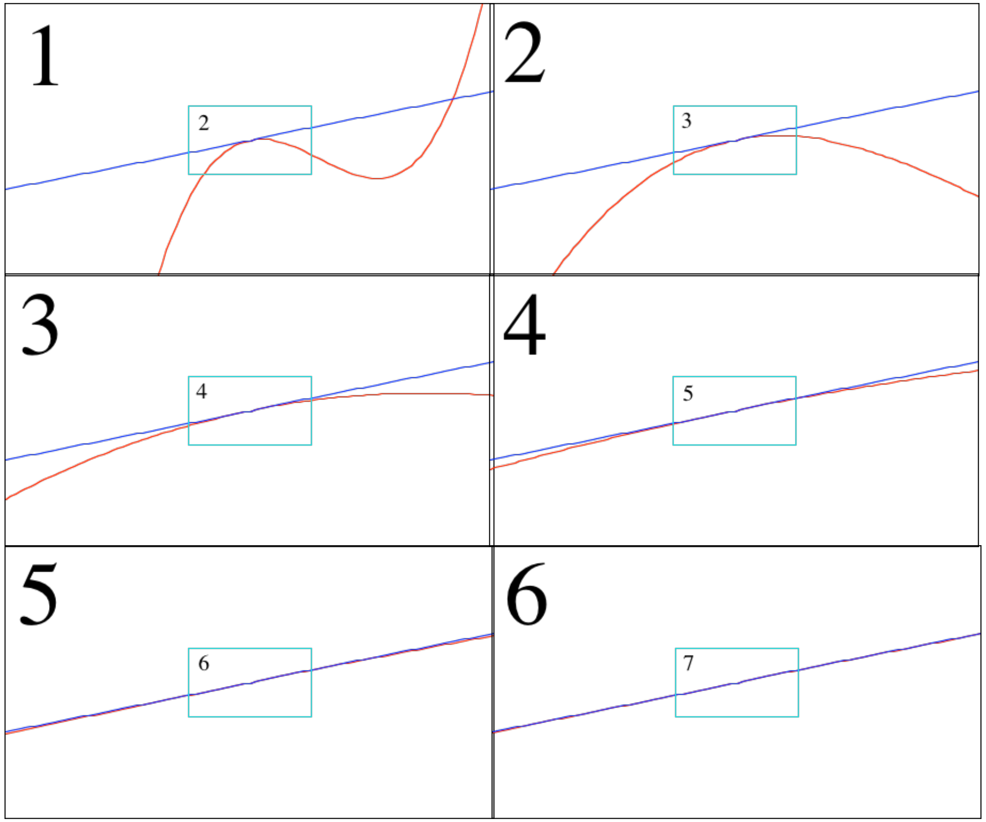
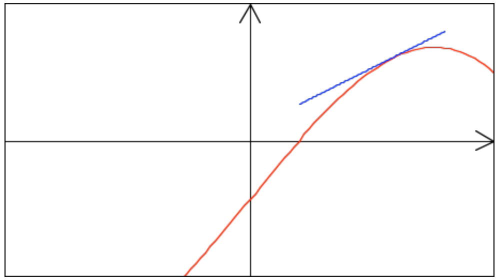


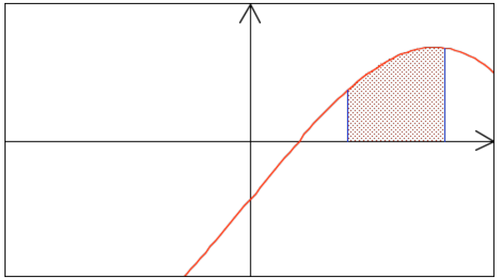
Modul 103: Differenzialrechnung

Differenzialrechnung

- Ableiten

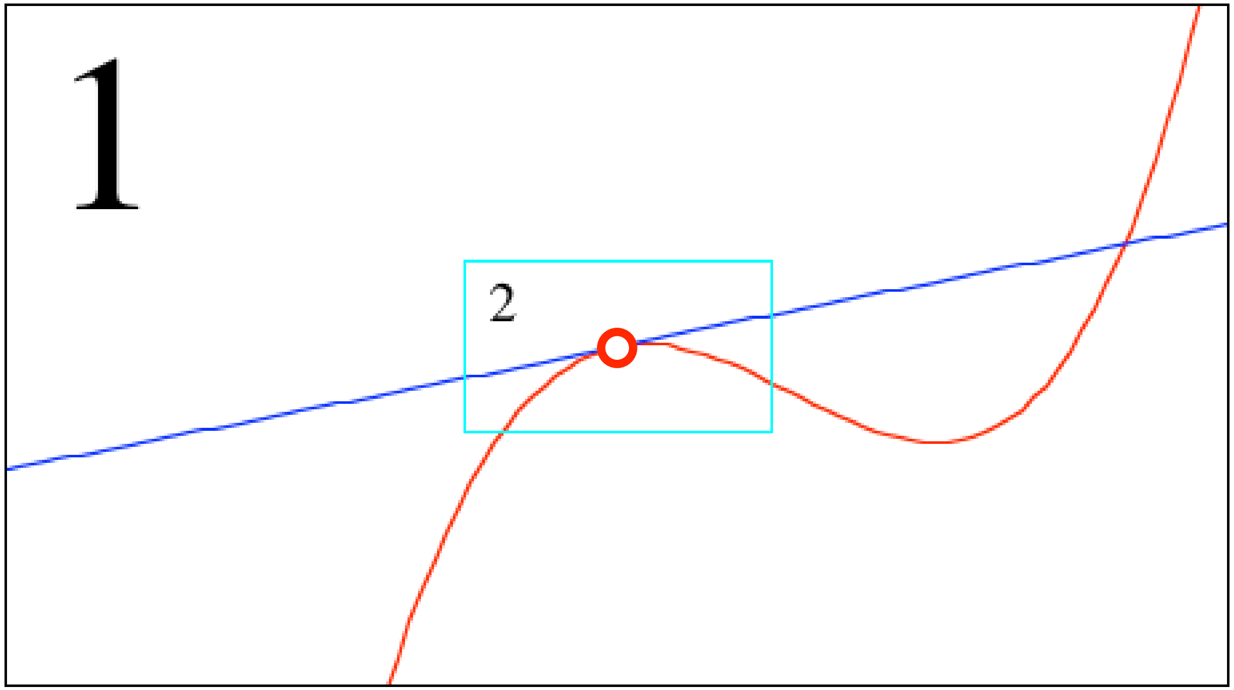


- Integrieren

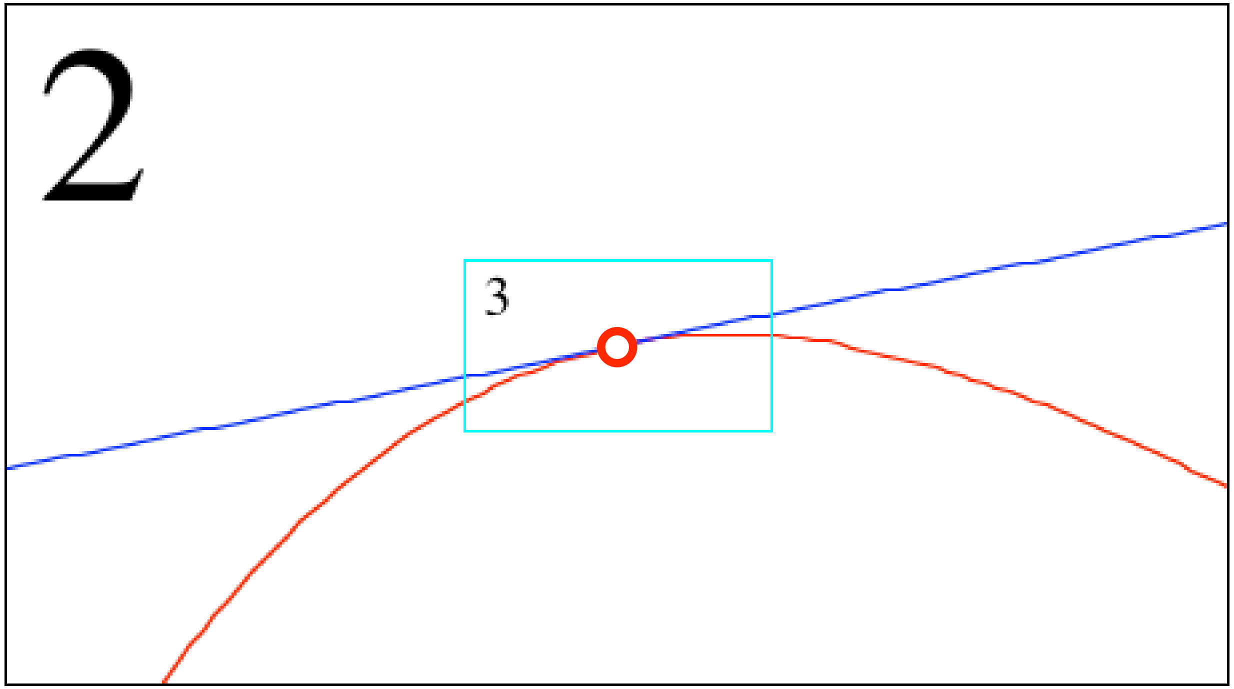


- Differenzialgleichungen $y'' = y$

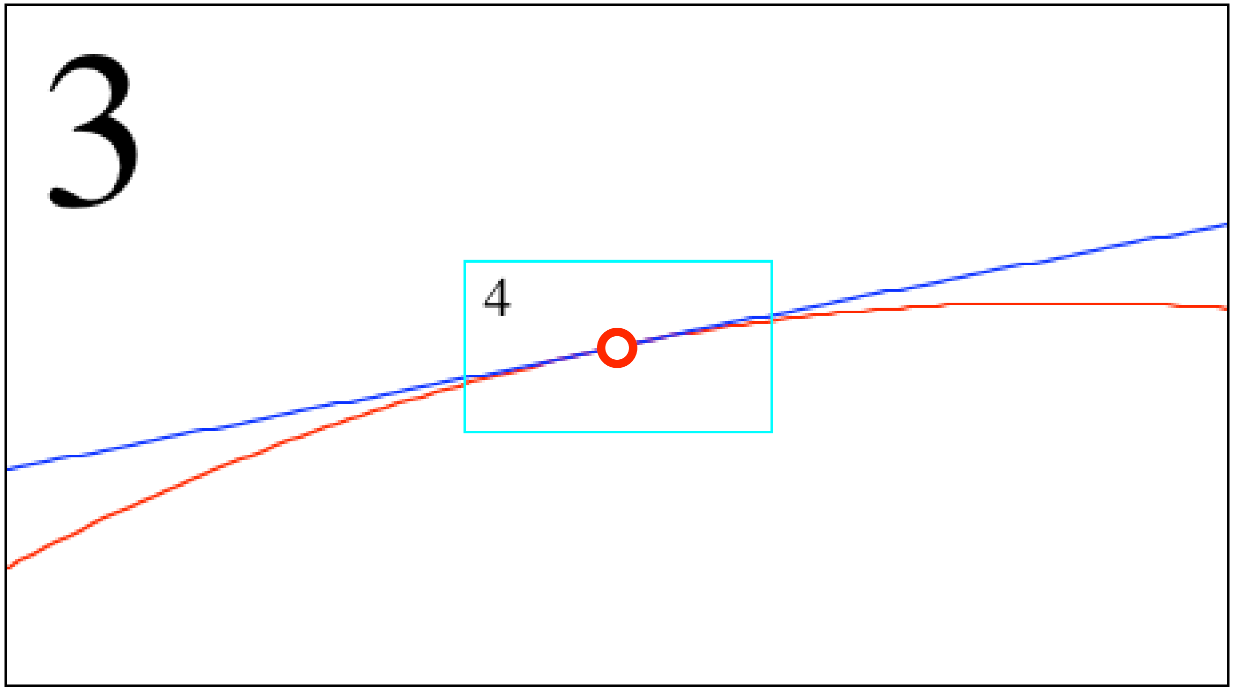
Lineare Approximation



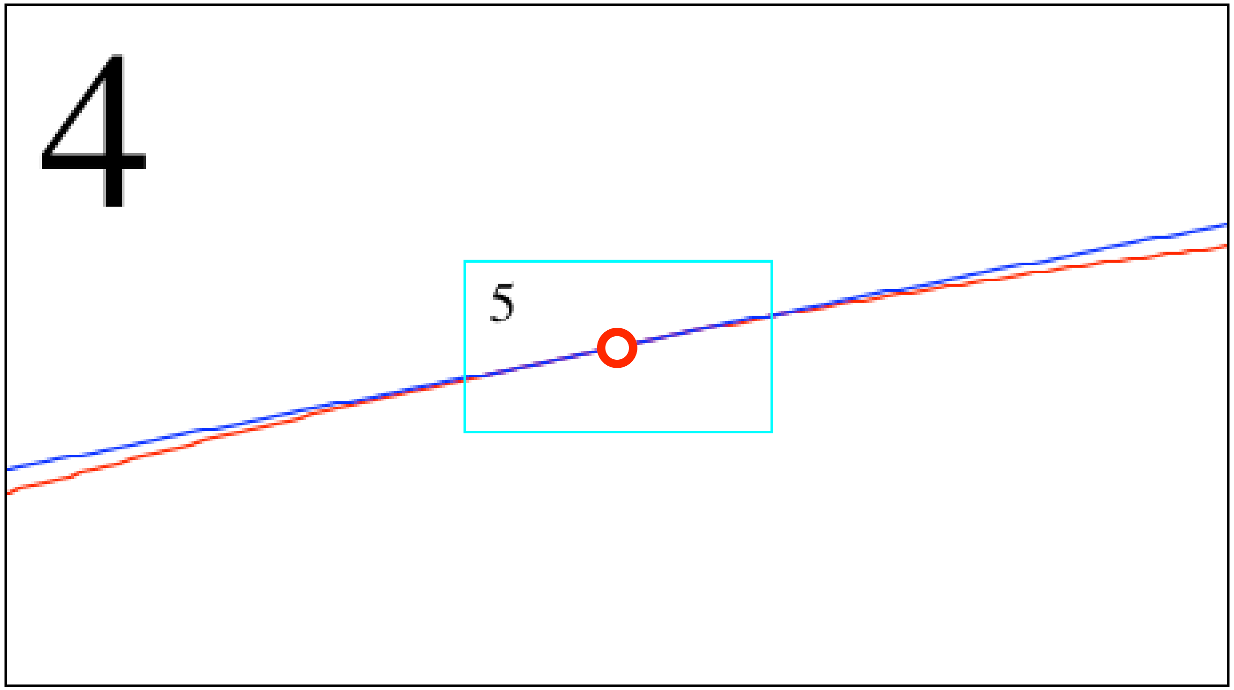
Zoom mit Faktor 4



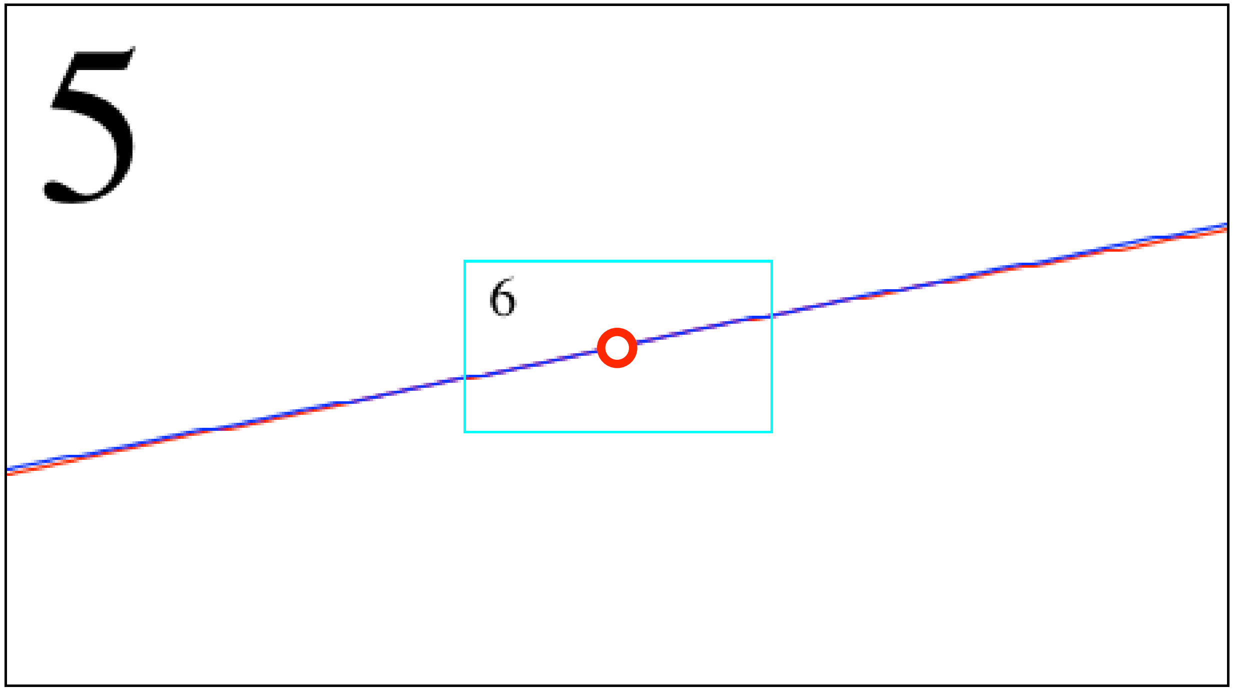
Zoom mit Faktor 4



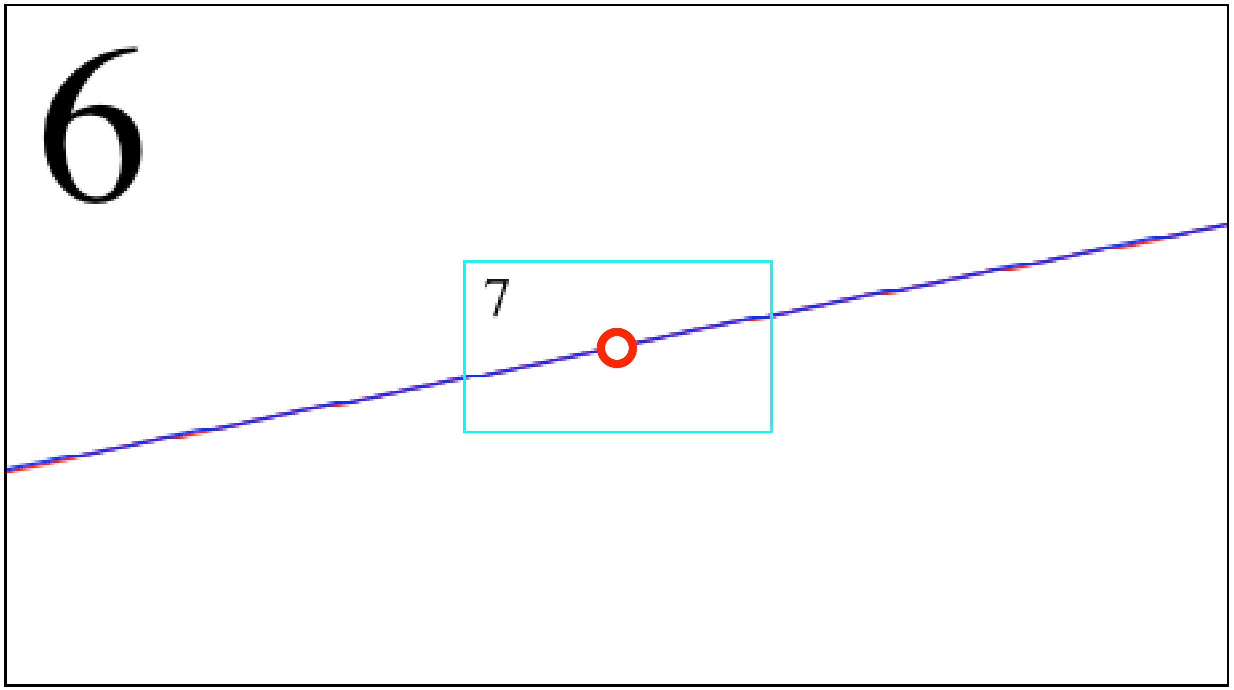
Zoom mit Faktor 4



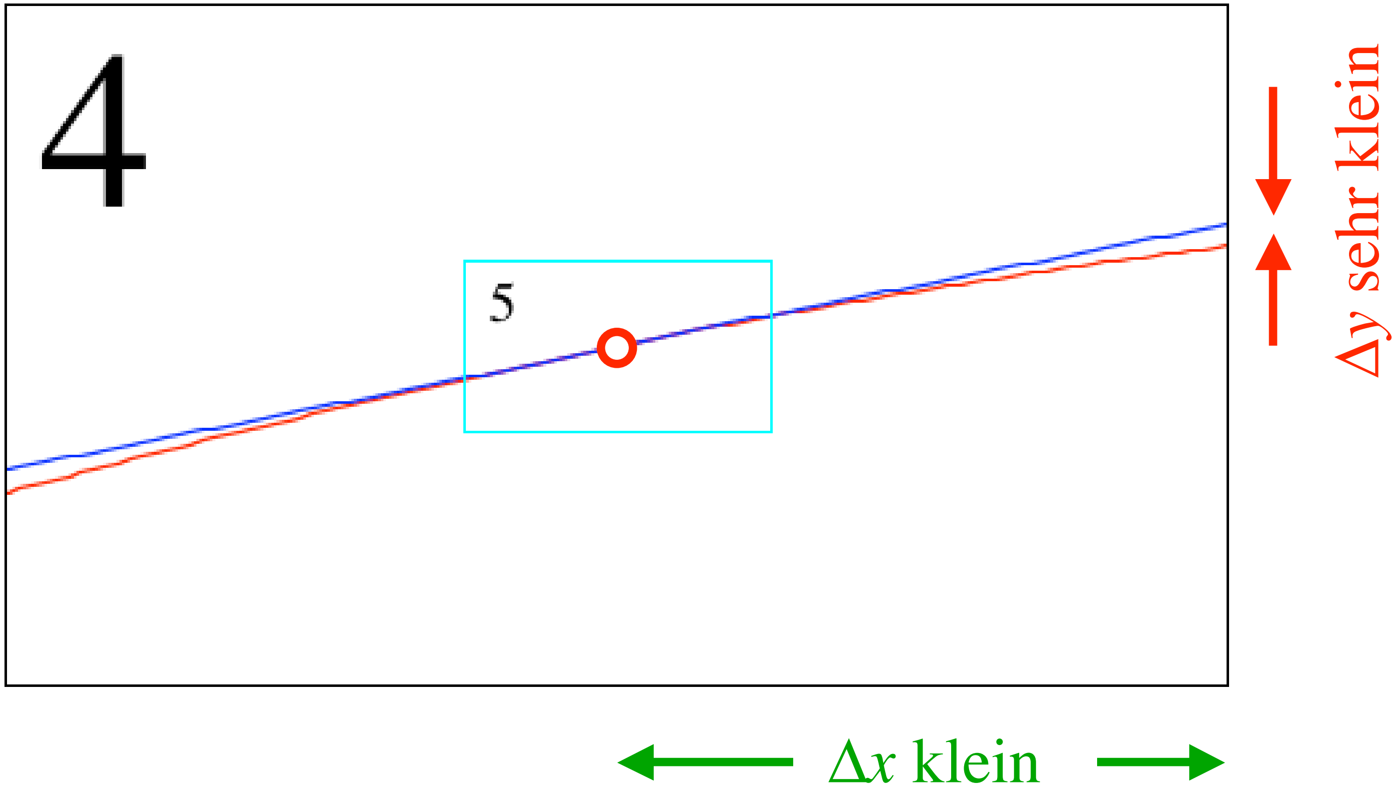
Zoom mit Faktor 4



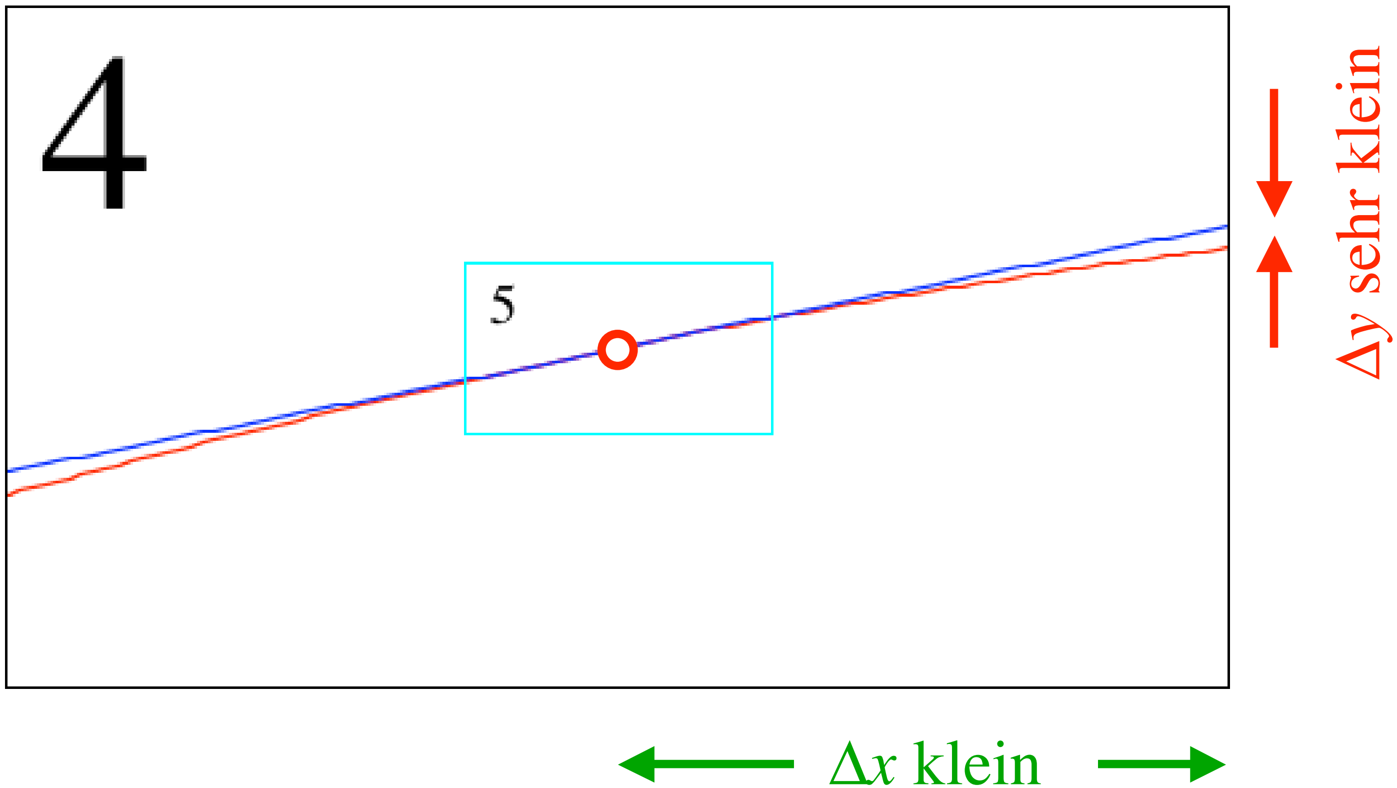
Zoom mit Faktor 4



Kurve und Tangente kaum mehr unterscheidbar


4
5
Δy sehr klein
Δx klein

Δy im Vergleich zu Δx „überproportional“ klein



Ein kleiner Riese

Ein großer Zwerg

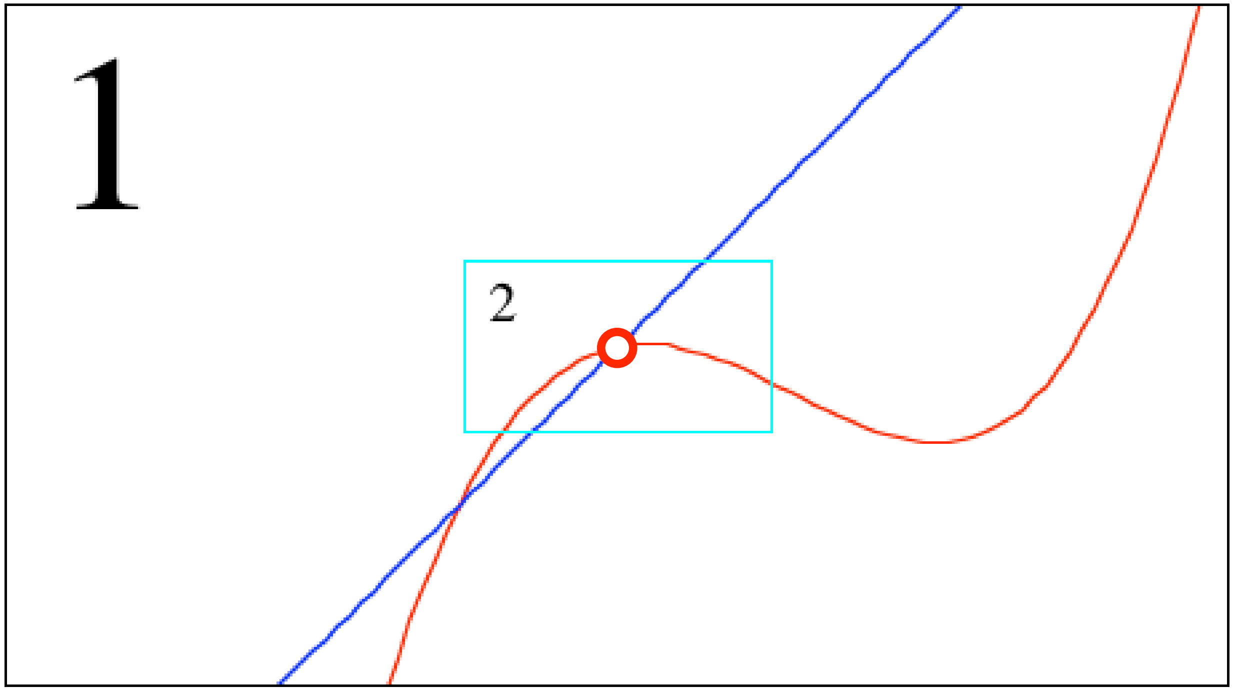
Wer ist größer?

Ableiten:

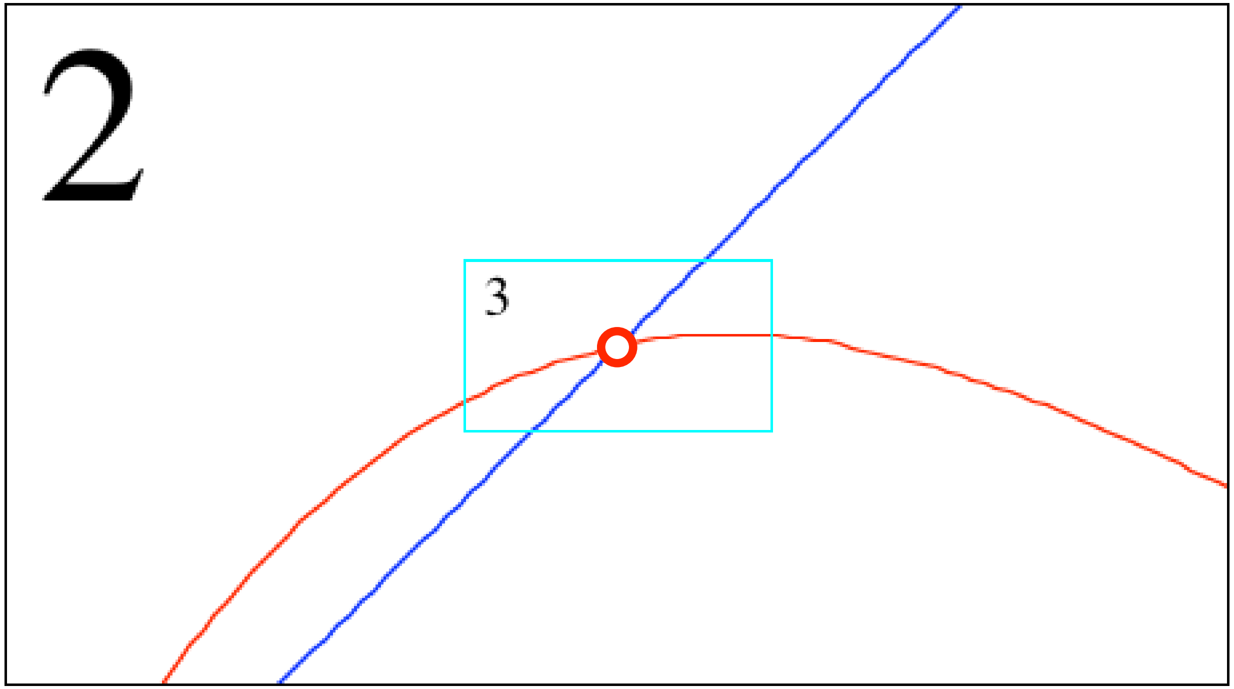
lokal linearisieren

an der Stelle x_0

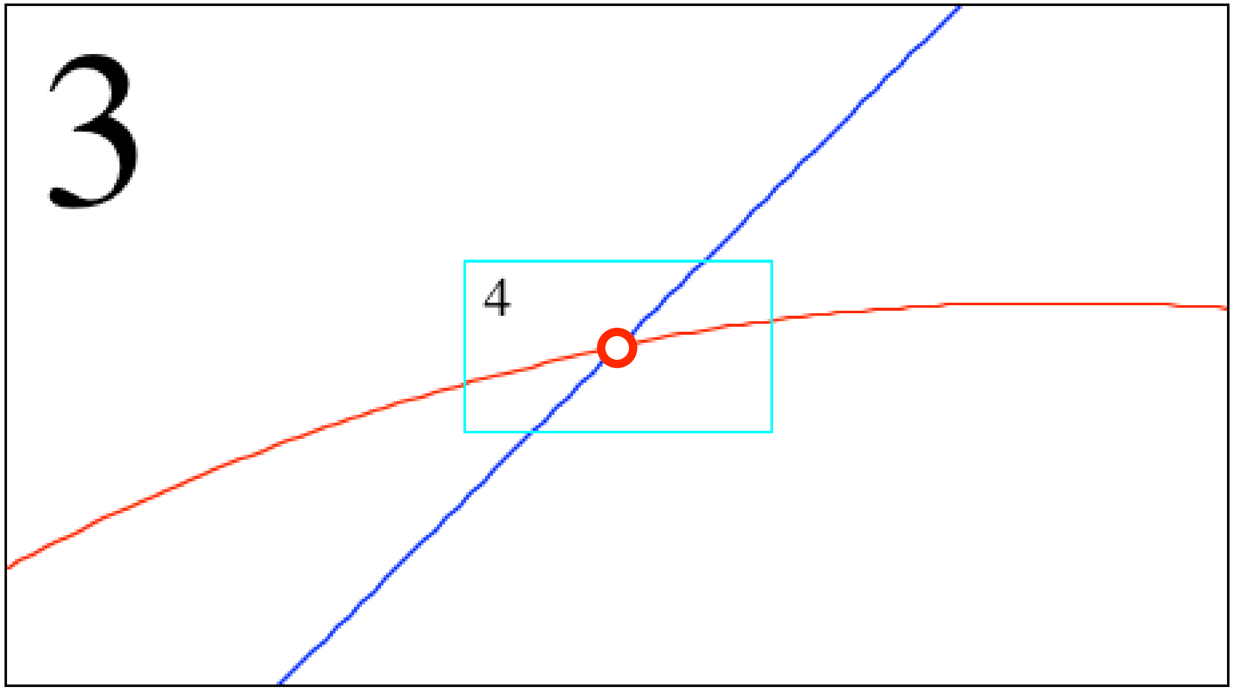
Gegenbeispiel: Keine Tangente



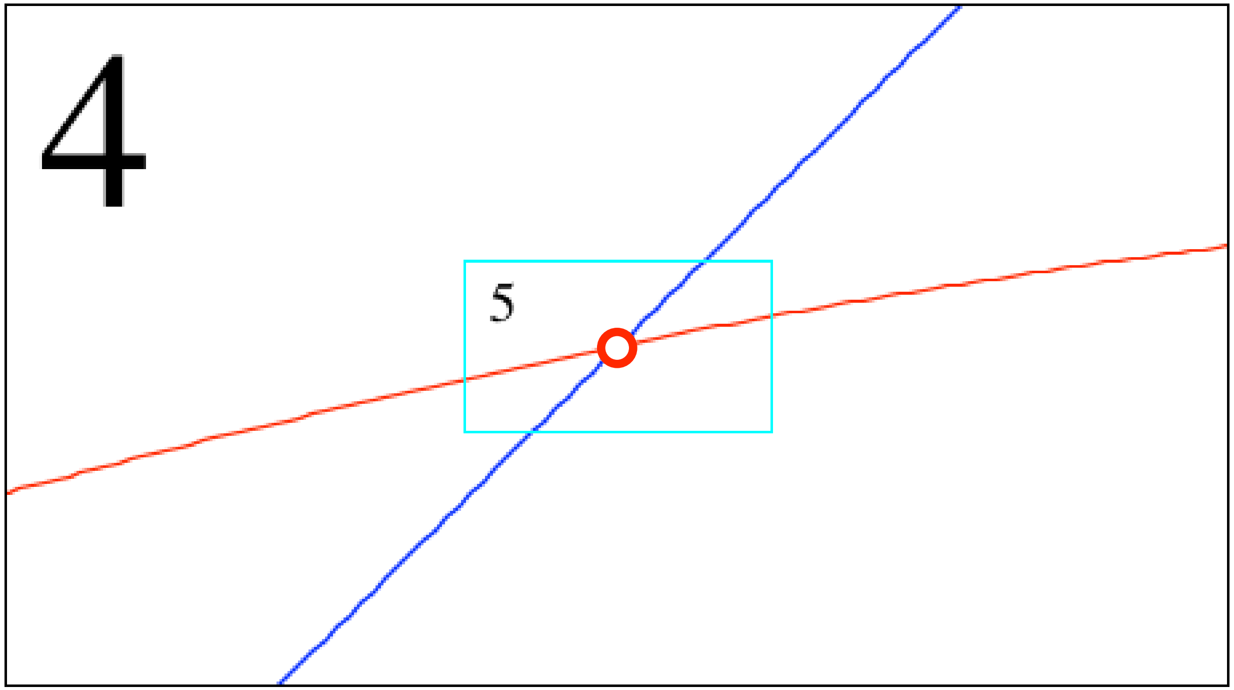
Zoom mit Faktor 4



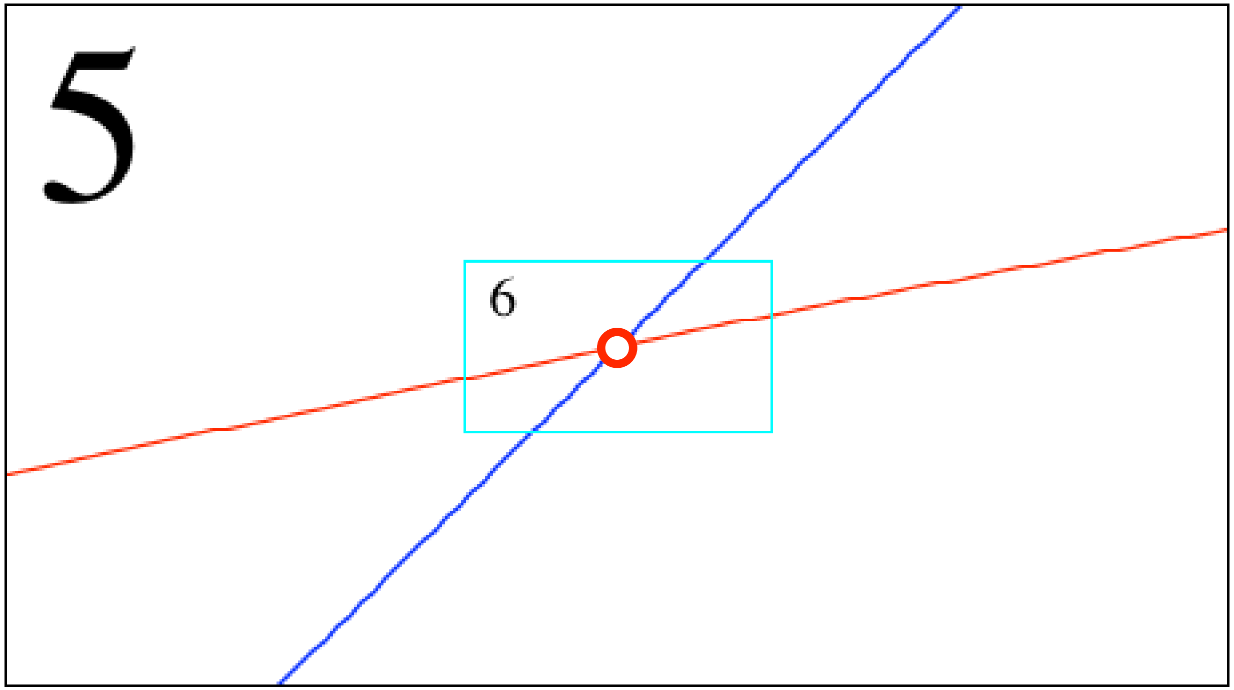
Zoom mit Faktor 4



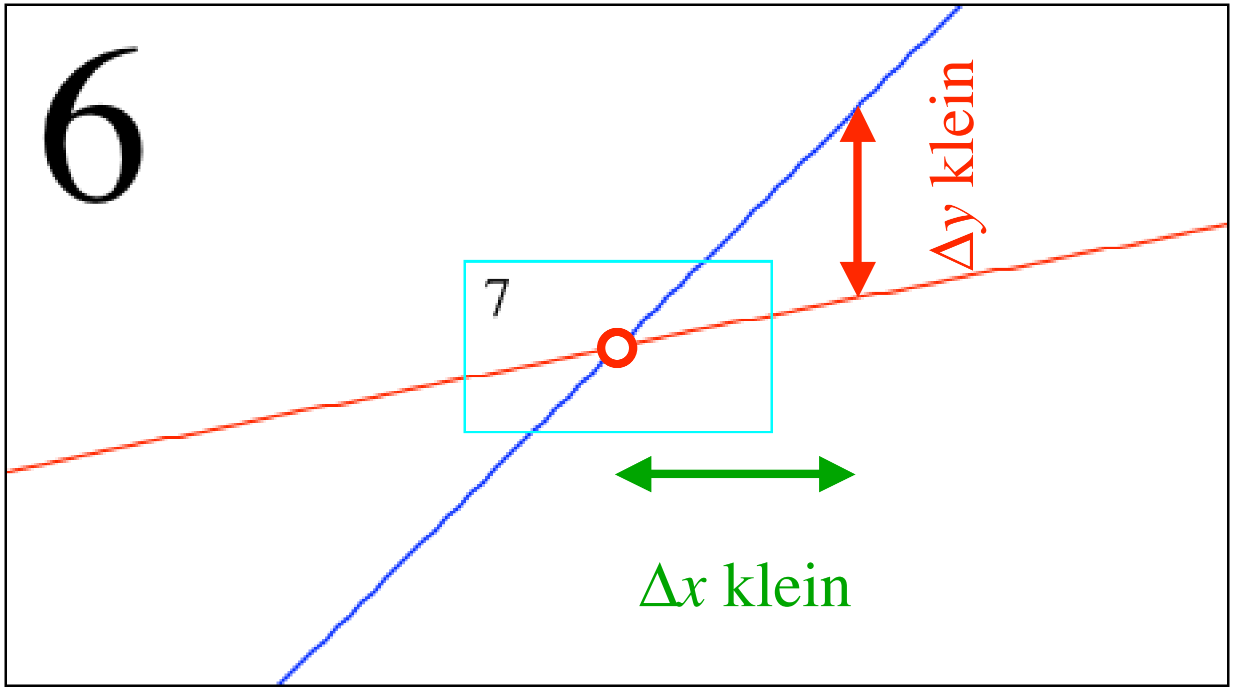
Zoom mit Faktor 4



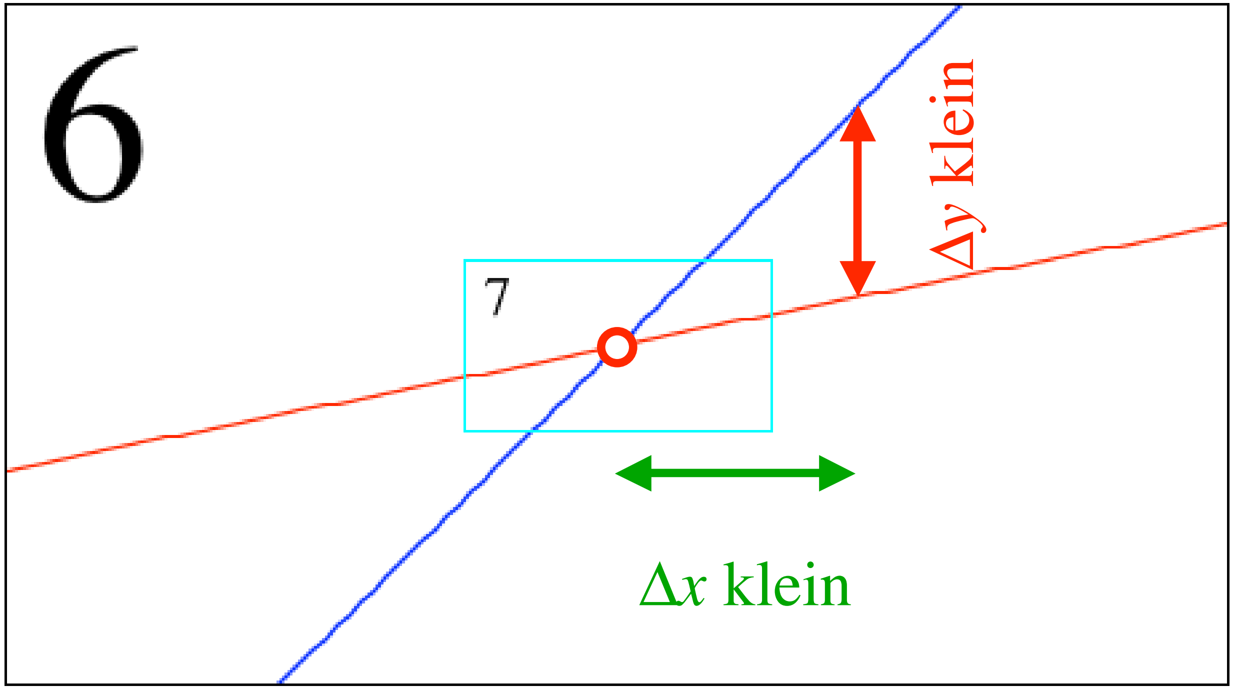
Zoom mit Faktor 4



Zoom mit Faktor 4



Zoom mit Faktor 4



Δy etwa proportional zu Δx

$\boxed{\text{Bestimmte, aber nicht spezielle Stelle}}$

Approximation in x_0

$f(x)$ gegebene Funktion

$\boxed{\text{Bestimmte, aber nicht spezielle Stelle}}$

Approximation in x_0

$f(x)$ gegebene Funktion

$l(x)$ lineare Funktion (Tangente)

$$l(x) = \underset{?}{\underset{\uparrow}{a}}\, x + \underset{?}{\underset{\uparrow}{b}}$$

a) $f\left(x_0\right) = l\left(x_0\right) = ax_0 + b$

Im Berührungspunkt stimmen die beiden Funktionen überein

a) $f(x_0) = l(x_0) = ax_0 + b$

$$\boxed{b = f(x_0) - ax_0}$$

a) $f\left(x_0\right)=l\left(x_0\right)=ax_0+b$

$$\boxed{b=f\left(x_0\right)-ax_0}$$

$$l\left(x\right)=ax+f\left(x_0\right)-ax_0$$

a) $f(x_0) = l(x_0) = ax_0 + b$

$$\boxed{b = f(x_0) - ax_0}$$

$$l(x) = ax + f(x_0) - ax_0$$

$$l(x) = f(x_0) + \underset{\underset{?}{\uparrow}}{a}(x - x_0)$$

b) $$f(x) - l(x) = f(x) - f(x_0) - a(x - x_0)$$

b) $$f(x)-l(x) = f(x)-f(x_0)-a(x-x_0)$$

$$= \left(\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}-a\right)(x-x_0)$$

b) $$f(x) - l(x) = f(x) - f(x_0) - a(x - x_0)$$

$$= \left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - a \right) \underbrace{(x - x_0)}_{\text{klein}}$$

b) $$\underbrace{f(x)-l(x)}_{\text{sehr klein}} = f(x)-f(x_0)-a(x-x_0)$$

$$=\left(\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}-a\right)\underbrace{(x-x_0)}_{\text{klein}}$$

b) $\underbrace{f(x) - l(x)}_{\text{sehr klein}} = f(x) - f(x_0) - a(x - x_0)$

$$= \left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - a \right) \underbrace{(x - x_0)}_{\text{klein}}$$

b) $$\underbrace{f(x) - l(x)}_{\text{sehr klein}} = f(x) - f(x_0) - a(x - x_0)$$

$$= \left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - a \right) \underbrace{(x - x_0)}_{\text{klein}}$$

b) $$\underbrace{f(x)-l(x)}_{\text{sehr klein}} = f(x)-f(x_0)-a(x-x_0)$$

$$= \left(\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} - a\right)\underbrace{(x-x_0)}_{\text{klein}}$$

$$\Rightarrow \quad \lim_{x\to x_0}\left(\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} - a\right) = 0$$

b) $$\underbrace{f(x)-l(x)}_{\text{sehr klein}} = f(x)-f(x_0)-a(x-x_0)$$

$$= \left(\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}-a\right)\underbrace{(x-x_0)}_{\text{klein}}$$

$$\Rightarrow \quad \lim_{x\to x_0}\left(\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}-a\right)=0$$

Tangentensteigung

$$\boxed{a=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}$$

$\boxed{\text{Bestimmte, aber nicht spezielle Stelle}}$

Ableitung von f an der Stelle x_0

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

$$l(x) = f(x_0) + a(x - x_0)$$

$$l(x) = f(x_0) + a(x - x_0)$$

$$\Downarrow$$

$$l(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

$$l(x) = f(x_0) + a(x - x_0)$$

$$\Downarrow$$

$$l(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

Lineare Approximation

$$\boxed{f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)}$$

Beispiel

$$f(x) = x^2$$

$$\boxed{f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)}$$

Beispiel

$f(x) = x^2$ Berührstelle $x_0 = 0.4$

$$\boxed{f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)}$$

Beispiel

$f(x) = x^2$ Berührstelle $x_0 = 0.4$

$$f(x) = x^2$$

$$f'(x) = 2x$$

$$\boxed{f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)}$$

Beispiel

$f(x) = x^2$ Berührstelle $x_0 = 0.4$

$$f(x) = x^2 \quad \Rightarrow \quad f(0.4) = 0.4^2 = 0.16$$

$$f'(x) = 2x \quad \Rightarrow \quad f'(0.4) = 2 \cdot 0.4 = 0.8$$

$$\boxed{f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)}$$

Beispiel

$f(x) = x^2$ Berührstelle $x_0 = 0.4$

$$f(x) = x^2 \quad \Rightarrow \quad f(0.4) = 0.4^2 = 0.16$$

$$f'(x) = 2x \quad \Rightarrow \quad f'(0.4) = 2 \cdot 0.4 = 0.8$$

$$l(x) = 0.16 + 0.8(x - 0.4)$$

$$l(x) = 0.16 + 0.8x - 0.32$$

$$l(x) = 0.8x - 0.16$$

$$\boxed{f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)}$$

Beispiel

$f(x) = x^2$ Berührstelle $x_0 = 0.4$

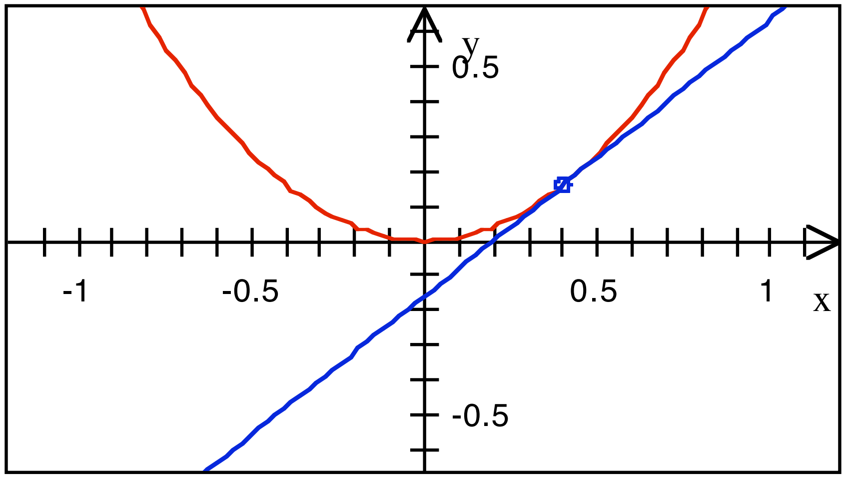
$$f(x) = x^2 \quad \Rightarrow \quad f(0.4) = 0.4^2 = 0.16$$

$$f'(x) = 2x \quad \Rightarrow \quad f'(0.4) = 2 \cdot 0.4 = 0.8$$

$$l(x) = 0.16 + 0.8(x - 0.4)$$

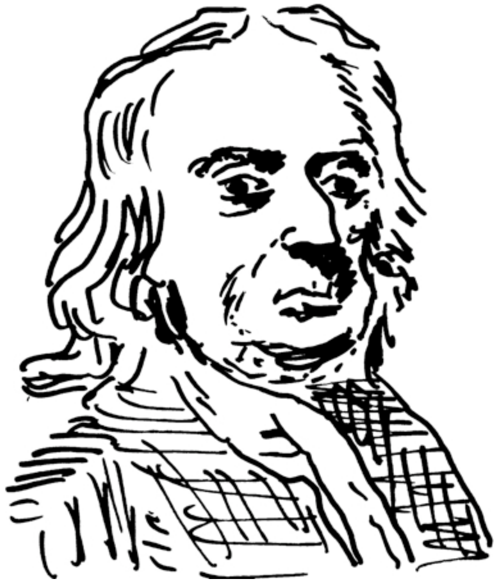
$$l(x) = 0.16 + 0.8x - 0.32$$

$$l(x) = 0.8x - 0.16$$



Verschiedene Schreibweisen für die Ableitung

$$\underbrace{f'(x_0)}_{\text{NEWTON}} = \underbrace{\left.\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0} = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x_0)}_{\text{LEIBNIZ}}$$



Isaac Newton

1643 - 1727

Gottfried Wilhelm von Leibniz

1646 - 1716

Schreibweisen

$$\Delta x = x - x_0 \quad \Rightarrow \quad x = x_0 + \Delta x$$

Schreibweisen

$$\Delta x = x - x_0 \quad \Rightarrow \quad x = x_0 + \Delta x$$

$$\Delta y = \Delta f = f(x) - f\left(x_0\right) = f\left(x_0 + \Delta x\right) - f\left(x_0\right) = y - y_0$$

Schreibweisen

$$\Delta x = x - x_0 \quad \Rightarrow \quad x = x_0 + \Delta x$$

$$\Delta y = \Delta f = f(x) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = y - y_0$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Differenzenquotient (ohne Limes)

Schreibweisen

$$\Delta x = x - x_0 \quad \Rightarrow \quad x = x_0 + \Delta x$$

$$\Delta y = \Delta f = f(x) - f\left(x_0\right) = f\left(x_0 + \Delta x\right) - f\left(x_0\right) = y - y_0$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x) - f\left(x_0\right)}{x - x_0} = \frac{f\left(x_0 + \Delta x\right) - f\left(x_0\right)}{\Delta x} = \frac{f\left(x_0 + h\right) - f\left(x_0\right)}{h}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f\left(x_0\right)}{x - x_0}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f\left(x_0 + \Delta x\right) - f\left(x_0\right)}{\Delta x} = \lim_{h \to 0} \frac{f\left(x_0 + h\right) - f\left(x_0\right)}{h}$$

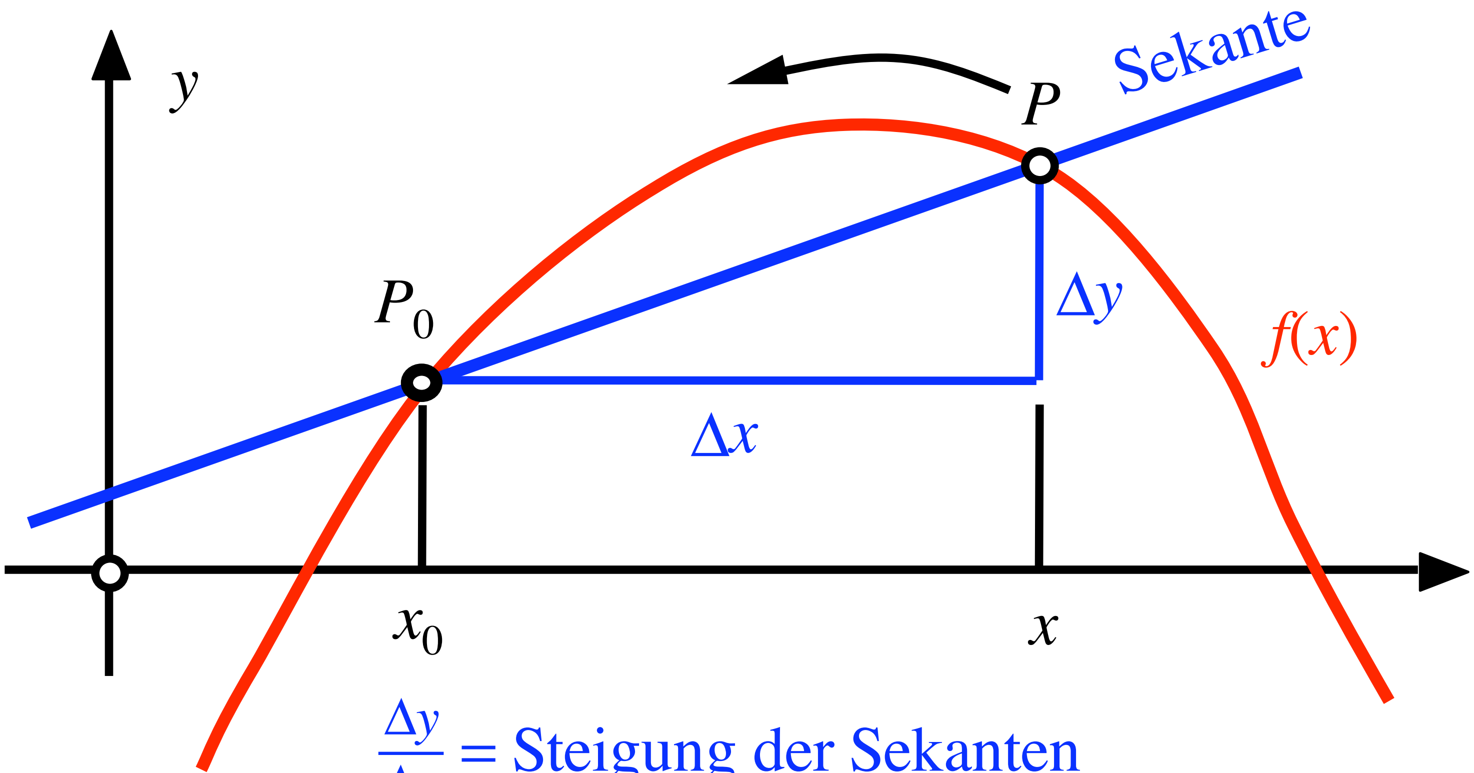
Differenzialquotient (mit Limes)

Geometrie

Steigung 12%

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 0.12$$

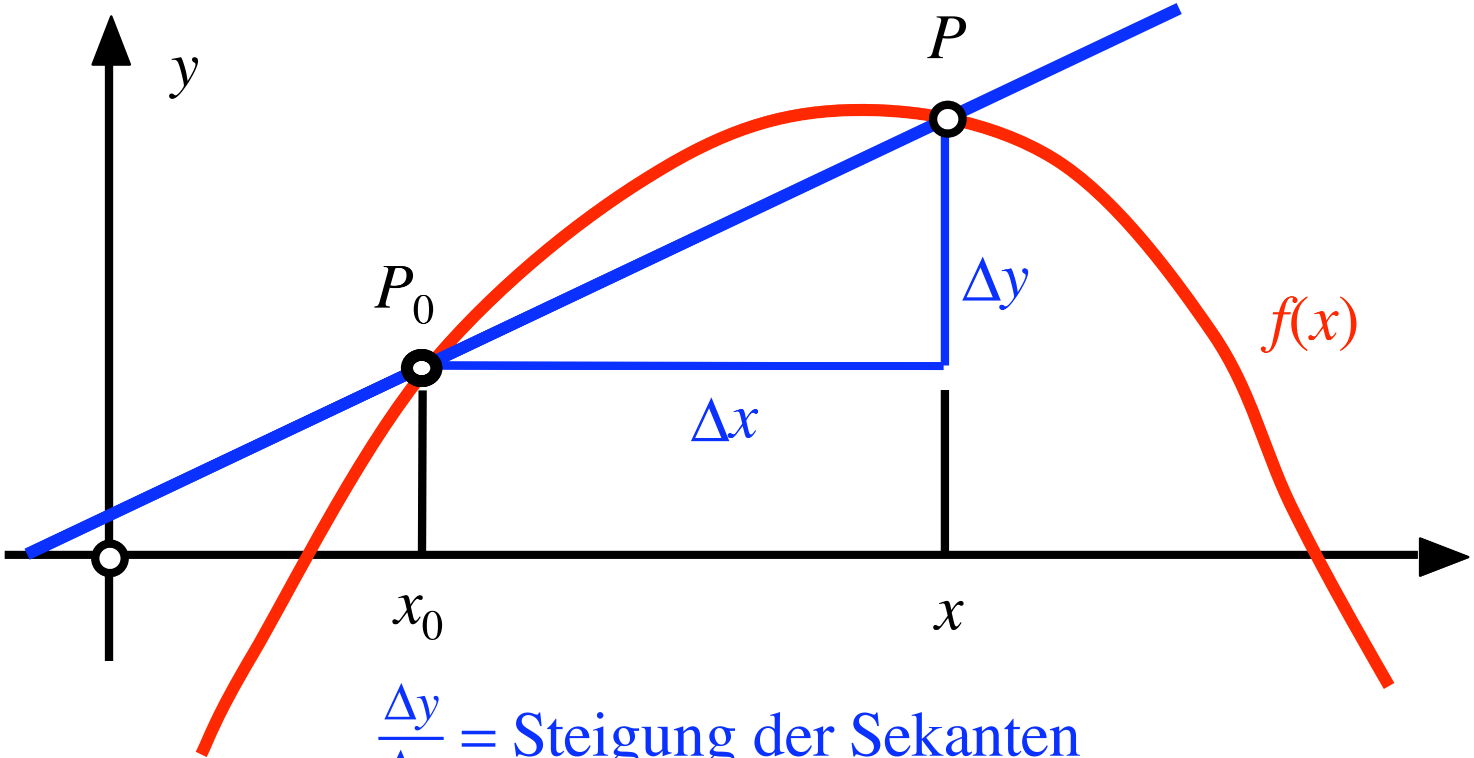
Geometrie



$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \text{Steigung der Sekanten}$$

$$\text{Tangente} = \lim_{P \to P_0} (\text{Sekante})$$

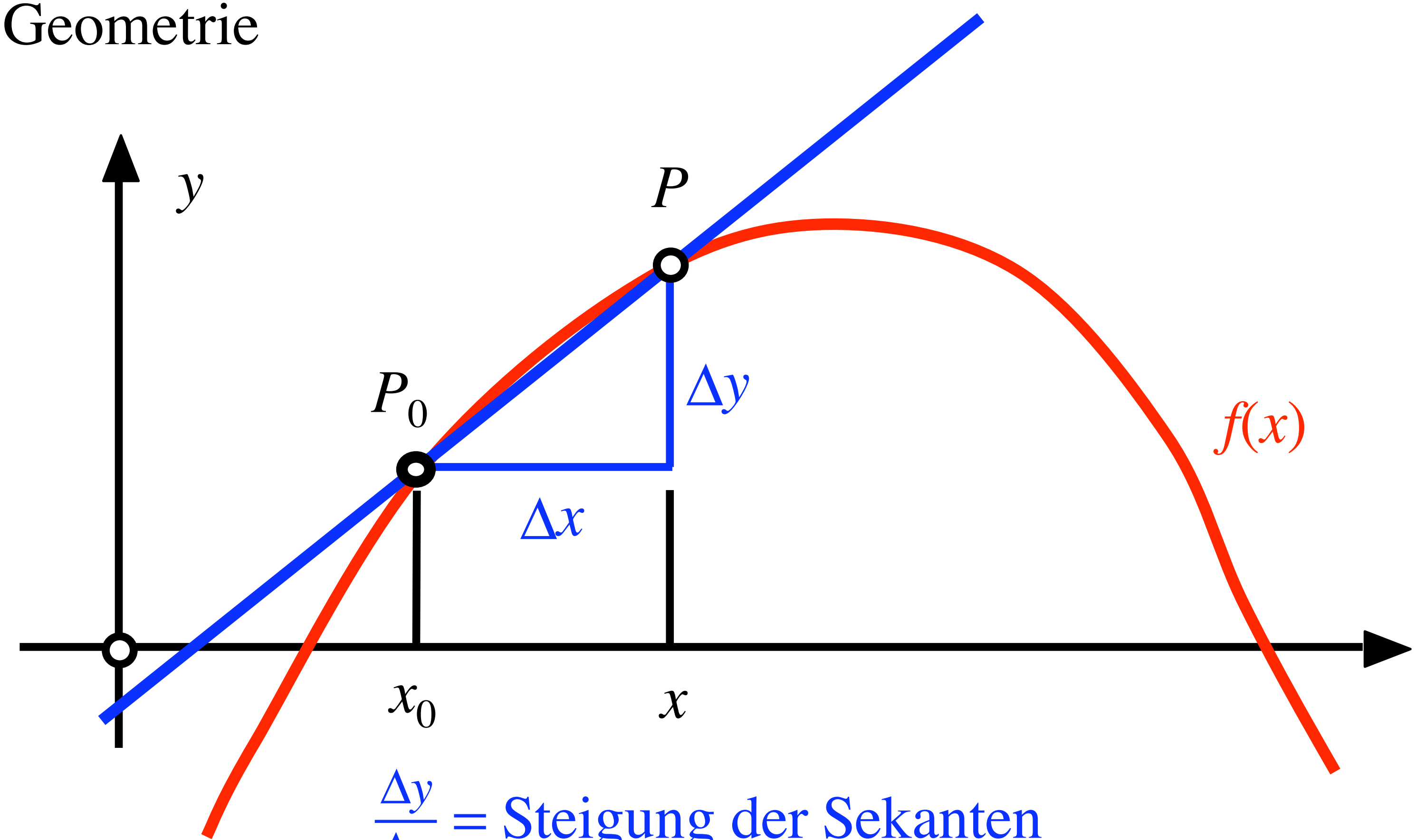
Geometrie



$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \text{Steigung der Sekanten}$$

$$\text{Tangente} = \lim_{P \to P_0} (\text{Sekante})$$

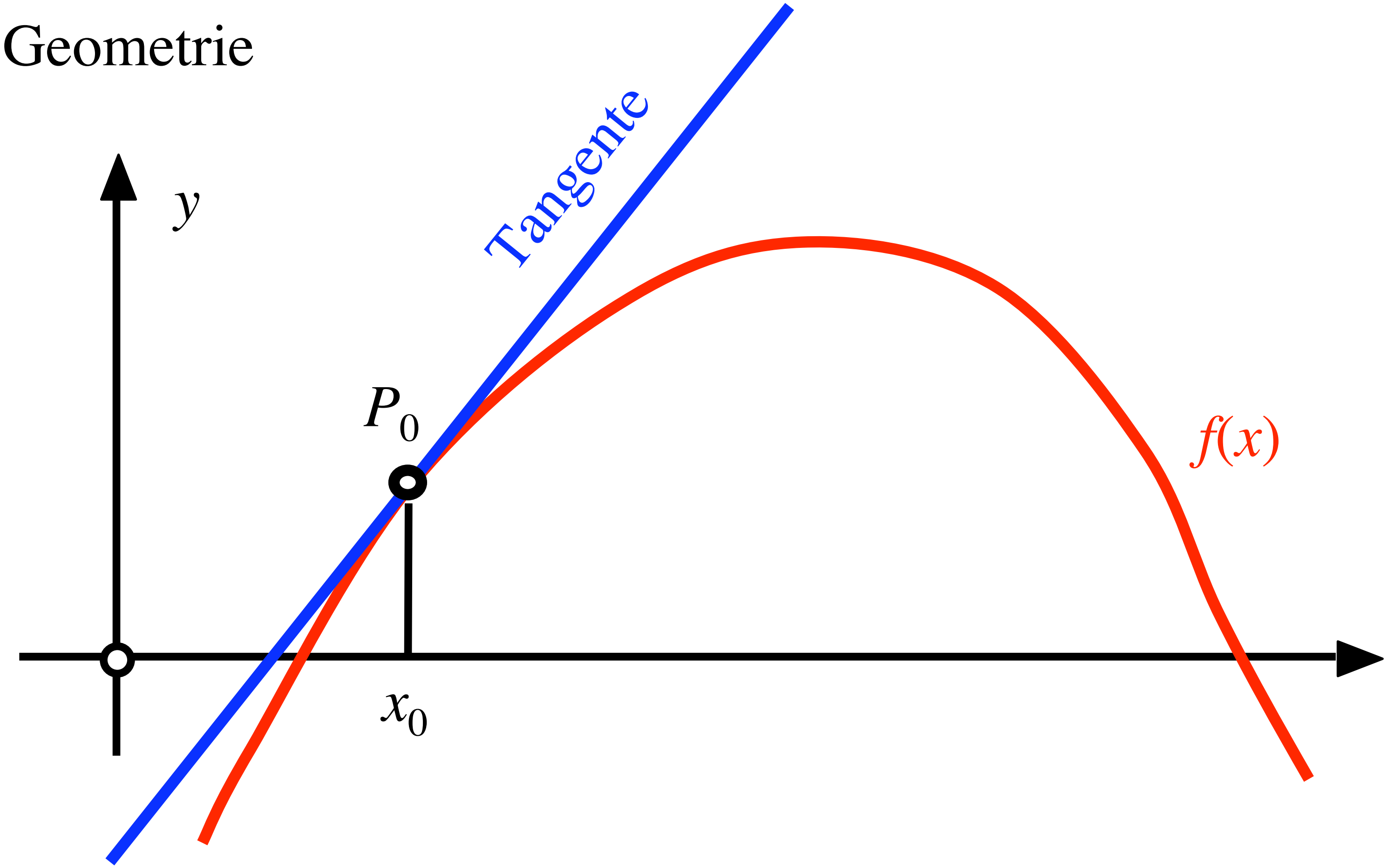
Geometrie



$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \text{Steigung der Sekanten}$$

$$\text{Tangente} = \lim_{P \to P_0} (\text{Sekante})$$

Geometrie



$$\text{Tangentensteigung} = \lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right) = \lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}\right) = f'(x_0)$$

Physik

Von Null
auf Hundertachtzig
in zehn Sekunden

$$s(t)$$

Weg Zeit

$$\Delta s = s(t) - s(t_0)$$

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \text{Mittlere Geschwindigkeit im Zeitintervall } [t_0, t]$$

$$\Delta s = s(t) - s(t_0)$$

$\frac{\Delta s}{\Delta t}$ = Mittlere Geschwindigkeit im Zeitintervall $[t_0, t]$

$$v(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0} \left(\frac{\Delta s}{\Delta t}\right) = \lim_{\Delta t \to 0} \left(\frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0}\right) = s'(t_0)$$

Momentangeschwindigkeit zur Zeit t_0

Gruss von Newton

Das Spiel geht weiter

Geschwindigkeit $v(t)$

$$\Delta v = v(t) - v(t_0)$$

$$\frac{\Delta v}{\Delta t} = \text{Mittlere Beschleunigung im Zeitintervall } [t, t_0]$$

$$\Delta v = v(t) - v(t_0)$$

$$\frac{\Delta v}{\Delta t} = \text{Mittlere Beschleunigung im Zeitintervall } [t, t_0]$$

$$a(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0} \left(\frac{\Delta v}{\Delta t} \right) = \lim_{\Delta t \to 0} \left(\frac{v(t) - v(t_0)}{t - t_0} \right) = v'(t_0)$$

Momentanbeschleunigung zur Zeit (t_0)

Grüsse: Newton / Galilei

Galileo Galilei

∗ 15. Februar 1564 in Pisa

+ 8. Januar 1642 in Arcetri bei Florenz

Eppur si muova.

Se non e vero,
e ben trovato.

Geht das Spiel weiter?

Beschleunigung $a(t)$

Änderung der Beschleunigung?

Noch mehr Schreibweisen

Erste Ableitung (Geschwindigkeit)

$$s'(t) = v(t)$$

$$\dot{s}(t) = v(t)$$

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}s(t) = v(t)$$

Noch mehr Schreibweisen

Zweite Ableitung (Beschleunigung)

$$s''(t) = v'(t) = a(t)$$

$$\ddot{s}(t) = \dot{v}(t) = a(t)$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2}(t) = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} s(t) = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}(t) = a(t)$$

Differenzierbarkeit

f heißt differenzierbar an der Stelle x_0, falls

$$\lim_{x \to x_0} \left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right)$$

existiert, unabhängig davon, wie $x \to x_0$ geht.

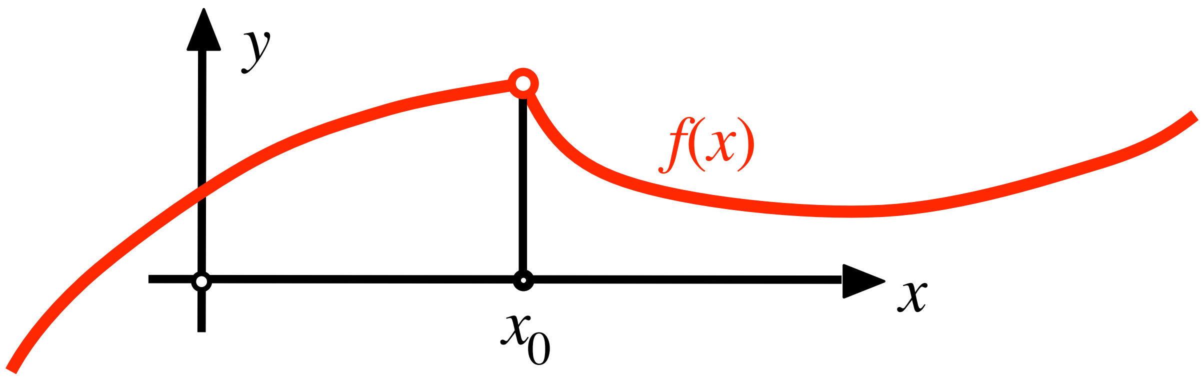
Schreibweisen:

$$f'\left(x_0\right) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f\left(x_0\right)}{x - x_0}$$

$$f'\left(x_0\right) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f\left(x_0 + \Delta x\right) - f\left(x_0\right)}{\Delta x}$$

$$f'\left(x_0\right) = \lim_{h \to 0} \frac{f\left(x_0 + h\right) - f\left(x_0\right)}{h}$$

Gegenbeispiel:



Nicht differenzierbar an der Stelle x_0 (sonst schon)

f heißt (global) differenzierbar,
wenn es an allen Stellen differenzierbar ist.

(alle Stellen im Definitionsbereich)

Exempla gratia

$$(1) \qquad f(x) = c \qquad \Rightarrow \qquad f'(x) = 0$$

$$(2) \qquad f(x) = x^3 \qquad \Rightarrow \qquad f'(x) = 3x^2$$

$$(3) \qquad f(x) = \sin(x) \qquad \Rightarrow \qquad f'(x) = \cos(x)$$

$$f(x) = c = \text{ constant}$$

Es tut sich nichts beim y

$$\Delta y = \Delta f = 0 \quad \Rightarrow \quad f'(x_0) = 0 \text{ für alle } x_0$$

$$f(x) = x^3$$

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x_0+\Delta x)^3 - x_0^3}{\Delta x}$$

Problem: $\Delta x \to 0$ führt zu $\dfrac{\text{Null}}{\text{Null}}$

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x_0 + \Delta x)^3 - x_0^3}{\Delta x}$$

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x_0+\Delta x)^3 - x_0^3}{\Delta x}$$

Nebenrechnung:

$$(x_0 + \Delta x)^3 = x_0^3 + 3x_0^2\Delta x + 3x_0\Delta x^2 + \Delta x^3$$

(Erweiterte) binomische Formel

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x_0 + \Delta x)^3 - x_0^3}{\Delta x}$$

Nebenrechnung:

$$(x_0 + \Delta x)^3 = x_0^3 + 3x_0^2 \Delta x + 3x_0 \Delta x^2 + \Delta x^3$$

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x_0^3 + 3x_0^2 \Delta x + 3x_0 \Delta x^2 + \Delta x^3 - x_0^3}{\Delta x}$$

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x_0 + \Delta x)^3 - x_0^3}{\Delta x}$$

Nebenrechnung:

$$(x_0 + \Delta x)^3 = x_0^3 + 3x_0^2 \Delta x + 3x_0 \Delta x^2 + \Delta x^3$$

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cancel{x_0^3} + 3x_0^2 \Delta x + 3x_0 \Delta x^2 + \Delta x^3 - \cancel{x_0^3}}{\Delta x}$$

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x_0 + \Delta x)^3 - x_0^3}{\Delta x}$$

Nebenrechnung:

$$(x_0 + \Delta x)^3 = x_0^3 + 3x_0^2 \Delta x + 3x_0 \Delta x^2 + \Delta x^3$$

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cancel{x_0^3} + 3x_0^2 \cancel{\Delta x} + 3x_0 \Delta x^{\cancel{2}} + \Delta x^{\overset{2}{\cancel{3}}} - \cancel{x_0^3}}{\cancel{\Delta x}}$$

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x_0+\Delta x)^3 - x_0^3}{\Delta x}$$

Nebenrechnung:

$$(x_0 + \Delta x)^3 = x_0^3 + 3x_0^2 \Delta x + 3x_0 \Delta x^2 + \Delta x^3$$

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cancel{x_0^3} + 3x_0^2 \cancel{\Delta x} + 3x_0 \Delta x^{\cancel{2}} + \Delta x^{\overset{2}{\cancel{3}}} - \cancel{x_0^3}}{\cancel{\Delta x}}$$

Den Nenner sind wir los!

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x_0+\Delta x)^3 - x_0^3}{\Delta x}$$

Nebenrechnung:

$$(x_0 + \Delta x)^3 = x_0^3 + 3x_0^2\Delta x + 3x_0\Delta x^2 + \Delta x^3$$

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cancel{x_0^3} + 3x_0^2\cancel{\Delta x} + 3x_0\Delta x^{\cancel{2}} + \Delta x^{\cancel{3}\,2} - \cancel{x_0^3}}{\cancel{\Delta x}}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0}\left(3x_0^2 + 3x_0\Delta x + \Delta x^2\right) =$$

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x_0 + \Delta x)^3 - x_0^3}{\Delta x}$$

Nebenrechnung:

$$(x_0 + \Delta x)^3 = x_0^3 + 3x_0^2 \Delta x + 3x_0 \Delta x^2 + \Delta x^3$$

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cancel{x_0^3} + 3x_0^2 \cancel{\Delta x} + 3x_0 \Delta x^{\cancel{2}} + \Delta x^{\overset{2}{\cancel{3}}} - \cancel{x_0^3}}{\cancel{\Delta x}}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \left(3x_0^2 + 3x_0 \Delta x + \Delta x^2 \right) = 3x_0^2$$

Bestimmte, aber nicht spezielle Stelle

$$f'(x_0) = 3x_0^2$$

Allgemein: $f(x) = x^3 \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 3x^2$

Potenzfunktion

$$f(x) = x^n \qquad \Rightarrow \qquad f'(x) = nx^{n-1}$$

Potenzfunktion

$$f(x) = x^n \qquad \Rightarrow \qquad f'(x) = nx^{n-1}$$

Geht auch für gebrochene oder reelle Exponenten:

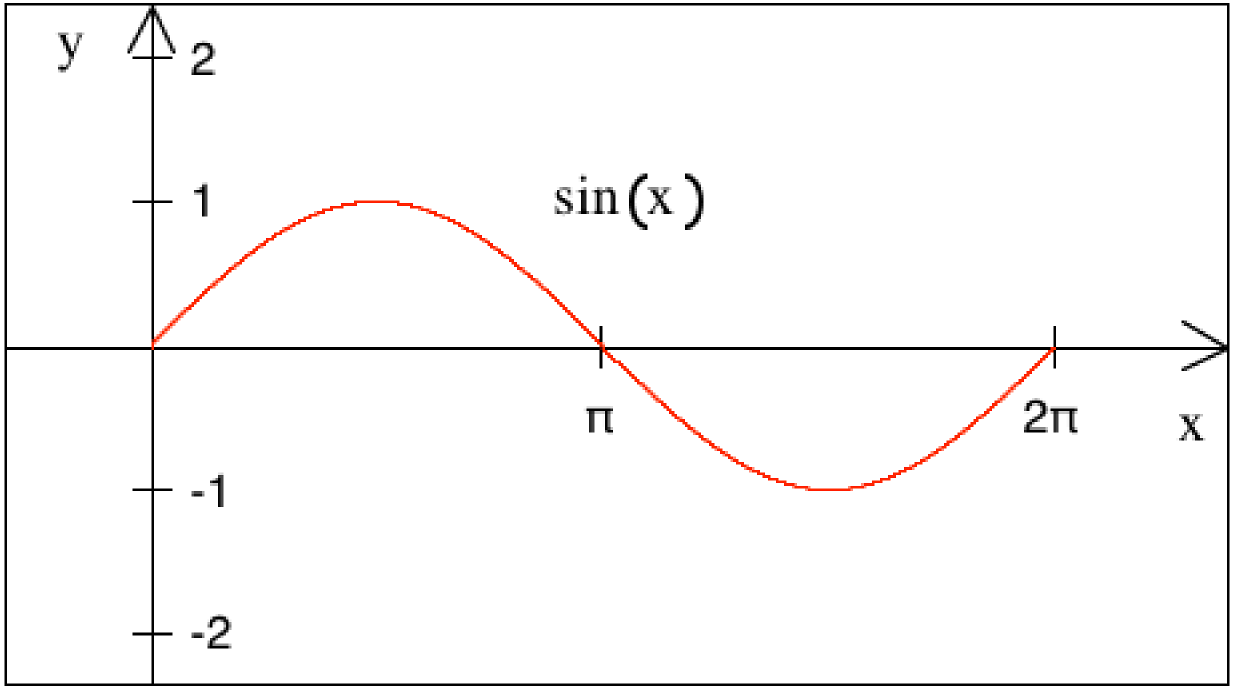
$$f(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}} \qquad \Rightarrow \qquad f'(x) = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Vorsicht: Exponentialfunktion (x steht oben)

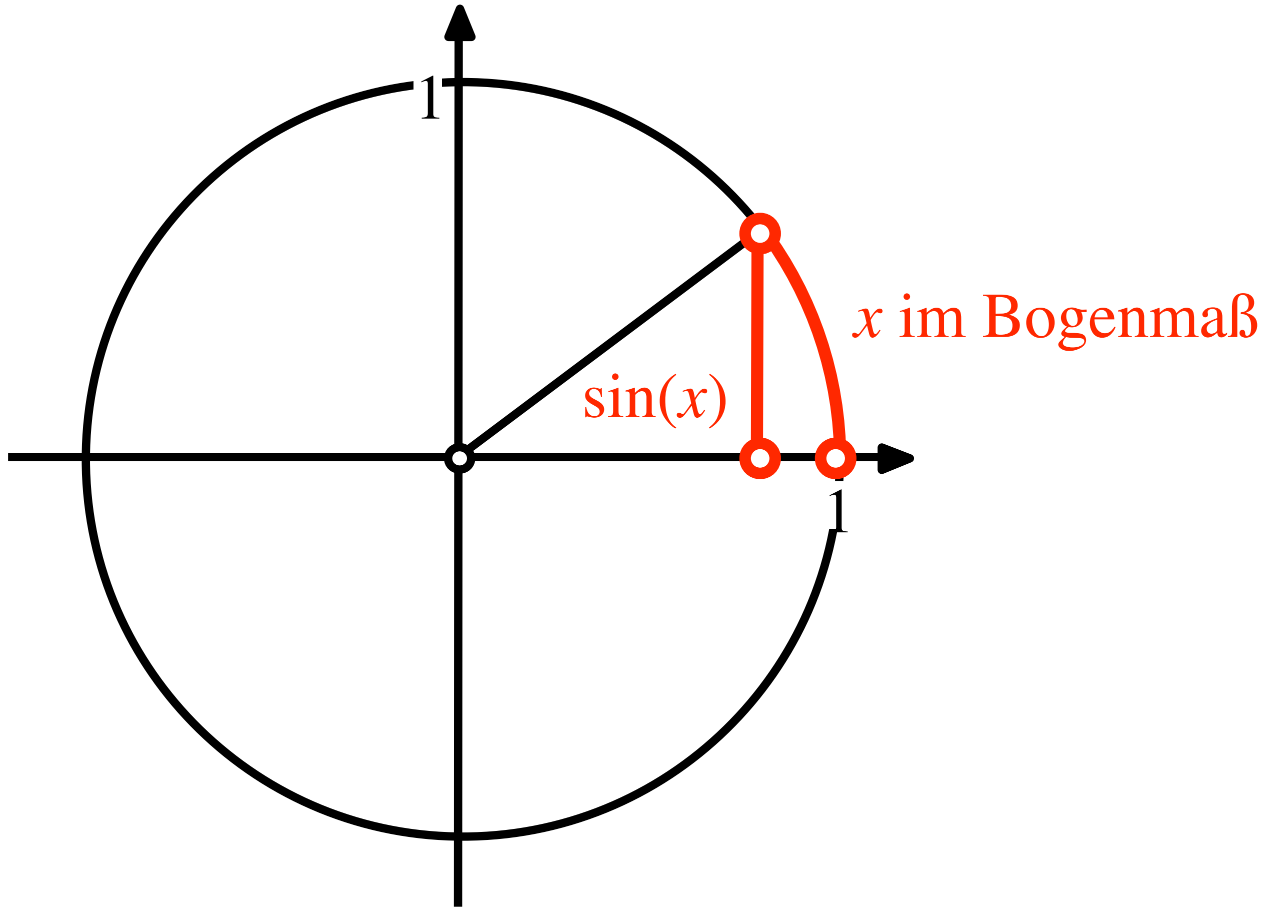
$$f(x) = a^x \qquad \Longrightarrow \qquad f'(x) = \ln(a)\, a^x$$

Herleitung später

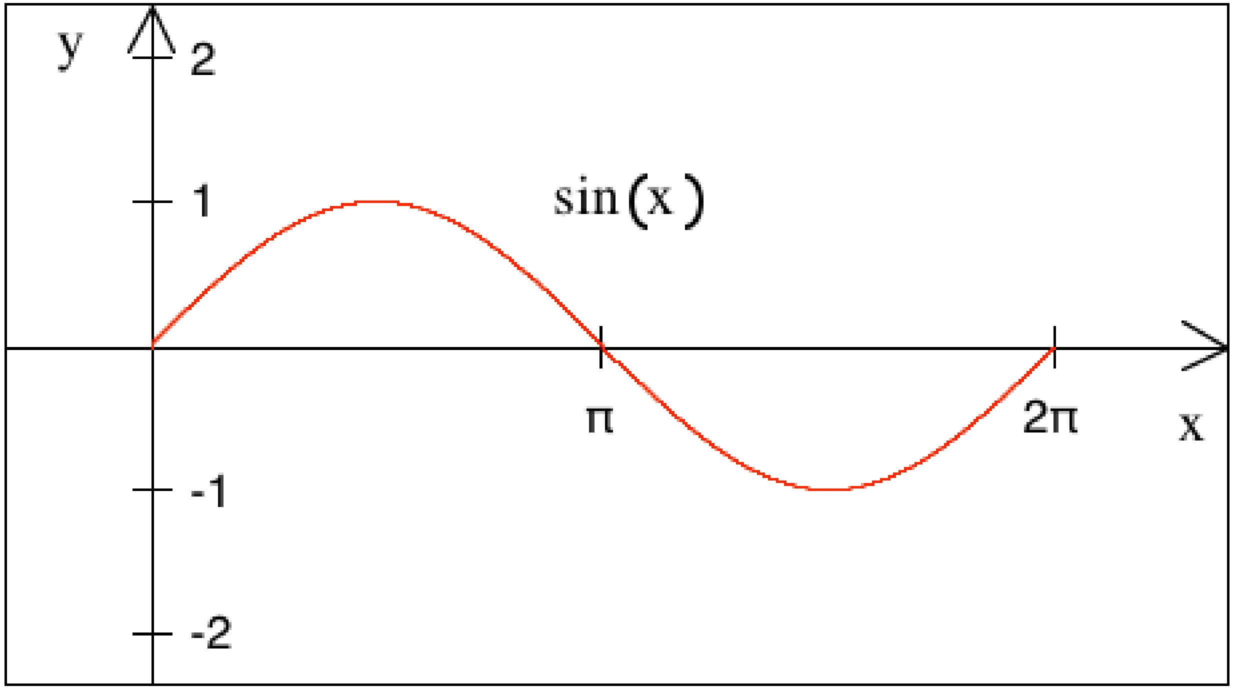
$$f(x) = \sin(x)$$



$$f(x) = \sin(x)$$

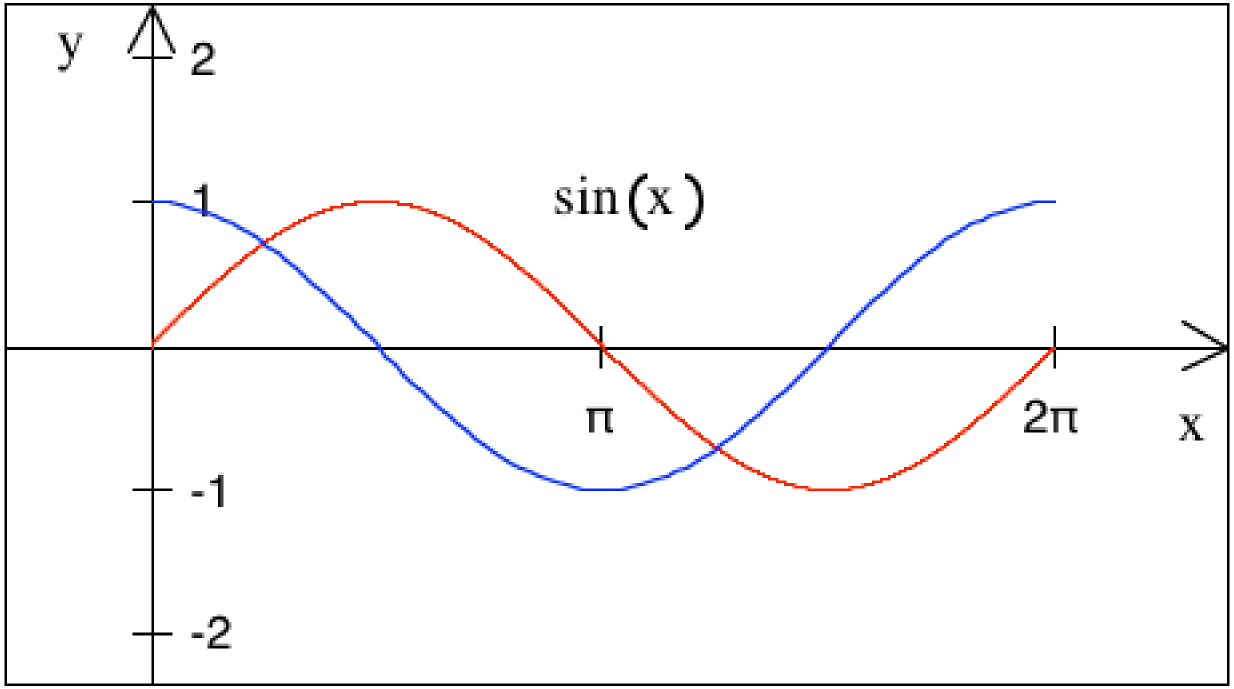


$$f(x) = \sin(x)$$



Wie verläuft die Steigung?

$$f(x) = \sin(x)$$



Wie verläuft die Steigung?

Ableitungen (ohne Beweis)

$$\left(\sin(x)\right)' = \cos(x)$$

x im Bogenmaß!!!

Ableitungen (ohne Beweis)

$$\left(\sin(x)\right)' = \cos(x)$$

x im Bogenmaß!!!

$$\left(\cos(x)\right)' = -\sin(x)$$

Vorsicht Minuszeichen

Ableitungen (ohne Beweis)

$$\left(\sin(x)\right)' = \cos(x)$$

x im Bogenmaß!!!

$$\left(\cos(x)\right)' = -\sin(x)$$

Vorsicht Minuszeichen

$$\left(e^{x}\right)' = e^{x}$$

Klon?

$$\left(\ln(x)\right)' = \frac{1}{x}$$

Rechenregeln

$$(f \pm g)' = f' \pm g' \quad \text{Summenregel}$$

$$(\lambda f)' = \lambda f' \quad \text{Zahl } \lambda \text{ mal Funktion } f$$

$$(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g' \quad \text{Produktregel}$$

$$\left(\frac{1}{g}\right)' = \frac{-g'}{g^2}$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2} \quad \text{Quotientenregel}$$

Nachweis der Produktregel

$$\big(f(x)\,g(x)\big)' =$$

Nachweis der Produktregel

$$\left(f(x)\,g(x)\right)' = \lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{f(x+\Delta x)g(x+\Delta x)-f(x)g(x)}{\Delta x}\right)$$

Nachweis der Produktregel

$$\left(f(x)g(x)\right)' = \lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{f(x+\Delta x)g(x+\Delta x)-f(x)g(x)}{\Delta x}\right)$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{f(x+\Delta x)g(x+\Delta x)-f(x)g(x+\Delta x)+f(x)g(x+\Delta x)-f(x)g(x)}{\Delta x}\right)$$

Hinausflicken Hineinflicken

Nachweis der Produktregel

$$\left(f(x)g(x)\right)' = \lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{f(x+\Delta x)g(x+\Delta x)-f(x)g(x)}{\Delta x}\right)$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{f(x+\Delta x)g(x+\Delta x)-f(x)g(x+\Delta x)+f(x)g(x+\Delta x)-f(x)g(x)}{\Delta x}\right)$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}g(x+\Delta x)+f(x)\frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}\right)$$

Nachweis der Produktregel

$$\begin{aligned}
\left(f(x)g(x)\right)' &= \lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{f(x+\Delta x)g(x+\Delta x)-f(x)g(x)}{\Delta x}\right)\\
&= \lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{f(x+\Delta x)g(x+\Delta x)-f(x)g(x+\Delta x)+f(x)g(x+\Delta x)-f(x)g(x)}{\Delta x}\right)\\
&= \lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}g(x+\Delta x)+f(x)\frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}\right)\\
&= \lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\right)\lim_{\Delta x \to 0}\left(g(x+\Delta x)\right)+f(x)\lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}\right)
\end{aligned}$$

Nachweis der Produktregel

$$
\begin{aligned}
\left(f(x)g(x)\right)' &= \lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{f(x+\Delta x)g(x+\Delta x)-f(x)g(x)}{\Delta x}\right)\\
&= \lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{f(x+\Delta x)g(x+\Delta x)-f(x)g(x+\Delta x)+f(x)g(x+\Delta x)-f(x)g(x)}{\Delta x}\right)\\
&= \lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}g(x+\Delta x)+f(x)\frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}\right)\\
&= \underbrace{\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\right)}_{f'(x)}\underbrace{\lim_{\Delta x\to 0}\left(g(x+\Delta x)\right)}_{g(x)}+f(x)\underbrace{\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}\right)}_{g'(x)}
\end{aligned}
$$

Nachweis der Produktregel

$$\big(f(x)g(x)\big)' = \lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{f(x+\Delta x)g(x+\Delta x)-f(x)g(x)}{\Delta x}\right)$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{f(x+\Delta x)g(x+\Delta x)-f(x)g(x+\Delta x)+f(x)g(x+\Delta x)-f(x)g(x)}{\Delta x}\right)$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}g(x+\Delta x)+f(x)\frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}\right)$$

$$= \underbrace{\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\right)}_{f'(x)}\underbrace{\lim_{\Delta x\to 0}\big(g(x+\Delta x)\big)}_{g(x)}+f(x)\underbrace{\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}\right)}_{g'(x)}$$

$$= f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$$

Beispiel zur Quotientenregel

$$\left(\tan(x)\right)' = \quad ?$$

Beispiel zur Quotientenregel

$$\left(\tan\left(x\right)\right)' = \left(\frac{\sin(x)}{\cos(x)}\right)'$$

Beispiel zur Quotientenregel

$$\left(\tan(x)\right)' = \underbrace{\left(\frac{\sin(x)}{\cos(x)}\right)' = \frac{\left(\sin(x)\right)'\cos(x) - \sin(x)\left(\cos(x)\right)'}{\cos^2(x)}}_{\text{Quotientenregel}}$$

Beispiel zur Quotientenregel

$$\left(\tan(x)\right)' = \left(\frac{\sin(x)}{\cos(x)}\right)' = \frac{\left(\sin(x)\right)'\cos(x) - \sin(x)\left(\cos(x)\right)'}{\cos^2(x)}$$

$$= \frac{\cos(x)\cos(x) - \sin(x)\left(-\sin(x)\right)}{\cos^2(x)}$$

Beispiel zur Quotientenregel

$$\big(\tan(x)\big)' = \left(\frac{\sin(x)}{\cos(x)}\right)' = \frac{\big(\sin(x)\big)'\cos(x) - \sin(x)\big(\cos(x)\big)'}{\cos^2(x)}$$

$$= \frac{\cos(x)\cos(x) - \sin(x)\big(-\sin(x)\big)}{\cos^2(x)}$$

$$= \frac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{\cos^2(x)}$$

Beispiel zur Quotientenregel

$$\left(\tan(x)\right)' = \left(\frac{\sin(x)}{\cos(x)}\right)' = \frac{\left(\sin(x)\right)'\cos(x) - \sin(x)\left(\cos(x)\right)'}{\cos^2(x)}$$

$$= \frac{\cos(x)\cos(x) - \sin(x)\left(-\sin(x)\right)}{\cos^2(x)}$$

$$= \frac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{\cos^2(x)} = \frac{\cos^2(x)}{\cos^2(x)} + \frac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)}$$

Beispiel zur Quotientenregel

$$\left(\tan(x)\right)' = \left(\frac{\sin(x)}{\cos(x)}\right)' = \frac{\left(\sin(x)\right)'\cos(x) - \sin(x)\left(\cos(x)\right)'}{\cos^2(x)}$$

$$= \frac{\cos(x)\cos(x) - \sin(x)\left(-\sin(x)\right)}{\cos^2(x)}$$

$$= \frac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{\cos^2(x)} = \frac{\cos^2(x)}{\cos^2(x)} + \frac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$$

Beispiel zur Quotientenregel

$$\left(\tan(x)\right)' = \left(\frac{\sin(x)}{\cos(x)}\right)' = \frac{\left(\sin(x)\right)'\cos(x) - \sin(x)\left(\cos(x)\right)'}{\cos^2(x)}$$

$$= \frac{\cos(x)\cos(x) - \sin(x)\left(-\sin(x)\right)}{\cos^2(x)}$$

$$= \frac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{\cos^2(x)} = \frac{\cos^2(x)}{\cos^2(x)} + \frac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$$

$$= \frac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{\cos^2(x)} = \frac{1}{\cos^2(x)}$$

Variante

Zusammensetzung von Funktionen

$$h(x) = g\big(f(x)\big) = g \circ f(x)$$

zuerst f

dann g

Zusammensetzung von Funktionen

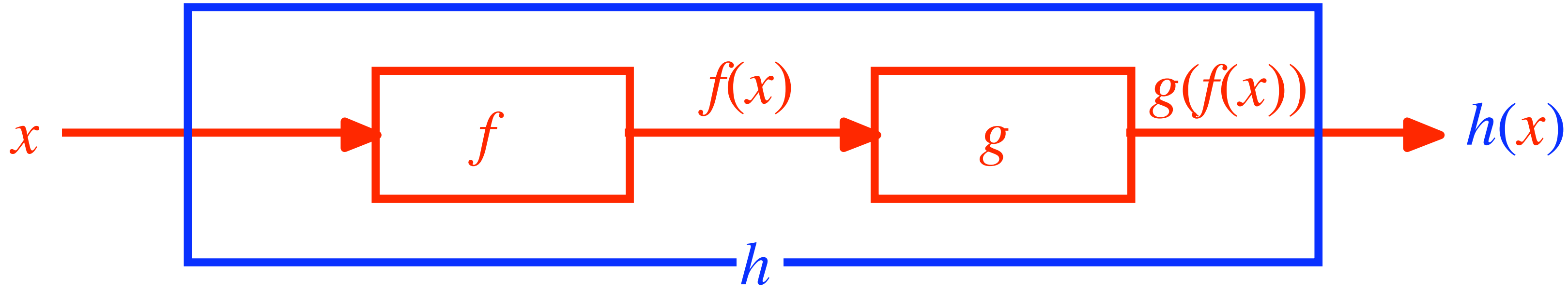
$$h(x) = g\big(f(x)\big) = g \circ f(x)$$

$$h = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{zuletzt}}}{g} \circ \underset{\substack{\uparrow \\ \text{zuerst}}}{f}$$

$$h = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{zuletzt}}}{g} \;@\; \underset{\substack{\uparrow \\ \text{zuerst}}}{f}$$

Zusammensetzung von Funktionen

$$h(x) = g\big(f(x)\big) = g \circ f(x)$$



Beispiele

$$f(x) = x^2 \qquad\qquad g(x) = \sin(x)$$

Beispiele

$$f(x) = x^2 \qquad\qquad g(x) = \sin(x)$$

$$h = g \circ f \qquad \Rightarrow \qquad h(x) = \sin\left(x^2\right)$$

Beispiele

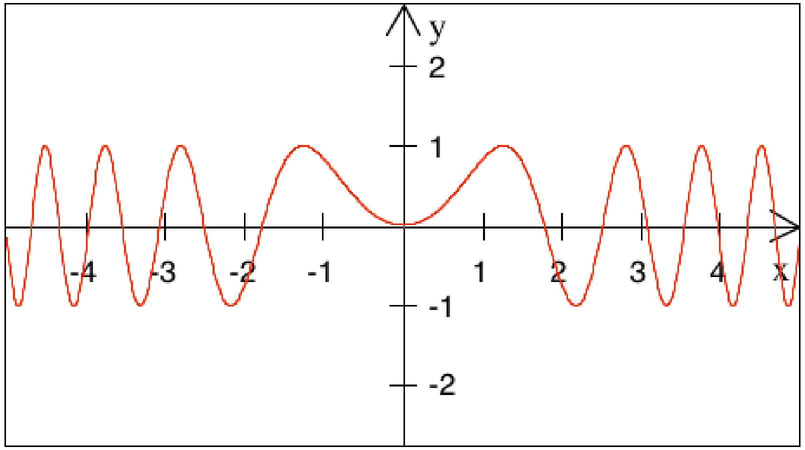
$$f(x) = x^2 \qquad g(x) = \sin(x)$$

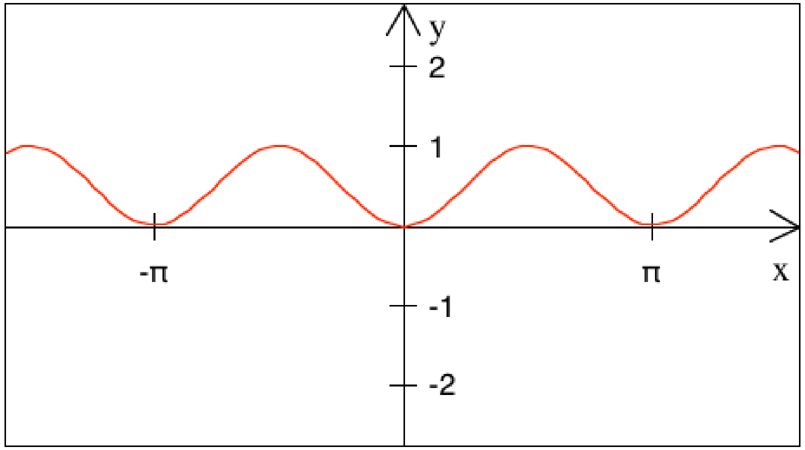
$$h = g \circ f \qquad \Rightarrow \qquad h(x) = \sin\left(x^2\right)$$

$$k = f \circ g \qquad \Rightarrow \qquad k(x) = (\sin(x))^2 = \sin^2(x)$$

Beispiele

$$h(x) = \sin\left(x^2\right) \qquad k(x) = \sin^2(x)$$





Ableitung von $h(x) = g(f(x)) = g \circ f(x)$
(Kettenregel)

$$\left(g\left(f(x)\right)\right)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g\left(f(x+\Delta x)\right) - g\left(f(x)\right)}{\Delta x}$$

Ableitung von $h(x) = g(f(x)) = g \circ f(x)$
(Kettenregel)

$$\Big(g\big(f(x)\big)\Big)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(f(x+\Delta x)) - g(f(x))}{\Delta x}$$

Hineinflicken

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{g(f(x+\Delta x)) - g(f(x))}{f(x+\Delta x) - f(x)} \cdot \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \right]$$

Hinausflicken

$$\left(g\left(f\left(x\right)\right)\right)' = \lim_{\Delta x\to 0}\left[\frac{g\left(f\left(x+\Delta x\right)\right)-g\left(f\left(x\right)\right)}{f\left(x+\Delta x\right)-f\left(x\right)}\cdot\frac{f\left(x+\Delta x\right)-f\left(x\right)}{\Delta x}\right]$$

$$\left(g\left(f\left(x\right)\right)\right)' = \lim_{\Delta x \to 0}\left[\frac{g\left(f\left(x+\Delta x\right)\right)-g\left(f\left(x\right)\right)}{f\left(x+\Delta x\right)-f\left(x\right)}\cdot\frac{f\left(x+\Delta x\right)-f\left(x\right)}{\Delta x}\right]$$

Das Leben ist ein Bezeichnungsproblem

$$y = f\left(x\right)$$

$$\Rightarrow \quad f\left(x+\Delta x\right)-f\left(x\right) = \Delta y$$

$$\Rightarrow \quad f\left(x+\Delta x\right) = \underbrace{y}_{f\left(x\right)} + \Delta y$$

$$\left(g\left(f(x)\right)\right)' = \lim_{\Delta x\to 0}\left[\frac{g\left(f(x+\Delta x)\right)-g\left(f(x)\right)}{f(x+\Delta x)-f(x)}\cdot\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\right]$$

Das Leben ist ein Bezeichnungsproblem

$$y = f(x)$$

$$\Rightarrow \quad f(x+\Delta x) - f(x) = \Delta y$$

$$\Rightarrow \quad f(x+\Delta x) = \underbrace{y}_{f(x)} + \Delta y$$

Umbezeichnung

$$\left(g\left(f(x)\right)\right)' = \lim_{\Delta x\to 0}\left[\frac{g(y+\Delta y)-g(y)}{\Delta y}\cdot\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\right]$$

$$\left(g\left(f\left(x\right)\right)\right)' = \lim_{\Delta x \to 0}\left[\frac{g\left(y+\Delta y\right)-g\left(y\right)}{\Delta y}\cdot\frac{f\left(x+\Delta x\right)-f\left(x\right)}{\Delta x}\right]$$

$$\left(g\left(f(x)\right)\right)' = \lim_{\Delta x \to 0}\left[\frac{g(y+\Delta y)-g(y)}{\Delta y}\cdot\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\right]$$

$$\Delta x \to 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta y \to 0 \quad (f \ \text{ stetig})$$

$$\left(g\left(f\left(x\right)\right)\right)' = \lim_{\Delta x \to 0}\left[\frac{g\left(y+\Delta y\right)-g\left(y\right)}{\Delta y}\cdot\frac{f\left(x+\Delta x\right)-f\left(x\right)}{\Delta x}\right]$$

$$\Delta x \to 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta y \to 0 \quad \left(f \ \text{ stetig}\right)$$

$$\left(g\left(f\left(x\right)\right)\right)' = \lim_{\Delta y \to 0}\left[\frac{g\left(y+\Delta y\right)-g\left(y\right)}{\Delta y}\right]\cdot \lim_{\Delta x \to 0}\left[\frac{f\left(x+\Delta x\right)-f\left(x\right)}{\Delta x}\right]$$

$$\Big(g\big(f(x)\big)\Big)' = \lim_{\Delta x \to 0}\left[\frac{g(y+\Delta y)-g(y)}{\Delta y}\cdot\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\right]$$

$$\Delta x \to 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta y \to 0 \quad \big(f \;\; \text{stetig}\big)$$

$$\Big(g\big(f(x)\big)\Big)' = \underbrace{\lim_{\Delta y \to 0}\left[\frac{g(y+\Delta y)-g(y)}{\Delta y}\right]}_{g'(y)=g'\left(f(x)\right)}\cdot\underbrace{\lim_{\Delta x \to 0}\left[\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\right]}_{f'(x)}$$

Ableitung von $h(x) = g(f(x)) = g \circ f(x)$
(Kettenregel)

$$\big(g(f(x))\big)' = \underbrace{g'(f(x))}_{\text{Ableitung der äußeren Funktion an der Stelle der inneren Funktion}} \cdot \underbrace{f'(x)}_{\text{Ableitung der inneren Funktion}}$$

Ableitung der äußeren Funktion an der Stelle der inneren Funktion

Ableitung der inneren Funktion

"innere Ableitung"

Schreibweisen

$$\Big(g\big(f(x)\big)\Big)' = g'\big(f(x)\big)\cdot f'(x)$$

$$(g\circ f)' = g'\circ f \quad\cdot\quad f'$$

$$\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}f}\cdot\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$$ Gruß von Leibniz

Zusammensetzung von drei Funktionen

$$\Big(h\Big(g\big(f(x)\big)\Big)\Big)' = h'\Big(g\big(f(x)\big)\Big)\cdot g'\big(f(x)\big)\cdot f'(x)$$

$$\big(h\circ g\circ f\big)' = h'\circ g\circ f \quad\cdot\quad g'\circ f \quad\cdot\quad f'$$

$$\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}g}\cdot\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}f}\cdot\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$$

Wie geht es weiter?

Beispiele zur Kettenregel

Tipp: Zusammensetzung analysieren

Beispiele zur Kettenregel

Tipp: Zusammensetzung analysieren

$$f(x) = \sin^5(x)$$

Beispiele zur Kettenregel

Tipp: Zusammensetzung analysieren

$f(x) = \sin^5(x) = (\sin(x))^5$ Bessere Schreibweise

Beispiele zur Kettenregel

Tipp: Zusammensetzung analysieren

$$f(x) = \sin^5(x) = (\sin(x))^5$$ Bessere Schreibweise

Innere Funktion: $\sin(\quad)$

Äußere Funktion: $(\quad)^5$

Beispiele zur Kettenregel

Tipp: Zusammensetzung analysieren

$$f(x) = \sin^5(x) = (\sin(x))^5$$ Bessere Schreibweise

Innere Funktion: $\sin(\quad)$

Äußere Funktion: $(\quad)^5$

$$f(x) = \sin^5(x) \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 5\sin^4(x)\cos(x)$$

Vertauschte Rollen

$$f(x) = \sin\left(x^5\right)$$

Innere Funktion : $\quad (\quad)^5$

Äußere Funktion : $\quad \sin(\quad)$

$$f(x) = \sin\left(x^5\right) \qquad \Rightarrow \qquad f'(x) = 5\cos\left(x^5\right)x^4$$

Exponentialfunktion mit Basis a

$$f(x) = a^x$$

Exponentialfunktion mit Basis a

$$f(x) = a^x = \left(\mathrm{e}^{\ln(a)}\right)^x$$

Umschreiben
der Basis a

Exponentialfunktion mit Basis a

$$f(x) = a^x = \left(\mathrm{e}^{\ln(a)}\right)^x = \mathrm{e}^{\ln(a)\cdot x}$$

Umschreiben der Basis a

Exponentialfunktion mit Basis a

$$f(x) = a^x = \left(\mathrm{e}^{\ln(a)}\right)^x = \mathrm{e}^{\ln(a)\cdot x}$$

Innere Funktion: $\underbrace{\ln(a)}_{\substack{\text{harmlose}\\ \text{Zahl}}} \cdot x$

Äußere Funktion: $\mathrm{e}^{(\quad)}$

Exponentialfunktion mit Basis a

$$f(x) = a^x = \left(\mathrm{e}^{\ln(a)}\right)^x = \mathrm{e}^{\ln(a)\cdot x}$$

Innere Funktion: $\underbrace{\ln(a)}_{\substack{\text{harmlose}\\\text{Zahl}}} \cdot x$

Äußere Funktion: $\mathrm{e}^{(\quad)}$

$$f(x) = a^x \qquad \Rightarrow \qquad f'(x) = \mathrm{e}^{\ln(a)\cdot x} \cdot \underbrace{\ln(a)}_{\substack{\text{innere}\\\text{Ableitung}}}$$

Exponentialfunktion mit Basis a

$$f(x) = a^x = \left(\mathrm{e}^{\ln(a)}\right)^x = \mathrm{e}^{\ln(a)\cdot x}$$

Innere Funktion: $\underbrace{\ln(a)}_{\text{harmlose Zahl}} \cdot x$

Äußere Funktion: $\mathrm{e}^{(\quad)}$

$$f(x) = a^x \qquad \Rightarrow \qquad f'(x) = \underbrace{\mathrm{e}^{\ln(a)\cdot x}}_{a^x} \; \underbrace{\ln(a)}_{\text{innere Ableitung}}$$

Exponentialfunktion mit Basis a

$$f(x) = a^x = \left(\mathrm{e}^{\ln(a)}\right)^x = \mathrm{e}^{\ln(a)\cdot x}$$

Innere Funktion: $\underbrace{\ln(a)}_{\text{harmlose Zahl}} \cdot x$

Äußere Funktion: $\mathrm{e}^{(\quad)}$

$$f(x) = a^x \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \underbrace{\mathrm{e}^{\ln(a)\cdot x}}_{a^x} \underbrace{\ln(a)}_{\substack{\text{innere}\\ \text{Ableitung}}} = \ln(a)\, a^x$$

Exponentialfunktion mit Basis a

$$\boxed{f(x) = a^x \qquad \Rightarrow \qquad f'(x) = \ln(a)\, a^x}$$

Ableitung fast ein Klon

Logarithmusfunktion

$$f(x) = \log_a(x)$$

Logarithmusfunktion

$$f(x) = \log_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}$$

Basiswechselformel

Logarithmusfunktion

$$f(x) = \log_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)} = \underbrace{\frac{1}{\ln(a)}}_{\substack{\text{harmloser} \\ \text{Faktor}}} \ln(x)$$

Logarithmusfunktion

$$f(x) = \log_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)} = \underbrace{\frac{1}{\ln(a)}}_{\substack{\text{harmloser} \\ \text{Faktor}}} \ln(x)$$

$$f(x) = \log_a(x) \qquad \Rightarrow \qquad f'(x) = \frac{1}{\ln(a)} \frac{1}{x}$$

Braucht keine Kettenregel

Umkehrfunktion

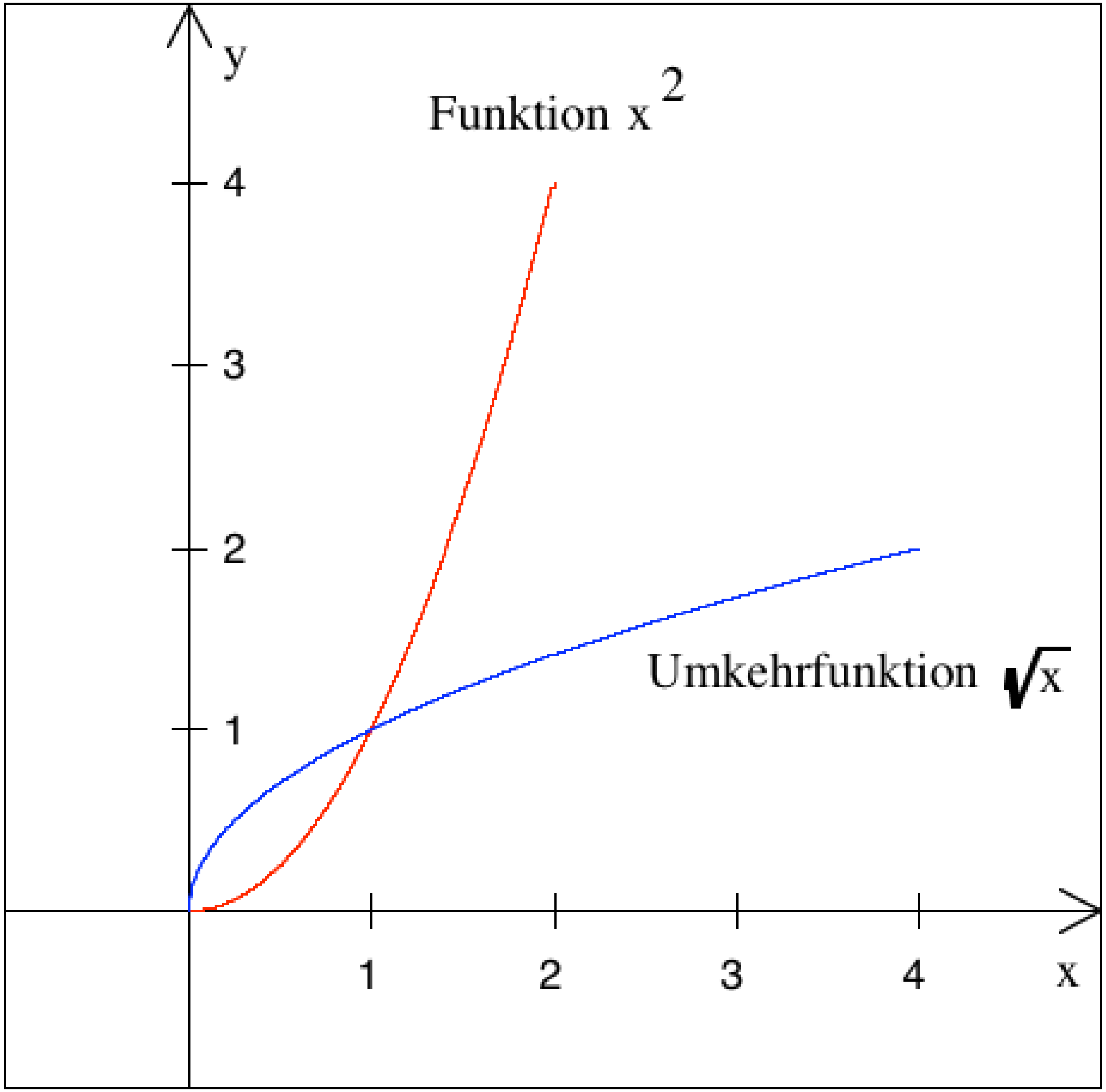
Funktion f

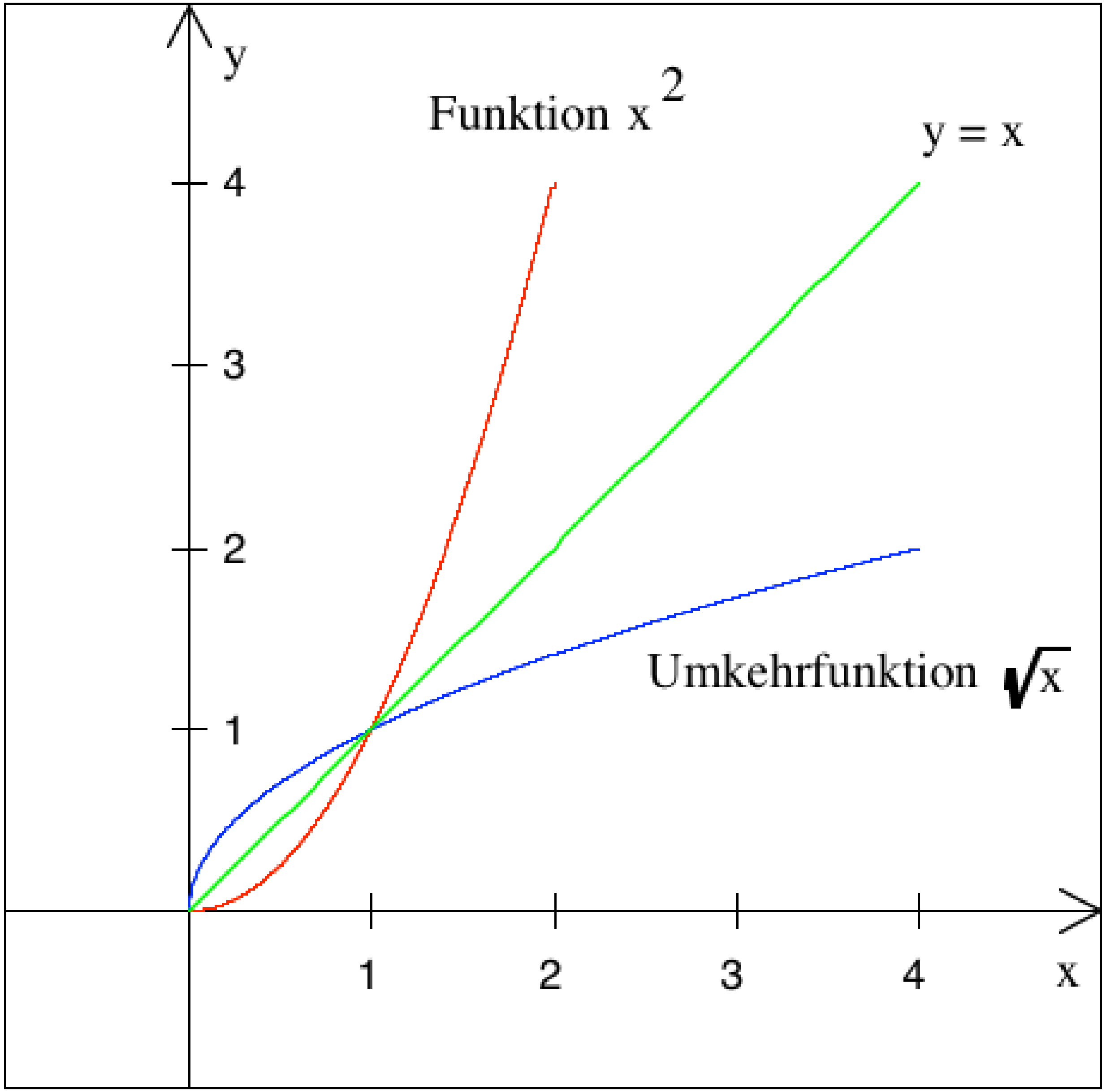
Umkehrfunktion $g = f^{[-1]}$

Kein Exponent!

Umkehrfunktion

Funktion	f	$f(x) = x^2 \quad (x \geq 0)$
Umkehrfunktion	$g = f^{[-1]}$	$g(x) = f^{[-1]}(x) = \sqrt{x}$


y
Funktion x 2
4
3
2
1
Umkehrfunktion √x
1
2
3
4
x


y
Funktion x^2
$y = x$
4
3
2
1
Umkehrfunktion $\sqrt{x}$
1
2
3
4
x

Funktion f

Umkehrfunktion $g = f^{[-1]}$

$$\Rightarrow \quad g\big(f(x)\big) = x$$

Funktion f $f(x) = x^2 \quad (x \geq 0)$

Umkehrfunktion $g = f^{[-1]}$ $g(x) = f^{[-1]}(x) = \sqrt{x}$

$\Rightarrow \quad g(f(x)) = x$ $\sqrt{x^2} = x$

Liestal hin und zurück

Funktion f

Umkehrfunktion $g = f^{[-1]}$

$g\big(f(x)\big) = x$ auf beiden Seiten nach x ableiten

Funktion f

Umkehrfunktion $g = f^{[-1]}$

$g\left(f(x)\right) = x$ auf beiden Seiten nach x ableiten

$$g'\left(f(x)\right) \cdot f'(x) = 1$$

Kettenregel

Funktion $\quad f$

Umkehrfunktion $\quad g = f^{[-1]}$

$g\big(f(x)\big) = x$ auf beiden Seiten nach x ableiten

$$g'\big(f(x)\big) \cdot f'(x) = 1$$

$$\boxed{g'\big(f(x)\big) = \frac{1}{f'(x)} \quad \text{Ableitung der Umkehrfunktion}}$$

Leibniz $\qquad f: \qquad x \mapsto y \qquad \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$

Leibniz

$$f: \qquad x \mapsto y \qquad \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$$

invers

$$g = f^{[-1]}: \qquad y \mapsto x \qquad \frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}y} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}$$

Leibniz

$$f: \qquad x \mapsto y \qquad \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$$

invers

$$g = f^{[-1]}: \qquad y \mapsto x \qquad \frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}y} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}$$

$$\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}y} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = \frac{1}{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}} = \frac{1}{\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}}$$

Leibniz

$$f: \quad x \mapsto y \qquad \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$$

invers

$$g = f^{[-1]}: \quad y \mapsto x \qquad \frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}y} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}$$

$$\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}y} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = \frac{1}{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}} = \frac{1}{\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}}$$

$$\boxed{g'(y) = \frac{1}{f'(x)}}$$

Beispiel

$$y = f(x) = x^2$$

$$x = g(y) = \sqrt{y}$$

$$g'\left(f(x)\right) = \frac{1}{f'(x)}$$

$$g'\left(x^2\right) = \frac{1}{2x}$$

Beispiel $$y = f(x) = x^2$$

$$x = g(y) = \sqrt{y}$$

$$g'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)}$$

$$g'(x^2) = \frac{1}{2x}$$

$$g'(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}}$$

Beispiel

$$y = f(x) = x^2$$

$$x = g(y) = \sqrt{y}$$

$$g'\big(f(x)\big) = \frac{1}{f'(x)}$$

$$g'\left(x^2\right) = \frac{1}{2x}$$

$$g'(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}}$$

$$g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Der Igel heißt jetzt Osterhase

Beispiel $$y = f(x) = x^2$$

$$x = g(y) = \sqrt{y}$$

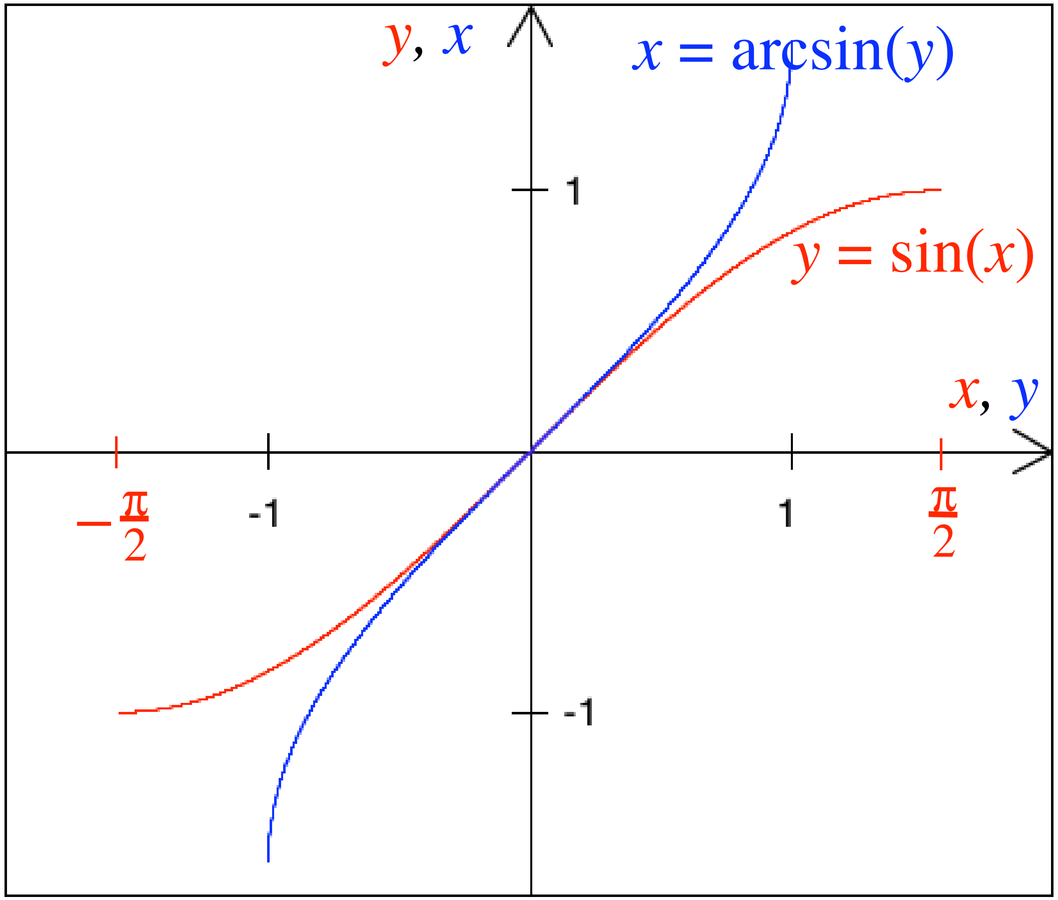
$$g'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)}$$

$$g'\left(x^2\right) = \frac{1}{2x}$$

$$g'(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}}$$

$$g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \qquad \boxed{\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}}$$

Sinus und Arcussinus



$$y = f(x) = \sin(x)$$

$$D_{\sin} = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

$$x = g(y) = \arcsin(y)$$

$$D_{\arcsin} = [-1, 1]$$

Sinus und Arcussinus

$$y = f(x) = \sin(x)$$

$$x = g(y) = \arcsin(y)$$

$$\left(\arcsin(y)\right)' = \frac{1}{\left(\sin(x)\right)'}$$

Sinus und Arcussinus

$$y = f(x) = \sin(x)$$

$$x = g(y) = \arcsin(y)$$

$$\left(\arcsin(y)\right)' = \frac{1}{\left(\sin(x)\right)'} = \frac{1}{\cos(x)}$$

Sinus und Arcussinus

$$y = f(x) = \sin(x)$$

$$x = g(y) = \arcsin(y)$$

$$\left(\arcsin(y)\right)' = \frac{1}{\left(\sin(x)\right)'} = \frac{1}{\cos(x)} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2(x)}}$$

Sinus und Arcussinus

$$y = f(x) = \sin(x)$$

$$x = g(y) = \arcsin(y)$$

$$\left(\arcsin(y)\right)' = \frac{1}{\left(\sin(x)\right)'} = \frac{1}{\cos(x)} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2(x)}}$$

$$\left(\arcsin(y)\right)' = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$$

Sinus und Arcussinus

$$y = f(x) = \sin(x)$$

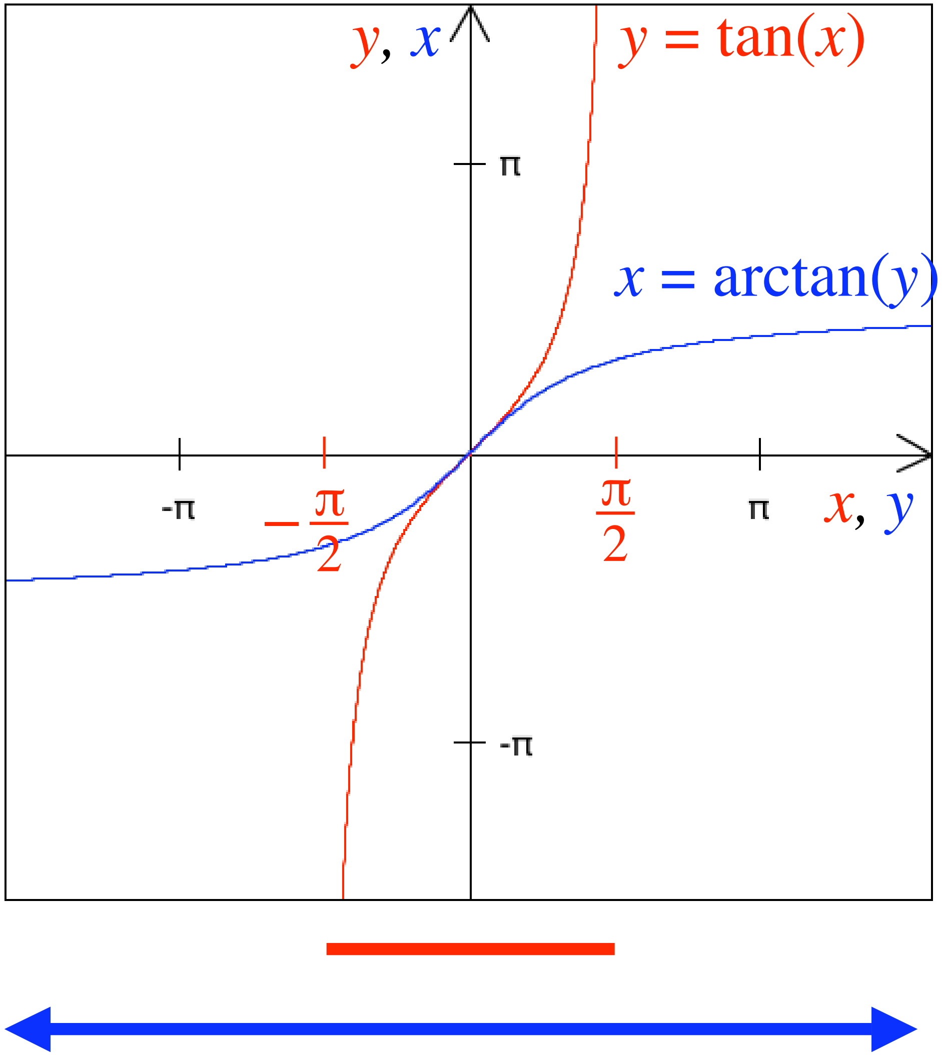
$$x = g(y) = \arcsin(y)$$

$$\left(\arcsin(y)\right)' = \frac{1}{\left(\sin(x)\right)'} = \frac{1}{\cos(x)} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2(x)}}$$

$$\left(\arcsin(y)\right)' = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$$

$$\boxed{\left(\arcsin(x)\right)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}$$

Tangens und Arcustangens



$$y = f(x) = \tan(x)$$

$$D_{\tan} = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

$$x = g(y) = \arctan(y)$$

$$D_{\arctan} = \mathbb{R}$$

Tangens und Arcustangens

$$y = f(x) = \tan(x)$$

$$x = g(y) = \arctan(y)$$

$$\big(\arctan(y)\big)' = \frac{1}{\big(\tan(x)\big)'}$$

Tangens und Arcustangens

$$y = f(x) = \tan(x)$$

$$x = g(y) = \arctan(y)$$

$$\left(\arctan(y)\right)' = \frac{1}{\left(\tan(x)\right)'} = \frac{1}{1+\tan^2(x)}$$

Tangens und Arcustangens

$$y = f(x) = \tan(x)$$

$$x = g(y) = \arctan(y)$$

$$\left(\arctan(y)\right)' = \frac{1}{\left(\tan(x)\right)'} = \frac{1}{1+\tan^2(x)}$$

$$\left(\arctan(y)\right)' = \frac{1}{1+y^2}$$

Tangens und Arcustangens

$$y = f(x) = \tan(x)$$

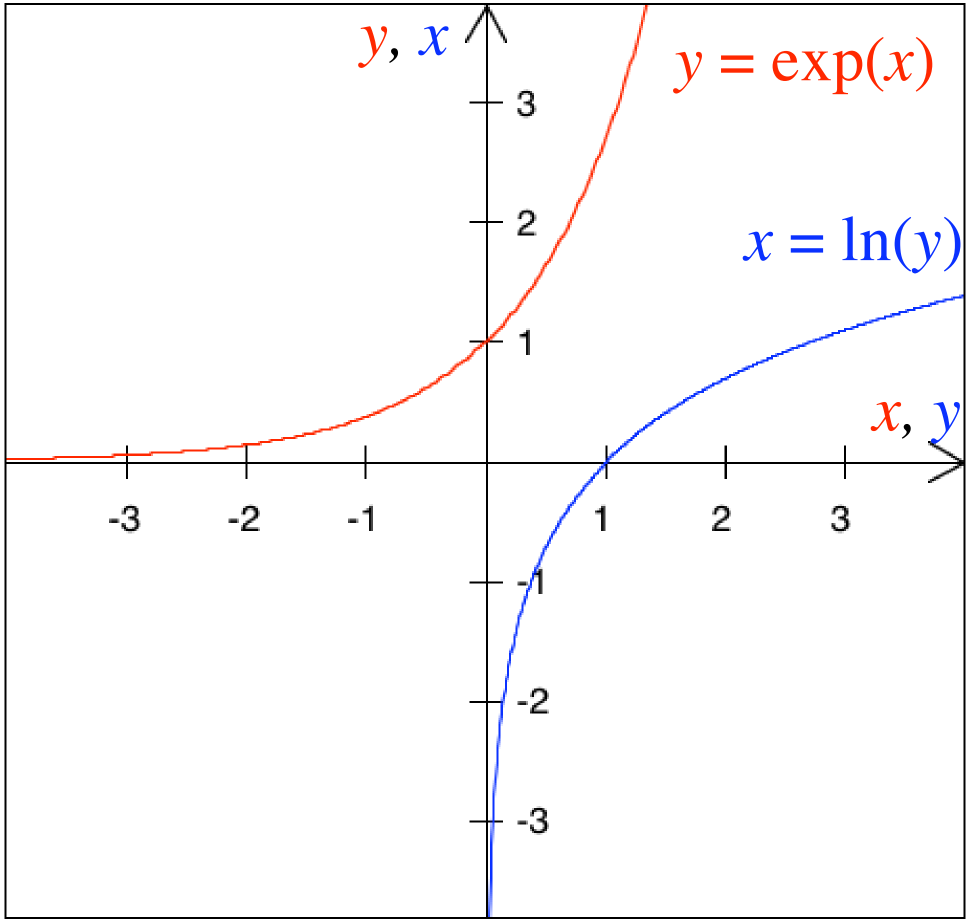
$$x = g(y) = \arctan(y)$$

$$\left(\arctan(y)\right)' = \frac{1}{\left(\tan(x)\right)'} = \frac{1}{1+\tan^2(x)}$$

$$\left(\arctan(y)\right)' = \frac{1}{1+y^2}$$

$$\boxed{\left(\arctan(x)\right)' = \frac{1}{1+x^2}}$$

Exponentialfunktion und Logarithmus

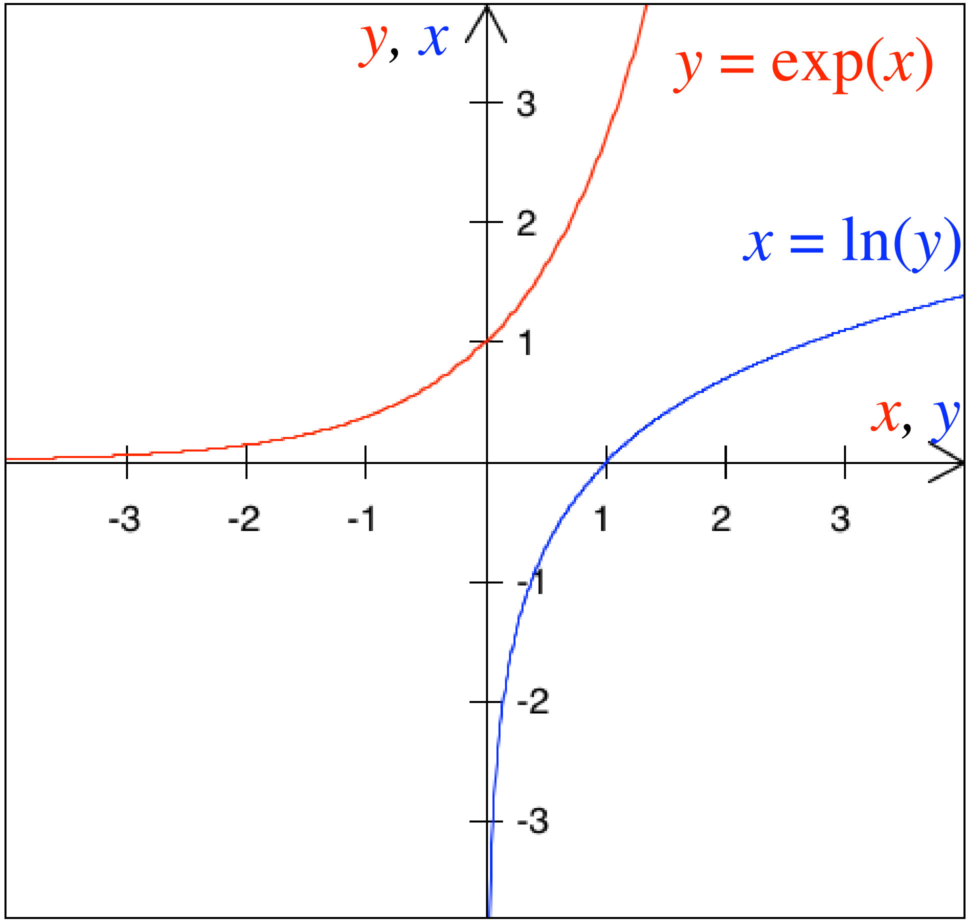


$$y = f(x) = \mathrm{e}^{x} = \exp(x)$$

$$D_{\exp} = \mathbb{R}$$

Modernere Schreibweise

Exponentialfunktion und Logarithmus



$$y = f(x) = e^x = \exp(x)$$

$$D_{\exp} = \mathbb{R}$$

$$x = g(y) = \ln(y)$$

$$D_{\ln} = \{y \mid y > 0\} = \mathbb{R}^+$$

Exponentialfunktion und Logarithmus

$$y = f(x) = \mathrm{e}^{x}$$

$$x = g(y) = \ln(y)$$

$$\left(\ln(y)\right)' = \frac{1}{\left(\mathrm{e}^{x}\right)'} = \frac{1}{\mathrm{e}^{x}}$$

Exponentialfunktion und Logarithmus

$$y = f(x) = \mathrm{e}^{x}$$

$$x = g(y) = \ln(y)$$

$$\left(\ln(y)\right)' = \frac{1}{\left(\mathrm{e}^{x}\right)'} = \frac{1}{\mathrm{e}^{x}}$$

$$\left(\ln(y)\right)' = \frac{1}{y}$$

Exponentialfunktion und Logarithmus

$$y = f(x) = \mathrm{e}^x$$

$$x = g(y) = \ln(y)$$

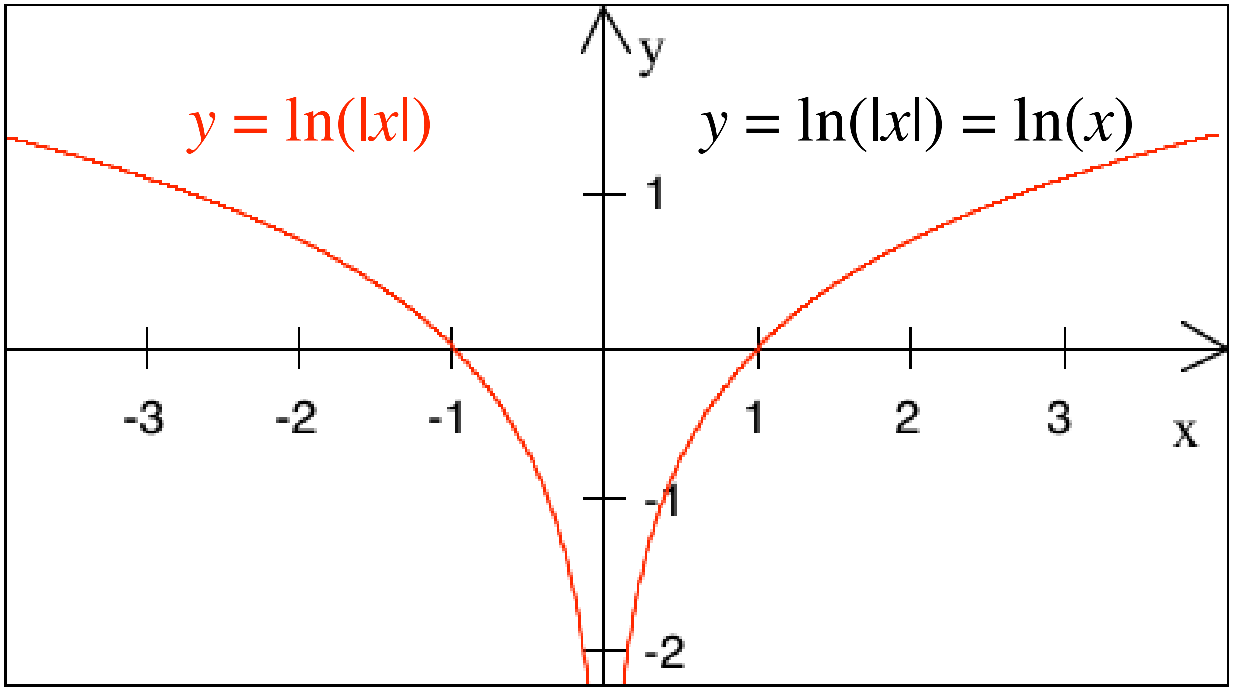
$$\left(\ln(y)\right)' = \frac{1}{\left(\mathrm{e}^x\right)'} = \frac{1}{\mathrm{e}^x}$$

$$\left(\ln(y)\right)' = \frac{1}{y}$$

$$\boxed{\left(\ln(x)\right)' = \frac{1}{x}}$$

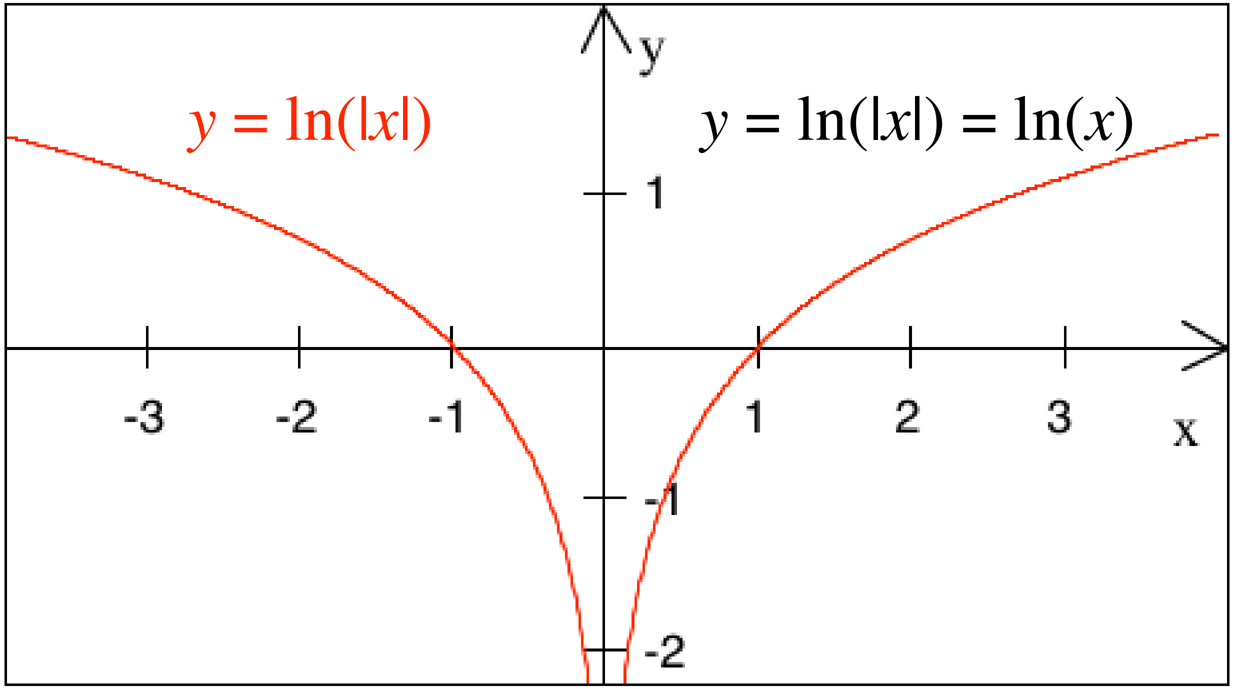
Erweiterung der Logarithmusfunktion

Links spiegelbildlich Rechts nichts Neues



Erweiterung der Logarithmusfunktion

Links spiegelbildlich   Rechts nichts Neues



$$\boxed{\left(\ln(|x|)\right)' = \frac{1}{x}}$$