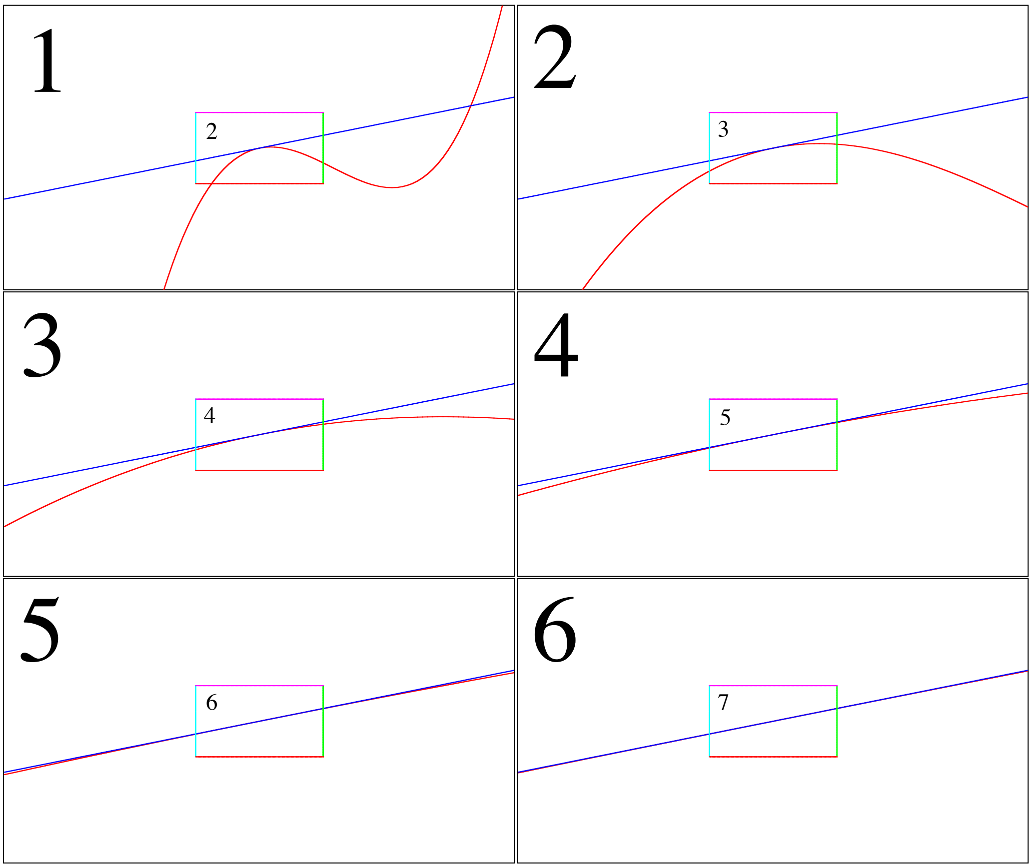
Hans Walser

Mathematik 1 für Naturwissenschaften



Modul 103

Differenzialrechnung

UNI
BASEL

Inhalt

Modul 103 für die Lehrveranstaltung *Mathematik 1 für Naturwissenschaften*

Winter 2002/03 Probeausgabe
Winter 2003/04 Fehlerkorrekturen und Straffung
Winter 2005/06 Grafische Überarbeitung, Fehlerkorrekturen und Straffung
Winter 2006/07 Formel Editor revidiert. Kleine Ergänzung.
Herbst 2007 Kürzungen
Herbst 2008 Geändertes Layout
Herbst 2013 Kürzung

last modified: 19. September 2013

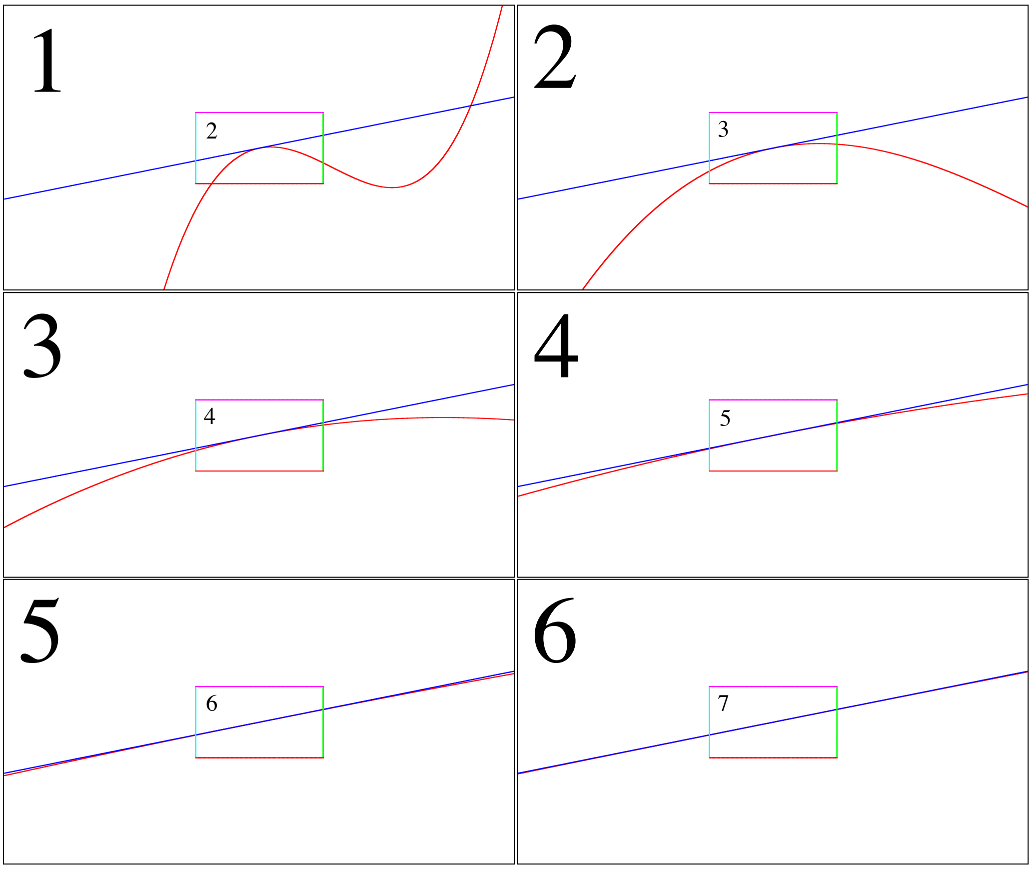
Hans Walser
Mathematisches Institut, Rheinsprung 21, 4051 Basel
www.walser-h-m.ch/hans

1 Lineare Approximation

1.1 Zoomen auf Teufel komm raus

1.1.1 Beim Berührungspunkt der Tangente

Wir zoomen beim Berührungspunkt der Tangente. Der Ausschnitt wird jeweils auf 400% vergrößert.



Kurve und Tangente

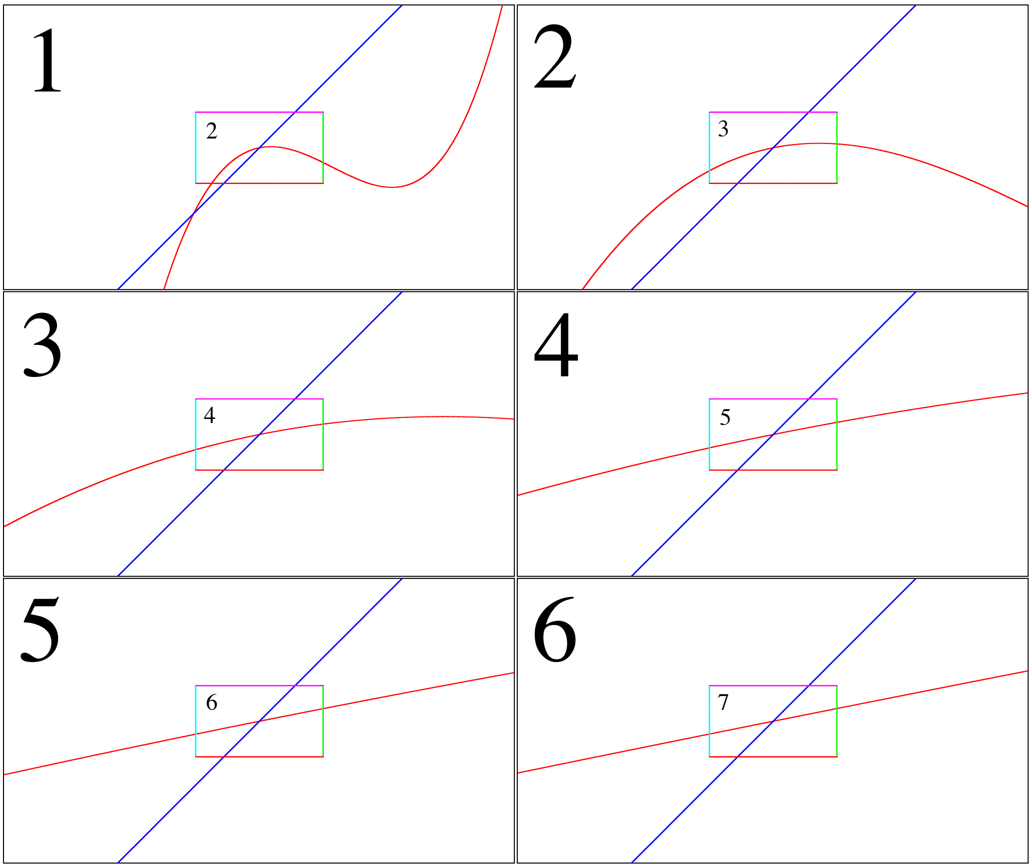
Die Abstände Δy in senkrechter Richtung werden im Vergleich zu den Abständen Δx in waagrechter Richtung „überproportional" klein.

Mit der Tangente können wir den Funktionsgraphen lokal linearisieren. „Lokal" heißt: in der Umgebung eines bestimmten Punktes $(x_0, f(x_0))$.

Sprechweise: *Linearisierung an der Stelle* x_0 .

1.1.2 Beim Schnittpunkt mit einer Geraden

Der Ausschnitt wird jeweils auf 400% vergrößert



Kurve und Gerade

Die Abstände Δy in senkrechter Richtung sind etwa proportional zu den Abständen Δx in waagrechter Richtung.

1.2 Lineare Approximation an einer bestimmten Stelle

Zu einer gegebenen Funktion $f(x)$ ist eine lineare Funktion $l(x) = ax + b$ gesucht, welche in der Umgebung des Punktes $(x_0, f(x_0))$ die Funktion $f(x)$ möglichst gut approximiert. Wie finden wir a und b?

a) An der Stelle x_0 sollen f und l übereinstimmen:

$$f(x_0) = l(x_0) = ax_0 + b$$

Daraus ergibt sich:

Also:

$$l(x) = f(x_0) + a(x - x_0)$$

Gesucht ist somit noch das a.

b) In der Umgebung von x_0, also für „kleines“ $(x - x_0)$, soll der Unterschied zwischen $f(x)$ und $l(x)$ „sehr klein“ werden. Also:

$$f(x) - l(x) = f(x) - f(x_0) - a(x - x_0) = \left(\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} - a\right)(x - x_0)$$

Dies ist nur möglich, wenn der Klammerausdruck $\left(\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} - a\right)$ für $x \to x_0$ immer kleiner wird und gegen Null strebt:

$$\lim_{x \to x_0} \left(\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} - a\right) = 0$$

Damit erhalten wir für a die Bedingung:

$$a = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

1.2.1 Ableitung an einer bestimmten Stelle

Wir nennen diesen Grenzwert die Ableitung der Funktion f an der Stelle x_0.

Ableitung der Funktion f an der Stelle x_0:

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

Für die lineare Approximation $l(x)$ erhalten wir damit:

$$l(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

Für die Funktion $f(x)$ gilt dann in der Nähe von x_0:

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

1.2.2 Verschiedene Schreibweisen. NEWTON und LEIBNIZ

Die Differenzialrechnung wurde gleichzeitig, aber unabhängig voneinander von NEWTON und LEIBNIZ entwickelt. Die beiden verwendeten aber verschiedene Schreibweisen, welche je ihre Vor- und Nachteile haben.

$$\underbrace{f'(x_0)}_{\text{NEWTON}} = \underbrace{\left.\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0} = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x_0)}_{\text{LEIBNIZ}}$$

Weiter sind folgende Schreibweisen gebräuchlich:

$$\Delta x = x - x_0 \quad \Rightarrow \quad x = x_0 + \Delta x$$

$$\Delta y = \Delta f = f(x) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = y - y_0$$

Für den *Differenzenquotienten* (noch ohne den Limes):

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

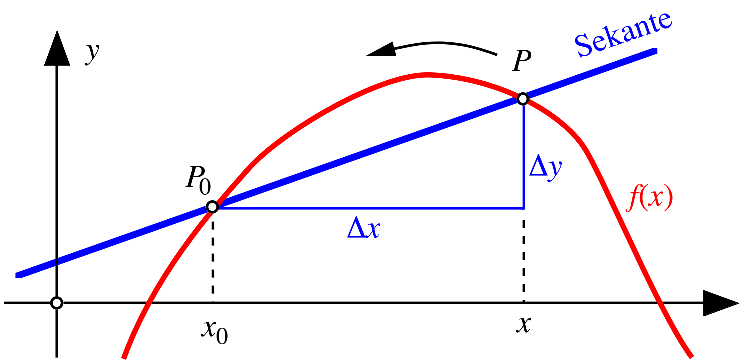
Für den *Differenzialquotienten* (mit Limes):

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

1.3 Geometrische Interpretation

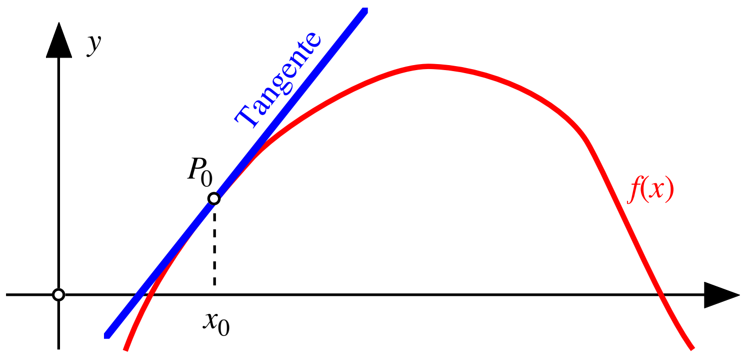
Steigung 12% bedeutet $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 0.12$

Die lineare Approximation wird durch die Tangente visualisiert. Diese kann als Grenzlage einer Folge von Sekanten gesehen werden.



Sekante

$\frac{\Delta y}{\Delta x}$ = Steigung der Sekanten; Tangente $= \lim\limits_{P \to P_0}$ Sekante



Tangente

Für die Tangentensteigung gilt:

$$\text{Tangentensteigung} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0)$$

Die Tangentensteigung und damit auch die Steigung des Funktionsgraphen ist also die Ableitung an der Stelle x_0.

1.4 Bewegung eines Massenpunktes

Der Weg s hängt von der Zeit t ab: $s(t)$. Damit wird:

$$\Delta s = s(t) - s(t_0)$$

$$\tfrac{\Delta s}{\Delta t} = \text{ Mittlere Geschwindigkeit im Zeitintervall } [t_0, t]$$

Für die *Momentangeschwindigkeit* $v(t_0)$ zur Zeit t_0 ergibt sich:

$$v(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0} \tfrac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{t \to t_0} \tfrac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0} = s'(t_0)$$

Weiter ist:

$$\Delta v = v(t) - v(t_0)$$

$$\tfrac{\Delta v}{\Delta t} = \text{ Mittlere Beschleunigung im Zeitintervall } [t_0, t]$$

Für die *Momentanbeschleunigung* $a(t_0)$ zur Zeit t_0 ergibt sich:

$$a(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0} \tfrac{\Delta v}{\Delta t} = \lim_{t \to t_0} \tfrac{v(t) - v(t_0)}{t - t_0} = v'(t_0)$$

Noch mehr Schreibweisen:

Erste Ableitung (Geschwindigkeit)

$$s'(t) = v(t); \qquad \dot{s}(t) = v(t); \qquad \tfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}(t) = v(t)$$

Zweite Ableitung (Beschleunigung)

$$s''(t) = v'(t) = a(t); \qquad \ddot{s}(t) = \dot{v}(t) = a(t); \qquad \tfrac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2}(t) = \tfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}(t) = a(t)$$

Diese Ideen wurden zuerst von Galileo GALILEI entwickelt.

2 Differenzierbarkeit

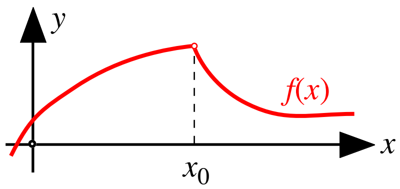
2.1 Begriffe

Eine Funktion f heißt *differenzierbar an der Stelle* x_0, falls

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

existiert, unabhängig davon, wie $x \to x_0$ geht.

Gegenbeispiel:



Nicht differenzierbar an der Stelle x_0

Eine Funktion f heißt (*global*) *differenzierbar*, wenn sie an *allen* Stellen ihres Definitionsbereiches differenzierbar ist.

2.2 Beispiele

2.2.1 Die konstante Funktion

$$f(x) = c = \text{ constant}$$

$$\Delta y = \Delta f = 0 \quad \Rightarrow \quad f'(x_0) = 0 \quad \text{für alle } x_0$$

2.2.2 Die Potenzfunktion

Wir nehmen zunächst das Beispiel: $f(x) = x^3$

Damit erhalten wir:

Somit ergibt sich: $f(x) = x^3 \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 3x^2$

Eine analoge Formel kann für beliebige Exponenten bewiesen werden:

$$f(x) = x^n \quad \Rightarrow \quad f'(x) = nx^{n-1}$$

Bemerkung:

Die Formel gilt sogar für beliebige reelle Exponenten r.

$$\boxed{f(x) = x^r \quad \Rightarrow \quad f'(x) = rx^{r-1}}$$

Beispiel: Für $r = \frac{1}{2}$ erhalten wir:

$$f(x) = x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \tfrac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} = \tfrac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Die Formel gilt aber *nicht*, wenn x im Exponenten steht. Beispiel:

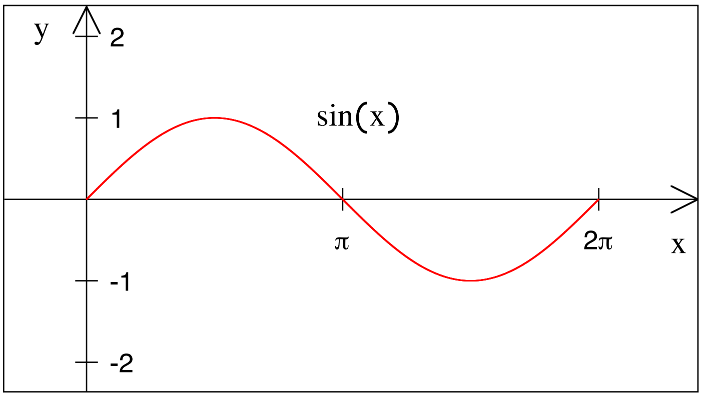
$$f(x) = a^x \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \ln(a)a^x$$

2.2.3 Die Sinusfunktion und die Cosinusfunktion

Wir beginnen mit der Sinusfunktion:

$$f(x) = \sin(x)$$

Zunächst eine geometrische Abschätzung der Steigung:



Tangentensteigung?

Passend wäre: $(\sin(x))' = \cos(x)$. Diese Vermutung ist auch richtig.

Unter Verwendung des **Bogenmaßes** gilt:

$$(\sin(x))' = \cos(x)$$

$$(\cos(x))' = -\sin(x)$$

2.2.4 Exponentialfunktion und Logarithmusfunktion

Es gilt (ohne Beweis):

$$\left(e^x\right)' = e^x \quad \text{und} \quad (\ln(x))' = \tfrac{1}{x}$$

Die Exponentialfunktion hat sich selber als Ableitung.

2.3 Rechenregeln

2.3.1 Addition und Multiplikation mit Zahl

$$(f \pm g)' = f' \pm g'$$

$$(\lambda f)' = \lambda f'$$

2.3.2 Produktregel und Quotientenregel

$$(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$$

$$\left(\frac{1}{g}\right)' = \frac{-g'}{g^2}$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$$

2.3.2.1 Nachweis der Produktregel

2.3.2.2 Beispiel zur Quotientenregel

$$\left(\tan(x)\right)' = \left(\frac{\sin(x)}{\cos(x)}\right)' =$$

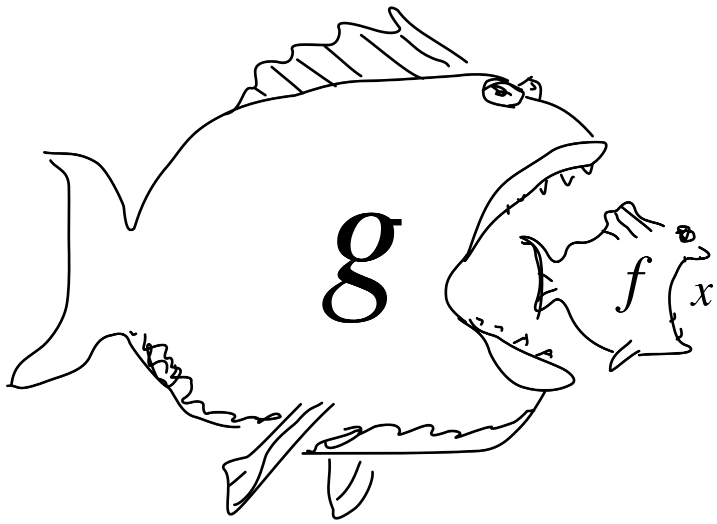
$$\boxed{\left(\tan(x)\right)' = \frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)}$$

2.3.3 Kettenregel

2.3.3.1 Zusammengesetzte Funktionen

Bei *zusammengesetzten* (oder *verketteten*) Funktionen wird der Output der ersten Funktion als Input der nachfolgenden zweiten Funktion verwendet. Die Schreibweise geht dabei von rechts nach links. Die erste Funktion steht ganz rechts.

$$h(x) = g\left(f(x)\right) = g \circ f(x)$$



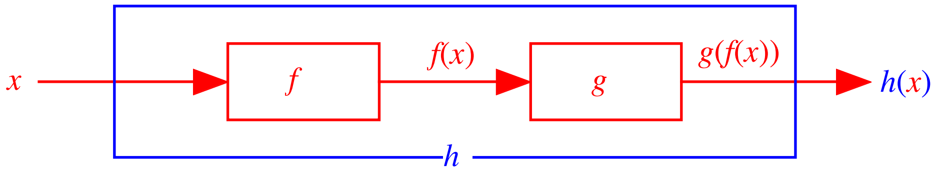
Reihenfolge

Schreibweisen:

$$h = \underset{\text{zuletzt}}{\underset{\uparrow}{g}} \circ \underset{\text{zuerst}}{\underset{\uparrow}{f}}$$

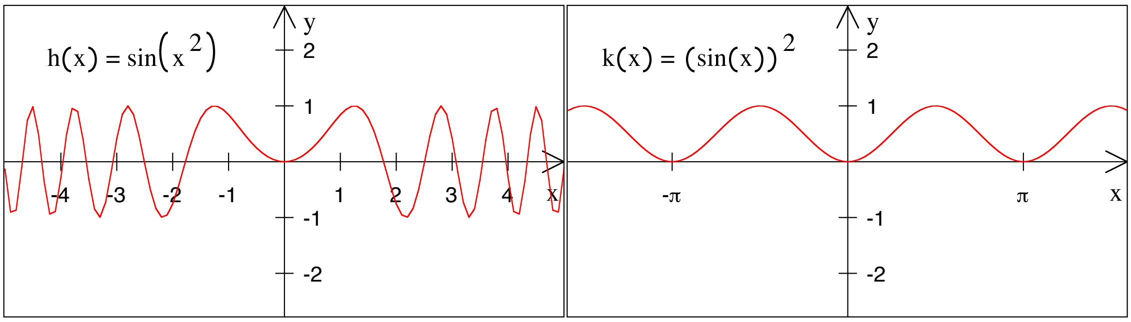
$$h = \underset{\text{zuletzt}}{\underset{\uparrow}{g}} \ @\ \underset{\text{zuerst}}{\underset{\uparrow}{f}}$$

Schematische Darstellung:



Verkettungsschema

Beispiele: Es sei $f(x) = x^2$ und $g(x) = \sin(x)$, ferner $h = g \circ f$ und $k = f \circ g$



$h = g \circ f$ **und** $k = f \circ g$

2.3.3.2 Herleitung der Kettenregel

Wir leiten die zusammengesetzte Funktion $h(x) = g\big(f(x)\big) = g \circ f(x)$ ab:

Somit gilt die so genannte *Kettenregel*:

$$\left(g\left(f(x)\right)\right)' = \underbrace{g'\left(f(x)\right)}_{\substack{\text{Ableitung der}\\ \text{äußeren Funktion}\\ \text{an der Stelle der}\\ \text{inneren Funktion}}} \cdot \underbrace{f'(x)}_{\substack{\text{Ableitung der}\\ \text{inneren Funktion}\\ \text{"innere Ableitung"}}}$$

Kompakte Schreibweisen:

$$(g \circ f)' = g' \circ f \cdot f'$$

$$\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}f} \cdot \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$$

Die Kettenregel kann auf drei und mehr Funktionen ausgedehnt werden:

$$\left(h\left(g\left(f(x)\right)\right)\right)' = h'\left(g\left(f(x)\right)\right) \cdot g'\left(f(x)\right) \cdot f'(x)$$

$$(h \circ g \circ f)' = h' \circ g \circ f \cdot g' \circ f \cdot f'$$

$$\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}g} \cdot \frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}f} \cdot \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$$

2.3.3.3 Beispiele zur Kettenregel

2.3.3.3.1 Beispiel $f(x) = \sin^5(x)$

Somit: $f(x) = \sin^5(x) \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 5\sin^4(x)\cos(x)$

2.3.3.3.2 Beispiel $f(x) = \sin\left(x^5\right)$

Somit: $f(x) = \sin\left(x^5\right) \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 5\cos\left(x^5\right)x^4$

2.3.3.3.3 Beispiel $f(x) = a^x$

$$\boxed{f(x) = a^x \qquad \Rightarrow \qquad f'(x) = \ln(a)\, a^x}$$

Bemerkung: Die Umkehrfunktion von a^x, also $\log_a(x)$, kann ohne Kettenregel abgeleitet werden:

$$f(x) = \log_a(x)$$

$$\boxed{f(x) = \log_a(x) \qquad \Rightarrow \qquad f'(x) = \frac{1}{\ln(a)} \frac{1}{x}}$$

2.3.4 Ableitung der Umkehrfunktion

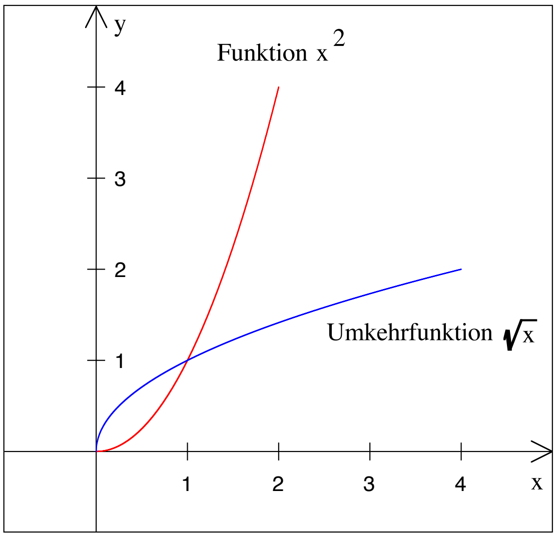
2.3.4.1 Die Umkehrfunktion

Es sei g die Umkehrfunktion einer gegebenen Funktion f. Schreibweise: $g = f^{[-1]}$ (Die Schreibweise ist gefährlich, sie hat nichts mit dem Kehrwert zu tun!)

Beispiel:

Funktion: $f(x) = x^2$

Umkehrfunktion: $g(x) = f^{[-1]}(x) = \sqrt{x}$



Funktion und Umkehrfunktion

Für eine Funktion f und ihre Umkehrfunktion g gilt :

$$g(f(x)) = x$$

2.3.4.2 Ableitung

Wegen $g(f(x)) = x$ können wir die Kettenregel anwenden:

$$g(f(x)) = x$$

Wir leiten auf beiden Seiten ab, links mit der Kettenregel:

$$g'(f(x)) \cdot f'(x) = 1$$

Daraus ergibt sich:

$$\boxed{g'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)}}$$

Elegante Schreibweise von LEIBNIZ:

$f:$	$x \mapsto y$	$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$
$g = f^{[-1]}:$	$y \mapsto x$	$\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}y} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}$

Somit:

$$\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}y} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = \frac{1}{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}} = \frac{1}{\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}}$$

$$g'(y) = \frac{1}{f'(x)}$$

2.3.4.3 Beispiele

Die Problematik — oder das Ungewohnte — bei diesen Beispielen ist die unterschiedliche Rolle der Variablen x und y. Bei der Umkehrfunktion vertauschen sich die Rollen von Input und Output. Das gibt Bezeichnungsprobleme. Diese können aber durch eine systematische Handhabe gemeistert werden.

2.3.4.3.1 Quadrat und Wurzel

$$y = f(x) = x^2$$
$$x = g(y) = \sqrt{y}$$

Die Formel $g'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)}$ führt in unserem Beispiel zu:

$$g'\left(x^2\right) = \frac{1}{2x}$$
$$g'(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}}$$

Nun vertauschen wir x und y und erhalten:

$$g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$\boxed{\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}}$$

2.3.4.3.2 Sinus und Arcussinus

$$y = f(x) = \sin(x)$$
$$x = g(y) = \arcsin(y)$$

$$\boxed{\left(\arcsin(x)\right)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}$$

2.3.4.3.3 Tangens und Arcustangens

$$y = f(x) = \tan(x)$$
$$x = g(y) = \arctan(y)$$

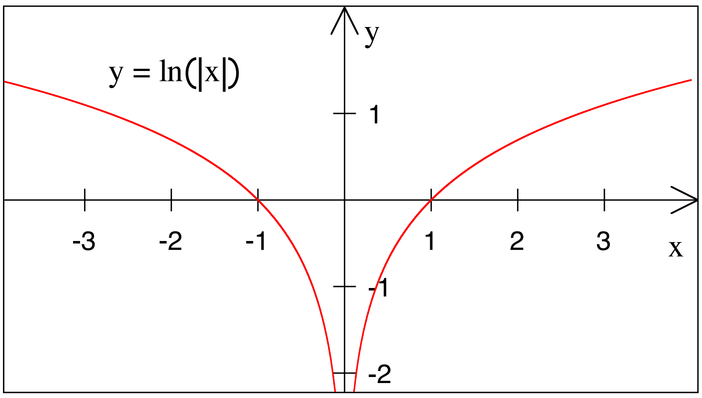
$$\boxed{\left(\arctan(x)\right)' = \frac{1}{1+x^2}}$$

2.3.4.3.4 Exponentialfunktion und Logarithmus

$$y = f(x) = \mathrm{e}^x$$
$$x = g(y) = \ln(y)$$

$$\boxed{\left(\ln(x)\right)' = \tfrac{1}{x}}$$

Der Logarithmus ist nur für positive x-Werte definiert. Wir können aber die Funktion mit Hilfe der Betragsfunktion zu $\ln(|x|)$ erweitern. Für positive x-Werte ist das die bisherige Logarithmus-Funktion.



Erweiterung der Logarithmusfunktion

Aus Symmetriegründen gilt für diese erweiterte Funktion die Ableitung; rechts sind *keine* Betragsstriche.

$$\boxed{\left(\ln(|x|)\right)' = \tfrac{1}{x}}$$

3 Zusammenfassung

3.1 Ableitung

Ableitung der Funktion f an der Stelle x_0: $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

Lineare Approximation: $f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$

Schreibweisen:

$$\Delta x = x - x_0 \quad \Rightarrow \quad x = x_0 + \Delta x$$

$$\Delta y = \Delta f = f(x) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = y - y_0$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Tangentensteigung: $\text{Tangentensteigung} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0)$

3.2 Rechenregeln

$(f \pm g)' = f' \pm g'$ $\qquad (\lambda f)' = \lambda f'$

$(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$ $\qquad \left(\frac{1}{g}\right)' = \frac{-g'}{g^2}$ $\qquad \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$

Zusammensetzung:

$h(x) = g(f(x)) = g \circ f(x)$ $\qquad h = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{zuletzt}}}{g} \circ \underset{\substack{\uparrow \\ \text{zuerst}}}{f}$ $\qquad h = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{zuletzt}}}{g} \; @ \; \underset{\substack{\uparrow \\ \text{zuerst}}}{f}$

Kettenregel:

$$\left(g\left(f(x)\right)\right)' = \underbrace{g'\left(f(x)\right)}_{\substack{\text{Ableitung der} \\ \text{äußeren Funktion} \\ \text{an der Stelle der} \\ \text{inneren Funktion}}} \cdot \underbrace{f'(x)}_{\substack{\text{Ableitung der} \\ \text{inneren Funktion} \\ \text{"innere Ableitung"}}}$$

$$\left(h\left(g\left(f(x)\right)\right)\right)' = h'\left(g\left(f(x)\right)\right) \cdot g'\left(f(x)\right) \cdot f'(x)$$

Funktion $f(x)$ und Umkehrfunktion $g(x) = f^{[-1]}(x)$: Es gilt $g'\left(f(x)\right) = \frac{1}{f'(x)}$

3.3 Spezielle Funktionen

$$f(x) = x^r \qquad \Rightarrow \qquad f'(x) = rx^{r-1}$$

$$\left(e^x\right)' = e^x \quad \text{und} \quad \left(\ln(x)\right)' = \tfrac{1}{x}$$

$$\left(\sin(x)\right)' = \cos(x), \qquad \left(\cos(x)\right)' = -\sin(x), \quad \left(\tan(x)\right)' = \tfrac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$$

$$\left(\sqrt{x}\right)' = \tfrac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$\left(\arcsin(x)\right)' = \tfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad \left(\arctan(x)\right)' = \tfrac{1}{1+x^2}$$

$$\left(\ln(|x|)\right)' = \tfrac{1}{x}$$