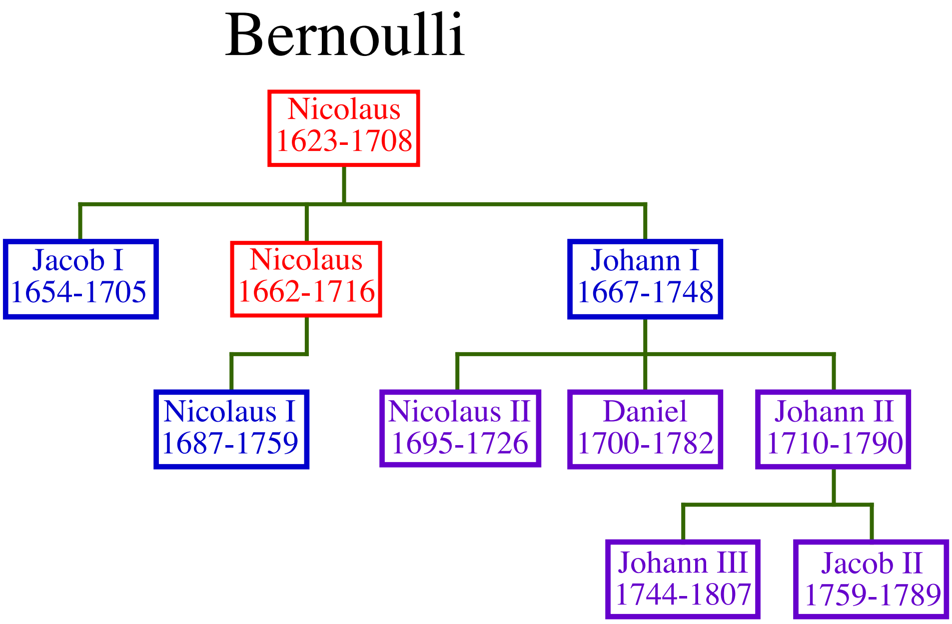
Hans Walser

Mathematik 1 für Naturwissenschaften



Modul 104

Anwendungen der Differenzialrechnung. Komplexe Zahlen

UNI BASEL

Inhalt

1 Funktionsdiskussion 1
1.1 Sensibilität der Funktion 1
1.1.1 Kleine Ableitung 1
1.1.2 Große Ableitung 1
1.2 Fehlerfortpflanzung 2
2 Mittelwertsatz für stetige Funktionen 2
2.1 Durchschnitt 2
2.2 Mittelwertsatz 3
3 Wer ist stärker? 4
3.1 Welches Wachstum ist am stärksten? 4
3.1.1 Beispiel 4
4 Unbestimmte Grenzwerte 5
4.1 Beispiel 5
4.2 Verallgemeinerung 7
4.2.1 Beispiel 7
4.3 Der Satz von BERNOULLI - de L'HÔPITAL 11
5 Komplexe Zahlen 12
5.1 Die imaginäre Einheit 12
5.2 Rechenregeln 12
5.3 Quadratische Gleichungen 13
5.3.1 Der harmlose Fall 13
5.3.2 Der Satz von Vieta 13
5.4 Der Fundamentalsatz von Gauß 14
5.5 Die komplexe Zahlenebene 15
6 Zusammenfassung 17
6.1 Sätze 17
6.2 Formeln 17
6.3 Wachstum von Funktionen 17
6.4 Komplexe Zahlen 17

Modul 104 für die Lehrveranstaltung *Mathematik 1 für Naturwissenschaften*

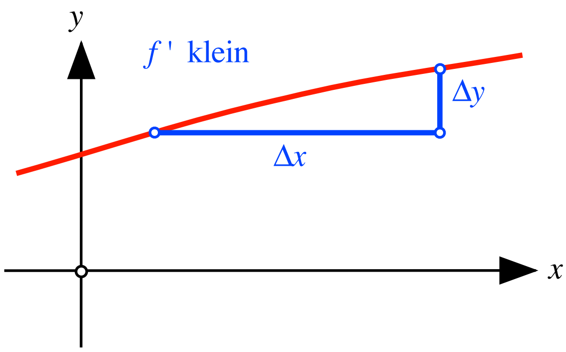
Winter 2002/03 Probeausgabe
Winter 2003/04 Fehlerbereinigung und Straffung
Winter 2004/05 Änderungen und Kürzungen. Fehlerkorrekturen
Winter 2005/06 Fehlerkorrekturen
Winter 2006/07 MathType. Geändertes Layout
Herbst 2007 Korrekturen
Herbst 2010 Kleine grafische Änderung
Herbst 2012 Kürzungen und Erweiterungen (komplexe Zahlen)
Herbst 2013 Kürzungen
last modified: 19. September 2013

Hans Walser
Mathematisches Institut, Rheinsprung 21, 4051 Basel
www.walser-h-m.ch/hans

1 Funktionsdiskussion

1.1 Sensibilität der Funktion

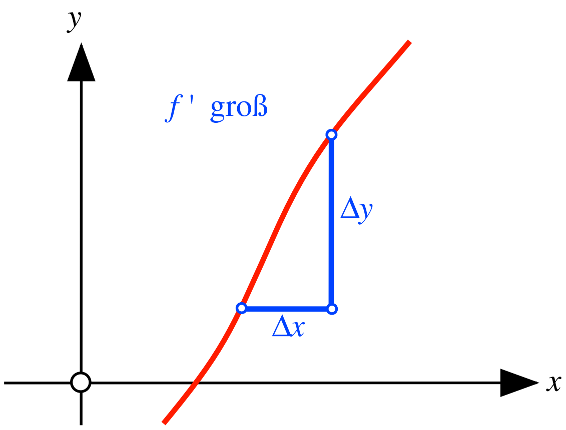
1.1.1 Kleine Ableitung



Kleine Ableitung

Bei einer Funktion mit „kleiner" Ableitung f' ist Δy im Vergleich zu Δx klein. Die Funktion reagiert nur schwach, eine große Ursache hat nur eine kleine Wirkung. Die Funktion ist wenig sensibel.

1.1.2 Große Ableitung



Große Ableitung

Bei einer Funktion mit „großer" Ableitung f' ist Δy im Vergleich zu Δx groß. Die Funktion reagiert heftig, eine kleine Ursache hat eine große Wirkung. Die Funktion ist sehr sensibel.

1.2 Fehlerfortpflanzung

Aus

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\Delta y}{\Delta x} \right)$$

ergibt sich:

$$\Delta y \approx f'(x_0) \Delta x$$

Der Faktor $f'(x_0)$ gibt also an, wie stark sich ein Fehler Δx beim x-Wert auf den entsprechenden Fehler Δy beim y-Wert auswirkt.

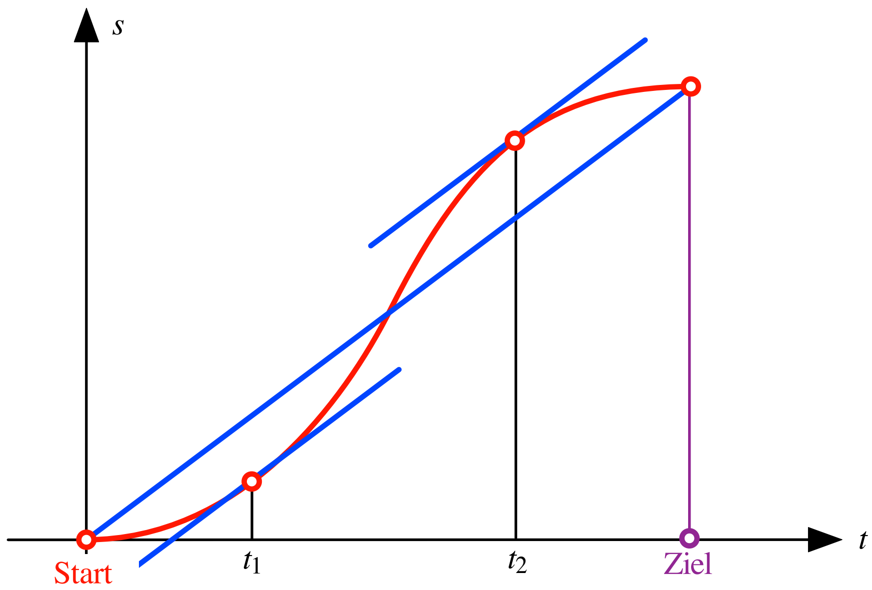
2 Mittelwertsatz für stetige Funktionen

2.1 Durchschnitt

Bei einer kleinen Anzahl von Menschen gibt es in der Regel niemanden, der genau die durchschnittliche Körpergröße hat.

Wenn wir aber eine bestimmte Strecke mit variabler Geschwindigkeit durchfahren, sind wir mindestens einmal (sogar mindestens zweimal, warum?) die Durchschnittsgeschwindigkeit gefahren. Das liegt daran, dass die Funktion $s(t)$ *stetig* ist. In einem Weg-Zeit-Diagramm ist die Geschwindigkeit die Steigung des Funktionsgraphen.

Da die Geschwindigkeit beim Start und am Ziel Null ist, sieht das so zum Beispiel aus:



Weg-Zeit-Diagramm, *s*(*t*)

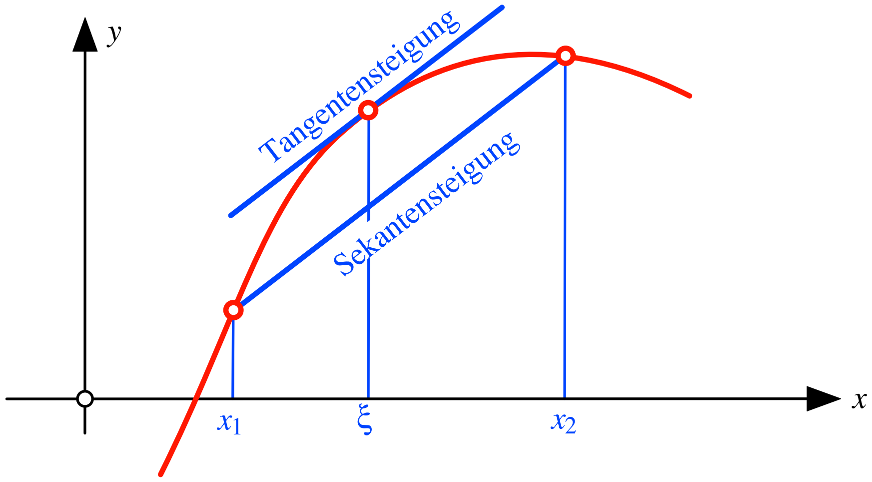
Die Steigung der geradlinigen Verbindung von Start zu Ziel entspricht der Durchschnittsgeschwindigkeit. Diese Durchschnittsgeschwindigkeit wird in den Zeitpunkten t_1 und t_2 auch effektiv gefahren. Bei mehreren Rotlichtern oder beim Fahren mit sehr unregelmäßigem Tempo kann die Durchschnittsgeschwindigkeit sogar viel öfter effektiv gefahren werden. Hingegen ist es nicht möglich, ausschließlich mit der Durchschnittsgeschwindigkeit zu fahren (warum?).

2.2 Mittelwertsatz

Bei einer *stetigen* Funktion f gibt es (mindestens) ein ξ zwischen x_1 und x_2, so dass:

$$f'(\xi) = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$$

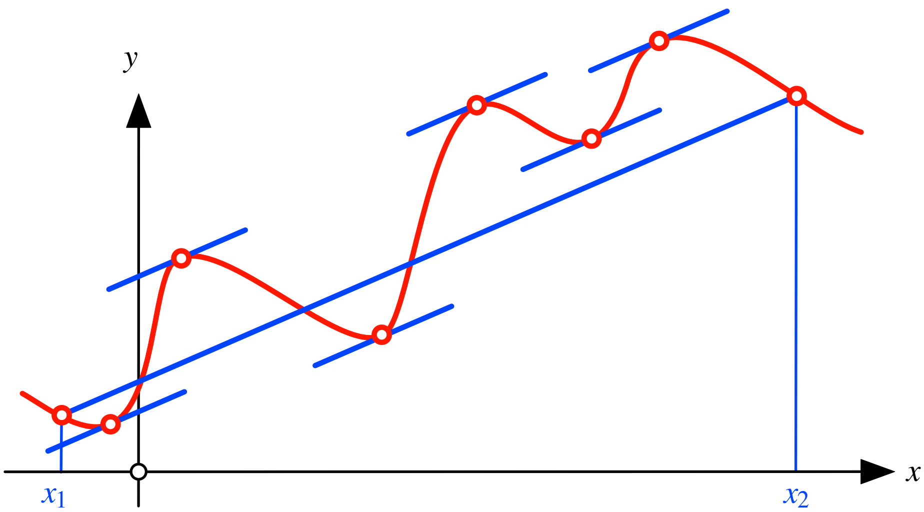
Geometrisch bedeutet das, dass es mindestens eine Stelle ξ zwischen x_1 und x_2 gibt, an der die Tangentensteigung gleich der Sekantensteigung für das Intervall $[x_1,x_2]$ ist.



Tangentensteigung und Sekantensteigung

Die Tangentensteigung ist $f'(\xi)$, die Sekantensteigung $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$.

Natürlich sind auch mehrere passende ξ-Werte möglich.



Mehrere passende ξ-Werte

3 Wer ist stärker?

3.1 Welches Wachstum ist am stärksten?

Für $x \to \infty$ divergieren alle der folgenden Funktionen:

- Exponentialfunktionen: e^x, a^x
- Potenzfunktionen: x^n
- Logarithmusfunktionen: $\ln(x)$, $\log_a(x)$

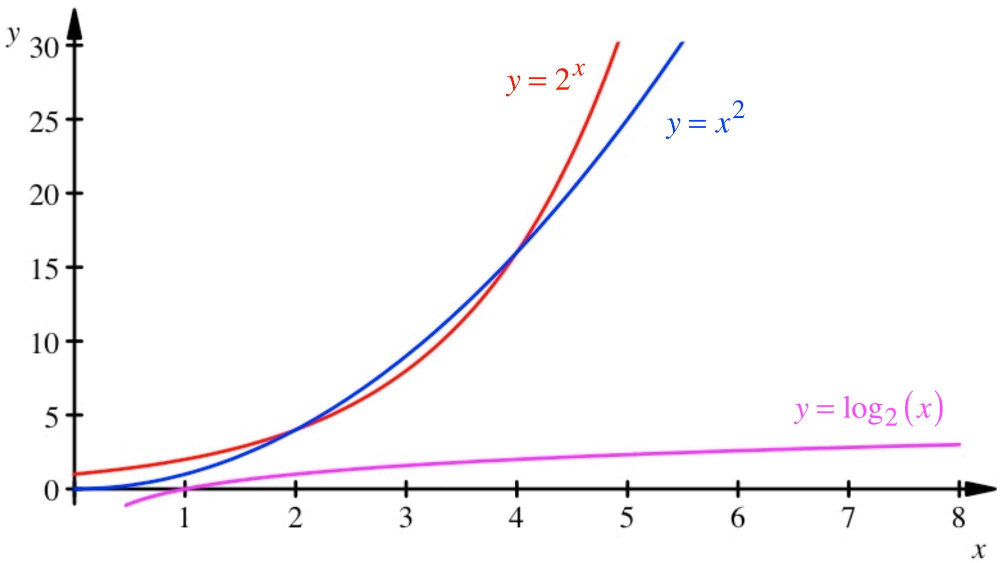
Am stärksten wachsen aber die Exponentialfunktionen, dann folgen die Potenzfunktionen und schließlich die Logarithmusfunktionen.

3.1.1 Beispiel

Wir vergleichen die Exponentialfunktion $y = 2^x$ mit der Potenzfunktion (quadratische Funktion) $y = x^2$ und der Logarithmusfunktion zur Basis 2, also $y = \log_2(x)$.

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$y = 2^x$	1	2	4	8	16	32	64	128	256
$y = x^2$	0	1	4	9	16	25	36	49	64
$y = \log_2(x)$	-∞	0.0	1	1.585	2	2.3219	2.585	2.8074	3

Offensichtlich wächst für große x die Exponentialfunktion $y = 2^x$ stärker als die Potenzfunktion $y = x^2$ und diese wächst stärker als die Logarithmusfunktion $y = \log_2(x)$.



Vergleich

Allgemein gilt:

Exponentialfunktionen:	e^x, a^x	wächst am stärksten
Potenzfunktionen:	x^n	wächst mittelstark
Logarithmusfunktionen:	$\ln(x)$, $\log_a(x)$	wächst am schwächsten

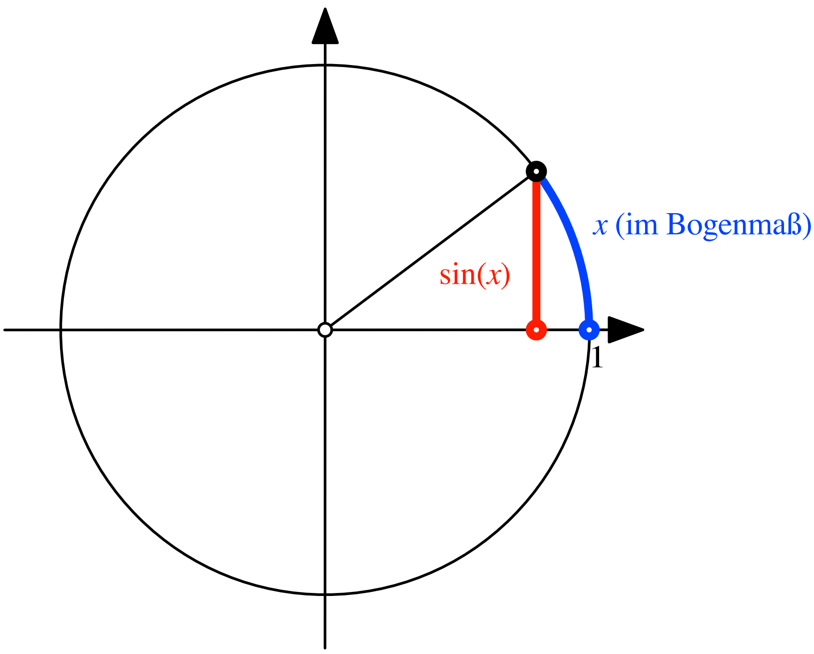
4 Unbestimmte Grenzwerte

4.1 Beispiel

Im Beispiel

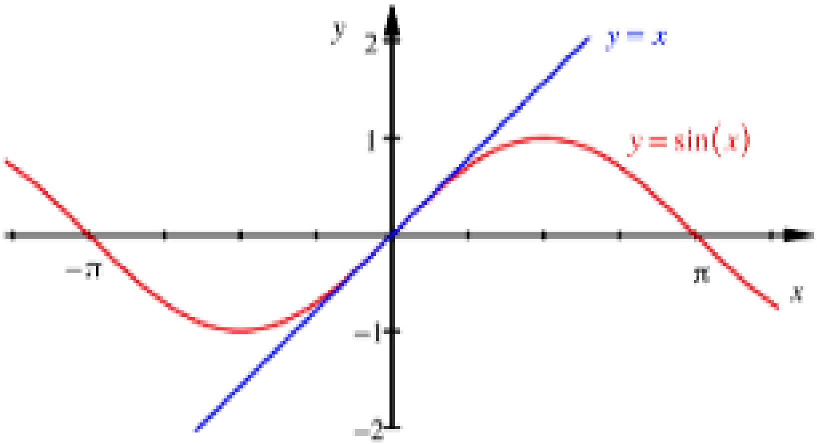
$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin(x)}{x}\right)$$

haben wir für $x = 0$ die „Null über Null"-Situation. Aus der Situation im Einheitskreis



Situation im Einheitskreis

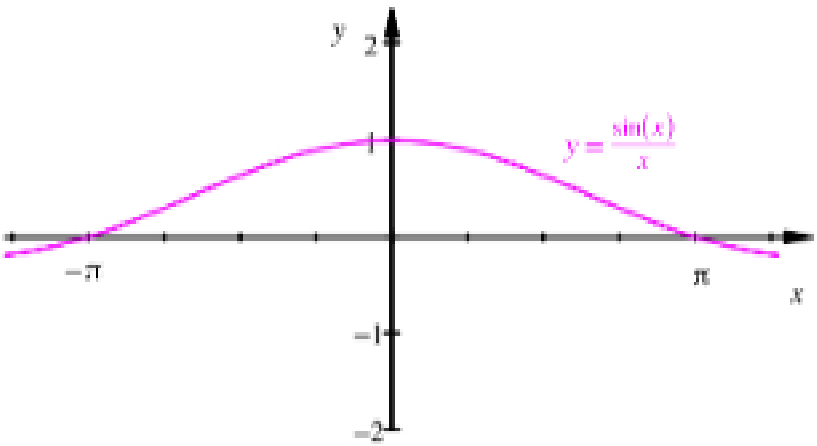
wie auch aus der Lage der Graphen für $y = \sin(x)$ und $y = x$



Graphen für *y* = sin(*x*) und *y* = *x*

vermuten wir, dass für kleine x gilt: $\sin(x) \approx x$ und daher $\lim_{x \to 0} \left(\frac{\sin(x)}{x} \right) = 1$.

Auch der Graph der Funktion $y = \frac{\sin(x)}{x}$ unterstützt diese Vermutung:



Graph der Funktion $y = \frac{\sin(x)}{x}$

Wir können diese Vermutung mit dem Mittelwertsatz beweisen. Der Mittelwertsatz

$$f(x) = f(x_0) + f'(\underset{\substack{\uparrow \\ \boxed{\xi \text{ zwischen } x_0 \text{ und } x}}}{\xi})(x - x_0)$$

lautet für die Funktionen $y = \sin(x)$:

$$\sin(x) = \sin(x_0) + \cos(\xi)(x - x_0)$$

Darin setzen wir nun $x_0 = 0$ und erhalten:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin(x)}{x}\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{x\cos(\xi)}{x}\right) = \lim_{x\to 0}\Big(\cos(\underset{\substack{\uparrow\\ \boxed{\xi \text{ zwischen } 0 \text{ und } x}}}{\xi})\Big) = \cos(0) = 1$$

4.2 Verallgemeinerung

Wenn wir zwei Funktionen *f* und *g* mit $f(x_0)=0$ und $g(x_0)=0$ haben, so gilt:

$$\lim_{x\to x_0}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \lim_{x\to x_0}\left(\frac{f(x_0)+f'(\xi_1)(x-x_0)}{g(x_0)+g'(\xi_2)(x-x_0)}\right)$$

Dabei liegen ξ_1 und ξ_2 beide zwischen x_0 und x. Damit ergibt sich:

$$\lim_{x\to x_0}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \lim_{x\to x_0}\left(\frac{f(x_0)+f'(\xi_1)(x-x_0)}{g(x_0)+g'(\xi_2)(x-x_0)}\right) = \lim_{x\to x_0}\left(\frac{f'(\xi_1)}{g'(\xi_2)}\right) = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$$

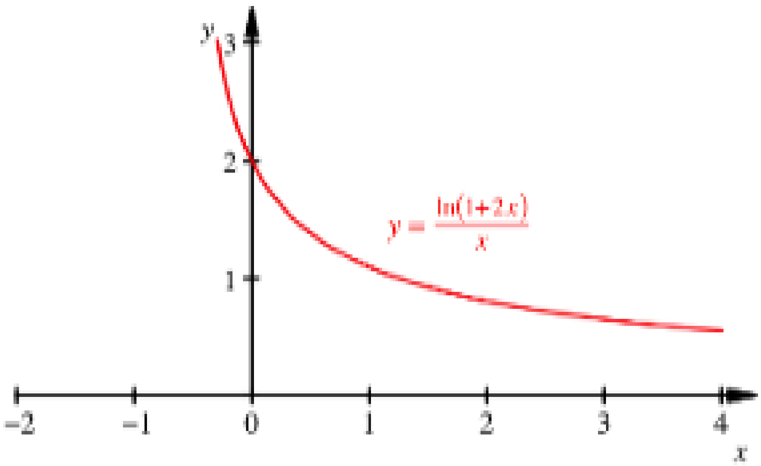
$$\lim_{x\to x_0}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$$

4.2.1 Beispiel

Was ist

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\ln(1+2x)}{x}\right) = ?$$

Für $x=0$ ergibt sich wieder die „Null über Null"-Situation. Auf Grund des Funktionsgraphen für $y=\frac{\ln(1+2x)}{x}$:



Graph von $y=\frac{\ln(1+2x)}{x}$

vermuten wir $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\ln(1+2x)}{x}\right)=2$. Nach unserer Verallgemeinerung gilt:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\ln(1+2x)}{x}\right)=\frac{\frac{2}{1+2\cdot 0}}{1}=2$$

Wir können die Zahl 2 durch a ersetzen und erhalten:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\ln(1+ax)}{x}\right)=\frac{\frac{a}{1+a\cdot 0}}{1}=a$$

4.2.1.1 Folgerungen

$$\lim_{x\to 0}\left((1+ax)^{\frac{1}{x}}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{x}\ln(1+ax)}\right)=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\ln(1+ax)}{x}\right)}=\mathrm{e}^{a}$$

Daraus ergibt sich:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\tfrac{a}{n}\right)^{n}\right)\underset{m=\frac{1}{n}}{\underset{\uparrow}{=}}\lim_{m\to 0}\left((1+am)^{\frac{1}{m}}\right)=\mathrm{e}^{a}$$

Also:

$$\boxed{\lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\tfrac{a}{n}\right)^{n}\right)=\mathrm{e}^{a}}$$

und insbesondere für $a=1$:

$$\boxed{\mathrm{e}=\lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\tfrac{1}{n}\right)^{n}\right)}$$

Damit haben wir eine Möglichkeit, die EULERsche Zahl e zu bestimmen.

Leonhard EULER, 1707 – 1783. Zeichnung von Bigna Steiner

Numerisch:

n	$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$
10	$1.1^{10} \approx 2.59374246$
100	$1.01^{100} \approx 2.704813829$
1000	$1.001^{1000} \approx 2.716923932$
1000000	$1.000001^{1000000} \approx 2.718280469$

Die Sache kann allerdings in die Hosen gehen, wenn man zuviel will:

n	$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$
1	2.00000000000000000000
10	2.59374246010000000000
100	2.70481382942153000000
1000	2.71692393223552000000
10000	2.71814592682436000000
100000	2.71826823719753000000
1000000	2.71828046915643000000
10000000	2.71828169398037000000
100000000	2.71828178639580000000
1000000000	2.71828203081451000000
10000000000	2.71828205323479000000
100000000000	2.71828205335711000000
1000000000000	2.71852349603724000000
10000000000000	2.71611003408690000000
100000000000000	2.71611003408702000000
1000000000000000	3.03503520654926000000
10000000000000000	1.00000000000000000000
100000000000000000	1.00000000000000000000

Rundungsfehler wirken sich schlimm aus

Mein Taschenrechner gibt e = 2.718281828. Die Zahl e ist aber eine *irrationale* Zahl, das heißt, ihre Dezimaldarstellung hat *keine* Periode, obwohl das der Taschenrechner so suggeriert.

Es ist:

e = 2.718281828459045…

4.3 Der Satz von BERNOULLI - de L'HÔPITAL

Für zwei Funktionen f und g mit $f(x_0)=0$ und $g(x_0)=0$ gilt: $\lim\limits_{x\to x_0}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)=\frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$

Dies ist ein Sonderfall des allgemeineren Satzes von BERNOULLI - de l'HÔPITAL:

Es sei:

$$\lim_{x\to x_0}\left(f(x)\right)=0 \qquad (\text{oder } \pm\infty)$$

$$\lim_{x\to x_0}\left(g(x)\right)=0 \qquad (\text{oder } \pm\infty)$$

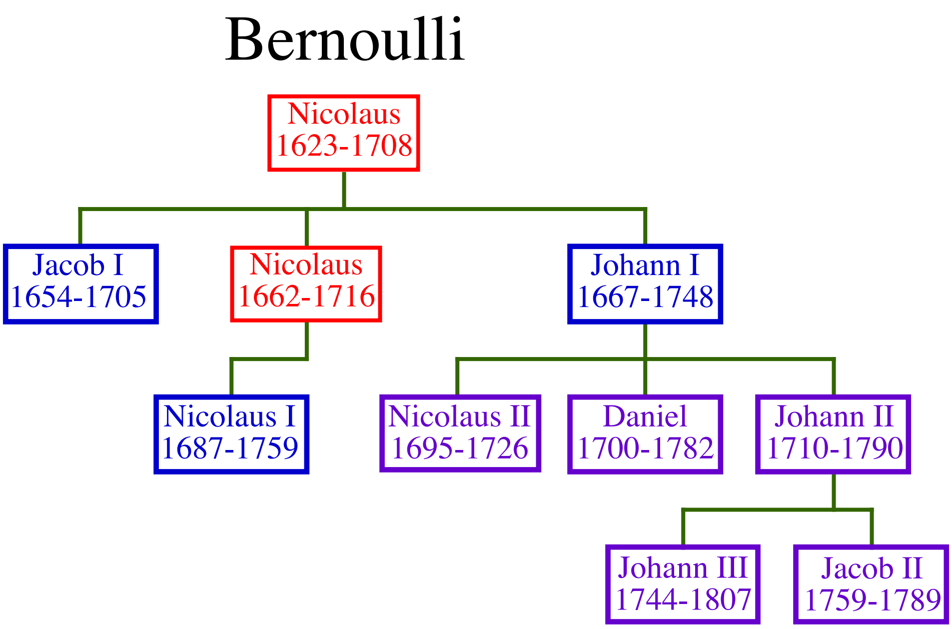
Dann gilt:

$$\lim_{x\to x_0}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)=\lim_{x\to x_0}\left(\frac{f'(x)}{g'(x)}\right)$$

Statt eines Beweises etwas Familiengeschichte.

Johann BERNOULLI gehörte zur berühmten Basler Familie Bernoulli, welche mehrere Mathematiker hervorgebracht hat.

Jacob I, Johann I und Nicolaus I lebten und wirkten hauptsächlich in Basel, Nicolaus II, Daniel, Johann II und dessen Söhne Johann III und Jacob II in St. Petersburg.



Familie Bernoulli, ohne Frauen

5 Komplexe Zahlen

5.1 Die imaginäre Einheit

Die komplexen Zahlen entstanden aus dem Bedürfnis, Wurzeln aus negativen Radikanden zu „ziehen"; etwa beim Lösen quadratischer Gleichungen.

Definition:

$$\boxed{\mathbb{C} = \left\{ z \middle| z = x + \mathrm{i}y, x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}, \mathrm{i}^2 = -1 \right\}}$$

Die komplexen Zahlen sind also aus zwei reellen Zahlen zusammengesetzt. Dabei heißt x der Realteil von z und y der Imaginärteil von z. Schreibweisen: $\mathrm{Re}(z)$ und $\mathrm{Im}(z)$. Der Imaginärteil ist aber auch eine reelle Zahl. Das i wurde von Euler als Abkürzung für „imaginäre Einheit" eingeführt.

5.2 Rechenregeln

Addition und Subtraktion sind einfach.

Beispiele:

$$(3+2\mathrm{i}) + (2+5\mathrm{i}) = 5 + 7\mathrm{i}$$
$$(-2+8\mathrm{i}) - (3-\mathrm{i}) = -5 + 9\mathrm{i}$$

Allgemein:

$$(x+\mathrm{i}y) + (u+\mathrm{i}v) = (x+u) + (y+v)\mathrm{i}$$
$$(x+\mathrm{i}y) - (u+\mathrm{i}v) = (x-u) + (y-v)\mathrm{i}$$

Auch die Multiplikation ist einfach.

Beispiel:

$$\begin{aligned}(3+2\mathrm{i})(2+5\mathrm{i}) &= 6 + 15\mathrm{i} + 4\mathrm{i} + 10\mathrm{i}^2 \\ &= 6 + 15\mathrm{i} + 4\mathrm{i} - 10 = -4 + 19\mathrm{i}\end{aligned}$$

Allgemein:

$$\begin{aligned}(x+\mathrm{i}y)(u+\mathrm{i}v) &= xu + \mathrm{i}xv + \mathrm{i}yu + \mathrm{i}^2 yv \\ &= xu + \mathrm{i}xv + \mathrm{i}yu - yv = xu - yv + \mathrm{i}(xv + yu)\end{aligned}$$

Für die Division brauchen wir einen Trick mit geeignetem Erweitern.

Beispiel:

$$\frac{3+2\mathrm{i}}{4+3\mathrm{i}} = \frac{3+2\mathrm{i}}{4+3\mathrm{i}} \frac{4-3\mathrm{i}}{4-3\mathrm{i}} = \frac{18-\mathrm{i}}{16+9} = \frac{18}{25} - \frac{1}{25}\mathrm{i}$$

Allgemein:

$$\frac{x+y\mathrm{i}}{u+v\mathrm{i}} = \frac{x+y\mathrm{i}}{u+v\mathrm{i}} \frac{u-v\mathrm{i}}{u-v\mathrm{i}} = \frac{(xu+yv)+\mathrm{i}(-xv+yu)}{u^2+v^2} = \frac{(xu+yv)}{u^2+v^2} + \mathrm{i}\frac{(-xv+yu)}{u^2+v^2}$$

Wir machen die wichtige Feststellung, dass die Resultate bei diesen Rechenoperationen in jedem Fall wieder komplexe Zahlen sind. On reste en famille.

Das Vorgehen bei der Division gibt Anlass zu folgenden Definitionen:

Konjugation:

$$u - v\mathrm{i} \quad \text{ist die zu} \quad u + v\mathrm{i} \quad \textit{konjugiert komplexe}\ \text{Zahl}$$
$$\text{Schreibweise:} \quad u - v\mathrm{i} = \overline{u + v\mathrm{i}}$$

Beim Konjugieren wird beim Imaginärteil das Vorzeichen gewechselt.

Betrag oder absoluter Betrag:

$$|w| = |u + \mathrm{i}v| = \sqrt{u^2 + v^2} \quad \text{ist der } \textit{Betrag} \text{ der komplexen Zahl} \quad w = u + \mathrm{i}v$$

Der offensichtliche Zusammenhang des Betrages mit der Formel von Pythagoras wird in der geometrischen Darstellung in der komplexen Zahlenebene deutlich.

5.3 Quadratische Gleichungen

5.3.1 Der harmlose Fall

$$x^2 - 7x + 12 = 0$$

Lösung mit der Formel:

Lösung mit Linearfaktoren:

5.3.2 Der Satz von Vieta

Eine Gleichung von der Form $x^2 + bx + c = 0$ habe die Lösungen x_1 und x_2. Wegen

$$x^2 + bx + c = (x - x_1)(x - x_2) = 0$$

folgt der Satz von Vieta:

In einer quadratischen Gleichung $ax^2 + bx + c = 0$ mit $a = 1$ gilt:

$$b = -(x_1 + x_2)$$
$$c = x_1 x_2$$

Gilt das nun auch, wenn komplexe Lösungen auftreten?

Beispiel: $x^2 - 4x + 13 = 0$

Die Diskriminante ist nun negativ: $D = 16 - 52 = -36 < 0$

Somit ist $\sqrt{D} = \sqrt{-36} = 6\mathrm{i}$

Für die Lösungen nach der üblichen Formel erhalten wir:

$$x_1 = \tfrac{4+6i}{2} = 2 + 3i \quad \text{und} \quad x_2 = \tfrac{4-6i}{2} = 2 - 3i$$

Die beiden Lösungen sind konjugiert komplex. Tatsächlich gilt:

$$\begin{aligned} b &= -(x_1 + x_2) = -4 \\ c &= x_1 x_2 = 13 \end{aligned}$$

Der imaginäre Anteil fällt bei beiden Rechnungen heraus.

Wir sehen in diesem Beispiel eine Anwendung des Begriffs der Konjugation:

$$\begin{aligned} w + \overline{w} &= 2\,\mathrm{Re}(w) \\ w\overline{w} &= |w|^2 \end{aligned}$$

5.4 Der Fundamentalsatz von Gauß

Eine quadratische Gleichung hat offenbar folgendes Lösungsverhalten:

- Zwei verschiedene reelle Lösungen
- Eine reelle Doppellösung (Vielfachheit 2)
- Zwei konjugiert komplexe Lösungen

Dabei setzen wir voraus, dass die in der Gleichung vorkommenden Koeffizienten a, b, c selber reell sind.

Dies lässt sich verallgemeinern:

Eine Gleichung vom Grade n mit reellen Koeffizienten hat insgesamt genau n Lösungen. Diese können reell (mit Vielfachheiten) sein oder paarweise konjugiert komplex.

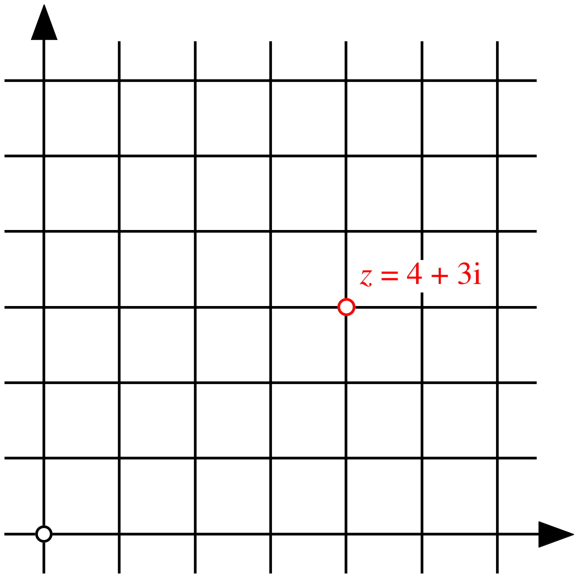
Dieser Satz wurde von Gauß in seiner Dissertation bewiesen. Er wird oft als *Fundamentalsatz der Algebra* bezeichnet.

Ist n ungerade, gibt es also immer mindestens eine reelle Lösung, da die konjugierten Lösungen immer paarweise auftreten.

5.5 Die komplexe Zahlenebene

Die Idee ist, Real- und Imaginärteil einer komplexen Zahl als x-Koordinate beziehungsweise y-Koordinate eines kartesischen Koordinatensystems zu interpretieren. So kann jeder komplexen Zahl ein Punkt in der zweidimensionalen komplexen Zahlenebene zugeordnet werden. Dies ist eine natürliche Verallgemeinerung der reellen Zahlengeraden.

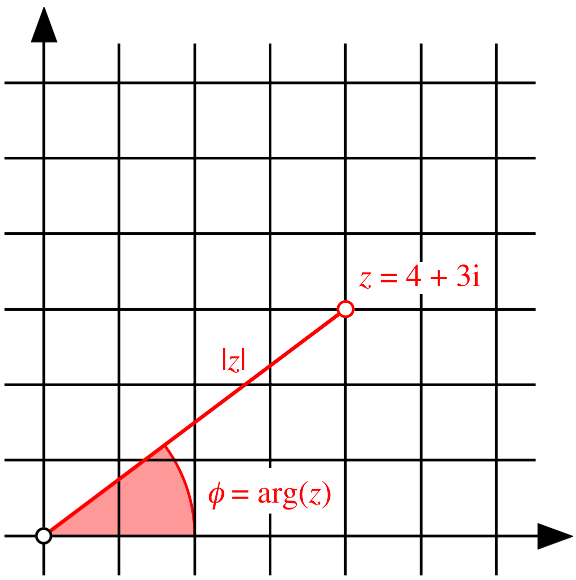
Die komplexe Ebene geht auf Gauß zurück und wird deshalb oft als *Gaußsche Ebene* bezeichnet.



Die komplexe Zahlenebene

Damit haben wir einen Link zur Geometrie.

Die Polarkoordinaten einer komplexen Zahl sind der schon bekannte Betrag der komplexen Zahl sowie das Argument der komplexen Zahl.



Argument und Betrag

Es gelten die Formeln:

$$\boxed{\begin{gathered}\tan(\arg(z)) = \frac{\mathrm{Im}(z)}{\mathrm{Re}(z)} \\ |z| = \sqrt{(\mathrm{Re}(z))^2 + (\mathrm{Im}(z))^2} = \sqrt{z\bar{z}}\end{gathered}}$$

Bei der konkreten Berechnung des Argumentes $\phi = \arg(z)$ ist zu beachten, dass die arctan-Funktion auf einer tan-Funktion mit eingeschränktem Definitionsbereich basiert.

6 Zusammenfassung

6.1 Sätze

Mittelwertsatz: Bei einer *stetigen* Funktion f gibt es (mindestens) ein ξ zwischen x_1 und x_2, so dass:

$$f'(\xi) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

Satz von BERNOULLI - de l'HÔPITAL:

Es sei:

$$\lim_{x \to x_0} \left(f(x) \right) = 0 \qquad (\text{oder } \pm\infty)$$

$$\lim_{x \to x_0} \left(g(x) \right) = 0 \qquad (\text{oder } \pm\infty)$$

Dann gilt:

$$\lim_{x \to x_0} \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right) = \lim_{x \to x_0} \left(\frac{f'(x)}{g'(x)} \right)$$

6.2 Formeln

Fehlerfortpflanzung: $\Delta y \approx f'(x_0) \Delta x$

Eulersche Zahl e:

$$\mathrm{e} = \lim_{n \to \infty} \left(\left(1 + \tfrac{1}{n} \right)^n \right) \approx 2.718281828459045\ldots$$

$$\lim_{n \to \infty} \left(\left(1 + \tfrac{a}{n} \right)^n \right) = \mathrm{e}^a$$

6.3 Wachstum von Funktionen

Exponentialfunktionen:	e^x, a^x	wächst am stärksten
Potenzfunktionen:	x^n	wächst mittelstark
Logarithmusfunktionen:	$\ln(x)$, $\log_a(x)$	wächst am schwächsten

6.4 Komplexe Zahlen

$\mathbb{C} = \left\{ z \middle| z = x + \mathrm{i}y, x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}, \mathrm{i}^2 = -1 \right\}$

$u - v\mathrm{i}$ ist die zu $u + v\mathrm{i}$ *konjugiert komplexe* Zahl, Schreibweise: $u - v\mathrm{i} = \overline{u + v\mathrm{i}}$

$|w| = |u + \mathrm{i}v| = \sqrt{u^2 + v^2}$ ist der *Betrag* der komplexen Zahl $w = u + \mathrm{i}v$