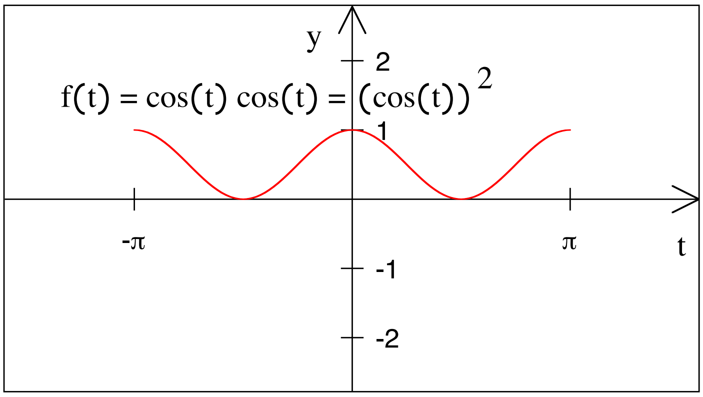
20 Zweimal Kosinus

a) Skizzieren Sie den Graphen der Funktion $f(x) = \cos(t)\cos(t)$; $t \in [-\pi, \pi]$. (Erst überlegen, dann im Computer nachsehen!)

b) Skizzieren Sie den Graphen der Funktion $g(x) = \cos(\cos(t))$; $t \in [-\pi, \pi]$. (Erst überlegen, dann im Computer nachsehen!)

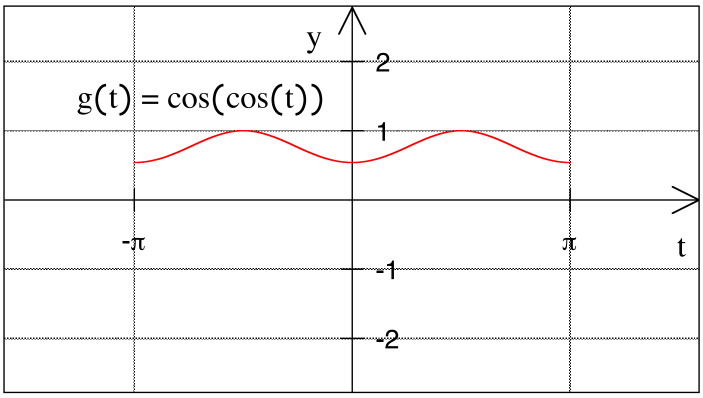
Ergebnis

a)



$f(x) = \cos(t)\cos(t)$; $t \in [-\pi, \pi]$

b)



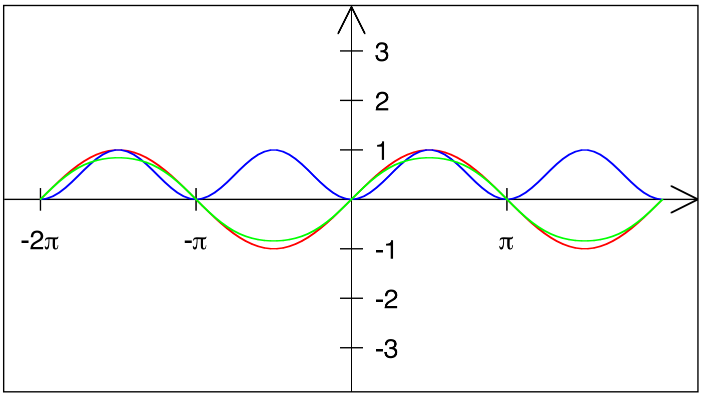
$g(x) = \cos(\cos(t))$; $t \in [-\pi, \pi]$

21 Der kleine Unterschied

Skizzieren Sie ins selbe Koordinatensystem:

a) $y = \sin(x)$ (rot) b) $y = \sin(x)\sin(x)$ (blau) c) $y = \sin(\sin(x))$ (grün)

Ergebnis



$y = \sin(x)$, $y = \sin(x)\sin(x)$, $y = \sin(\sin(x))$

22 Zusammensetzungen?

Welches ist der größtmögliche Definitionsbereich? Skizzieren oder plotten Sie den Funktionsgrafen.

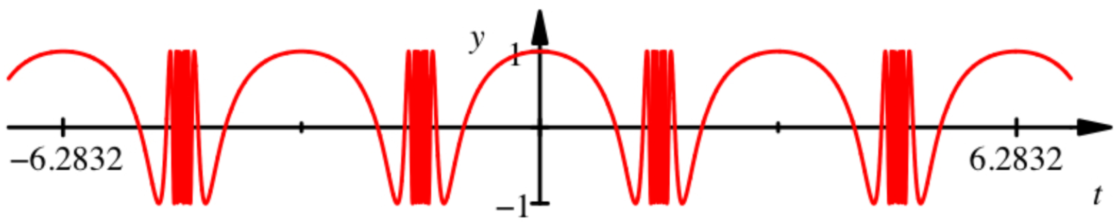
a) $f : t \mapsto \cos(\tan(t))$

b) $g : t \mapsto \tan(\cos(t))$

c) $h : t \mapsto \cos(t)\tan(t)$

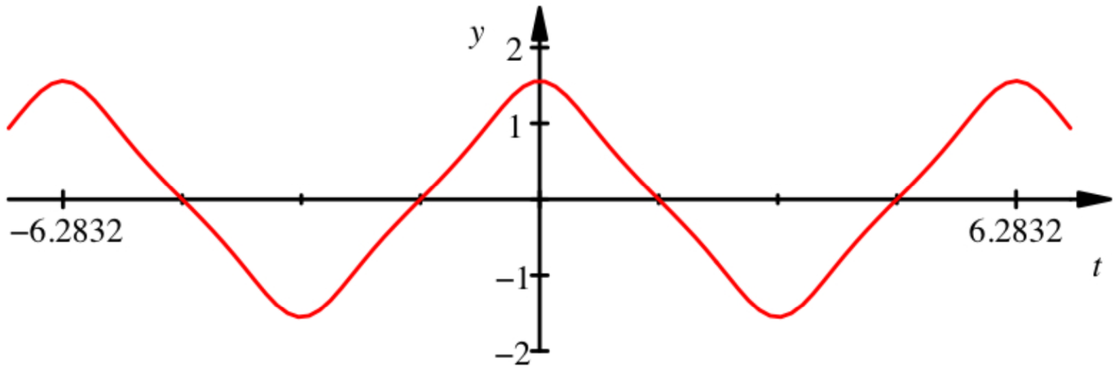
Bearbeitung

a) $f : t \mapsto \cos(\tan(t))$, $t \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$



$f : t \mapsto \cos(\tan(t))$

b) $g : t \mapsto \tan(\cos(t))$, $t \in \mathbb{R}$

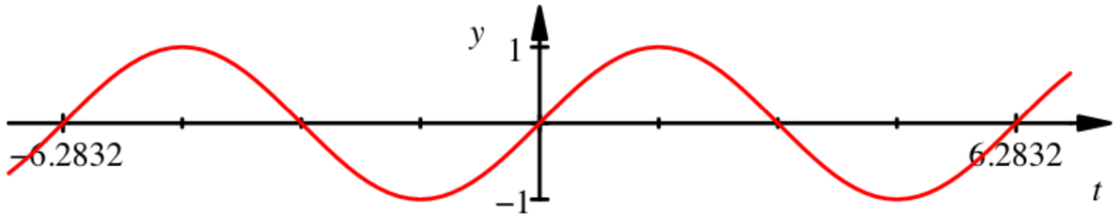


$g: t \mapsto \tan(\cos(t))$

c) $h: t \mapsto \cos(t)\tan(t)$

Keine Zusammensetzung, sondern ein Produkt von zwei Funktionen.

Streng genommen ist der größtmögliche Definitionsbereich: $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$. Wegen $\cos(t)\tan(t) = \sin(t)$ kann der Definitionsbereich $\mathbb{R}$ gewählt werden.



$h: t \mapsto \cos(t)\tan(t) = \sin(t)$

23 Zusammensetzung von quadratischen Funktionen

Es sei $f(x)=x^2-2$. Was ist dann:

a) $g = f \circ f$

b) $h = f \circ f \circ f$

c) $i = f \circ f \circ f \circ f$

Bearbeitung

Mit CAS

```
> restart:
f:=x^2-2;
g:=(x^2-2)^2-2:
g:=expand(g);
h:=((x^2-2)^2-2)^2-2:
h:=expand(h);
i:=(((x^2-2)^2-2)^2-2)^2-2:
i:=expand(i);
```

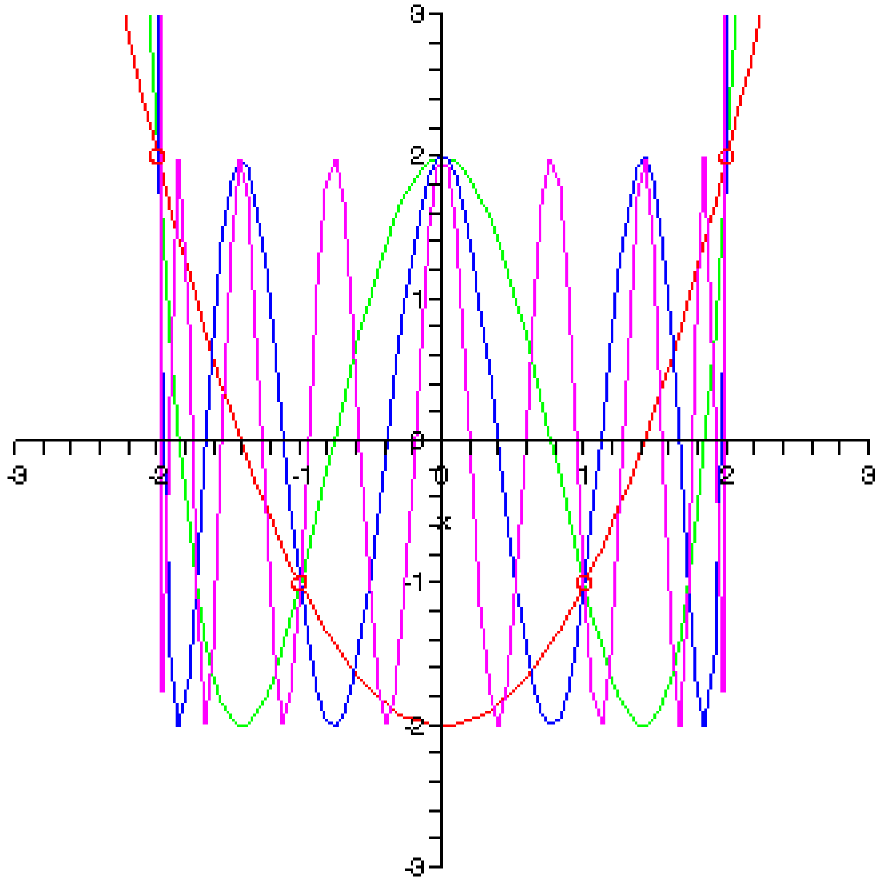
$$f := x^2 - 2$$

$$g := x^4 - 4x^2 + 2$$

$$h := x^8 - 8x^6 + 20x^4 - 16x^2 + 2$$

$$i := 2 - 64x^2 + 336x^4 + 660x^8 - 672x^6 + x^{16} - 16x^{14} + 104x^{12} - 352x^{10}$$

Die vier Funktionsgraphen:



Die vier Graphen

Auffallend sind gemeinsame Schnittpunkte aller vier Graphen.

Diese Schnittpunkte haben die Koordinaten: $(-2,2)$, $(-1,-1)$, $(1,-1)$, $(2,2)$.

Es ist sogar so, dass auch die Graphen aller weiterer Funktionen durch diese vier Punkte gehen. Beweis der Schnittpunkteigenschaft:

Durch Nachrechnen zeigt man, dass $f(\pm 2) = 2$ und $f(\pm 1) = -1$. Damit gilt aber auch für alle Iterationen diese Eigenschaft.

24 Zusammensetzung von quadratischen Funktionen

Es sei $f(x) = x^2 - 1$. Was ist dann:

a) $g = f \circ f$

b) $h = f \circ f \circ f$

c) $i = f \circ f \circ f \circ f$

Bearbeitung

Aus $f(x) = x^2 - 1$ ergibt sich:

$$f(x) = x^2 - 1$$

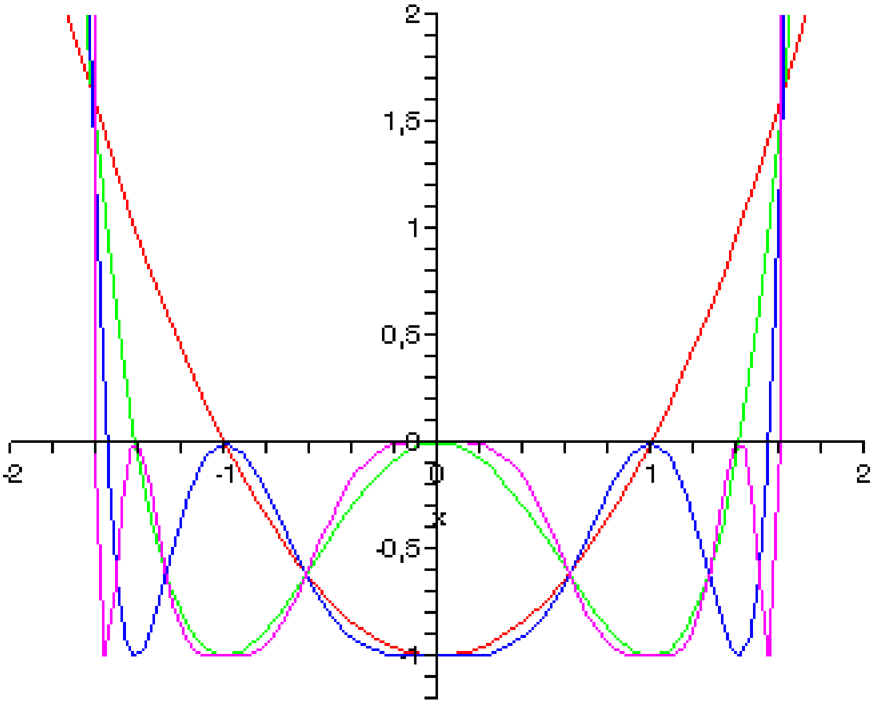
$$g(x) = f \circ f = \left(x^2 - 1\right)^2 - 1 = x^4 - 2x^2 + 1 - 1 = x^4 - 2x^2$$

$$h(x) = f \circ f \circ f = \left(\left(x^2 - 1\right)^2 - 1\right)^2 - 1 = x^8 - 4x^6 + 4x^4 - 1$$

$$i(x) = f \circ f \circ f \circ f = \left(\left(\left(x^2 - 1\right)^2 - 1\right)^2 - 1\right)^2 - 1$$

$$= x^{16} - 8x^{14} + 24x^{12} + 14x^8 - 32x^{10} + 8x^6 - 8x^4$$

Die Figur zeigt die Funktionsgraphen.



Funktionsgraphen

Auffallend sind gemeinsame Schnittpunkte aller vier Graphen.

Diese Schnittpunkte haben die Koordinaten: $(-\tau,\tau)$, $(-\rho,-\rho)$, $(\rho,-\rho)$, (τ,τ), wobei $\tau = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.618$ und $\rho = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \approx 0.618$ (goldener Schnitt)

Es ist sogar so, dass auch die Graphen aller weiterer Funktionen durch diese vier Punkte gehen.

Beweis der Schnittpunkteigenschaft:

Durch Nachrechnen zeigt man, dass $f(\pm\tau)=\tau$ und $f(\pm\rho)=-\rho$. Damit gilt aber auch für alle Iterationen diese Eigenschaft.

25 Anzahl Nullstellen

Es sei $f(x)=2|x|-1$ und weiter:

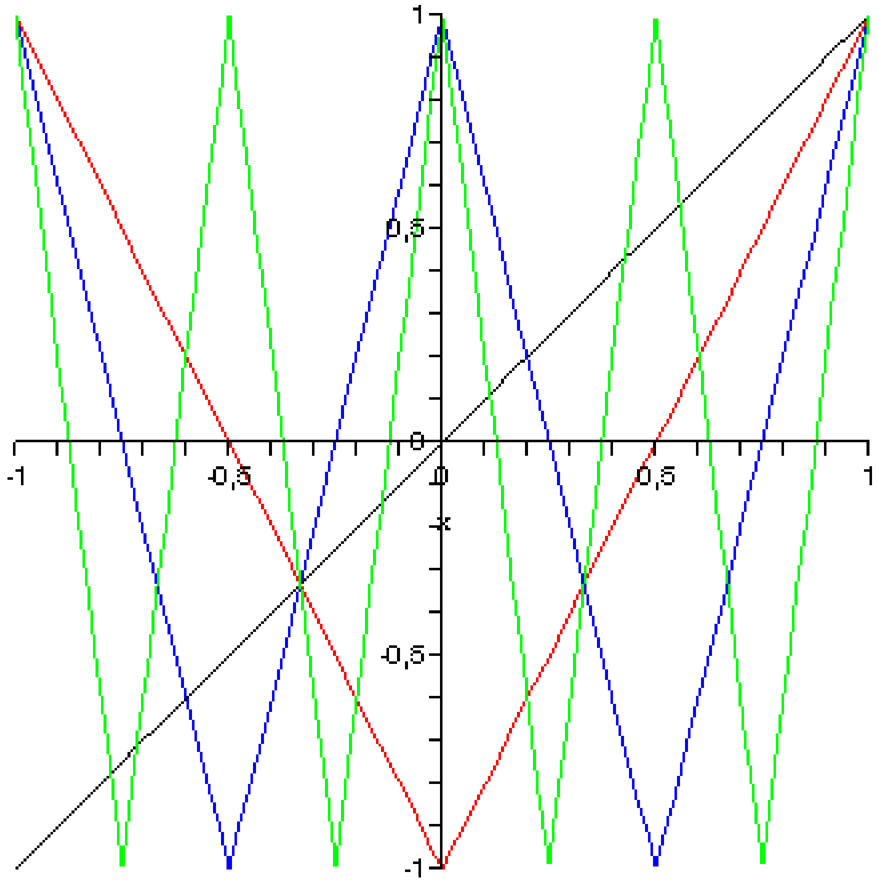
$$f^{[0]}=\mathrm{Id},\quad f^{[1]}=f,\quad f^{[2]}=f\circ f,\quad f^{[3]}=f\circ f\circ f$$

Wie viele Nullstellen hat die Funktion $f^{[n]}$?

Bearbeitung

$$f^{[0]}=\mathrm{Id},\quad f^{[1]}=f,\quad f^{[2]}=f\circ f,\quad f^{[3]}=f\circ f\circ f$$

Die Abbildung zeigt die Funktionsgraphen in den respektiven Farben.



Funktionsgraphen

Die Funktion $f^{[n]}$ hat in $]-1,1[$ genau 2^n Nullstellen. Beweis: Aus jedem V wird ein W.

26 Zusammensetzung der Kosinusfunktion

Es sei $f(x) = \cos(\pi x)$ und weiter:

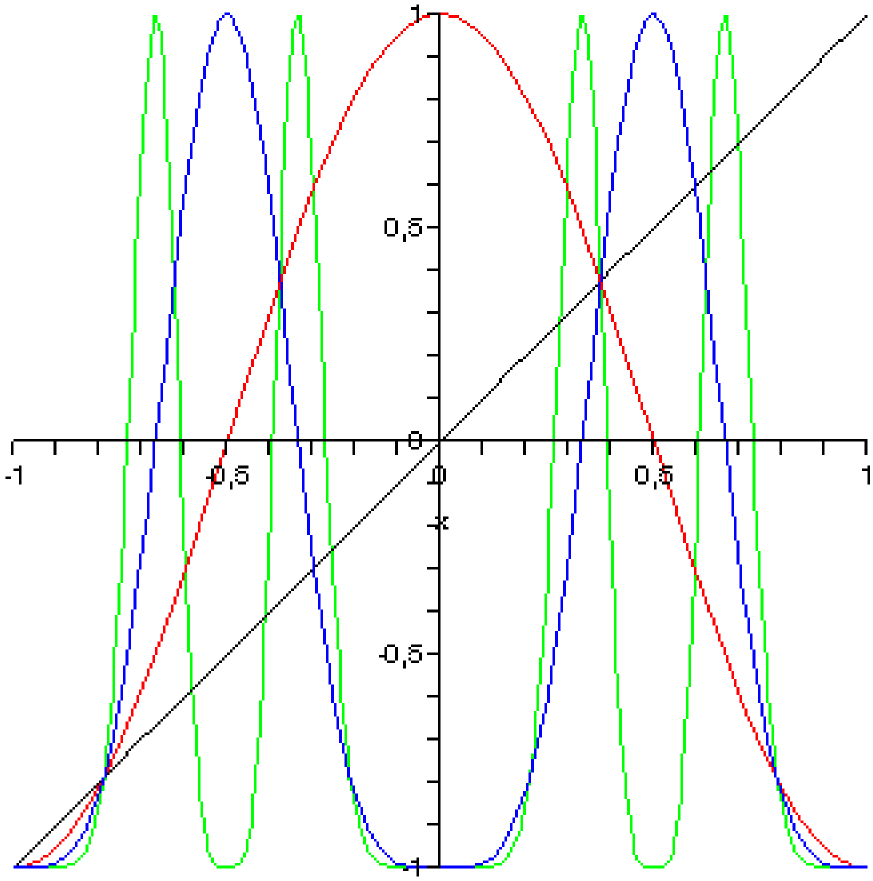
$$f^{[0]} = \mathrm{Id}, \quad f^{[1]} = f, \quad f^{[2]} = f \circ f, \quad f^{[3]} = f \circ f \circ f$$

Wie viele Nullstellen hat die Funktion $f^{[n]}$ im Intervall $]-1,1[$?

Bearbeitung

$$f^{[0]} = \mathrm{Id}, \quad f^{[1]} = f, \quad f^{[2]} = f \circ f, \quad f^{[3]} = f \circ f \circ f$$

Die Abbildung zeigt die Funktionsgraphen in den respektiven Farben.



Funktionsgraphen

Die Funktion $f^{[n]}$ hat in $]-1,1[$ genau 2^n Nullstellen. Beweis: Aus jedem Dromedar wird ein Kamel.

27 Zusammensetzung von Quadratfunktionen

Es sei $f(x) = 2x^2 - 1$ und weiter:

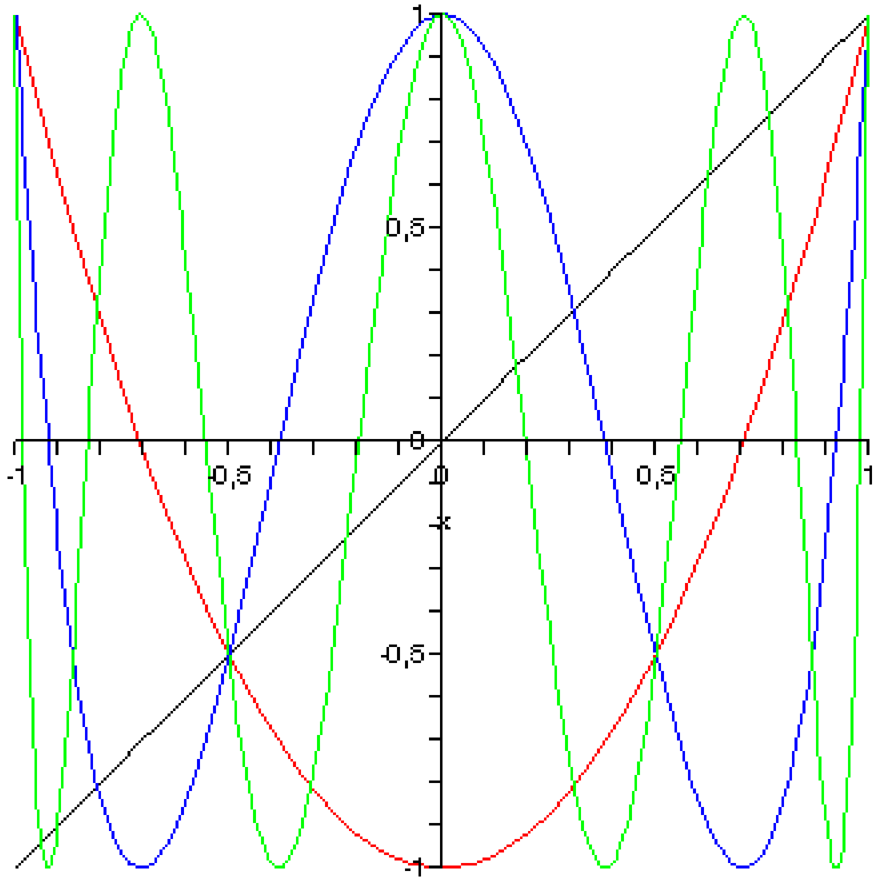
$$f^{[0]} = \mathrm{Id}, \quad f^{[1]} = f, \quad f^{[2]} = f \circ f, \quad f^{[3]} = f \circ f \circ f$$

Wie viele Nullstellen hat die Funktion $f^{[n]}$ im Intervall $]-1,1[$?

Bearbeitung

$$f^{[0]} = \mathrm{Id}, \quad f^{[1]} = f, \quad f^{[2]} = f \circ f, \quad f^{[3]} = f \circ f \circ f$$

Die Abbildung zeigt die Funktionsgraphen in den respektiven Farben.



Funktionsgraphen

Die Funktion $f^{[n]}$ hat in $]-1,1[$ genau 2^n Nullstellen.

28 Nullstellen

Welches sind die Nullstellen von:

a) $f(x) = \ln(x)$

b) $g(x) = \ln(\ln(x))$

c) $h(x) = \ln(\ln(\ln(x)))$

d) $i(x) = \ln(\ln(\ln(\ln(x))))$

Ergebnis

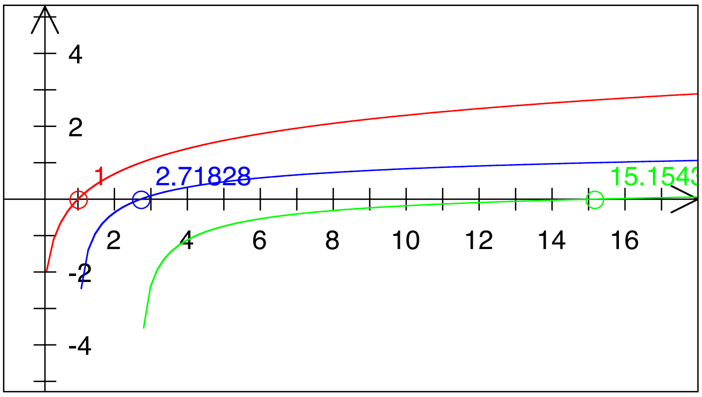
a) $f(x) = \ln(x)$ $\quad x_0 = 1$

b) $g(x) = \ln(\ln(x))$ $\quad x_0 = \mathrm{e}$

c) $h(x) = \ln(\ln(\ln(x)))$ $\quad x_0 = \mathrm{e}^{\mathrm{e}} \approx 15.1543$

d) $i(x) = \ln(\ln(\ln(\ln(x))))$ $\quad x_0 = \mathrm{e}^{\left(\mathrm{e}^{\mathrm{e}}\right)} \approx 3814279.102$

Die Abbildung zeigt die ersten drei Funktionen.



$f(x) = \ln(x)$, $g(x) = \ln(\ln(x))$, $h(x) = \ln(\ln(\ln(x)))$

29 Zusammensetzung von zwei Funktionen, Kettenregel

Es sei: $f : x \to x^2$ und $g : x \to \sin(x)$. Gesucht sind:

a) $(g \circ f)'$ $\qquad$ b) $(f \circ g)'$

Ergebnis

a) $(g \circ f)' = \left(\sin\left(x^2\right)\right)' = 2x\cos\left(x^2\right)$ $\qquad$ b) $(f \circ g)' = \left(\sin^2(x)\right)' = 2\sin(x)\cos(x)$

30 Spiel mit Exponenten

Gesucht ist je die erste Ableitung:

a) $f(t)=(\cos(t))^4$ b) $g(t)=\cos^4(t)$ c) $h(t)=\cos\left(t^4\right)$ d) $k(t)=\cos^4\left(t^4\right)$

Ergebnis

a) $f'(t)=4(\cos(t))^3(-\sin(t))$

b) $g'(t)=4(\cos(t))^3(-\sin(t))$ (wie bei a), nur andere Schreibweise)

c) $h'(t)=-\sin\left(t^4\right)4t^3$

d) $k'(t)=16\cos^3\left(t^4\right)\left(-\sin\left(t^4\right)\right)t^3$

31 Ableitung

Welches ist die erste Ableitung von

a) $f(x)=\ln(x)$

b) $g(x)=\ln(\ln(x))$

c) $h(x)=\ln(\ln(\ln(x)))$

Ergebnis

a) $f(x)=\ln(x)$ $f'(x)=\frac{1}{x}$

b) $g(x)=\ln(\ln(x))$ $g'(x)=\frac{1}{\ln(x)}\frac{1}{x}$

c) $h(x)=\ln(\ln(\ln(x)))$ $h'(x)=\frac{1}{\ln(\ln(x))}\frac{1}{\ln(x)}\frac{1}{x}$

32 Produktregel und Kettenregel

Gesucht ist die zweite Ableitung (Zwischenschritte angeben!)

$f(t)=\cos(\cos(t))$

Ergebnis

$$f(t)=\cos(\cos(t))$$

$$f'(t)=-\sin(\cos(t))(-\sin(t))=\sin(\cos(t))\sin(t)$$

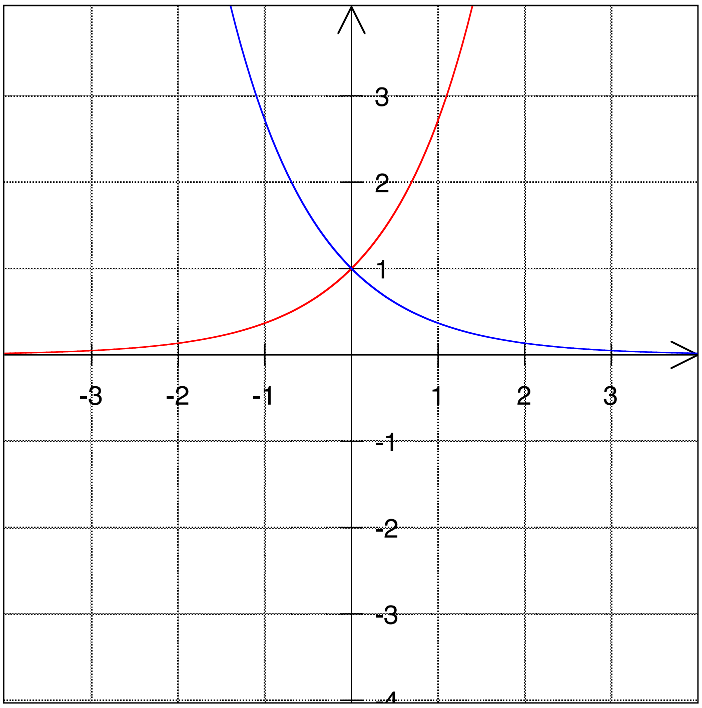
$$f''(t)=-\cos(\cos(t))(\sin(t))^2+\sin(\cos(t))\cos(t)$$

33 Hyperbelfunktionen

Die Funktionen cosh ("cosinus hyperbolicus" oder "hyperbolischer Kosinus") und sinh ("sinus hyperbolicus" oder "hyperbolischer Sinus") sind wie folgt definiert:

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \text{und} \quad \sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

a) In der Figur sind die Funktionsgraphen von e^x und e^{-x} eingetragen. Skizzieren Sie dazu die beiden Funktionsgraphen von $\cosh(x)$ und $\sinh(x)$.



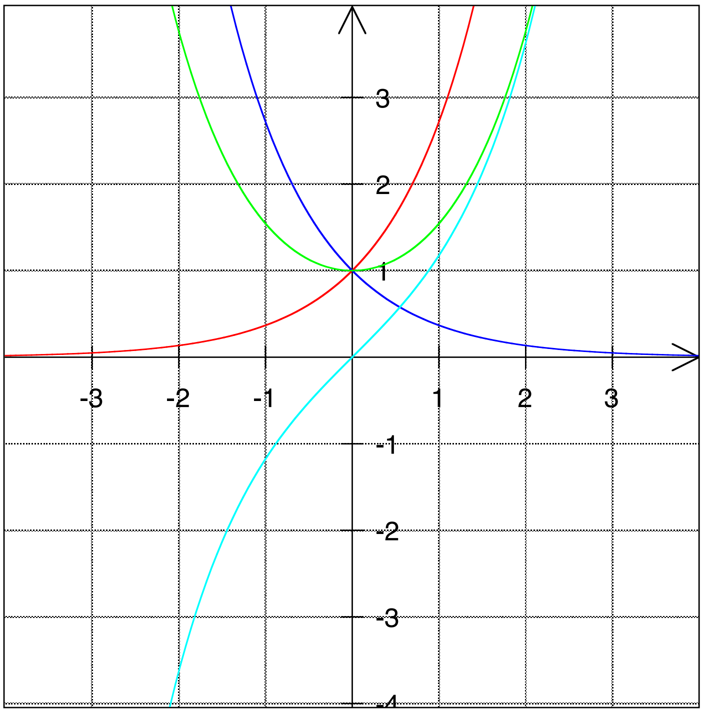
Funktionsgraphen von e^x **und** e^{-x}

Bemerkung: Der Funktionsgraph von $\cosh(x)$ wird als "Kettenlinie" bezeichnet.

b) Gesucht sind die Ableitungen $\cosh'$ und $\sinh'$. Kommentar?

Ergebnis

a)



Die hyperbolischen Funktionen

b) $\cosh' = \sinh, \quad \sinh' = \cosh$

34 cosh und sinh

Die Funktionen cosh und sinh sind wie folgt definiert:

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \text{ und } \sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

Gibt es eine zu $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$ entsprechende Formel mit cosh und sinh?

Ergebnis

$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$

35 Hyperbolischer Tangens

Es ist $\tanh(x) = \dfrac{\sinh(x)}{\cosh(x)}$.

a) Skizze oder Plot des Funktionsgraphen?

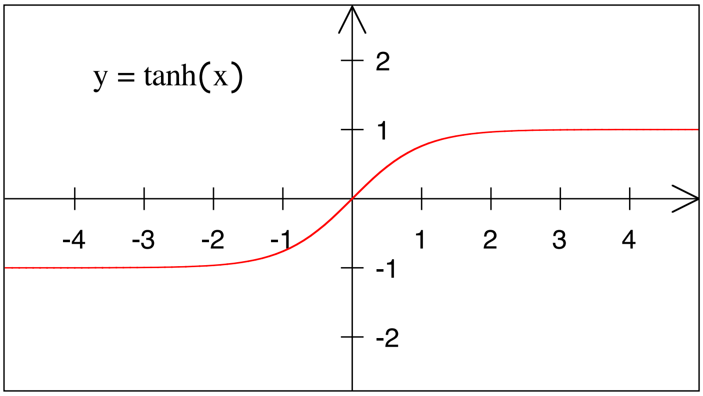
b) $\lim\limits_{x\to\infty} \tanh(x) = ?$

c) $\lim\limits_{x\to-\infty} \tanh(x) = ?$

d) Ableitung von tanh?

Ergebnis

a)



Hyperbolischer Tangens

b) $\lim\limits_{x\to\infty} \tanh(x) = 1$

c) $\lim\limits_{x\to-\infty} \tanh(x) = -1$

d) $\frac{d}{dx}\tanh(x) = \dfrac{1}{\cosh^2(x)} = 1 - \tanh^2(x)$

36 Zusammensetzung von drei Funktionen

Es sei: $f(x)=x^2$, $g(x)=\sin(x)$ und $h(x)=\sqrt{x}$.

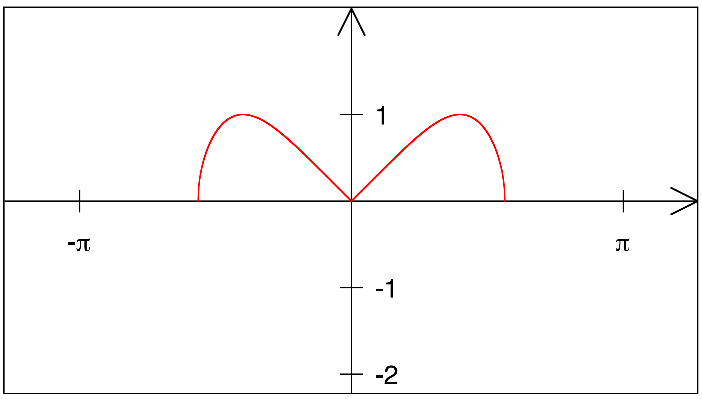
Wie viele Zusammensetzungen dieser drei Funktionen gibt es (Beispiele: $h \circ g \circ f$, $g \circ h \circ f$, ...)? Listen Sie die Zusammensetzungen auf und geben Sie einen „schönen" Definitionsbereich an.

Ergebnis

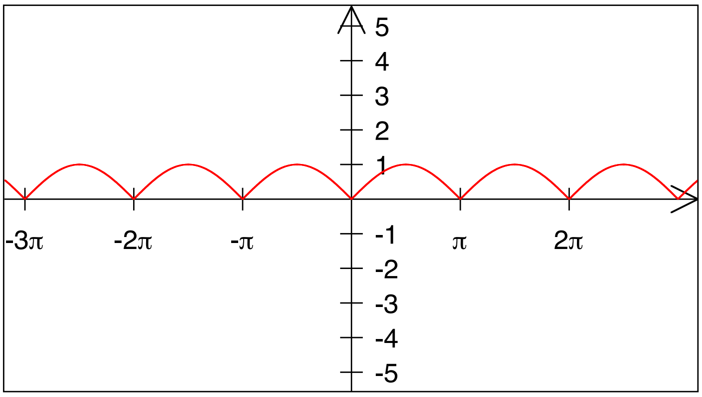
Es gibt 3! = 6 Zusammensetzungen, nämlich (Definitionsbereiche exemplarisch):

Definitionsbereich (exemplarisch)	Zusammensetzung
$\left[-\sqrt{\pi},\sqrt{\pi}\right]$	$h \circ g \circ f = \sqrt{\sin\left(x^2\right)}$
$\mathbb{R}$	$h \circ f \circ g = \lvert\sin(x)\rvert$
$\mathbb{R}$	$g \circ h \circ f = \sin(\lvert x\rvert)$
$\mathbb{R}_0^+$	$g \circ f \circ h = \sin(x)$
$[0,\pi]$	$f \circ h \circ g = \sin(x)$
$\mathbb{R}_0^+$	$f \circ g \circ h = \sin^2\left(\sqrt{x}\right)$

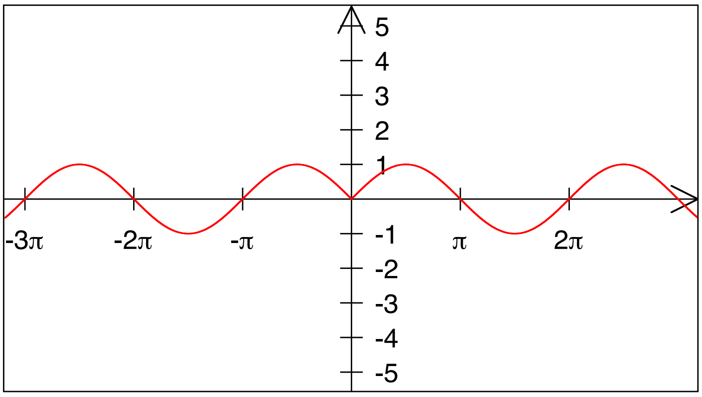
In den angegebenen Definitionsbereichen sehen die interessanteren dieser Funktionen wie folgt aus:



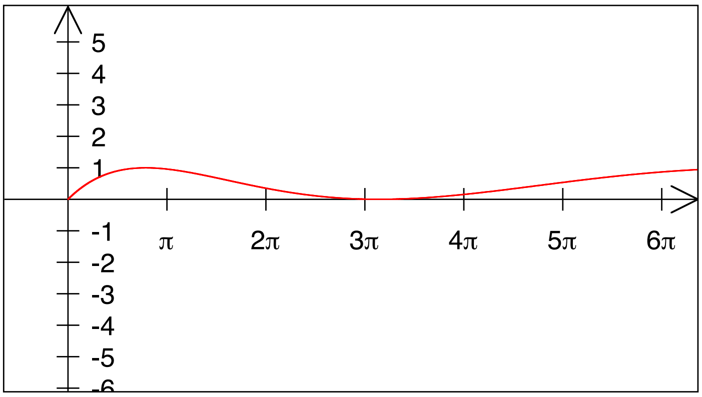
$h \circ g \circ f = \sqrt{\sin\left(x^2\right)}$



$h \circ f \circ g = |\sin(x)|$



$g \circ h \circ f = \sin(|x|)$



$f \circ g \circ h = \sin^2\left(\sqrt{x}\right)$

37 Verallgemeinerte Kettenregel

Es sei: $f(x)=x^2$, $g(x)=\sin(x)$ und $h(x)=\sqrt{x}$.

Wie viele Zusammensetzungen dieser drei Funktionen gibt es (Beispiele: $h\circ g\circ f$, $g\circ h\circ f$, ...)? Listen Sie die Zusammensetzungen auf und geben Sie die im Definitionsbereich $]0,1]$ gültige Ableitung an.

Ergebnis

Definitionsbereich	Zusammensetzung	Ableitung
$]0,1]$	$h\circ g\circ f=\sqrt{\sin\left(x^2\right)}$	$\frac{x\cos\left(x^2\right)}{\sqrt{\sin\left(x^2\right)}}$
$]0,1]$	$h\circ f\circ g=\sin(x)$	$\cos(x)$
$]0,1]$	$g\circ h\circ f=\sin(x)$	$\cos(x)$
$]0,1]$	$g\circ f\circ h=\sin(x)$	$\cos(x)$
$]0,1]$	$f\circ h\circ g=\sin(x)$	$\cos(x)$
$]0,1]$	$f\circ g\circ h=\sin^2\left(\sqrt{x}\right)$	$\frac{\sin\left(\sqrt{x}\right)\cos\left(\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x}}$

38 Areafunktionen

a) arcosh (”area cosinus hyperbolicus”) ist die Umkehrfunktion von cosh. Gesucht ist $\operatorname{arcosh}'(x)$.

b) Was ist $\operatorname{arsinh}'(x)$?

Ergebnis

a) $\operatorname{arcosh}'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

b) $\operatorname{arsinh}'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

39 Artanh

artanh (”area tangens hyperbolicus”) ist die Umkehrfunktion von tanh. Gesucht ist $\operatorname{artanh}'(x)$.

Ergebnis

$\operatorname{artanh}'(x) = \frac{1}{1-x^2}$

40 *x* hoch *x*

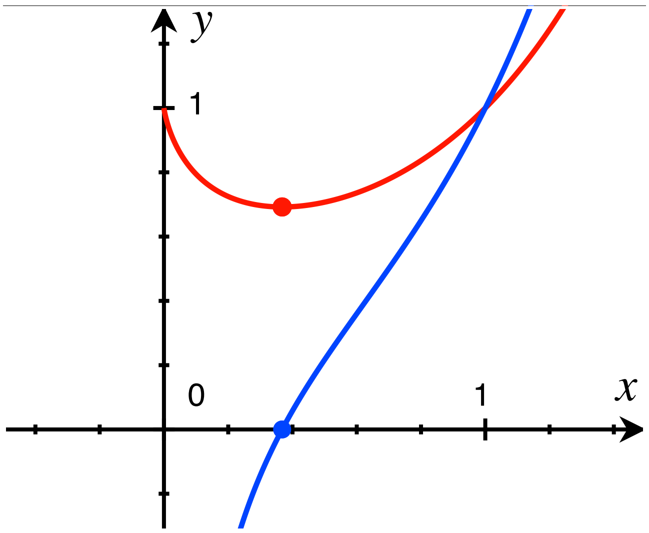
Gesucht ist die Ableitung der Funktion $y = f(x) = x^x$.

Bearbeitung

Aus $y = x^x$ ergibt sich $\ln(y(x)) = x\ln(x)$. Beidseitiges Ableiten nach *x* ergibt:

$$\frac{1}{y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \ln(x) + x\frac{1}{x}$$
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = y(\ln(x)+1) = x^x(\ln(x)+1)$$

Die Abbildung zeigt rot den Funktionsgrafen von $y = f(x) = x^x$ und blau den Grafen der Ableitung.



Funktion und Ableitung

Die Ableitung hat die Nullstelle $x_0 = \mathrm{e}^{-1} \approx 0.3679$. Der Funktionsgraf hat daher sein Minimum bei $\left(\mathrm{e}^{-1}, \mathrm{e}^{-\mathrm{e}^{-1}}\right) \approx (0.3679, 0.6922)$.

Bereits Leibniz (1646 – 1716) hat diese Funktion und ihre Ableitung bearbeitet.

41 *x* hoch *x* hoch *x*

Gesucht ist die Ableitung der Funktion $y = f(x) = x^{x^x}$. Bemerkung: Diese Funktion ist so zu lesen: $y = f(x) = x^{\left(x^x\right)}$.

Bearbeitung

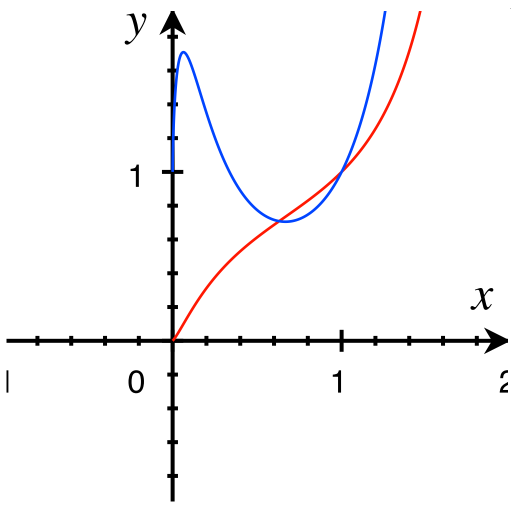
Aus $y = x^{x^x}$ ergibt sich durch zweimaliges Logarithmisieren:

$$
\begin{aligned}
y(x) &= x^{x^x} \\
\ln(y(x)) &= x^x \ln(x) \\
\ln(\ln(y(x))) &= \ln\left(x^x\right) + \ln(\ln(x)) = x\ln(x) + \ln(\ln(x))
\end{aligned}
$$

Beidseitiges Ableiten nach x ergibt:

$$
\begin{aligned}
\tfrac{1}{\ln(y(x))}\,\tfrac{1}{y(x)}\,\tfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= \ln(x) + x\tfrac{1}{x} + \tfrac{1}{\ln(x)}\,\tfrac{1}{x} \\
\tfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= y(x)\ln(y(x))\left(\ln(x) + 1 + \tfrac{1}{\ln(x)}\,\tfrac{1}{x}\right) \\
\tfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= x^{x^x} x^x \ln(x)\left(\ln(x) + 1 + \tfrac{1}{\ln(x)}\,\tfrac{1}{x}\right) \\
\tfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= x^{x^x} x^x \ln^2(x) + x^{x^x} x^x \ln(x) + x^{x^x} x^{x-1}
\end{aligned}
$$

Die Abbildung zeigt rot den Funktionsgrafen von $y = f(x) = x^{x^x}$ und blau den Grafen der Ableitung.

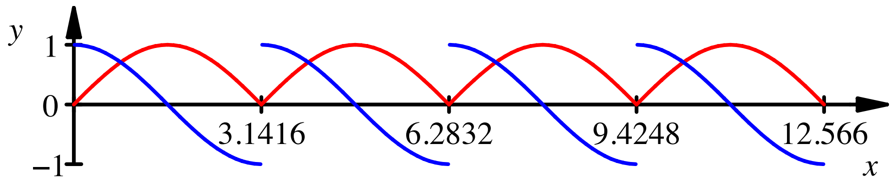


Funktion und Ableitung

42 Ableitung?

Skizzieren Sie die Ableitung von $f(x) = |\sin(x)|,\ x \in [0, 4\pi]$. Ist die Ableitung stetig? Gibt es eine Formel für die Ableitung?

Bearbeitung



Funktion und Ableitung

Die Ableitung ist unstetig bei Vielfachen von π. Eine „schöne" Formel für die Ableitung gibt es nicht. Es geht zum Beispiel mit Fallunterscheidungen:

$$f'(x) = \begin{cases} \cos(x) \text{ für } x \in [0,\pi[\\ \text{nicht definiert für } x = \pi \\ -\cos(x) \text{ für } x \in]\pi,2\pi[\\ \text{nicht definiert für } x = 2\pi \\ \cos(x) \text{ für } x \in]2\pi,3\pi[\\ \text{nicht definiert für } x = 3\pi \\ -\cos(x) \text{ für } x \in]3\pi,4\pi] \end{cases}$$