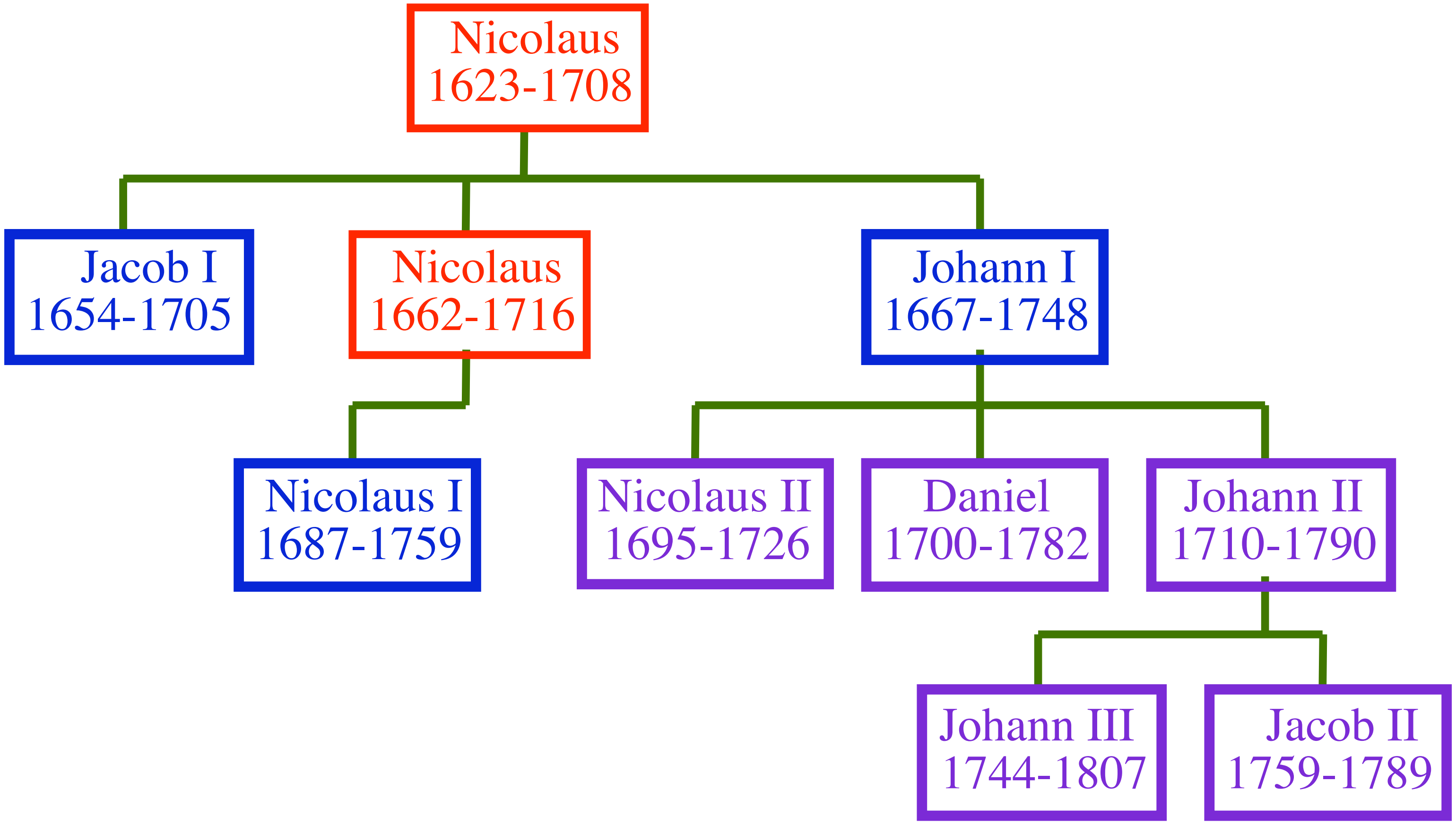
Bernoulli



Modul 104

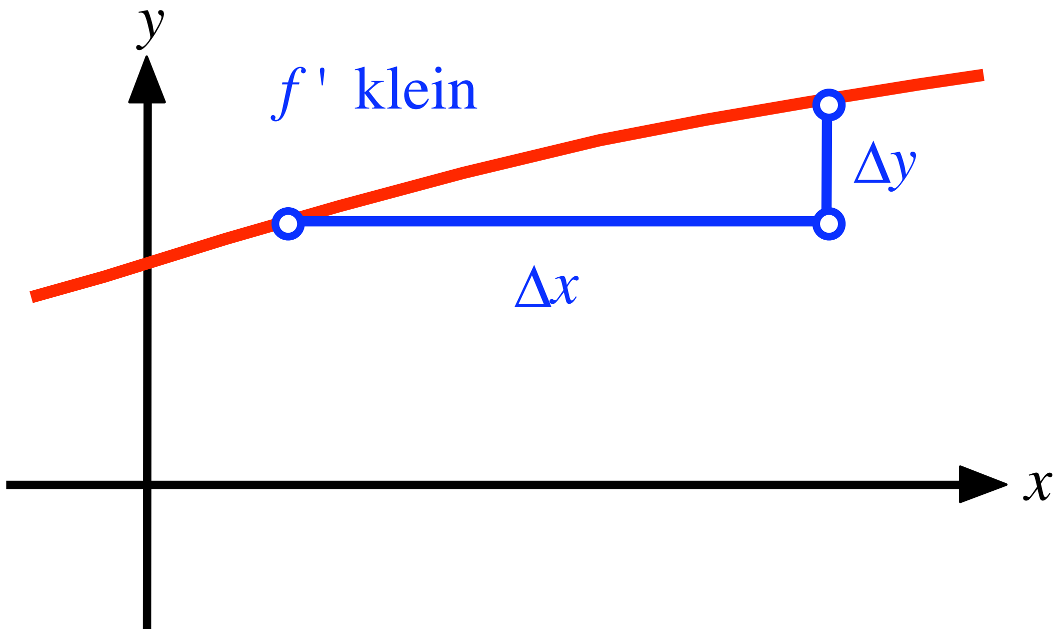
Anwendungen der Differenzialrechnung.

Komplexe Zahlen

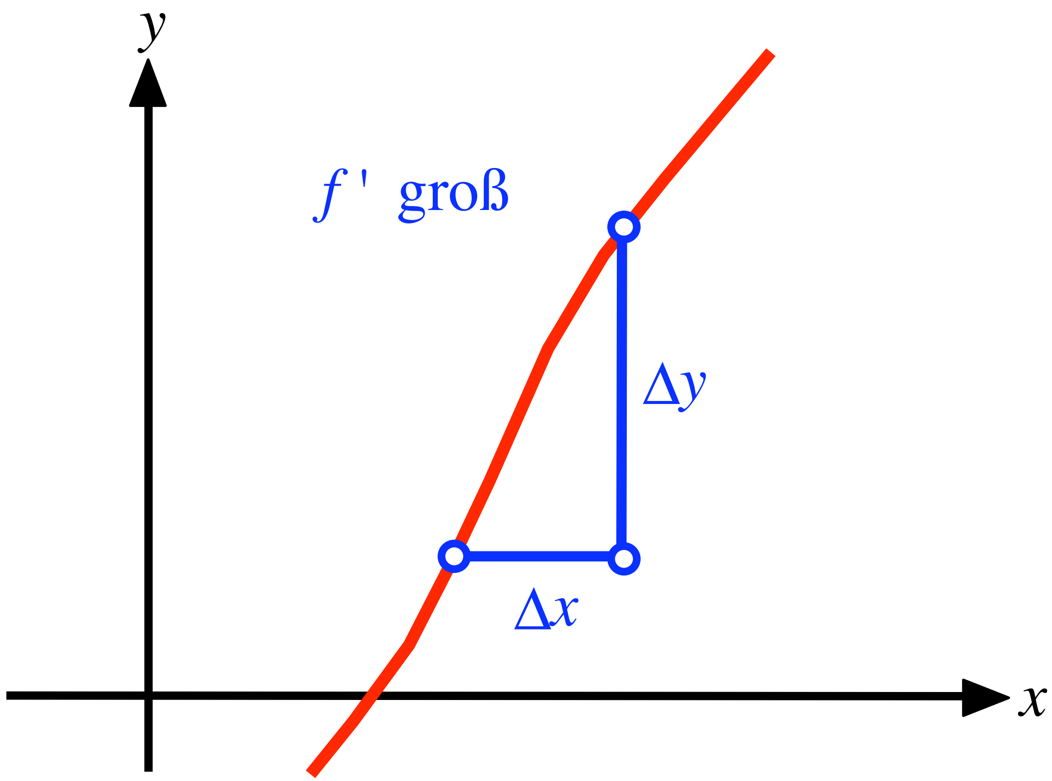
Funktionsdiskussion

- Sensibilität der Funktion
- Mittelwertsatz für stetige Funktionen
- Wer ist stärker?
- Unbestimmte Grenzwerte

Komplexe Zahlen



y
$f\,'$ klein
Δy
Δx
x



Kleine Ursache, große Wirkung

Fehlerfortpflanzung

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\Delta y}{\Delta x} \right)$$

$$\Rightarrow \quad \Delta y \approx f'(x_0)\Delta x$$

Fehlerfortpflanzung

$$\Delta y \approx f'(x_0)\,\Delta x$$

Eingabe-
fehler,
Mess-
fehler

Fehlerfortpflanzung

Fehlerfortpflanzungs-
faktor

$$\Delta y \approx f'\left(x_0\right)\Delta x$$

Eingabe-
fehler,
Mess-
fehler

Fehlerfortpflanzung

Fehlerfortpflanzungs-
faktor

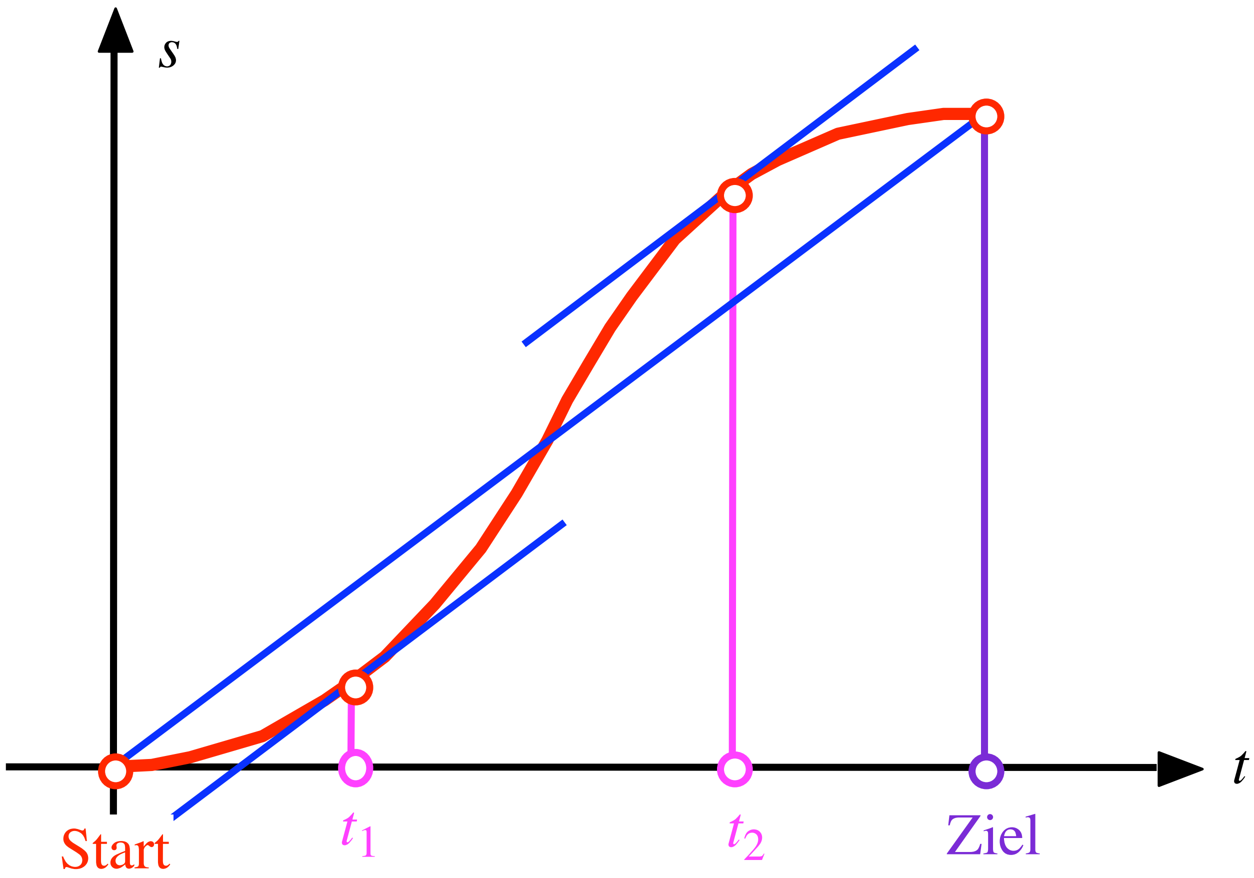
$$\Delta y \approx f'(x_0)\,\Delta x$$

Fehler
im
Resultat

Eingabe-
fehler,
Mess-
fehler

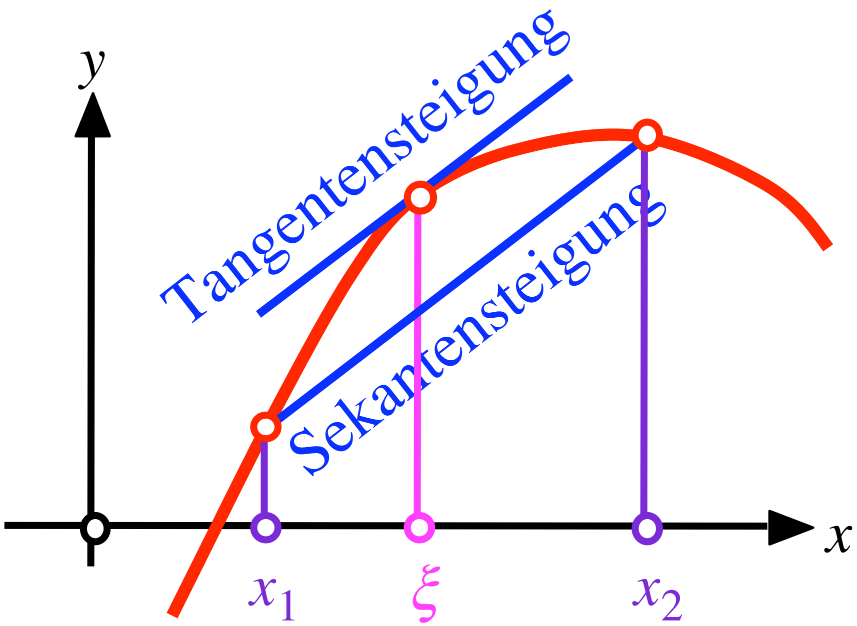
Von Null auf Hundertachtzig

Von Null auf Hundertachtzig



Mindestens einmal fahren wir mit der Durchschnittsgeschwindigkeit.

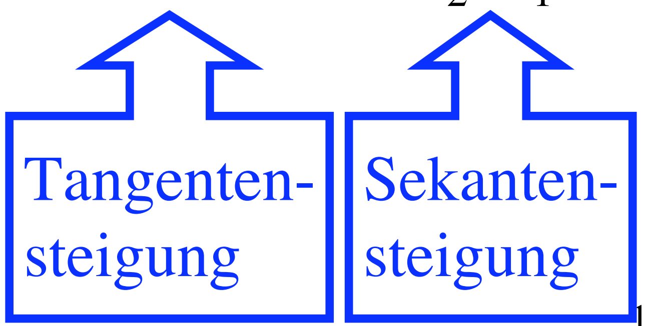
Mittelwertsatz



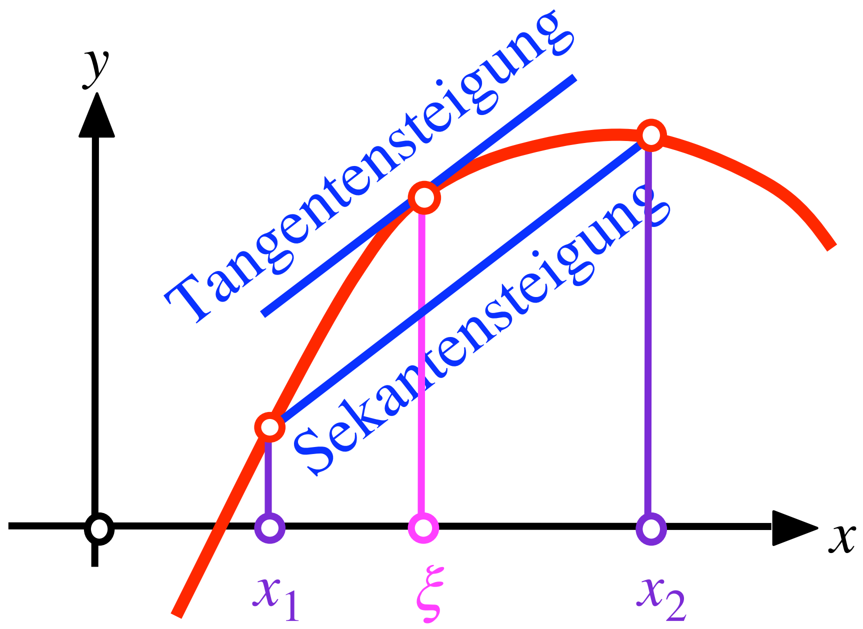
Stetige Funktion

Es gibt (mindestens) ein $\xi \in (x_1, x_2)$ mit:

$$f'(\xi) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$



Mittelwertsatz



Stetige Funktion

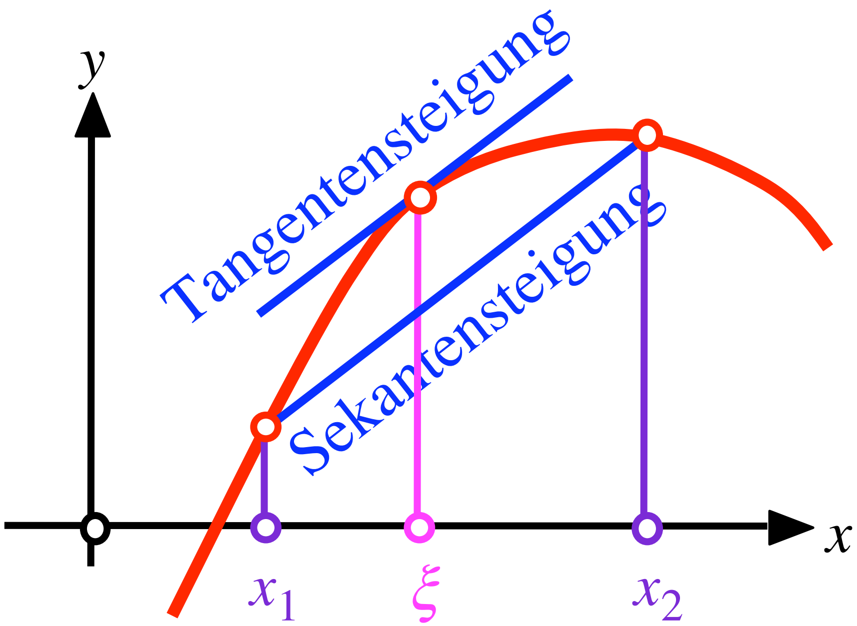
Es gibt (mindestens) ein $\xi \in (x_1, x_2)$ mit:

$$f'(\xi) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

Es gibt (mindestens) ein $\xi \in (x_1, x_2)$ mit :

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1)$$

Mittelwertsatz



Stetige Funktion

Es gibt (mindestens) ein $\xi \in (x_1, x_2)$ mit:

$$f'(\xi) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

Es gibt (mindestens) ein $\xi \in (x_1, x_2)$ mit :

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1)$$

$$f(x_2) = f(x_1) + f'(\xi)(x_2 - x_1)$$

Mittelwertsatz

Es gibt (mindestens) ein $\xi \in (x_1, x_2)$ mit :

$$f(x_2) = f(x_1) + f'(\xi)(x_2 - x_1)$$

Mittelwertsatz

Es gibt (mindestens) ein $\xi \in (x_1, x_2)$ mit :

$$f(x_2) = f(x_1) + f'(\xi)(x_2 - x_1)$$

Andere Schreibweise : Es gibt (mindestens) ein $\xi \in (x_0, x)$ mit :

$$f(x) = f(x_0) + f'(\xi)(x - x_0)$$

Mittelwertsatz

Es gibt (mindestens) ein $\xi \in (x_1, x_2)$ mit:

$$f(x_2) = f(x_1) + f'(\xi)(x_2 - x_1)$$

Andere Schreibweise: Es gibt (mindestens) ein $\xi \in (x_0, x)$ mit:

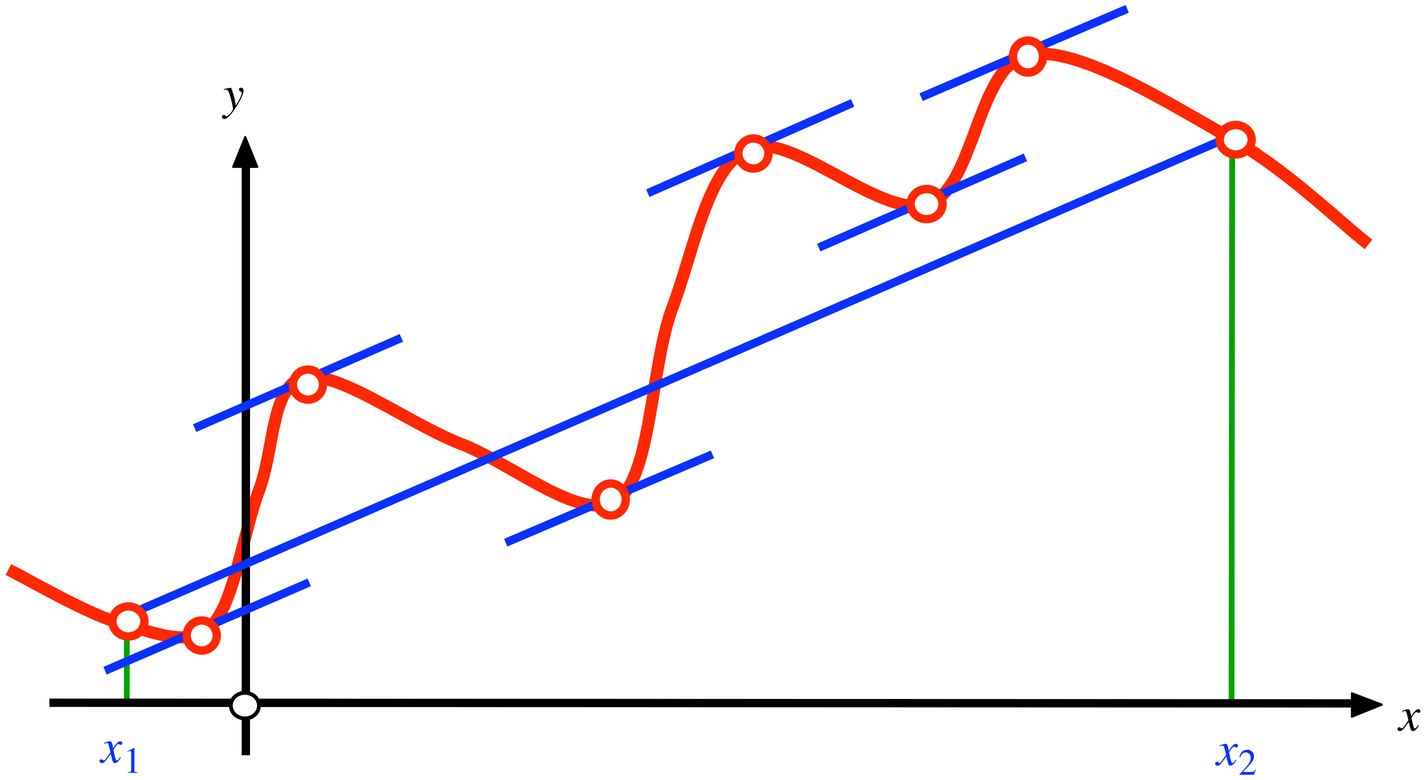
$$f(x) = f(x_0) + f'(\xi)(x - x_0)$$

Unterschied zu:

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

$\approx$ $\qquad$ x_0

Mittelwertsatz



Mehrere passende ξ-Werte

Wer ist stärker?

Wer ist stärker?

Welche Funktion wächst am stärksten?

Exponentialfunktion: e^x, a^x

Potenzfunktion: x^n

Logarithmusfunktion: $\ln(x), \log_a(x)$

Beispiel

$$y = 2^x \quad \text{(Exponentialfunktion)}$$

versus

$$y = x^2 \quad \text{(Potenzfunktion)}$$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$y = 2^x$	1	2	4	8	16	32	64	128	256

Beispiel

$$y = 2^x \quad \text{(Exponentialfunktion)}$$

versus

$$y = x^2 \quad \text{(Potenzfunktion)}$$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$y=2^x$	1	2	4	8	16	32	64	128	256
$y=x^2$	0	1	4	9	16	25	36	49	64

Beispiel

$y = 2^x$ (Exponentialfunktion)

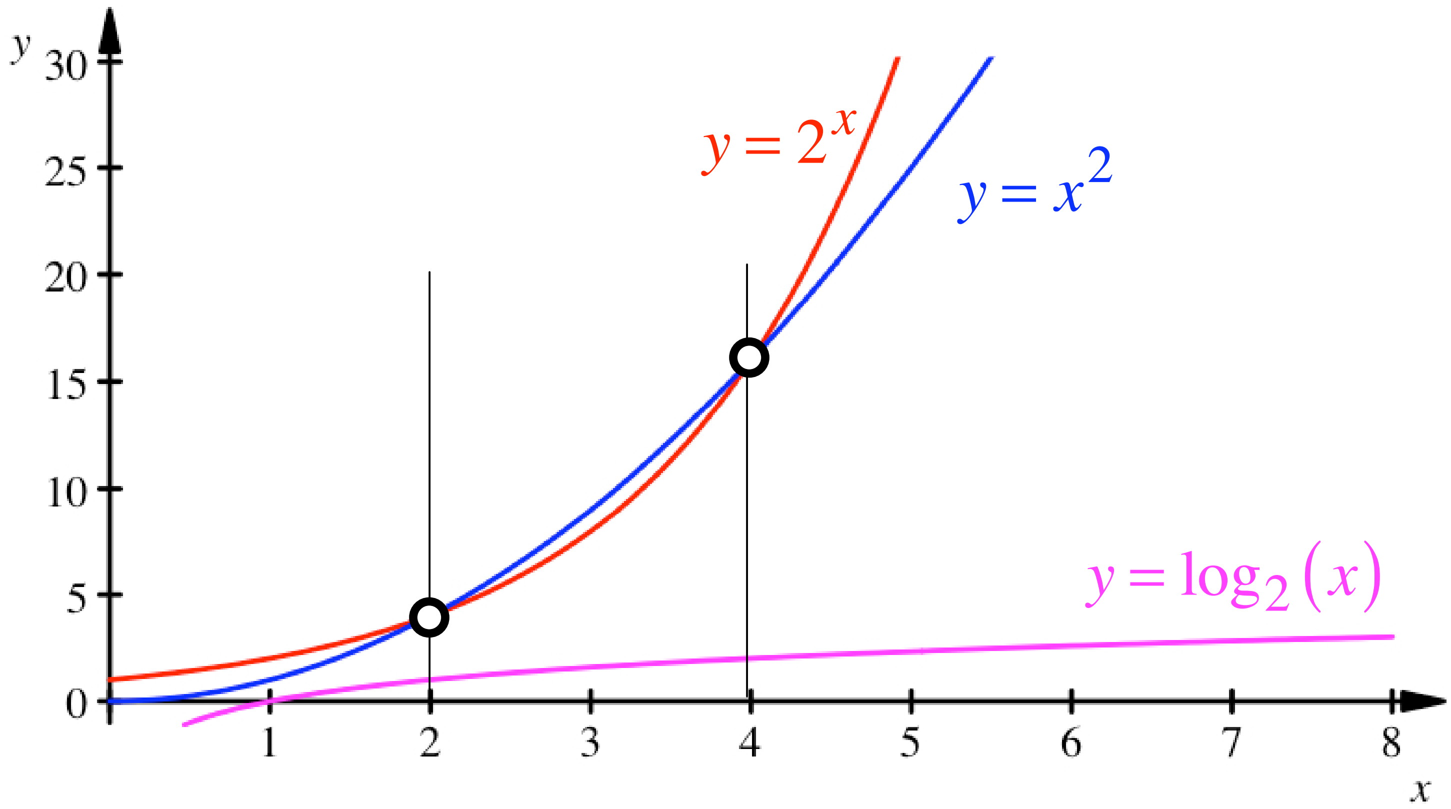
versus

$y = x^2$ (Potenzfunktion)

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$y = 2^x$	1	2	4	8	16	32	64	128	256
$y = x^2$	0	1	4	9	16	25	36	49	64

Ab hier Exponential-
funktion stärker.

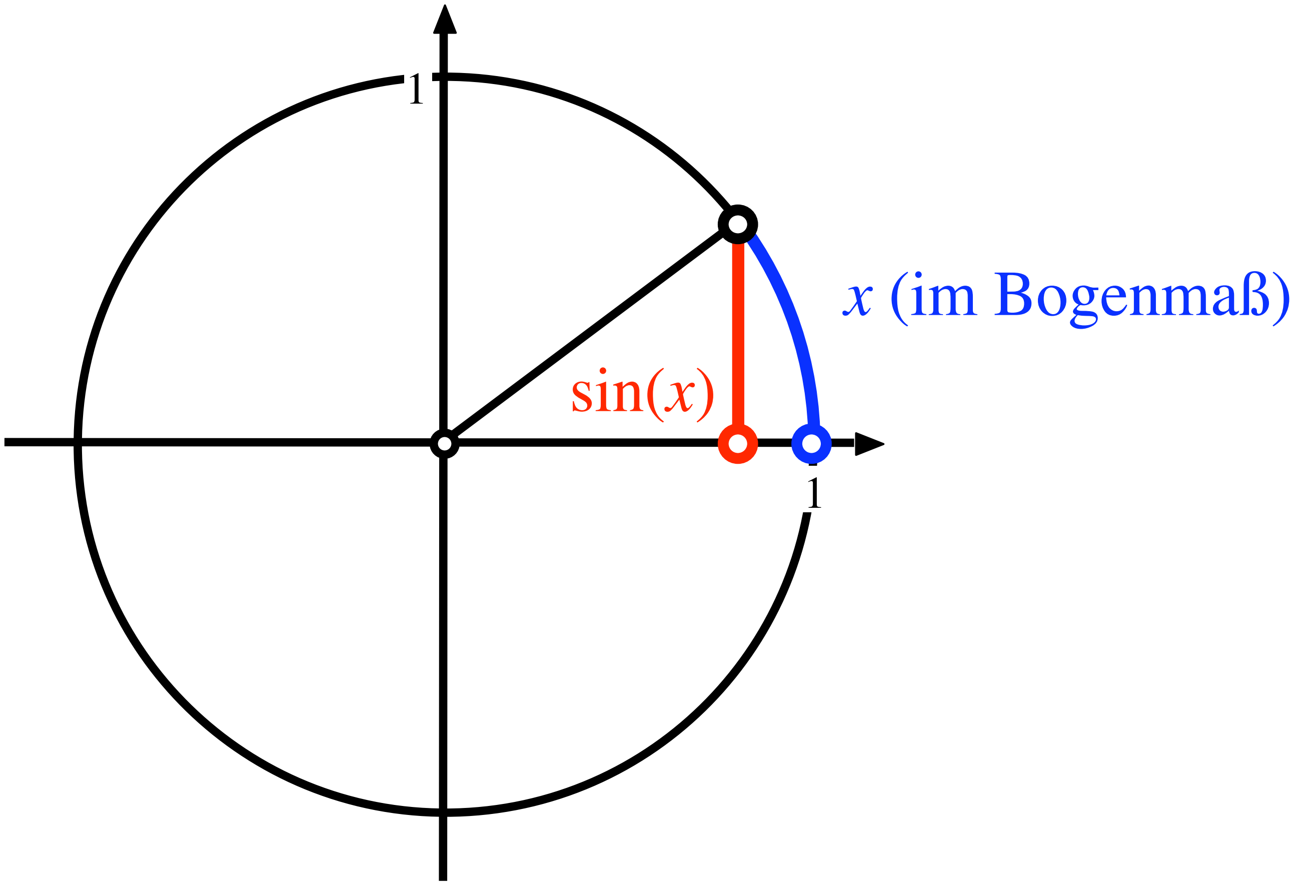
Beispiel: $y = 2^x$ (Exponentialfunktion) versus $y = x^2$ (Potenzfunktion)



Ab hier Exponential-
funktion stärker.

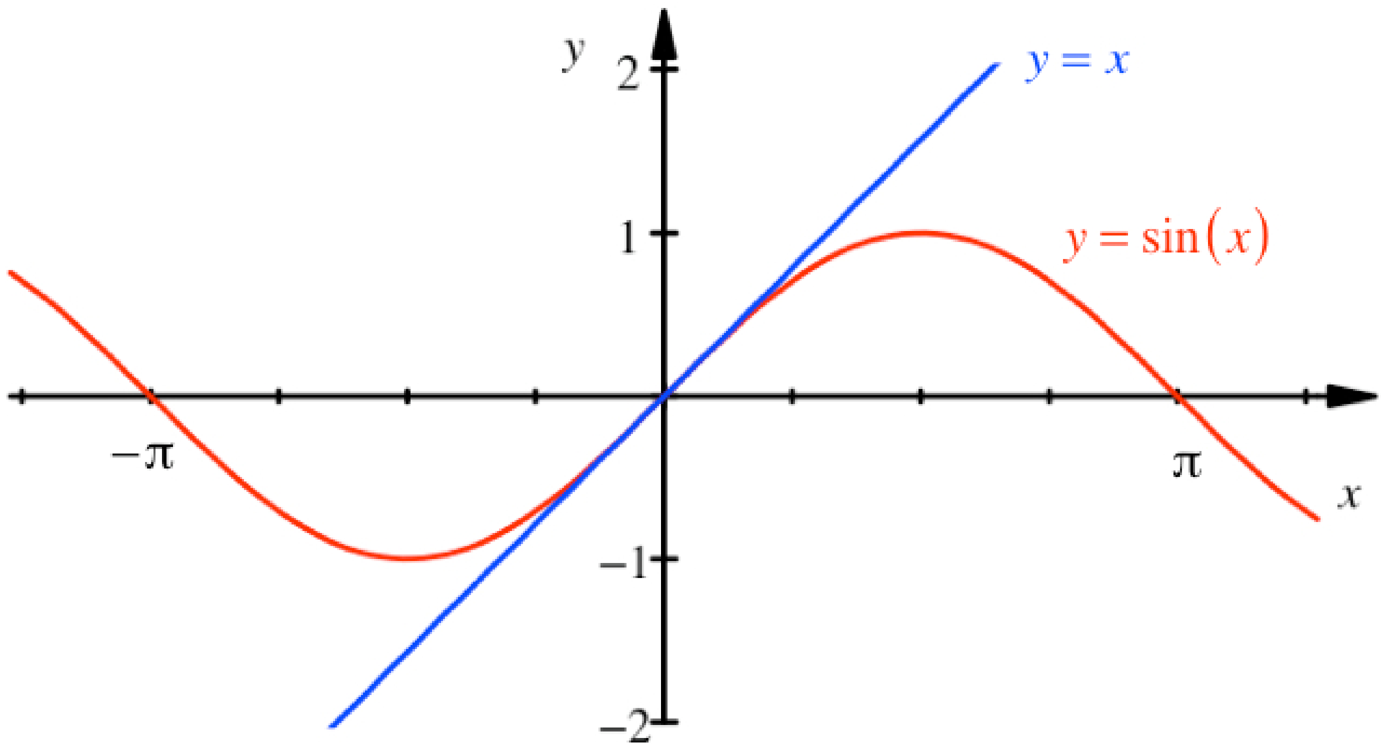
Unbestimmte Grenzwerte

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{\sin(x)}{x} \right) = ?$$



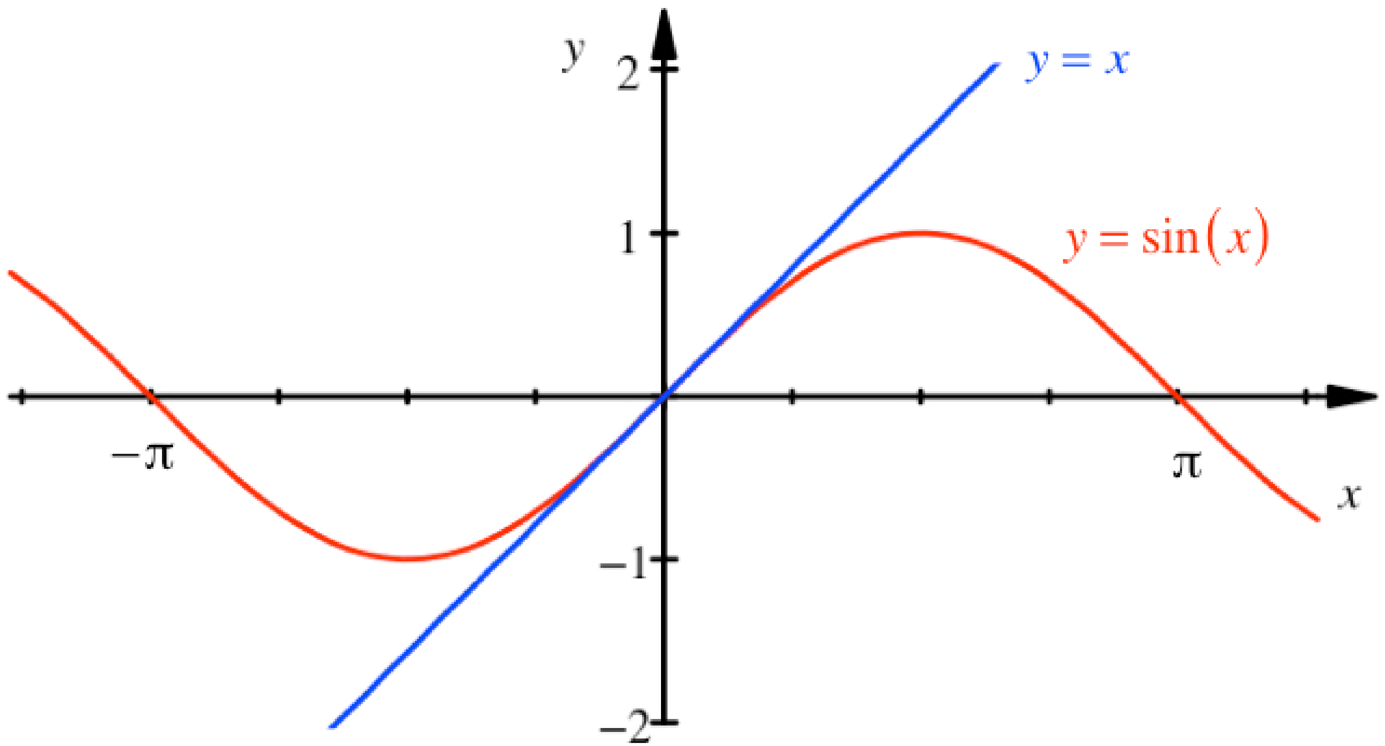
Unbestimmte Grenzwerte

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{\sin(x)}{x} \right) = ?$$



Unbestimmte Grenzwerte

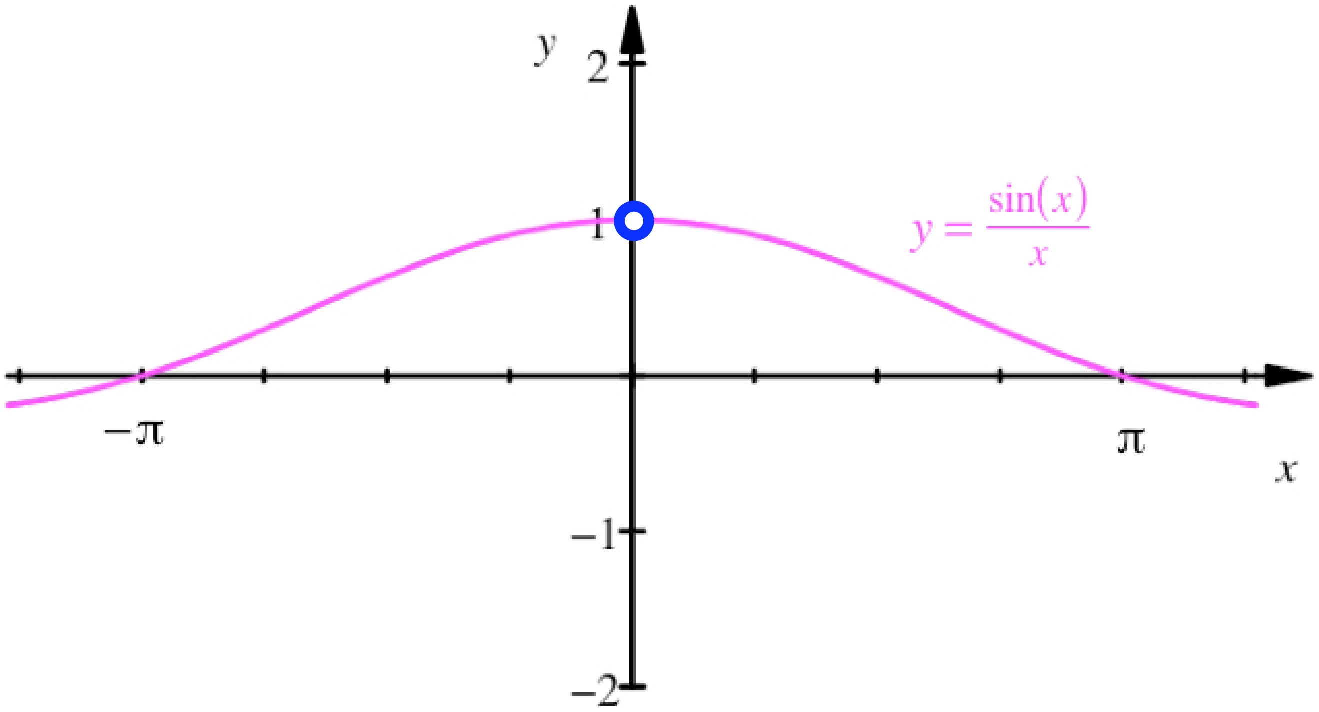
$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin(x)}{x}\right) = ?$$



Intuition: Für kleine x ist $x \approx \sin(x)$, also $\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin(x)}{x}\right) = 1$

Unbestimmte Grenzwerte

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin(x)}{x}\right) = ?$$



Intuition: Für kleine x ist $x \approx \sin(x)$, also $\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin(x)}{x}\right) = 1$

Mittelwertsatz:

$$f(x) = f(x_0) + f'(\xi)(x - x_0)$$

ξ zwischen
x_0 und x

Mittelwertsatz:

$$f(x) = f(x_0) + f'(\xi)(x - x_0)$$

$$\sin(x) = \sin(x_0) + \cos(\xi)(x - x_0)$$

ξ zwischen x_0 und x

Mittelwertsatz:

$$f(x) = f(x_0) + f'(\xi)(x - x_0)$$

$$\sin(x) = \sin(x_0) + \cos(\xi)(x - x_0)$$

Setzen $x_0 = 0$:

Mittelwertsatz:

$$f(x) = f(x_0) + f'(\xi)(x - x_0)$$

$$\sin(x) = \sin(x_0) + \cos(\xi)(x - x_0)$$

Setzen $x_0 = 0$:

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{\sin(x)}{x} \right) =$$

Mittelwertsatz:

$$f\left(x\right) = f\left(x_0\right) + f'(\xi)\left(x - x_0\right)$$

$$\sin\left(x\right) = \sin\left(x_0\right) + \cos\left(\xi\right)\left(x - x_0\right)$$

Setzen $x_0 = 0$:

$$\lim_{x \to 0}\left(\frac{\sin(x)}{x}\right) = \lim_{x \to 0}\left(\frac{x\cos(\xi)}{x}\right)$$

Mittelwertsatz:

$$f(x) = f(x_0) + f'(\xi)(x - x_0)$$

$$\sin(x) = \sin(x_0) + \cos(\xi)(x - x_0)$$

Setzen $x_0 = 0$:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin(x)}{x}\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{x\cos(\xi)}{x}\right) = \lim_{x\to 0}\left(\cos(\xi)\right) = \cos(0) = 1$$

ξ zwischen $x_0 = 0$ und x

Verallgemeinerung

$f(x)$ mit $f(x_0) = 0$

$g(x)$ mit $g(x_0) = 0$

$$\lim_{x \to x_0} \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right) =$$

Verallgemeinerung

$f(x)$ mit $f(x_0) = 0$

$g(x)$ mit $g(x_0) = 0$

$$\lim_{x \to x_0} \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right) = \lim_{x \to x_0} \left(\frac{f(x_0) + f'(\xi_1)(x - x_0)}{g(x_0) + g'(\xi_2)(x - x_0)} \right)$$

ξ_1 und ξ_2 beide zwischen x_0 und x

Verallgemeinerung

$f(x)$ mit $f(x_0) = 0$

$g(x)$ mit $g(x_0) = 0$

$$\lim_{x \to x_0} \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right) = \lim_{x \to x_0} \left(\frac{\cancelto{0}{f(x_0)} + f'(\xi_1)(x - x_0)}{\cancelto{0}{g(x_0)} + g'(\xi_2)(x - x_0)} \right)$$

$\boxed{\xi_1 \text{ und } \xi_2 \text{ beide zwischen } x_0 \text{ und } x}$

Verallgemeinerung

$f(x)$ mit $f(x_0)=0$

$g(x)$ mit $g(x_0)=0$

$$\lim_{x\to x_0}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)=\lim_{x\to x_0}\left(\frac{\overset{0}{\cancel{f(x_0)}}+f'(\xi_1)\cancel{(x-x_0)}}{\underset{0}{\cancel{g(x_0)}}+g'(\xi_2)\cancel{(x-x_0)}}\right)$$

ξ_1 und ξ_2 beide zwischen x_0 und x

Verallgemeinerung

$f(x)$ mit $f(x_0) = 0$

$g(x)$ mit $g(x_0) = 0$

$$\lim_{x \to x_0}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \lim_{x \to x_0}\left(\frac{\overset{0}{\cancel{f(x_0)}} + f'(\xi_1)\cancel{(x - x_0)}}{\underset{0}{\cancel{g(x_0)}} + g'(\xi_2)\cancel{(x - x_0)}}\right) = \lim_{x \to x_0}\left(\frac{f'(\xi_1)}{g'(\xi_2)}\right)$$

ξ_1 und ξ_2 beide zwischen x_0 und x

Verallgemeinerung

$f(x)$ mit $f(x_0)=0$

$g(x)$ mit $g(x_0)=0$

$$\lim_{x\to x_0}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)=\lim_{x\to x_0}\left(\frac{\overset{0}{\cancel{f(x_0)}}+f'(\xi_1)\cancel{(x-x_0)}}{\underset{0}{\cancel{g(x_0)}}+g'(\xi_2)\cancel{(x-x_0)}}\right)=\lim_{x\to x_0}\left(\frac{f'(\xi_1)}{g'(\xi_2)}\right)=\frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$$

ξ_1 und ξ_2 beide zwischen x_0 und x

Verallgemeinerung

$f(x)$ mit $f(x_0)=0$

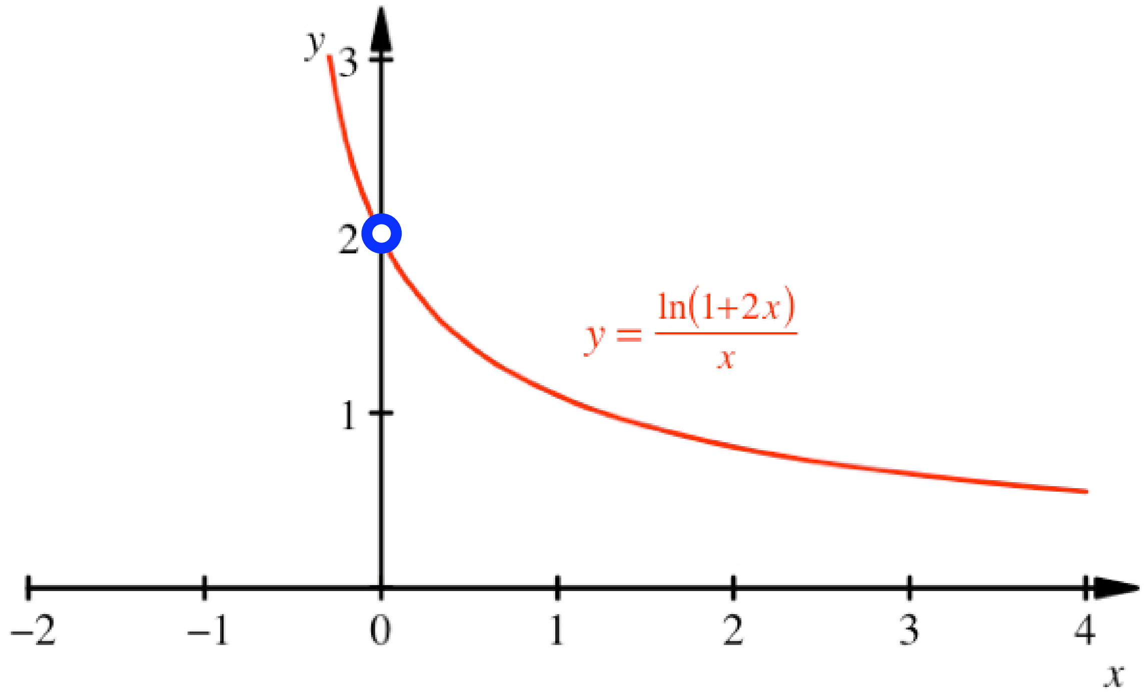
$g(x)$ mit $g(x_0)=0$

$$\lim_{x\to x_0}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)=\lim_{x\to x_0}\left(\frac{f(x_0)+f'(\xi_1)(x-x_0)}{g(x_0)+g'(\xi_2)(x-x_0)}\right)=\lim_{x\to x_0}\left(\frac{f'(\xi_1)}{g'(\xi_2)}\right)=\frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$$

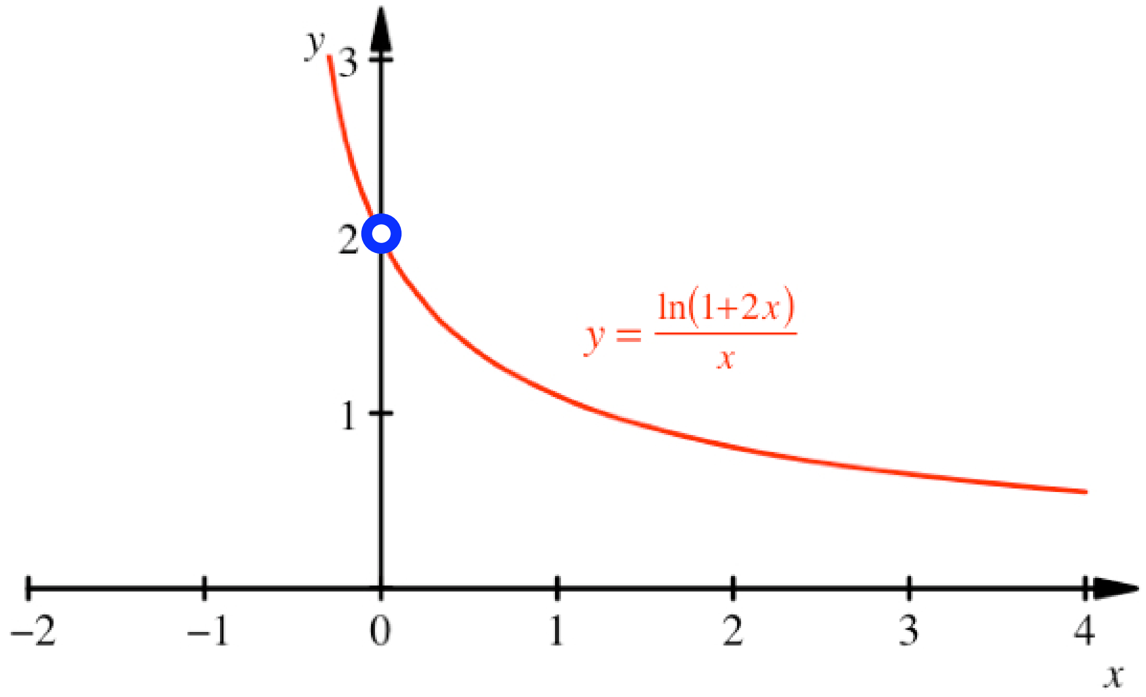
$$\boxed{\lim_{x\to x_0}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)=\frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}}$$

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\ln(1+2x)}{x}\right)=?$$

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{\ln(1+2x)}{x} \right) = ?$$

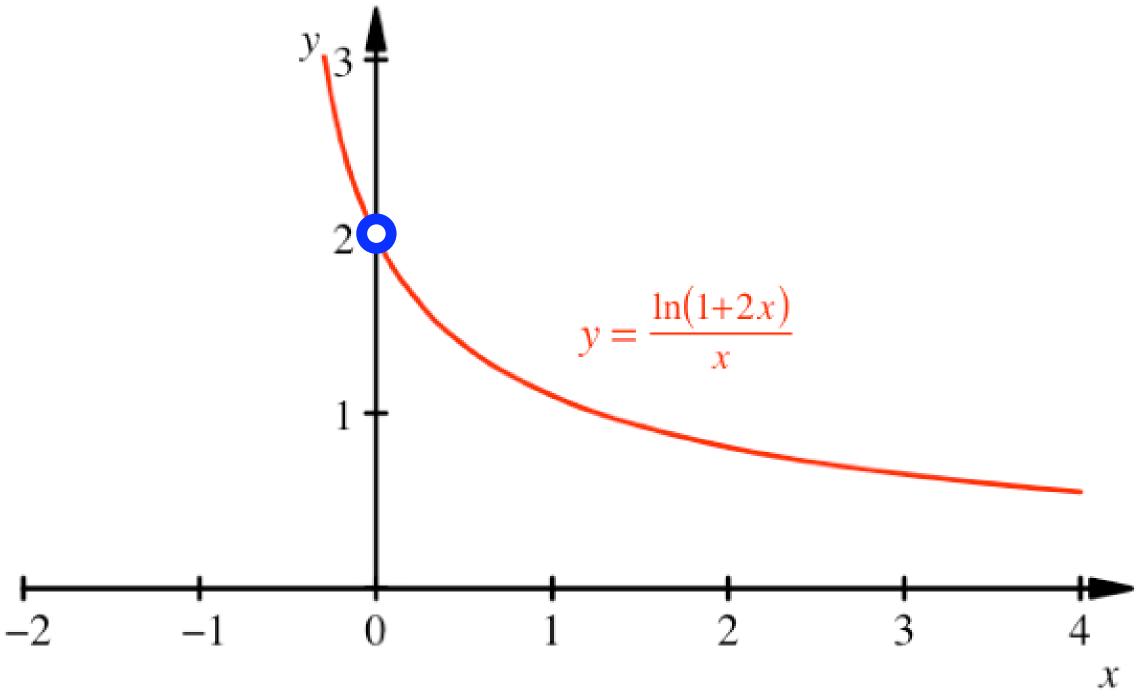


$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\ln(1+2x)}{x}\right)=?$$



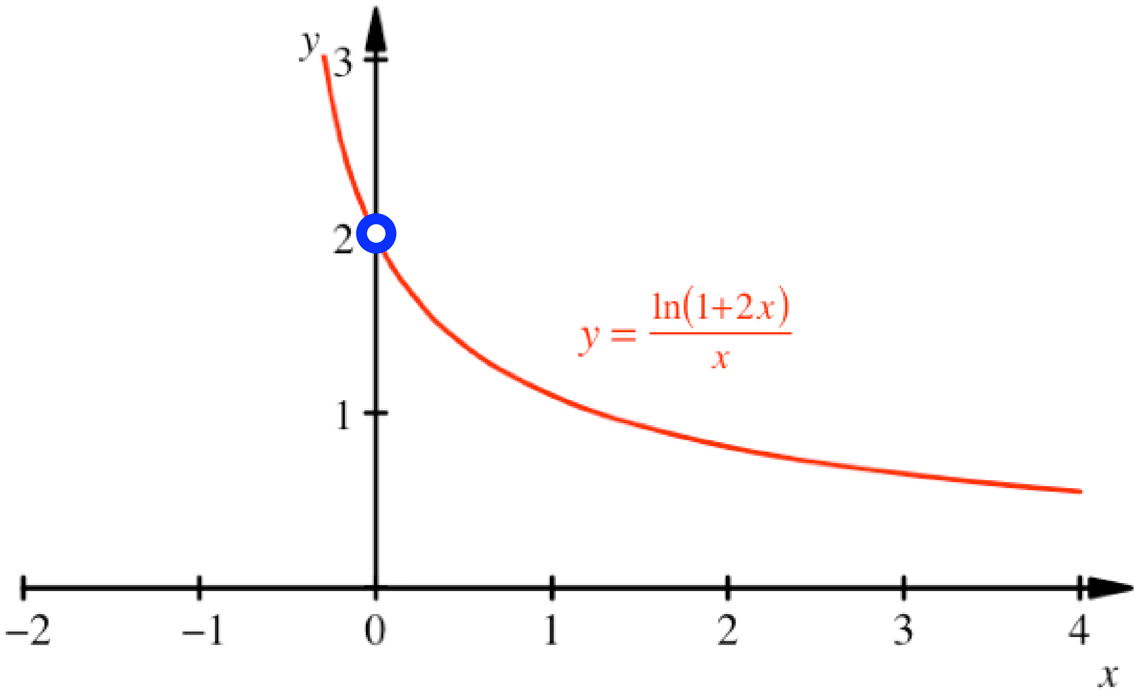
Vermutung: $$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\ln(1+2x)}{x}\right)=2$$

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\ln(1+2x)}{x}\right) = ?$$



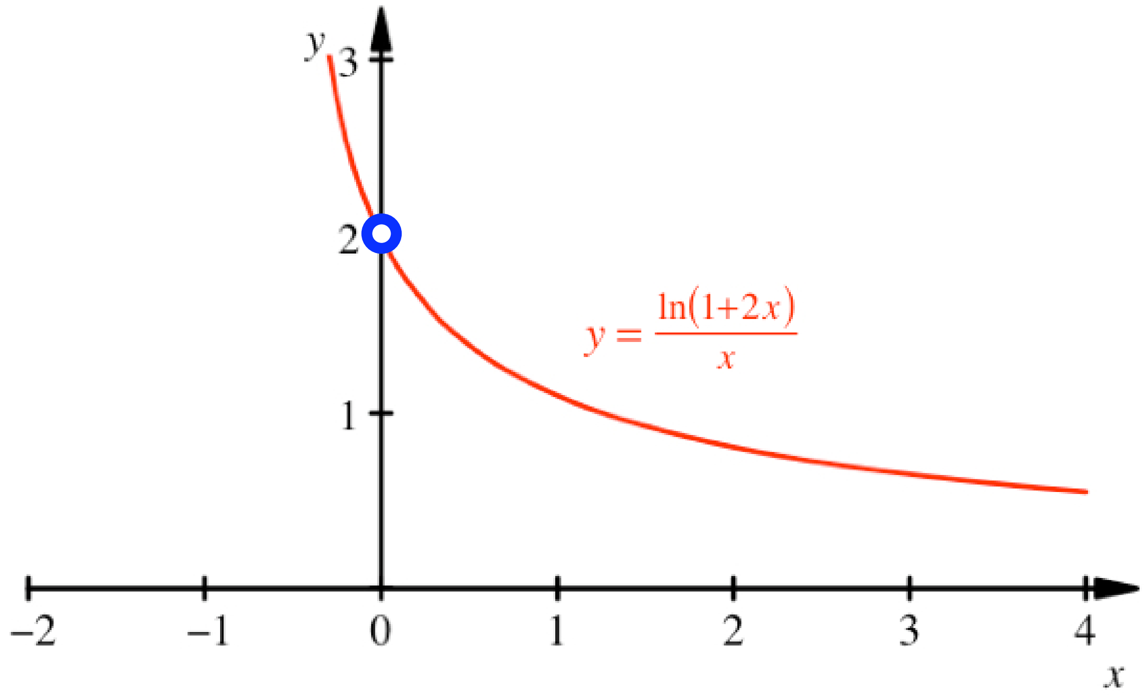
Beweis: $\lim_{x\to 0}\left(\frac{\ln(1+2x)}{x}\right) = \frac{(\ln(1+2x))'}{x'}\Bigg|_{x=0}$

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\ln(1+2x)}{x}\right) = ?$$



Beweis: $\lim_{x\to 0}\left(\frac{\ln(1+2x)}{x}\right) = \frac{(\ln(1+2x))'}{x'}\Bigg|_{x=0} = \frac{\frac{2}{1+2x}}{1}\Bigg|_{x=0} = \frac{\frac{2}{1+2\cdot 0}}{1} = 2$

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\ln(1+2x)}{x}\right) = ?$$



Allgemein: $$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\ln(1+ax)}{x}\right) = \frac{\frac{a}{1+a\cdot 0}}{1} = a$$

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\left(\frac{\ln(1+ax)}{x}\right) = \frac{\frac{a}{1+a\cdot 0}}{1} = a}$$

Folgerungen

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\left(\frac{\ln(1+ax)}{x}\right)=\frac{\frac{a}{1+a\cdot 0}}{1}=a}$$

Folgerungen $\lim_{x\to 0}\left((1+ax)^{\frac{1}{x}}\right)=$

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\left(\frac{\ln(1+ax)}{x}\right) = \frac{\frac{a}{1+a\cdot 0}}{1} = a}$$

Folgerungen $\lim\limits_{x\to 0}\left((1+ax)^{\frac{1}{x}}\right) = \lim\limits_{x\to 0}\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{x}\ln(1+ax)}\right)$

Andere Darstellung

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\left(\frac{\ln(1+ax)}{x}\right)=\frac{\frac{a}{1+a\cdot 0}}{1}=a}$$

Folgerungen $\lim_{x\to 0}\left((1+ax)^{\frac{1}{x}}\right)=\lim_{x\to 0}\left(e^{\frac{1}{x}\ln(1+ax)}\right)=e^{\lim_{x\to 0}\left(\frac{\ln(1+ax)}{x}\right)}$

Und?

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\left(\frac{\ln(1+ax)}{x}\right)=\frac{\frac{a}{1+a\cdot 0}}{1}=a}$$

Folgerungen $\lim_{x\to 0}\left((1+ax)^{\frac{1}{x}}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{x}\ln(1+ax)}\right)=\mathrm{e}^{\lim_{x\to 0}\left(\frac{\ln(1+ax)}{x}\right)}=\mathrm{e}^{a}$

Folgerungen $\lim\limits_{x\to 0}\left(\left(1+ax\right)^{\frac{1}{x}}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{x}\ln(1+ax)}\right)=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\ln(1+ax)}{x}\right)}=\mathrm{e}^{a}$

Folgerungen $\lim\limits_{x\to 0}\left((1+ax)^{\frac{1}{x}}\right) = \lim\limits_{x\to 0}\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{x}\ln(1+ax)}\right) = \mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\ln(1+ax)}{x}\right)} = \mathrm{e}^{a}$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{a}{n}\right)^{n}\right) \underset{m=\frac{1}{n}}{\underset{\uparrow}{=}} \lim_{m\to 0}\left((1+am)^{\frac{1}{m}}\right) = \mathrm{e}^{a}$$

Wenn *n* groß wird,
wird *m* klein.

Folgerungen $\lim\limits_{x\to 0}\left((1+ax)^{\frac{1}{x}}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\left(e^{\frac{1}{x}\ln(1+ax)}\right)=e^{\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\ln(1+ax)}{x}\right)}=e^{a}$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{a}{n}\right)^{n}\right)\underset{m=\frac{1}{n}}{\underset{\uparrow}{=}}\lim_{m\to 0}\left((1+am)^{\frac{1}{m}}\right)=e^{a}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{a}{n}\right)^{n}\right)=e^{a}$$

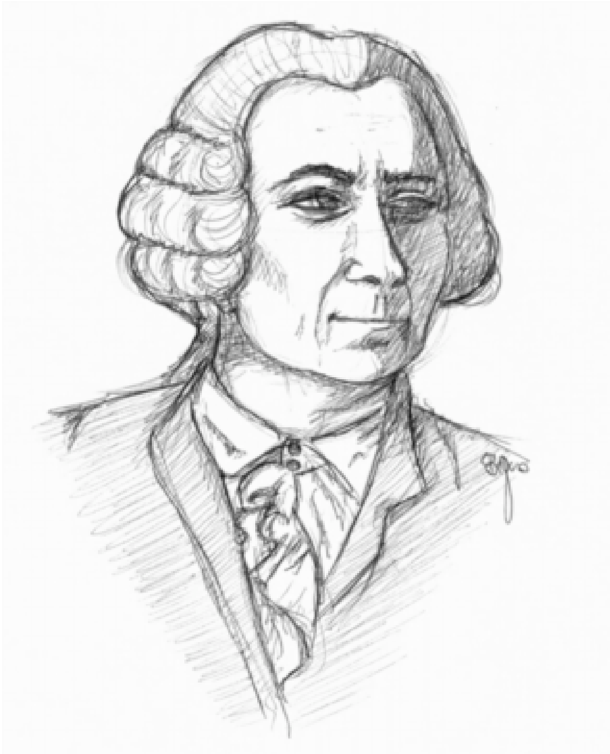
Folgerungen $\lim\limits_{x\to 0}\left((1+ax)^{\frac{1}{x}}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{x}\ln(1+ax)}\right)=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\ln(1+ax)}{x}\right)}=\mathrm{e}^{a}$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\tfrac{a}{n}\right)^{n}\right)\underset{\substack{\uparrow\\ m=\frac{1}{n}}}{=}\lim_{m\to 0}\left((1+am)^{\frac{1}{m}}\right)=\mathrm{e}^{a}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\tfrac{a}{n}\right)^{n}\right)=\mathrm{e}^{a}$$

Sonderfall: $a=1 \quad\Rightarrow\quad \boxed{\mathrm{e}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\left(1+\tfrac{1}{n}\right)^{n}\right)}$

Formel von Euler: $\boxed{e = \lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)}$



Leonhard Euler, 1707 - 1783
(Zeichnung: Bigna Steiner)

Formel von Euler: $$\boxed{\mathrm{e} = \lim_{n \to \infty} \left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \right)}$$

n	$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$
10	$1.1^{10} \approx 2.59374246$
100	$1.01^{100} \approx 2.704813829$
1000	$1.001^{1000} \approx 2.716923932$
1000000	$1.000001^{1000000} \approx 2.718280469$

Formel von Euler: $\boxed{e = \lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)}$

n	$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$
10	$1.1^{10} \approx 2.59374246$
100	$1.01^{100} \approx 2.704813829$
1000	$1.001^{1000} \approx 2.716923932$
1000000	$1.000001^{1000000} \approx 2.718280469$

$e = 2.718281828459045\ldots$

Wie man reich wird

Wie man reich wird

Wachstumsrate 1 (100%) pro Zeiteinheit

$$N(0) = N_0$$

$$N(1) = 2 \cdot N(0) = 2N_0$$

Wachstumsrate $\frac{1}{2}$ (50%) pro halbe Zeiteinheit

$$N(0) = N_0$$

$$N\left(\tfrac{1}{2}\right) = 1.5 \cdot N(0) = 1.5N_0$$

$$N(1) = (1.5)^2 \cdot N(0) = 2.25N_0$$

Wie man reich wird

Wachstumsrate $\frac{1}{3}$ pro Drittels-Zeiteinheit

$$N(0) = N_0$$

$$N\left(\frac{1}{3}\right) = \left(1 + \frac{1}{3}\right) N_0$$

$$N\left(\frac{2}{3}\right) = \left(1 + \frac{1}{3}\right)^2 N_0$$

$$N(1) = \left(1 + \frac{1}{3}\right)^3 N_0 = 2.\overline{370} N_0$$

Wie man reich wird

Wachstumsrate $\frac{1}{n}$ pro $\frac{1}{n}$-Zeiteinheit

$$N(0) = N_0$$

$$N\left(\frac{1}{n}\right) = \left(1 + \frac{1}{n}\right) N_0$$

$$N\left(\frac{2}{n}\right) = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 N_0$$

$$\vdots$$

$$N(1) = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n N_0$$

Strebt gegen e ≈ 2.718 für $n \to \infty$

Formel von Euler:

$$\boxed{e = \lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)}$$

n	$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$
1	2.00000000000000000000
10	2.59374246010000000000
100	2.70481382942153000000
1000	2.71692393223552000000
10000	2.71814592682436000000
100000	2.71826823719753000000
1000000	2.71828046915643000000
10000000	2.71828169398037000000
100000000	2.71828178639580000000
1000000000	2.71828203081451000000
10000000000	2.71828205323479000000
100000000000	2.71828205335711000000
1000000000000	2.71852349603724000000
10000000000000	2.71611003408690000000
100000000000000	2.71611003408702000000
1000000000000000	3.03503520654926000000
10000000000000000	1.00000000000000000000
100000000000000000	1.00000000000000000000

Rundungsfehler bewirken die Katastrophe

Erinnerung:

$$\left.\begin{array}{l} f(x) \ \text{ mit } \ f(x_0) = 0 \\ g(x) \ \text{ mit } \ g(x_0) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad \lim_{x \to x_0} \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right) = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$$

Erinnerung: $$\left.\begin{array}{l} f(x) \quad \text{mit} \quad f(x_0) = 0 \\ g(x) \quad \text{mit} \quad g(x_0) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad \lim_{x \to x_0} \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right) = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$$

Allgemein: Bernoulli - de l'Hôpital

$$\boxed{\left.\begin{array}{ll} \lim\limits_{x \to x_0} \big(f(x)\big) = 0 & (\text{oder } \pm\infty) \\ \lim\limits_{x \to x_0} \big(g(x)\big) = 0 & (\text{oder } \pm\infty) \end{array}\right\} \Rightarrow \quad \lim_{x \to x_0} \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right) = \lim_{x \to x_0} \left(\frac{f'(x)}{g'(x)} \right)}$$

Ohne Beweis

Bernoulli - de l'Hôpital

$$\left.\begin{array}{ll}\lim\limits_{x\to x_0}\big(f(x)\big)=0 & \quad (\text{oder } \pm\infty) \\[2ex] \lim\limits_{x\to x_0}\big(g(x)\big)=0 & \quad (\text{oder } \pm\infty)\end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to x_0}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)=\lim_{x\to x_0}\left(\frac{f'(x)}{g'(x)}\right)$$

Johann Bernoulli
1667-1748

Guillaume de L'Hôpital
1661-1704

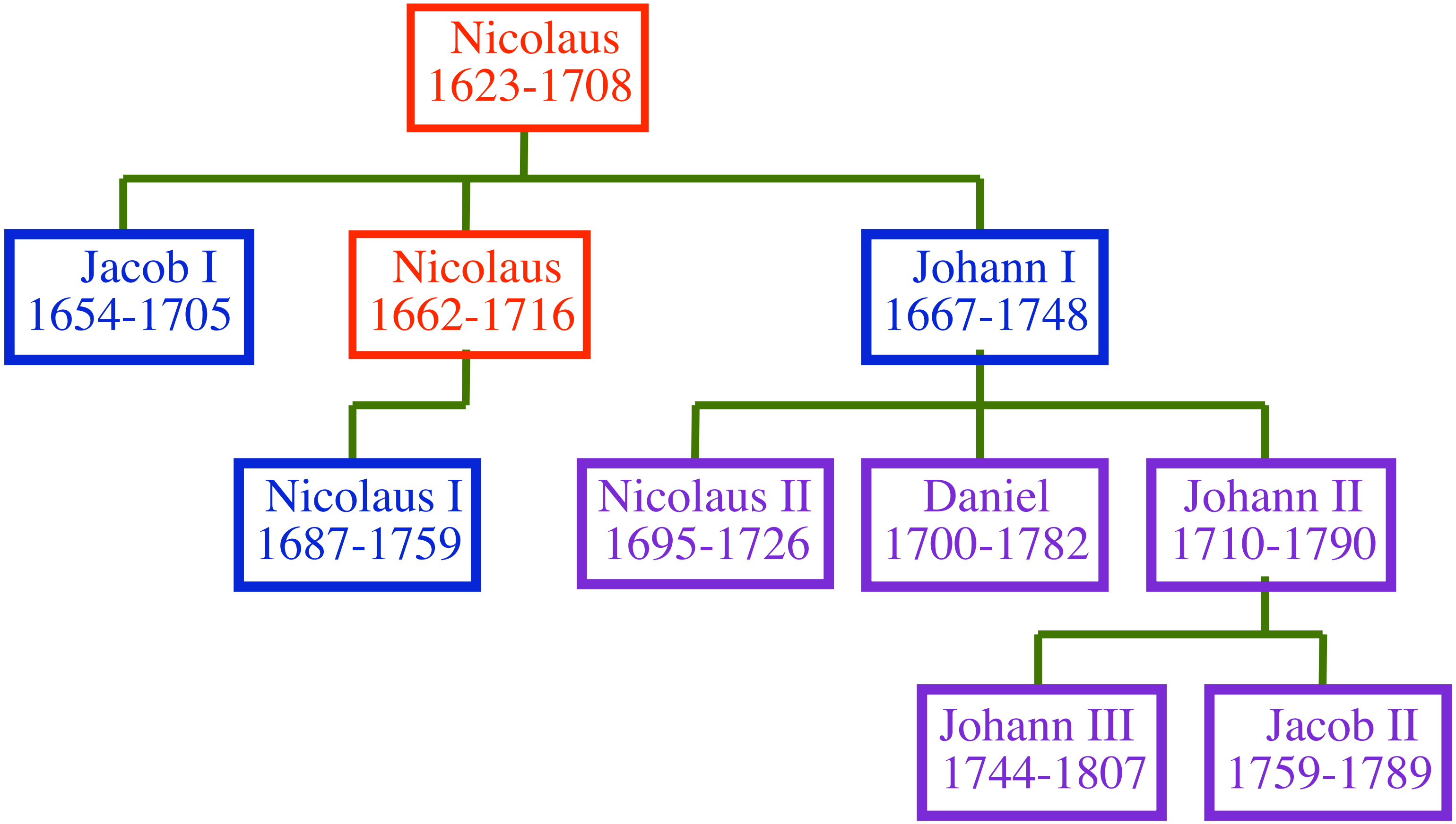
Auswahl seiner Titel:
Guillaume-François-Antoine Marquis de l'Hôpital,
Marquis de Sainte-Mesme,
Comte d'Entremont,
Seigneur d'Ouques-la-Chaise

Grabplatte in der Peterskirche

Johann Bernoulli
1667-1748

Guillaume de L'Hôpital
1661-1704

Bernoulli


Nicolaus 1623-1708
Jacob I 1654-1705
Nicolaus 1662-1716
Johann I 1667-1748
Nicolaus I 1687-1759
Nicolaus II 1695-1726
Daniel 1700-1782
Johann II 1710-1790
Johann III 1744-1807
Jacob II 1759-1789

$\mathbb{C}$

Komplexe Zahlen

Die imaginäre Einheit i (auch j, I)

$$\mathbb{C} = \left\{ z \,\middle|\, z = x + \mathrm{i}y, \quad x \in \mathbb{R}, \quad y \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{i}^2 = -1 \right\}$$

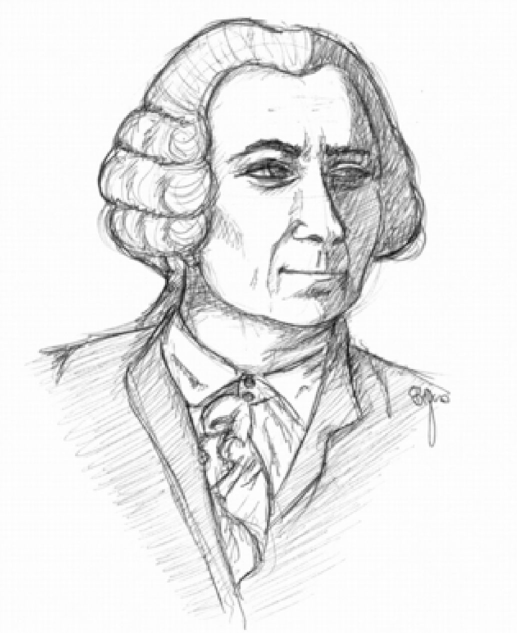
Die imaginäre Einheit i (auch j, I)

$$\mathbb{C} = \left\{ z \,\middle|\, z = x + \mathrm{i}y, \quad x \in \mathbb{R}, \quad y \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{i}^2 = -1 \right\}$$

$\mathbb{C}$ = Menge der komplexen Zahlen

Die imaginäre Einheit i (auch j, I)

$$\mathbb{C} = \left\{ z \,\middle|\, z = x + \mathrm{i}y, \quad x \in \mathbb{R}, \quad y \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{i}^2 = -1 \right\}$$



Leonhard Euler, 1707 - 1783

Die imaginäre Einheit i (auch j, I)

$$\mathbb{C} = \left\{ z \,\middle|\, z = x + \mathrm{i}y, \quad x \in \mathbb{R}, \quad y \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{i}^2 = -1 \right\}$$

$$\boxed{\begin{array}{ll} x = \mathrm{Re}(z) & \text{Realteil von } z \\ y = \mathrm{Im}(z) & \text{Imaginärteil von } z \end{array}}$$

Die imaginäre Einheit i (auch j, I)

$$\mathbb{C} = \left\{ z \,\middle|\, z = x + \mathrm{i}y, \quad x \in \mathbb{R}, \quad y \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{i}^2 = -1 \right\}$$

$x = \mathrm{Re}(z)$ Realteil von z

$y = \mathrm{Im}(z)$ Imaginärteil von z

$$\mathrm{Re}\left(\pi - \tfrac{1}{2}\mathrm{i}\right) = \pi$$

$$\mathrm{Im}\left(\pi - \tfrac{1}{2}\mathrm{i}\right) = -\tfrac{1}{2}$$

Die imaginäre Einheit i (auch j, I)

$$\mathbb{C} = \left\{ z \,\middle|\, z = x + \mathrm{i}y, \quad x \in \mathbb{R}, \quad y \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{i}^2 = -1 \right\}$$

$x = \mathrm{Re}(z)$ Realteil von z

$y = \mathrm{Im}(z)$ Imaginärteil von z

$$\mathrm{Re}\left(\pi - \tfrac{1}{2}\mathrm{i}\right) = \pi$$

$$\mathrm{Im}\left(\pi - \tfrac{1}{2}\mathrm{i}\right) = -\tfrac{1}{2}$$

Der Imaginärteil ist eine *reelle* Zahl

How to compute

i wie eine Variable behandeln

$i^2 = -1$ setzen

How to compute

$$(3+2\mathrm{i})+(2+5\mathrm{i})=5+7\mathrm{i}$$
$$(-2+8\mathrm{i})-(3-\mathrm{i})=-5+9\mathrm{i}$$

$$(x+\mathrm{i}y)+(u+\mathrm{i}v)=(x+u)+(y+v)\mathrm{i}$$
$$(x+\mathrm{i}y)-(u+\mathrm{i}v)=(x-u)+(y-v)\mathrm{i}$$

How to compute

$$(3+2i)(2+5i)=6+15i+4i+10i^2$$

How to compute

$$
\begin{aligned}
(3+2\mathrm{i})(2+5\mathrm{i}) &= 6+15\mathrm{i}+4\mathrm{i}+10\mathrm{i}^2 \\
&= 6+15\mathrm{i}+4\mathrm{i}-10 = -4+19\mathrm{i}
\end{aligned}
$$

How to compute

$$
\begin{aligned}
(3+2\mathrm{i})(2+5\mathrm{i}) &= 6+15\mathrm{i}+4\mathrm{i}+10\mathrm{i}^2 \\
&= 6+15\mathrm{i}+4\mathrm{i}-10 = -4+19\mathrm{i}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(x+\mathrm{i}y)(u+\mathrm{i}v) &= xu+\mathrm{i}xv+\mathrm{i}yu+\mathrm{i}^2yv \\
&= xu+\mathrm{i}xv+\mathrm{i}yu-yv = xu-yv+\mathrm{i}(xv+yu)
\end{aligned}
$$

How to compute

$$\frac{3+2i}{4+3i}$$

How to compute

$$\frac{3+2i}{4+3i} = \frac{3+2i}{4+3i}\,\frac{4-3i}{4-3i}$$

erweitern

How to compute

$$\frac{3+2i}{4+3i} = \frac{3+2i}{4+3i}\,\frac{4-3i}{4-3i} = \frac{18-i}{16+9}$$

erweitern

How to compute

$$\frac{3+2i}{4+3i} = \frac{3+2i}{4+3i}\,\frac{4-3i}{4-3i} = \frac{18-i}{16+9} = \frac{18}{25} - \frac{1}{25}\,i$$

erweitern

How to compute

$$\frac{3+2\mathrm{i}}{4+3\mathrm{i}} = \frac{3+2\mathrm{i}}{4+3\mathrm{i}}\,\frac{4-3\mathrm{i}}{4-3\mathrm{i}} = \frac{18-\mathrm{i}}{16+9} = \frac{18}{25} - \frac{1}{25}\,\mathrm{i}$$

$$\frac{x+y\mathrm{i}}{u+v\mathrm{i}} = \frac{x+y\mathrm{i}}{u+v\mathrm{i}}\,\frac{u-v\mathrm{i}}{u-v\mathrm{i}} = \frac{(xu+yv)+\mathrm{i}(-xv+yu)}{u^2+v^2} = \frac{(xu+yv)}{u^2+v^2} + \mathrm{i}\,\frac{(-xv+yu)}{u^2+v^2}$$

erweitern

Konjugiert komplex

$u - v\mathrm{i}$ ist die zu $u + v\mathrm{i}$ *konjugiert komplexe* Zahl

Schreibweise: $u - v\mathrm{i} = \overline{u + v\mathrm{i}}$

Konjugiert komplex

$u - v\mathrm{i}$ ist die zu $u + v\mathrm{i}$ *konjugiert komplexe* Zahl

Schreibweise: $u - v\mathrm{i} = \overline{u + v\mathrm{i}}$

$$w\,\overline{w} = \left(u + v\mathrm{i}\right)\left(u - v\mathrm{i}\right) = u^2 - \left(\mathrm{i}v\right)^2 = u^2 + v^2$$

positive reelle Zahl

Betrag

$$|w| = |u + \mathrm{i}v| = \sqrt{u^2 + v^2} = \sqrt{w\,\bar{w}}$$

ist der *Betrag* der komplexen Zahl $w = u + \mathrm{i}v$

Quadratische Gleichungen

$$x^2 - 7x + 12 = 0$$

Quadratische Gleichungen

$$x^2 - 7x + 12 = 0 \qquad b^2 - 4ac = 49 - 48 = 1 > 0$$

Quadratische Gleichungen

$$x^2 - 7x + 12 = 0 \qquad b^2 - 4ac = 49 - 48 = 1 > 0$$

Formel

$$x_1 = \frac{-(-7)+\sqrt{1}}{2} = 4 \qquad x_2 = \frac{-(-7)-\sqrt{1}}{2} = 3$$

Quadratische Gleichungen

$$x^2 - 7x + 12 = 0 \qquad b^2 - 4ac = 49 - 48 = 1 > 0$$

Formel

$$x_1 = \frac{-(-7)+\sqrt{1}}{2} = 4 \qquad x_2 = \frac{-(-7)-\sqrt{1}}{2} = 3$$

Linearfaktoren

$$x^2 - 7x + 12 = \left(x - 4\right)\left(x - 3\right) = 0$$

Quadratische Gleichungen

$$x^2 - 7x + 12 = 0 \qquad b^2 - 4ac = 49 - 48 = 1 > 0$$

Formel

$$x_1 = \frac{-(-7)+\sqrt{1}}{2} = 4 \qquad x_2 = \frac{-(-7)-\sqrt{1}}{2} = 3$$

Linearfaktoren

$$x^2 - 7x + 12 = (x-4)(x-3) = 0$$

negative Summe der Lösungen

Produkt der Lösungen

Der Satz von Vieta $$x^2 + bx + c = (x - x_1)(x - x_2) = 0$$

Der Satz von Vieta

$$x^2 + bx + c = (x - x_1)(x - x_2) = 0$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ a=1}}{x}{}^2 + bx + c = 0$$

$$\Rightarrow \quad b = -\left(x_1 + x_2\right)$$

$$\Rightarrow \quad c = x_1 x_2$$

Der Satz von Vieta

$$x^2 + bx + c = (x - x_1)(x - x_2) = 0$$

François Viète, 1540 – 1603

$$\underset{\substack{\uparrow \\ a=1}}{x}{}^{2} + bx + c = 0$$

$$\Rightarrow \quad b = -\left(x_1 + x_2\right)$$

$$\Rightarrow \quad c = x_1 x_2$$

Der Satz von Vieta

$$x^2 + bx + c = (x - x_1)(x - x_2) = 0$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ a=1}}{x}{}^2 + bx + c = 0$$

$$\Rightarrow \quad b = -\left(x_1 + x_2\right)$$

$$\Rightarrow \quad c = x_1 x_2$$

François Viète, 1540 – 1603

Wie ist das bei komplexen Lösungen?

$$x^2 - 4x + 13 = 0$$

$$x^2 - 4x + 13 = 0 \qquad b^2 - 4ac = 16 - 52 = -36 < 0$$

$$x^2 - 4x + 13 = 0 \qquad b^2 - 4ac = 16 - 52 = -36 < 0$$

Formel

$$x_1 = \frac{4+6\mathrm{i}}{2} = 2 + 3\mathrm{i} \quad \text{und} \quad x_2 = \frac{4-6\mathrm{i}}{2} = 2 - 3\mathrm{i}$$

$$x^2 - 4x + 13 = 0 \qquad b^2 - 4ac = 16 - 52 = -36 < 0$$

Formel

$$x_1 = \frac{4+6\mathrm{i}}{2} = 2 + 3\mathrm{i} \quad \text{und} \quad x_2 = \frac{4-6\mathrm{i}}{2} = 2 - 3\mathrm{i}$$

Lösungen konjugiert komplex

$$x^2 - 4x + 13 = 0 \qquad b^2 - 4ac = 16 - 52 = -36 < 0$$

Formel

$$x_1 = \frac{4+6\mathrm{i}}{2} = 2 + 3\mathrm{i} \quad \text{und} \quad x_2 = \frac{4-6\mathrm{i}}{2} = 2 - 3\mathrm{i}$$

Lösungen konjugiert komplex

Vieta

$$b = -\left(x_1 + x_2\right) = -4$$

$$c = x_1 x_2 = 13$$

Vieta funktioniert auch im Komplexen

Summe und Produkt von konjugiert komplexen Zahlen sind reell.

$$\boxed{\begin{aligned} w + \bar{w} &= 2\,\mathrm{Re}(w) \\ w\bar{w} &= |w|^2 \end{aligned}}$$

Fundamentalsatz von Gauß

Eine quadratische Gleichung hat folgendes Lösungsverhalten:

- Zwei verschiedene reelle Lösungen
- Eine reelle Doppellösung (Vielfachheit 2)
- Zwei konjugiert komplexe Lösungen

Verallgemeinerung?

Fundamentalsatz von Gauß

Eine $\overbrace{\text{quadratische Gleichung}}^{\text{mit reellen Koeffizienten}}$ hat folgendes Lösungsverhalten:

- Zwei verschiedene reelle Lösungen
- Eine reelle Doppellösung (Vielfachheit 2)
- Zwei konjugiert komplexe Lösungen

Verallgemeinerung?

Fundamentalsatz von Gauß

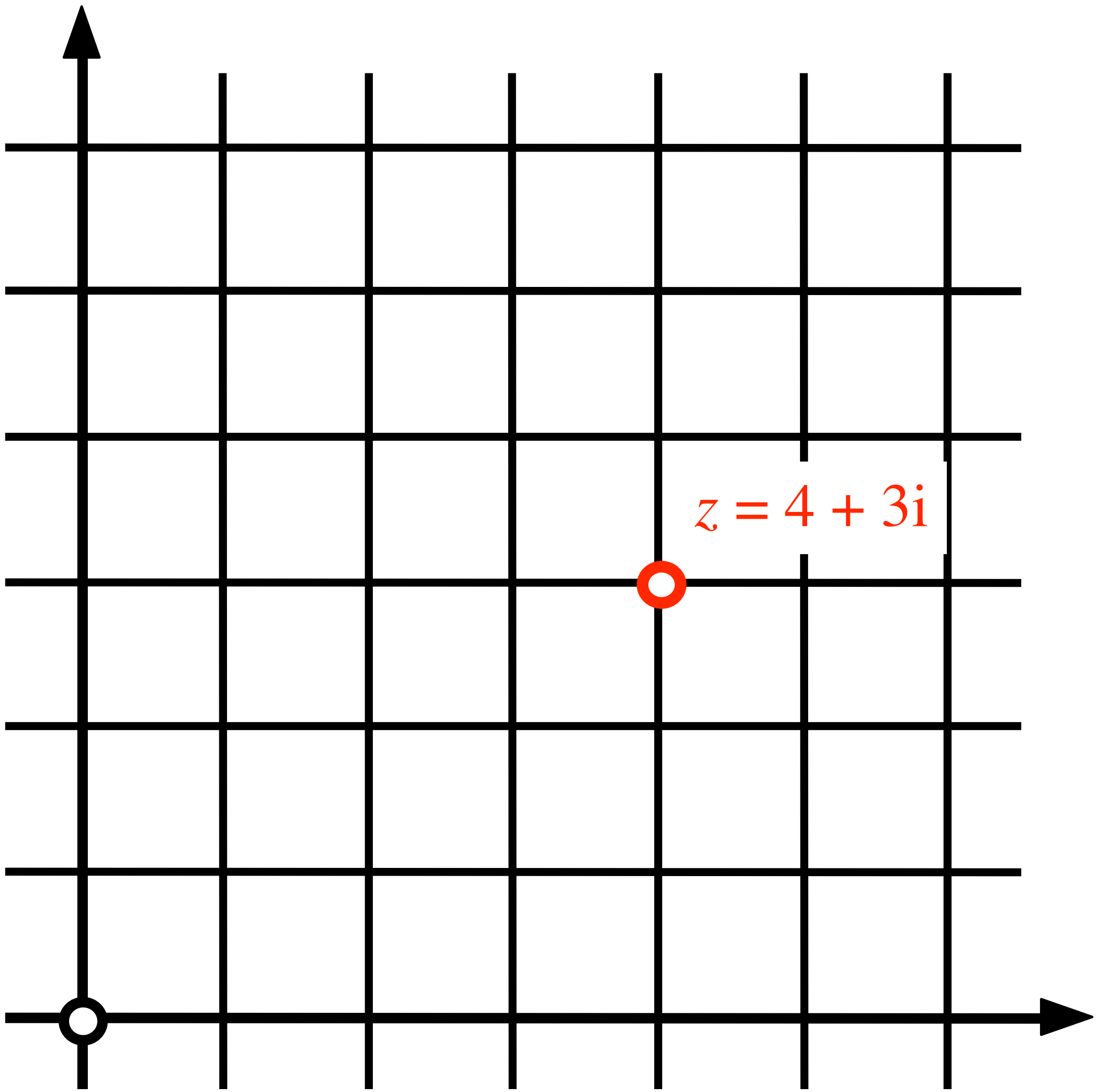
Eine Gleichung vom Grade n mit reellen Koeffizienten
hat insgesamt genau n Lösungen.

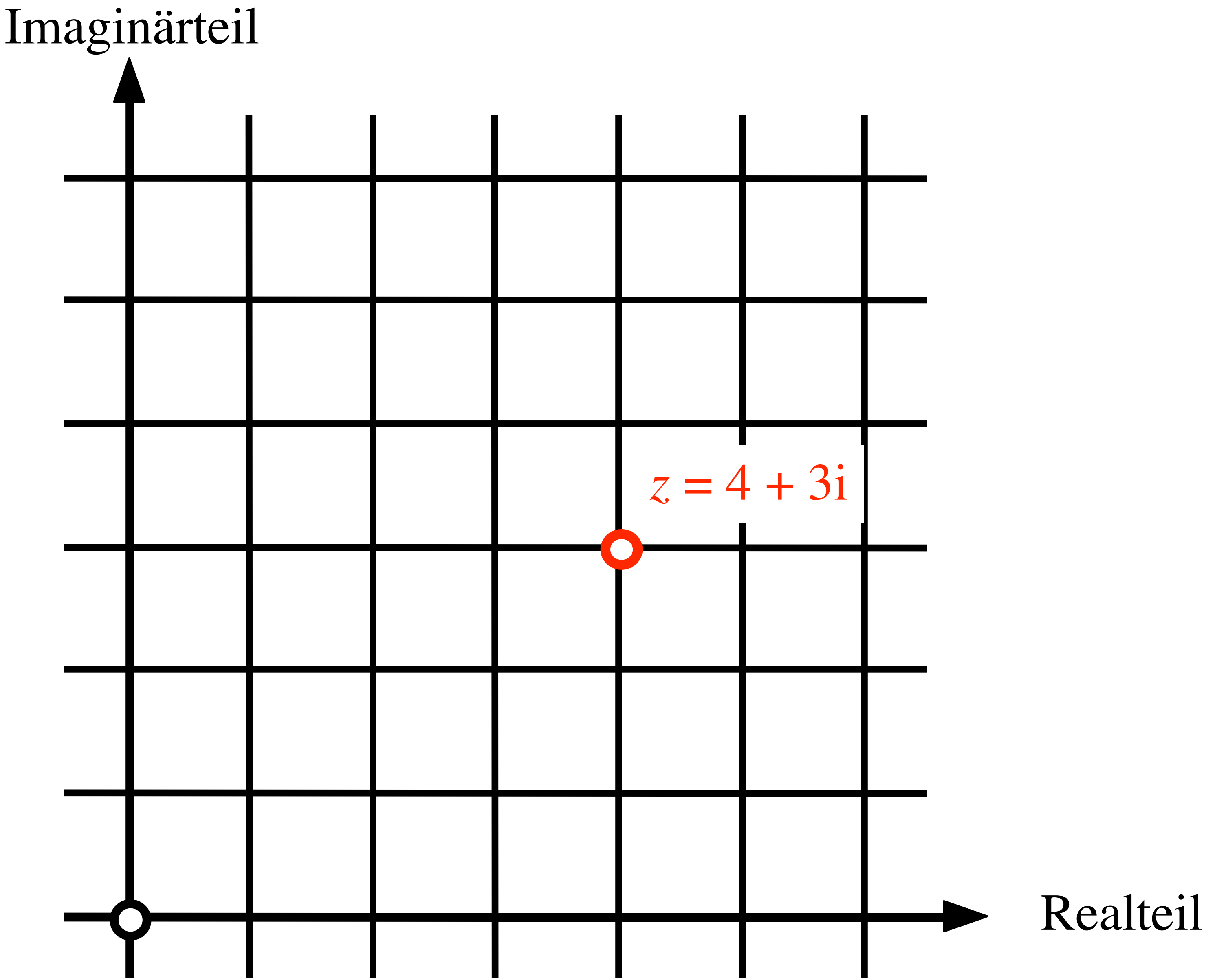
Diese können reell (mit Vielfachheiten) sein
oder paarweise konjugiert komplex.

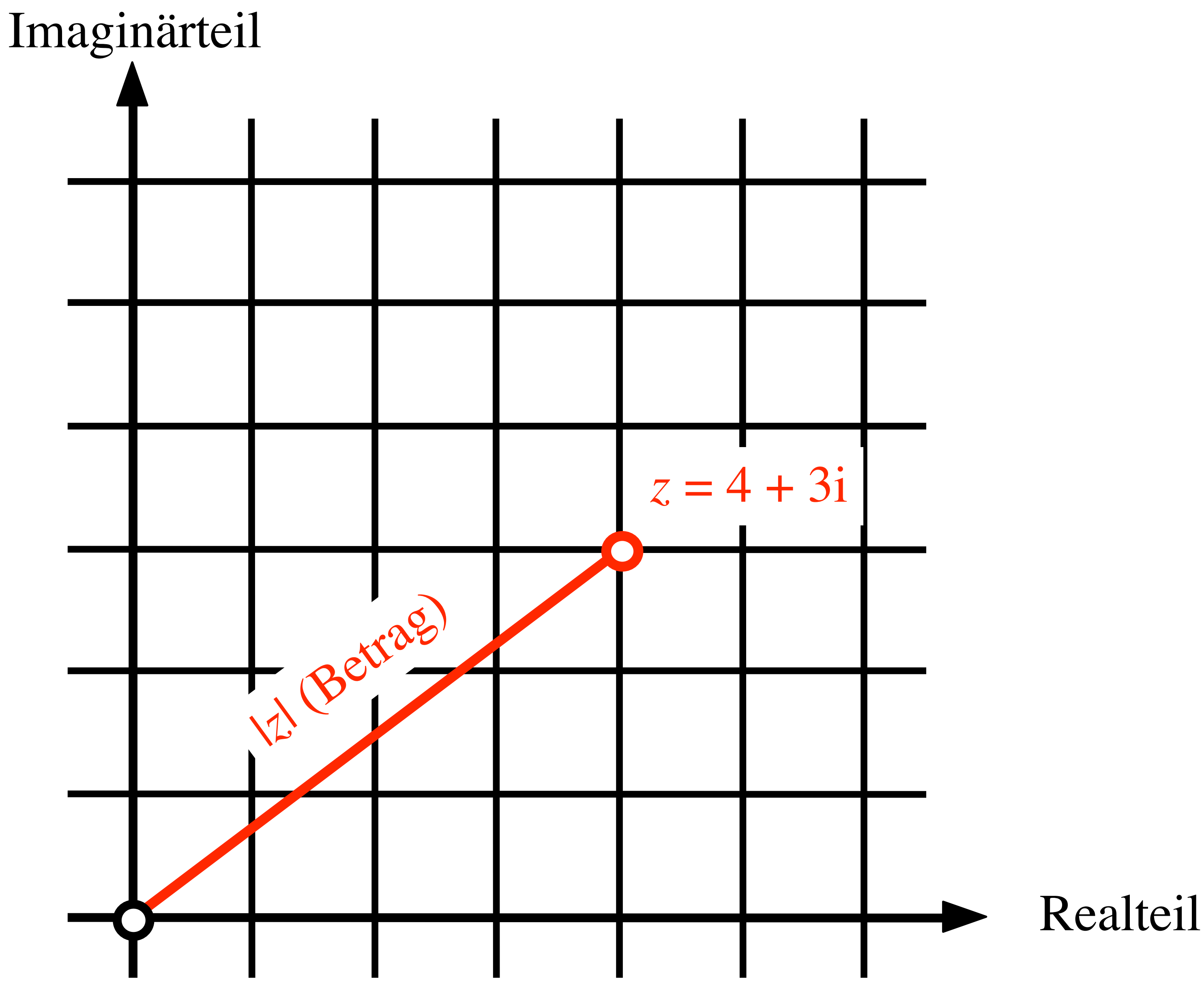
Fundamentalsatz von Gauß

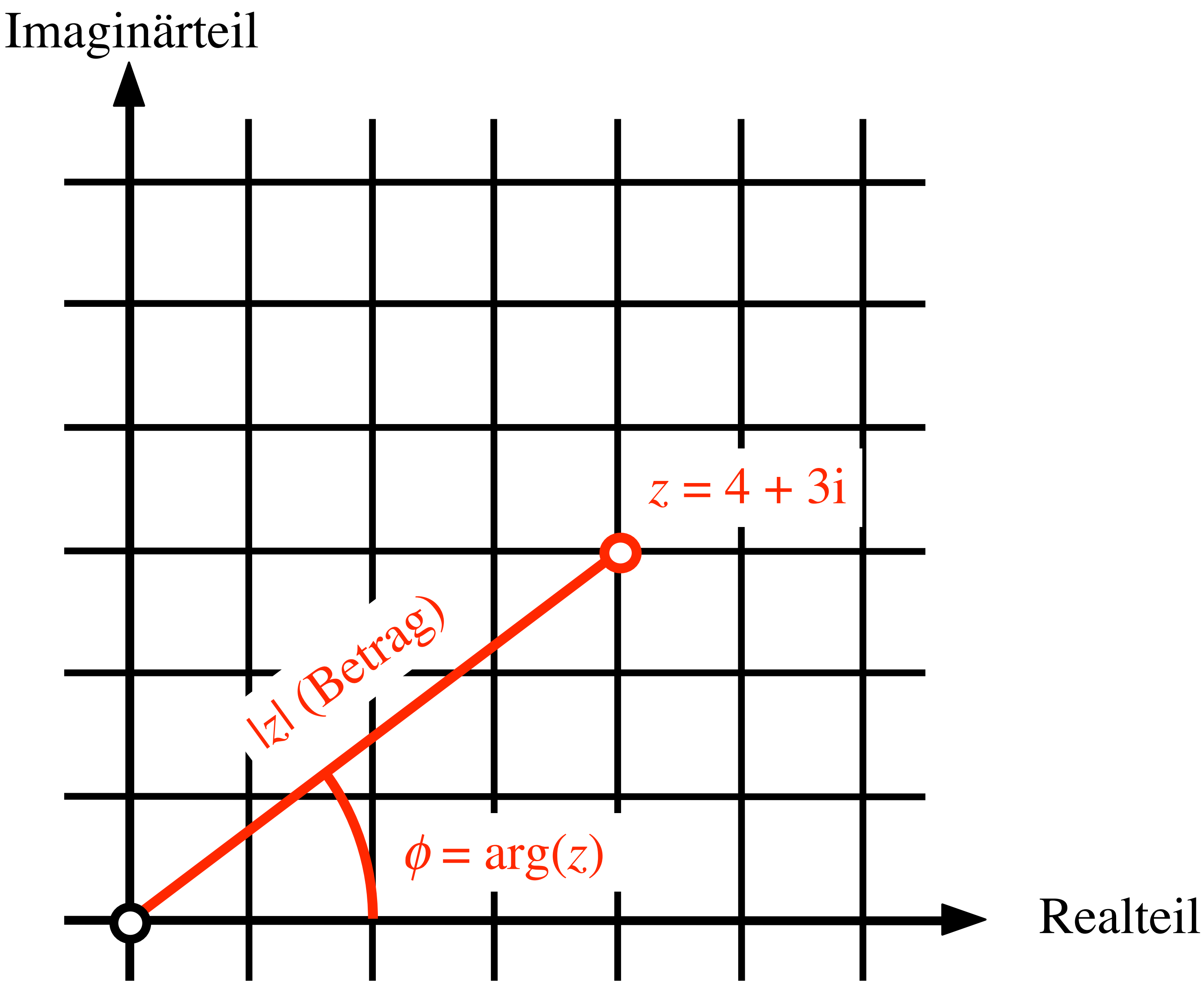
Carl Friedrich Gauß
1777 - 1855

Die Geometrie der Sache


z = 4 + 3i


Imaginärteil
$z = 4 + 3i$
Realteil

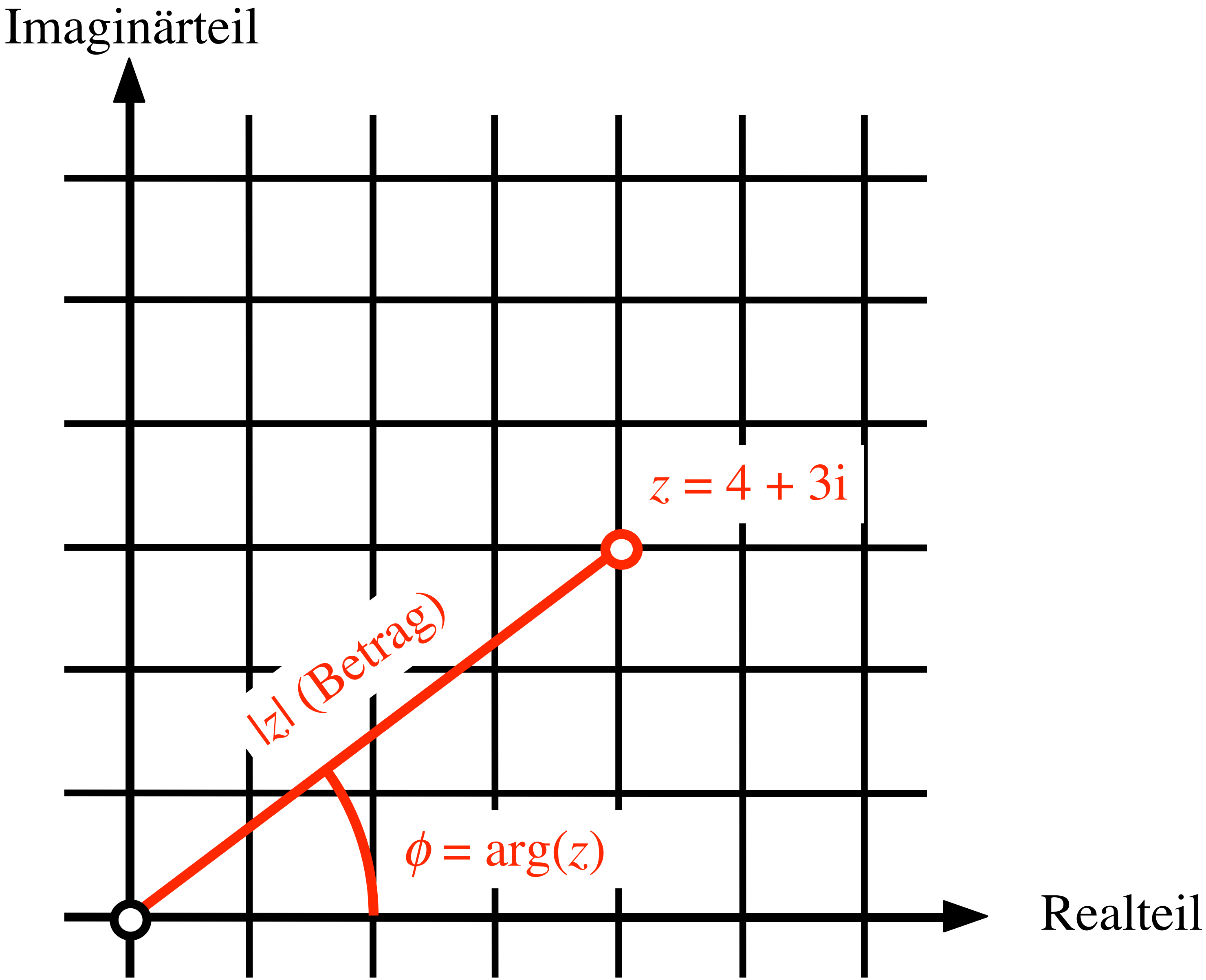

Imaginärteil
z = 4 + 3i
|z| (Betrag)
Realteil


Imaginärteil
z = 4 + 3i
|z| (Betrag)
ϕ = arg(z)
Realteil

Argument und Betrag

$$\tan\left(\arg(z)\right) = \frac{\mathrm{Im}(z)}{\mathrm{Re}(z)}$$

$$|z| = \sqrt{\left(\mathrm{Re}(z)\right)^2 + \left(\mathrm{Im}(z)\right)^2} = \sqrt{z\,\bar{z}}$$


Imaginärteil
$z = 4 + 3i$
$|z|$ (Betrag)
$\phi = \arg(z)$
Realteil

Argument und Betrag
„Polarkoordinaten“

$$\tan\left(\arg(z)\right) = \frac{\mathrm{Im}(z)}{\mathrm{Re}(z)}$$

$$|z| = \sqrt{\left(\mathrm{Re}(z)\right)^2 + \left(\mathrm{Im}(z)\right)^2} = \sqrt{z\,\overline{z}}$$

$$\mathrm{Re}(z) = |z|\cos(\phi)$$
$$\mathrm{Im}(z) = |z|\sin(\phi)$$