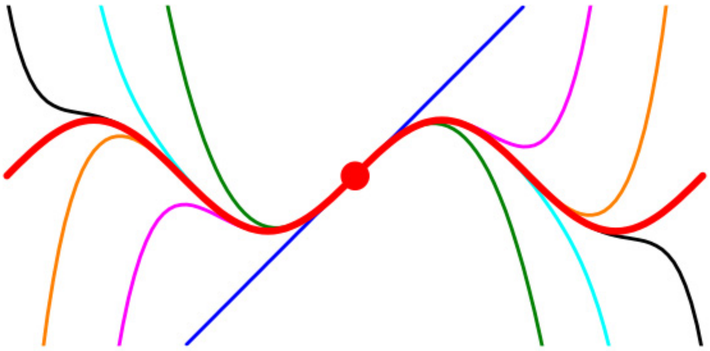
Hans Walser

Mathematik 1 für Naturwissenschaften



Modul 105

TAYLOR

Lernumgebung Teil 1

UNI BASEL

Modul 105 für die Lehrveranstaltung *Mathematik 1 für Naturwissenschaften*

Winter 2003/04	Erstausgabe
Winter 2004/05	Erweiterungen. Teilweise Angabe von Lösungswegen
Winter 2005/06	Erweiterungen. Geändertes Layout
Winter 2006/07	Erweiterungen. MathType.
Herbst 2007	Erweiterungen
Herbst 2008	Erweiterungen
Herbst 2009	Erweiterungen
Herbst 2010	Grafische Überarbeitung. Erweiterung. Fehlerkorrekturen
Herbst 2012	Erweiterungen. Unterteilung in zwei Teile

last modified: 28. August 2012

Hans Walser
Mathematisches Institut, Rheinsprung 21, 4051 Basel
www.math.unibas.ch/~walser

Inhalt

1 Beispiele zu Extrema 1
2 Seemannsgarn 1
3 Extremstellen einer kubischen Funktion 3
4 Vier Beispiele in einem 3
5 Umkehrbarkeit 5
6 Umkehrbarkeit 6
7 Extremalaufgabe 7
8 Monotonie-Intervalle 8
9 Taylorpolynom 9
10 Taylorreihe des Kosinus 9
11 Taylorpolynom 10
12 Taylorpolynom 11
13 Wurzel und Taylor 12
14 Taylorpolynom 13
15 Taylorpolynom 14
16 Taylor-Polynom 15
17 Taylorpolynom 5. Grades 15
18 cosh und sinh 17
19 Taylor-Reihe 18
20 Taylor-Reihe 19
21 Ableitung von sinus 19
22 Taylor-Polynom 19
23 Taylor-Polynom 20
24 Taylor-Polynom 21
25 Taylor-Polynom 22
26 Mehrere Lösungswege 22
27 Andere Darstellung 24
28 Eine Aufgabe mit steigendem Schwierigkeitsgrad, die aber immer leichter wird 24
29 Null durch Null 26
30 Taylorentwicklung der Arcustangens-Funktion 26
31 Taylor-Polynom der Ableitung 29
32 Herleitung von Formeln 30
33 Die Eulersche Zahl 31

1 Beispiele zu Extrema

Überlegen Sie sich einige Beispiele aus Ihrer Umwelt, in denen Randextrema auftreten.

Ergebnis

- (offene Aufgabe)

2 Seemannsgarn

Cielo de los Angeles

Für das Hochseeschiff *Cielo de los Angeles* wird der Ölverbrauch in Tonnen pro Stunde nach der Formel

$$\text{Ölverbrauch } = 0.9 + 0.0025v^2$$

berechnet; dabei ist v die Geschwindigkeit in Knoten.

a) Wie viel ist ein Knoten?

b) Welche Geschwindigkeit ist optimal?

Bearbeitung

a) Ein Knoten, Abkürzung kt, ist eine Seemeile pro Stunde. Eine Seemeile (nautical mile) entspricht einer Bogenminute auf der Erdkugel. Es gilt:

$$360° \triangleq 40'000 \text{ km}$$
$$90° \triangleq 10'000 \text{ km}$$
$$1° \triangleq 111.\bar{1} \text{ km}$$
$$1' \triangleq 1.\overline{851} \text{ km}$$

Die Seemeile ist etwas größer als die amerikanische Landmeile.

Ein Knoten ist also $1.\overline{851}\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$

b) Wegen $t = \frac{s}{v}$ ergibt sich für den Ölverbrauch in Abhängigkeit von s und v:

$$f(s,v)=\left(0.9+0.0025v^2\right)t=\left(0.9+0.0025v^2\right)\tfrac{s}{v}=s\left(\tfrac{0.9}{v}+0.0025v\right)$$

Bei gegebenem s muss also gelten:

$$\tfrac{\partial}{\partial v}f(s,v)=\tfrac{\partial}{\partial v}\left(s\left(\tfrac{0.9}{v}+0.0025v\right)\right)\overset{!}{=}0$$

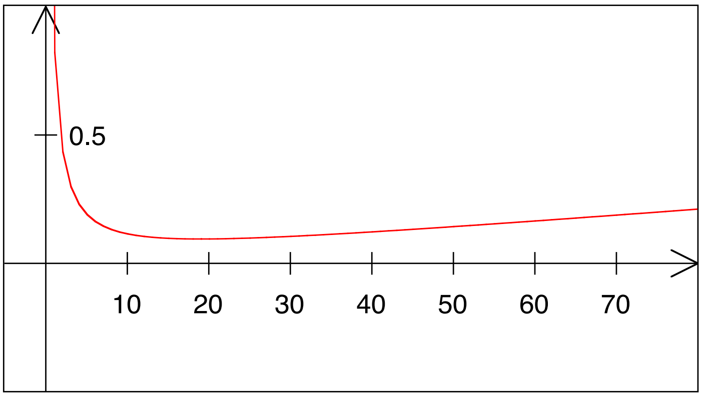
$$-\tfrac{0.9}{v^2}+0.0025=0$$

$$v=\sqrt{\tfrac{0.9}{0.0025}}\approx 18.9739$$

Bemerkung zur Schreibweise der Ableitung: $\tfrac{\partial}{\partial v}f(s,v)$ bedeutet, dass wir die Funktion $f(s,v)$, welche an sich von s und von v abhängt, nur bezüglich v ableiten (so genannte *partielle* Ableitung). Dabei wird s wie eine Konstante behandelt.

Die optimale Geschwindigkeit ist also etwa 19 Knoten oder 35 km/h.

Die Abbildung zeigt die Funktion $g(v)=\tfrac{0.9}{v}+0.0025v$.



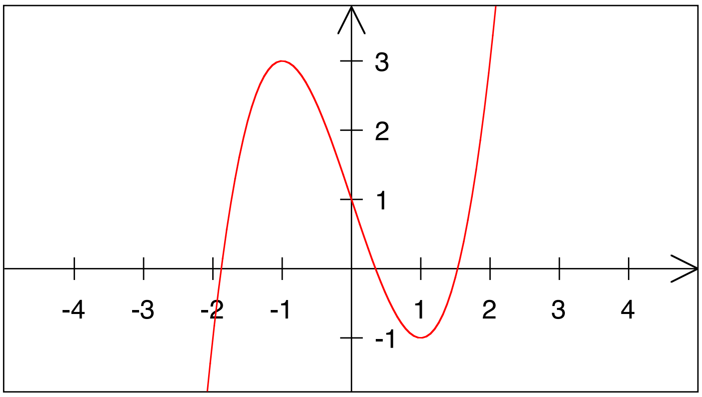
$g(v)=\tfrac{0.9}{v}+0.0025v$

Wir sehen, dass das Minimum wenig sensibel auf die Wahl von v ist.

Bei der optimalen Geschwindigkeit verbraucht die Cielo de los Angeles 1.8 Tonnen Öl pro Stunde. Damit kann ein gut isoliertes Haus einen Winter lang geheizt werden. Allerdings verbrauchen die Hochseeschiffe nicht gewöhnliches Heizöl, sondern Schweröl, das bei der Raffinerie von Rohöl anfällt. Trotz diesem enormen Verbrauch ist der Schiffstransport ökologisch die beste Lösung. Die *Cielo de los Angeles*, ein eher mittelgroßer Frachter, kann mit 1800 Containern beladen werden; das entspricht etwa 900 Güterwagen.

3 Extremstellen einer kubischen Funktion

Wir suchen die Extremstellen von $f(x) = x^3 - 3x + 1$.



$f(x) = x^3 - 3x + 1$

Ergebnis

$x = \pm 1$

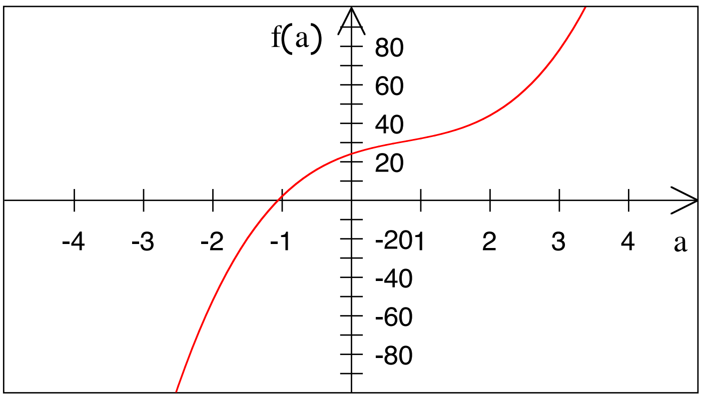
4 Vier Beispiele in einem

a) Es sei $b = 1$ und $c = 1$. Welches sind die Extrema der Funktion:

$f(a) = 3a^3 - 7a^2 b + 12ac^2 - 13b^3 + 12c^3 + 8\pi$

Ergebnis

Kein Extremum



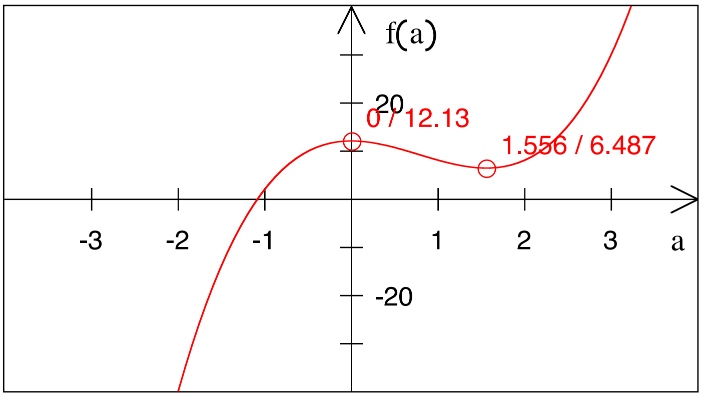
Kein Extremum

b) Es sei $b = 1$ und $c = 0$. Welches sind die Extrema der Funktion:

$f(a) = 3a^3 - 7a^2 b + 12ac^2 - 13b^3 + 12c^3 + 8\pi$

Ergebnis

$a_1 = 0$ (Maximum), $a_2 = \frac{14}{9}$ (Minimum)



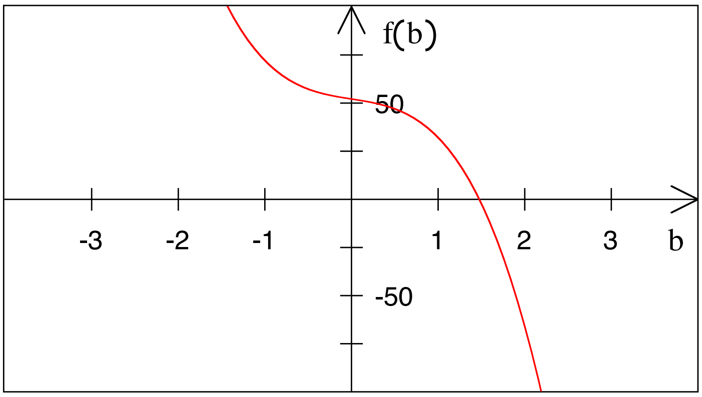
Zwei Extremstellen

c) Es sei $a = 1$ und $c = 1$. Welches sind die Extrema der Funktion:

$$f(b) = 3a^3 - 7a^2b + 12ac^2 - 13b^3 + 12c^3 + 8\pi$$

Ergebnis

Kein Extremum



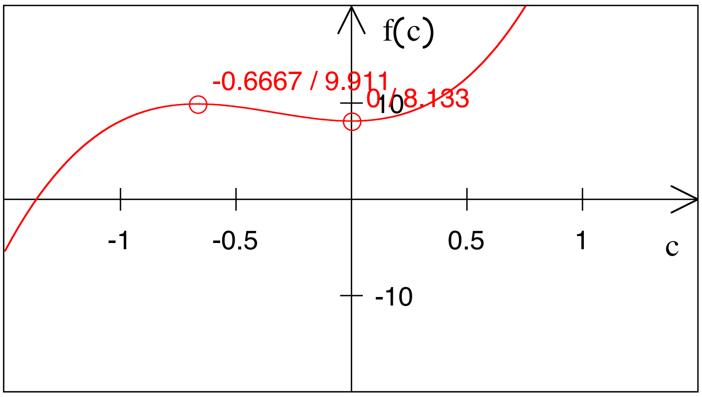
Kein Extremum

d) Es sei $a = 1$ und $b = 1$. Welches sind die Extrema der Funktion:

$$f(c) = 3a^3 - 7a^2b + 12ac^2 - 13b^3 + 12c^3 + 8\pi$$

Ergebnis

$c_1 = 0$ (Minimum), $c_2 = -\frac{2}{3}$ (Maximum)



Zwei Extremstellen

5 Umkehrbarkeit

Die Funktion *f* hat den Definitionsbereich $D = [-2, 4]$ und die Funktionsvorschrift:

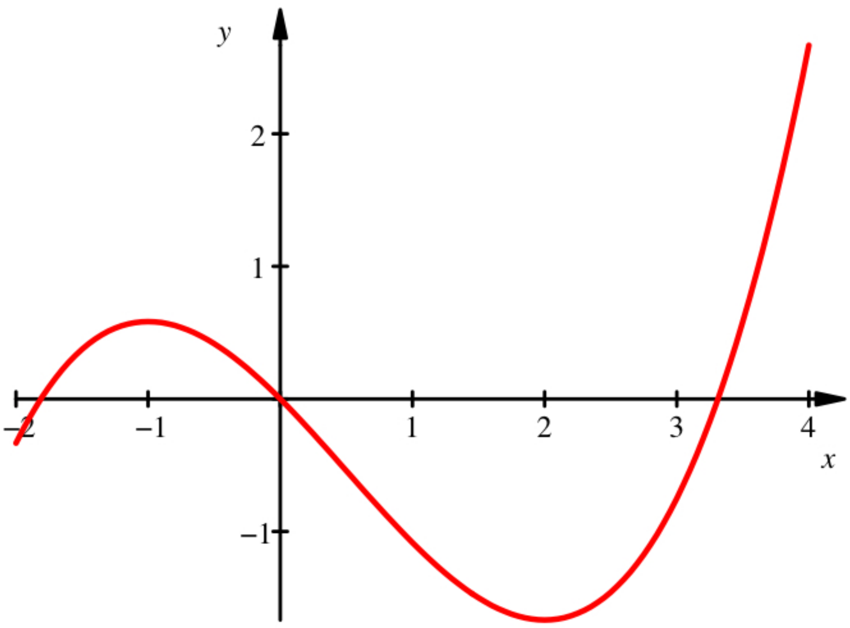
$$x \mapsto f(x) = \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{4}x^2 - x$$

a) Begründen Sie, warum die Funktion nicht umkehrbar ist.

b) Welches ist der größte Bereich $D' \subset D$, so dass die Funktion in D' umkehrbar ist?

Bearbeitung

Funktionsgraf



Funktionsgraf

a) Exemplarisch: Die Funktion hat in D drei Nullstellen, nämlich $\left\{\frac{3-\sqrt{105}}{4}, 0, \frac{3+\sqrt{105}}{4}\right\} \approx \{-1.812, 0, 3.312\}$.

b) Das längste Monotonie-Intervall in D geht vom Hochpunkt zum Tiefpunkt. Berechnung der Extrempunkte:

$$f'(x) = \tfrac{1}{2}x^2 - \tfrac{1}{2}x - 1 \overset{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = -1,\ x_2 = 2$$

Somit ist $D' = [-1, 2]$.

6 Umkehrbarkeit

Die Funktion *f* hat den Definitionsbereich $D = [-2, 3]$ und die Funktionsvorschrift:

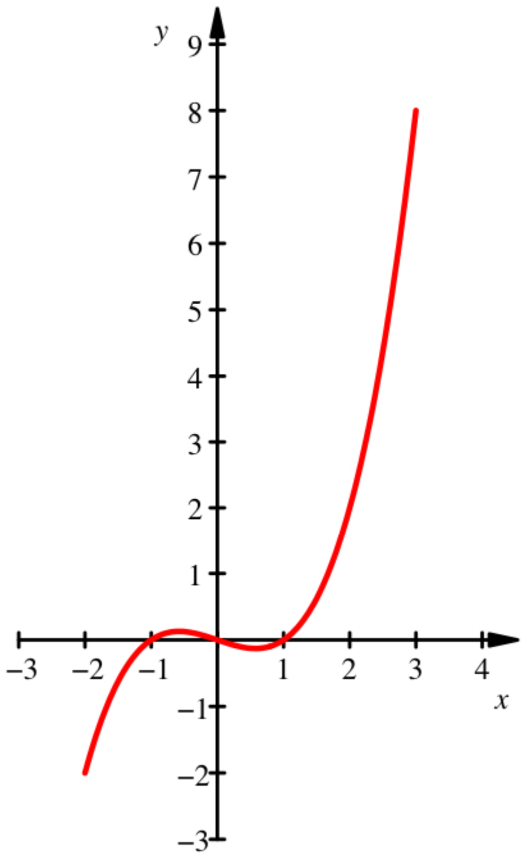
$$x \mapsto f(x) = \tfrac{1}{3}\left(x^3 - x\right)$$

a) Begründen Sie, warum die Funktion nicht umkehrbar ist.

b) Welches ist der größte Bereich $D' \subset D$, so dass die Funktion in D' umkehrbar ist?

Bearbeitung

Funktionsgraf



Funktionsgraf

a) Exemplarisch: Die Funktion hat in D drei Nullstellen, nämlich $-1, 0, 1$.

b) Das längste Monotonie-Intervall in D geht vom Tiefpunkt ans rechte Ende. Berechnung des Tiefpunktes:

$$f'(x) = \tfrac{1}{3}\left(3x^2 - 1\right) \overset{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = -\sqrt{\tfrac{1}{3}},\ x_2 = \sqrt{\tfrac{1}{3}}$$

Somit ist $D' = \left[\sqrt{\tfrac{1}{3}}, 3\right]$.

7 Extremalaufgabe

Gesucht ist das Maximum der Funktion:

$$f : x \mapsto \sqrt[x]{x}$$

Bearbeitung

$$f(x) = \sqrt[x]{x} = x^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{x}\ln(x)}$$

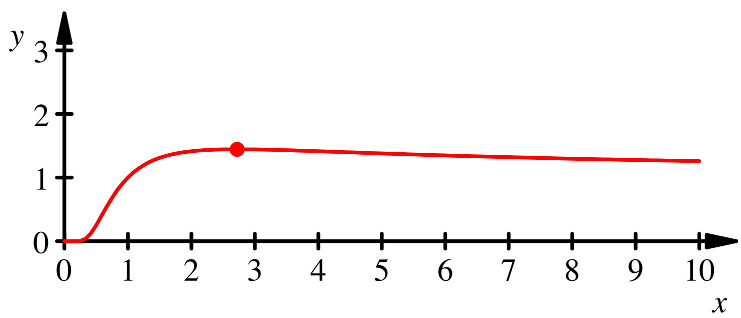
$$\frac{df}{dx} = e^{\frac{1}{x}\ln(x)}\left(\frac{-1}{x^2}\ln(x) + \frac{1}{x}\frac{1}{x}\right) = e^{\frac{1}{x}\ln(x)}\frac{1}{x^2}\left(1 - \ln(x)\right)$$

$$\underbrace{e^{\frac{1}{x}\ln(x)}\frac{1}{x^2}}_{\neq 0}\left(1 - \ln(x)\right) = 0$$

$$1 - \ln(x) = 0$$

$$x = e$$

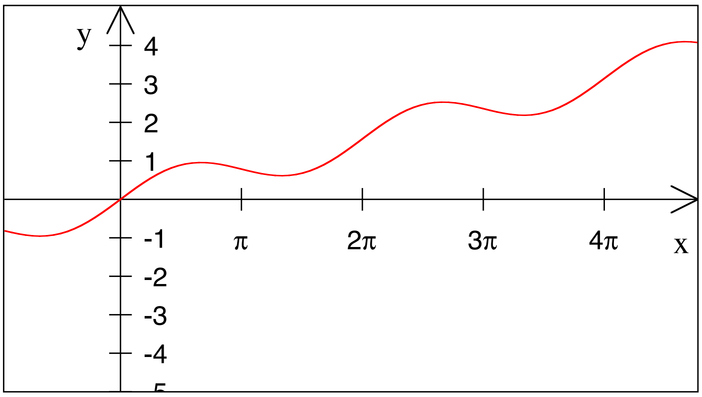
Im Funktionsgrafen ist das Maximum nur zu erahnen.



Maximum

8 Monotonie-Intervalle

Es sei $f(x)=\frac{1}{4}x+\frac{1}{2}\sin(x)$.



Monotonie-Intervalle?

In welchen Intervallen ist die Funktion streng monoton wachsend?

Ergebnis

$\left[\frac{2}{3}\pi+2k\pi, \frac{4}{3}\pi+2k\pi\right], \quad k\in\mathbb{Z}$

Lösungsweg

Die Intervallgrenzen sind dort, wo die Tangente waagrecht ist, also die Ableitung verschwindet. Aus $f(x)=\frac{1}{4}x+\frac{1}{2}\sin(x)$ folgt.

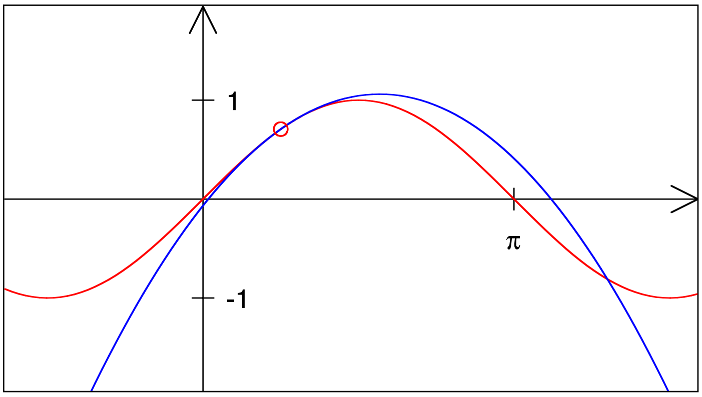
$$f'(x)=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\cos(x)$$

Die Gleichung $\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\cos(x)=0$, also $\cos(x)=-\frac{1}{2}$ hat im Intervall $[0,2\pi]$ die Lösungen $\frac{2}{3}\pi$ und $\frac{4}{3}\pi$, wegen der 2π-Periodizität des Kosinus folgt die allgemeine Lösung $\left[\frac{2}{3}\pi+2k\pi, \frac{4}{3}\pi+2k\pi\right], \quad k\in\mathbb{Z}$.

9 Taylorpolynom

a) Gesucht ist die quadratischen Parabel, welche die Sinuskurve an der Stelle $x_0 = \frac{\pi}{4}$ optimal approximiert.

b) Geht die Parabel durch den Koordinatennullpunkt?



Sinus und Parabel

Ergebnis

a) $p(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(1 + \left(x - \frac{\pi}{4}\right) - \frac{1}{2}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2\right)$

b) nein, $p(0) \approx -0.066 \neq 0$

10 Taylorreihe des Kosinus

Wie lautet die Taylorreihe für $y = f(x) = \cos(x)$ an der Stelle $x_0 = 0$?

Bearbeitung

Wir erhalten zunächst:

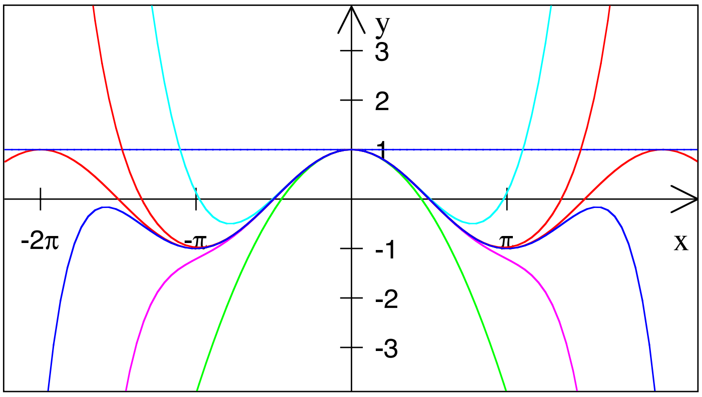
$$\begin{aligned}
f(x) &= \cos(x) & \Rightarrow && f(0) &= 1 \\
f'(x) &= -\sin(x) & \Rightarrow && f'(0) &= 0 \\
f''(x) &= -\cos(x) & \Rightarrow && f''(0) &= -1 \\
f'''(x) &= \sin(x) & \Rightarrow && f'''(0) &= 0 \\
f^{(4)}(x) &= \cos(x) & \Rightarrow && f^{(4)}(0) &= 1
\end{aligned}$$

allgemein:

$$f^{(k)}(0) = \begin{cases} 0 \text{ falls } k \text{ ungerade} \\ 1 \text{ falls } k:4 \text{ aufgeht} \\ -1 \text{ falls } k:4 \text{ Rest 2 ergibt} \end{cases}$$

Daraus ergibt sich:

$$\cos(x) = 1 - \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{4!}x^4 - \tfrac{1}{6!}x^6 \pm \cdots$$



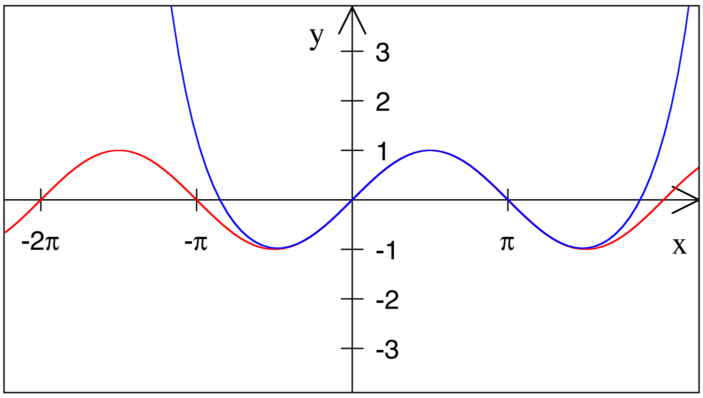
Kosinus und Approximationen

11 Taylorpolynom

Gesucht ist die Polynomfunktion achten Grades, welche die Sinuskurve an der Stelle $x_0 = \frac{\pi}{2}$ optimal approximiert.

Ergebnis

$$p(x) = 1 - \tfrac{1}{2!}\left(x - \tfrac{\pi}{2}\right)^2 + \tfrac{1}{4!}\left(x - \tfrac{\pi}{2}\right)^4 - \tfrac{1}{6!}\left(x - \tfrac{\pi}{2}\right)^6 + \tfrac{1}{8!}\left(x - \tfrac{\pi}{2}\right)^8$$



Kurve und Approximation

Bemerkung 1: Wir sehen hier erneut, dass $\sin(x) = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$

Bemerkung 2: Die Entwicklung

$$p(x) = 1 - \tfrac{1}{2!}\left(x - \tfrac{\pi}{2}\right)^2 + \tfrac{1}{4!}\left(x - \tfrac{\pi}{2}\right)^4 - \tfrac{1}{6!}\left(x - \tfrac{\pi}{2}\right)^6 + \tfrac{1}{8!}\left(x - \tfrac{\pi}{2}\right)^8$$

enthält scheinbar nur gerade Exponenten. Tatsächlich ist es aber so, dass wir zwar bezüglich $\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$ nur gerade Exponenten haben. Sobald wir aber die Sache bezüglich x ansehen, erscheinen auch ungerade Exponenten. Schon aus $\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2$ erhalten wir:

$$\left(x-\tfrac{\pi}{2}\right)^2 = x^2 - \pi x + \tfrac{\pi^2}{4}$$

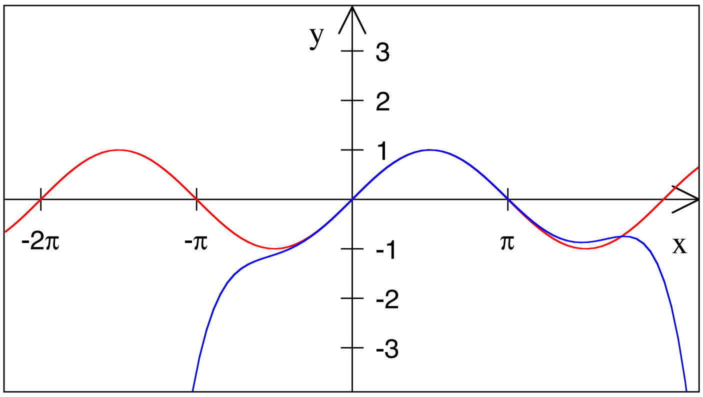
Nun erscheint ein x.

12 Taylorpolynom

Gesucht ist die Polynomfunktion sechsten Grades, welche die Sinuskurve an der Stelle $x_0 = \frac{\pi}{3}$ optimal approximiert.

Ergebnis

$$p(x) = \tfrac{1}{2}\left(\sqrt{3} + \left(x-\tfrac{\pi}{3}\right) - \tfrac{\sqrt{3}}{2!}\left(x-\tfrac{\pi}{3}\right)^2 - \tfrac{1}{3!}\left(x-\tfrac{\pi}{3}\right)^3 + \tfrac{\sqrt{3}}{4!}\left(x-\tfrac{\pi}{3}\right)^4 + \tfrac{1}{5!}\left(x-\tfrac{\pi}{3}\right)^5 - \tfrac{\sqrt{3}}{6!}\left(x-\tfrac{\pi}{3}\right)^6\right)$$



Kurve und Approximation

```
> restart:
  p(x)=taylor(sin(x), x = Pi/3, 7);
```

$$p(x) = \frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{2}x - \frac{1}{3}\pi - \frac{1}{4}\sqrt{3}\left(x-\frac{1}{3}\pi\right)^2 - \frac{1}{12}\left(x-\frac{1}{3}\pi\right)^3 + \frac{1}{48}\sqrt{3}\left(x-\frac{1}{3}\pi\right)^4 + \frac{1}{240}\left(x-\frac{1}{3}\pi\right)^5$$
$$- \frac{1}{1440}\sqrt{3}\left(x-\frac{1}{3}\pi\right)^6 + O\left(\left(x-\frac{1}{3}\pi\right)^7\right)$$

13 Wurzel und Taylor

Gesucht ist die Taylorentwicklung vierten Grades der Funktion $x \mapsto \sqrt{x}$ an der Stelle $x_0 = 1$. Wie stark weicht die Taylorentwicklung an der Stelle $x = 0$ vom wirklichen Funktionswert ab?

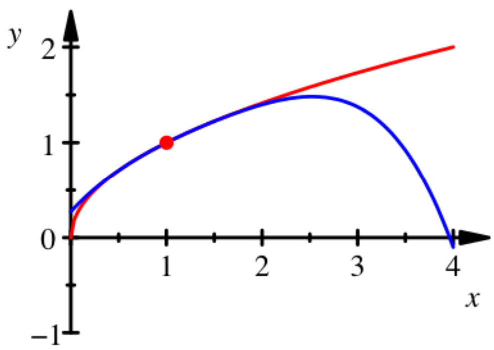
Bearbeitung

Ableitungen und Einsetzen von $x_0 = 1$:

$$\begin{array}{lll} f(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}} & \Rightarrow & f(1) = 1 \\ f'(x) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} & \Rightarrow & f'(1) = \frac{1}{2} \\ f''(x) = -\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}} & \Rightarrow & f''(1) = -\frac{1}{4} \\ f'''(x) = \frac{3}{8}x^{-\frac{5}{2}} & \Rightarrow & f'''(1) = \frac{3}{8} \\ f^{(4)}(x) = -\frac{15}{16}x^{-\frac{7}{2}} & \Rightarrow & f^{(4)}(1) = -\frac{15}{16} \end{array}$$

Taylorentwicklung vierten Grades:

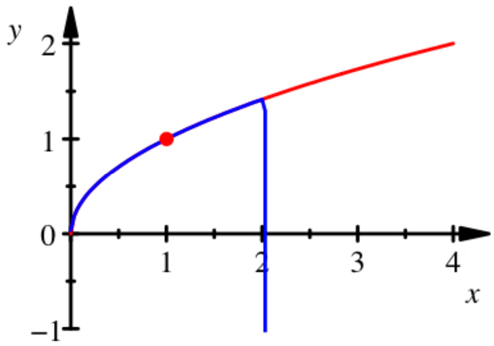
$$\begin{aligned} p_4(x) &= 1 + \tfrac{1}{2}(x-1) - \tfrac{1}{2!}\tfrac{1}{4}(x-1)^2 + \tfrac{1}{3!}\tfrac{3}{8}(x-1)^3 - \tfrac{1}{4!}\tfrac{15}{16}(x-1)^4 \\ &= 1 + \tfrac{1}{2}(x-1) - \tfrac{1}{8}(x-1)^2 + \tfrac{1}{16}(x-1)^3 - \tfrac{5}{128}(x-1)^4 \end{aligned}$$



Wurzelfunktion und Taylorapproximation vierten Grades

Für $x = 0$ erhalten wir $p_4(0) = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{8} - \frac{1}{16} - \frac{5}{128} = \frac{35}{128} = 0.2734375$. Das ist die Abweichung von $\sqrt{0} = 0$.

Bemerkung: Wenn wir bis zum Grad 250 entwickeln, sieht die Sache so aus:

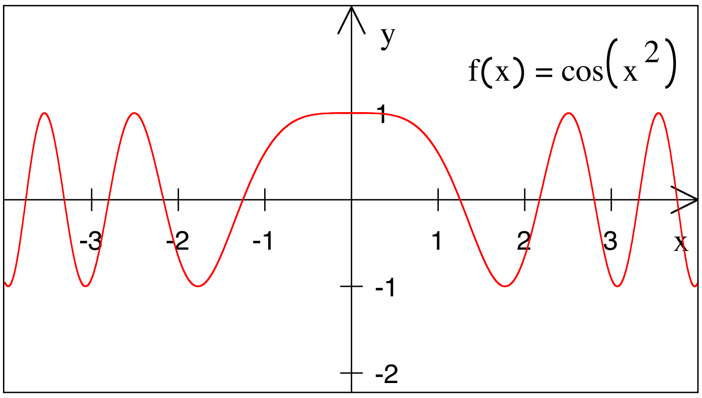


Wurzelfunktion und Taylorapproximation vom Grad 250

Wir sehen hier, dass der so genannte Konvergenzradius beschränkt ist, in unserem Beispiel ist er 1.

14 Taylorpolynom

Gesucht ist das Taylorpolynom 4. Grades an der Stelle $x_0 = 0$ der Funktion $f(x) = \cos\left(x^2\right)$.



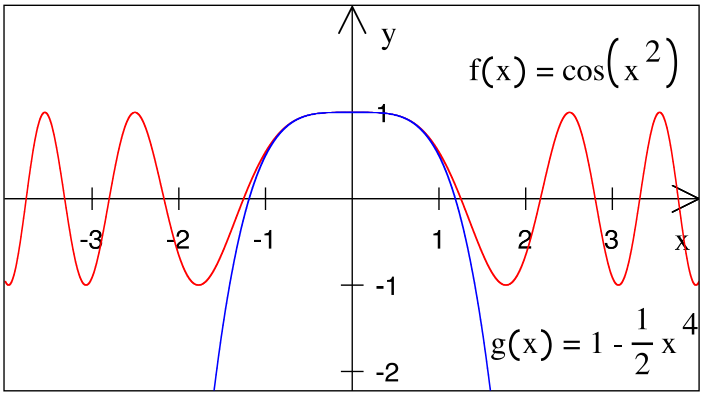
Kurve

a) durch direkte Berechnung,

b) durch Verwendung der Taylorentwicklung von $\cos(x)$.

Ergebnis

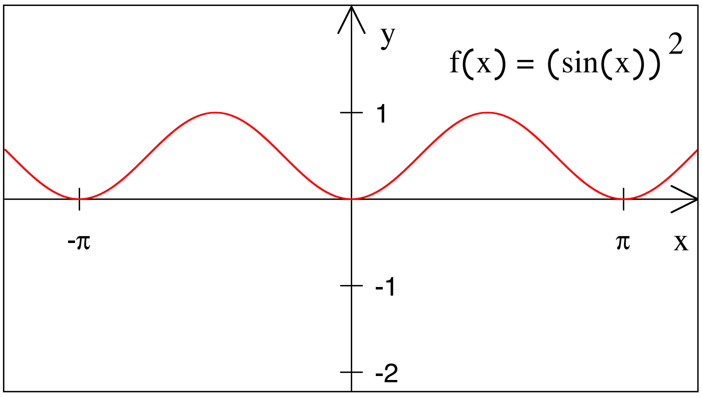
$\cos\left(x^2\right) \approx 1 - \frac{1}{2}x^4$



Kurve und Approximation

15 Taylorpolynom

Gesucht ist das Taylorpolynom 4. Grades an der Stelle $x_0 = 0$ der Funktion $f(x) = (\sin(x))^2$.



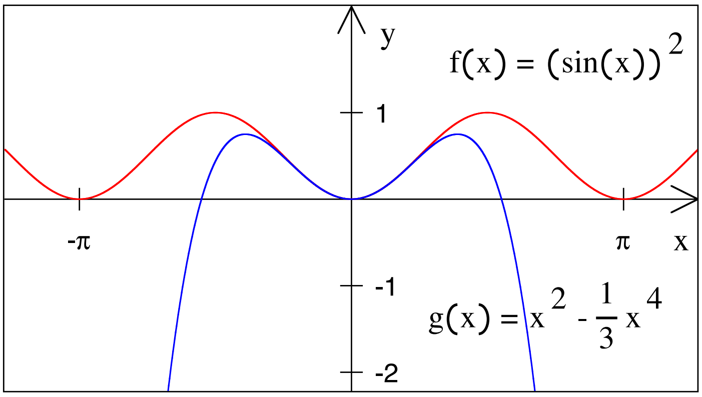
Kurve

a) durch direkte Berechnung,

b) durch Verwendung der Taylorentwicklung von $\sin(x)$.

Ergebnis

$(\sin(x))^2 \approx x^2 - \frac{1}{3}x^4$



Kurve und Approximation

16 Taylor-Polynom

Gesucht ist das Taylor-Polynom sechsten Grades der Funktion $f(x) = (\sin(x))^2$ an der Stelle $x_0 = 0$. Es gibt zwei Lösungswege.

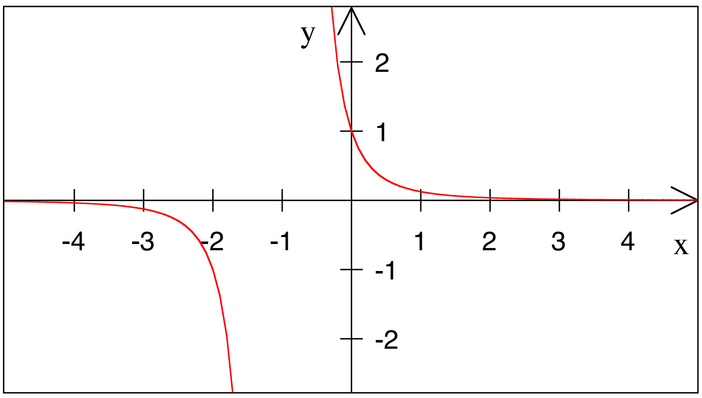
Ergebnis

Direkt oder durch Quadrieren der Entwicklung von $\sin(x)$.

$$p_6(x) = x^2 - \tfrac{1}{3}x^4 + \tfrac{2}{45}x^6$$

17 Taylorpolynom 5. Grades

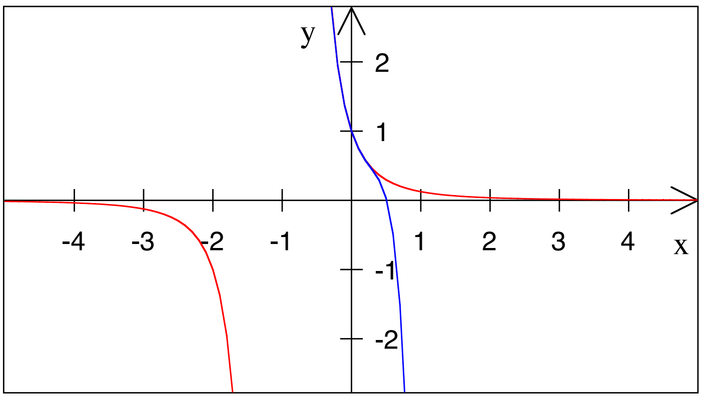
Gesucht ist das Taylorpolynom 5. Grades an der Stelle $x_0 = 0$ der Funktion $f(x) = (1+x)^{-3}$.



$f(x) = (1+x)^{-3}$

Ergebnis

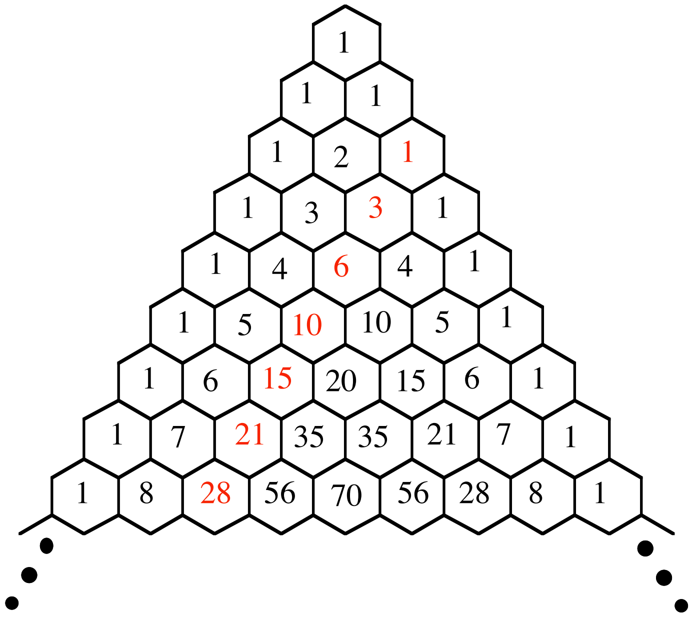
$$f(x) = (1+x)^{-3} \approx 1 - 3x + 6x^2 - 10x^3 + 15x^4 - 21x^5$$



Funktion mit Taylor-Entwicklung

Bemerkung

Die vorkommenden Koeffizienten erscheinen auch im Pascal-Dreieck der Binomialkoeffizienten. In der Taylor-Entwicklung haben sie aber ein alternierendes Vorzeichen.

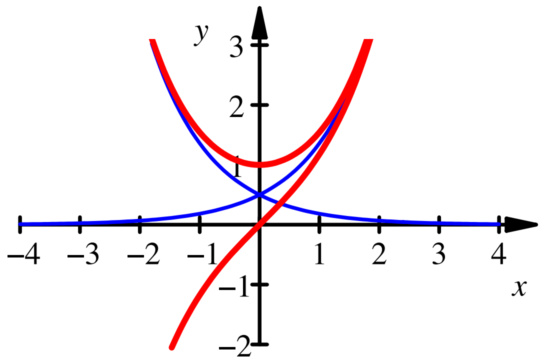


Binomialkoeffizienten

18 cosh und sinh

Die Funktionen cosh (*Cosinus hyperbolicus, hyperbolischer Kosinus*) und sinh (*Sinus hyperbolicus, hyperbolischer Sinus*) sind wie folgt definiert:

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \text{ und } \sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$



cosh(*x*) und sinh(*x*)

Wie lautet die Taylor-Reihe für diese Funktionen für $x_0 = 0$? Gibt es verschiedene Lösungswege? Vergleich mit den entsprechenden Reihen bei cos und sin?

Tipp: Zuerst die Ableitungsregeln für $\cosh(x)$ und $\sinh(x)$ erarbeiten.

Ergebnis

$$\cosh(x) = 1 + \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{24}x^4 + \tfrac{1}{720}x^6 + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k)!}x^{2k}$$

$$\sinh(x) = x + \tfrac{1}{6}x^3 + \tfrac{1}{120}x^5 + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)!}x^{2k+1}$$

Bearbeitung

Aus $\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ folgt $\left(\cosh(x)\right)' = \frac{e^x + (-1)e^{-x}}{2} = \sinh(x)$

Aus $\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ folgt $\left(\sinh(x)\right)' = \frac{e^x - (-1)e^{-x}}{2} = \cosh(x)$

Es ist also:

$$\left(\cosh(x)\right)' = \sinh(x)$$
$$\left(\sinh(x)\right)' = \cosh(x)$$

Wir haben also bis auf ein Vorzeichen dieselben Regeln wie bei cos und sin.

Taylorreihe für cosh an der Stelle $x_0 = 0$.

Erster Lösungsweg

Schema F (das heißt üblicher Weg)

$$\begin{array}{ll} \cosh(x) & \cosh(0)=1 \\ (\cosh(x))' = \sinh(x) & (\cosh(0))' = 0 \\ (\cosh(x))'' = \cosh(x) & (\cosh(0))'' = 1 \end{array}$$

Die Sache ist periodisch mit der Periodenlänge 2. Für die Koeffizienten a_k in der Taylor-Entwicklung erhalten wir daher:

$$a_k = \tfrac{1}{k!} f^{(k)}(x_0) = \begin{cases} \frac{1}{k!} & \text{falls } k \text{ gerade} \\ 0 & \text{falls } k \text{ ungerade} \end{cases}$$

Somit ergibt sich:

$$\cosh(x) = 1 + \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{24}x^4 + \tfrac{1}{720}x^6 + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \tfrac{1}{(2k)!} x^{2k}$$

Das ist bis auf Vorzeichen gleich wie bei cos.

Zweiter Lösungsweg

Wir setzen die Taylorreihe

$$e^x = 1 + x + \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{3!}x^3 + \tfrac{1}{4!}x^4 + \cdots$$

der Exponentialfunktion in die Definition $\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ ein. Dann ist:

$$\begin{aligned} \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} &= \frac{\left(1+x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{4!}x^4+\cdots\right)+\left(1+(-x)+\frac{1}{2}(-x)^2+\frac{1}{3!}(-x)^3+\frac{1}{4!}(-x)^4+\cdots\right)}{2} \\ &= \frac{2\left(1+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{4!}x^4+\cdots\right)}{2} = 1 + \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{4!}x^4 + \cdots \end{aligned}$$

Die ungeraden Potenzen fallen weg.

Für sinh kann analog vorgegangen werden.

19 Taylor-Reihe

Gesucht ist die Taylor-Reihe der Funktion $f(x) = 2^x$ an der Stelle $x_0 = 0$. Es gibt zwei Lösungswege; welches ist der einfachere Lösungsweg?

Erster Lösungsweg:

direkt

Zweiter Lösungsweg:

$f(x) = 2^x = e^{x\ln(2)}$, Entwicklung von e^x benützen.

Ergebnis

$$2^x = \sum_{k=0}^{\infty} \tfrac{1}{k!}\left(x\ln(2)\right)^k$$

20 Taylor-Reihe

Gesucht ist die Taylor-Reihe der Funktion $f(t) = \sin(\omega t)$ an der Stelle $t_0 = 0$. Es gibt zwei Lösungswege; welches ist der elegantere Lösungsweg?

Bearbeitung

Erster Lösungsweg: direkt

Zweiter Lösungsweg: Entwicklung von $\sin(t)$ benützen, anstelle von t den Term ωt einsetzen.

Ergebnis

$$f(t) = \sin(\omega t) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \tfrac{1}{2k+1}(\omega t)^{2k+1}$$

21 Ableitung von sinus

Zeigen Sie unter Verwendung der Taylor-Entwicklung, dass $\left(\sin(x)\right)' = \cos(x)$

Ergebnis

$$\sin(x) = x - \tfrac{1}{3!}x^3 + \tfrac{1}{5!}x^5 - \tfrac{1}{7!}x^7 \pm \cdots$$

Ableiten der Potenzreihe ergibt:

$$1 - \tfrac{3}{3!}x^2 + \tfrac{5}{5!}x^4 - \tfrac{7}{7!}x^6 \pm \cdots = 1 - \tfrac{1}{2!}x^2 + \tfrac{1}{4!}x^4 - \tfrac{1}{6!}x^6 \pm \cdots = \cos(x)$$

22 Taylor-Polynom

Gesucht ist ein approximativer Wert für:

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} e^{-x^2}\,dx$$

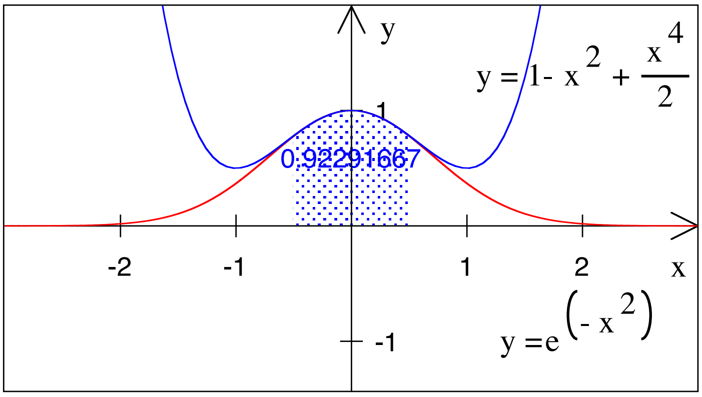
Anleitung: Verwenden Sie eine Taylorentwicklung 4. Grades für den Integranden.

Ergebnis

$$e^{-x^2} \approx 1 - x^2 + \frac{x^4}{2}$$

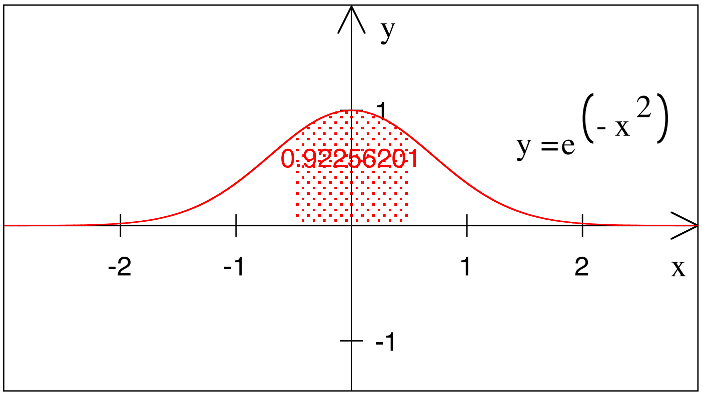
$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} e^{-x^2} dx \approx \frac{443}{480} = 0.92291\overline{6}$$

Die folgende Grafik zeigt die Kurve und die Approximation samt Integral:



Integral der Approximation

Die folgende Grafik zeigt das „richtige“ Integral (natürlich auch nur approximiert).



„Echtes“ Integral

23 Taylor-Polynom

Wie groß ist das Integral

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(x) dx$$

a) Exakte Berechnung (easy)

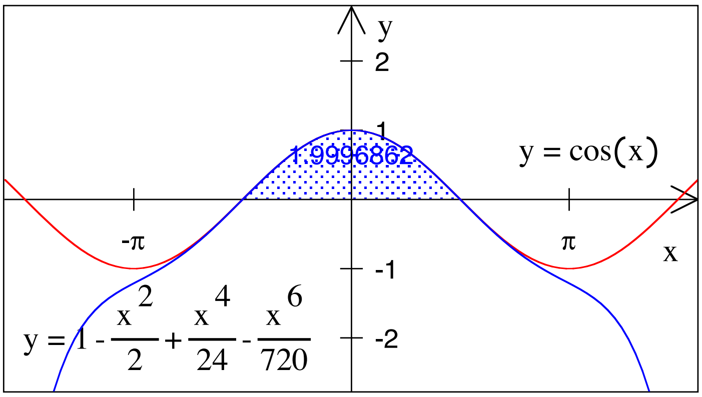
b) Verwendung einer Taylor-Approximation vom Grad 6

Ergebnis

a) 2

b) 1.999686203

Die Grafik zeigt Kurve und Approximation mit Integral.



Approximation mit Integral

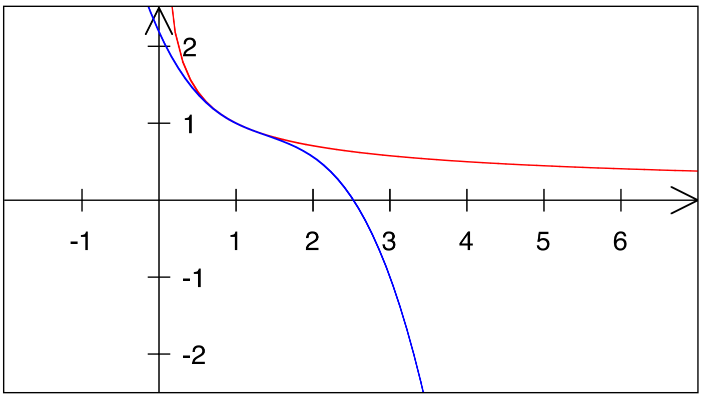
24 Taylor-Polynom

a) Gesucht ist das Taylor-Polynom dritten Grades der Funktion $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$ an der Stelle $x_0=1$.

b) Gesucht ist die Taylor-Reihe der Funktion $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$ an der Stelle $x_0=1$.

Ergebnis

a) $p_3(x)=1-\frac{1}{2}(x-1)+\frac{3}{8}(x-1)^2-\frac{5}{16}(x-1)^3$

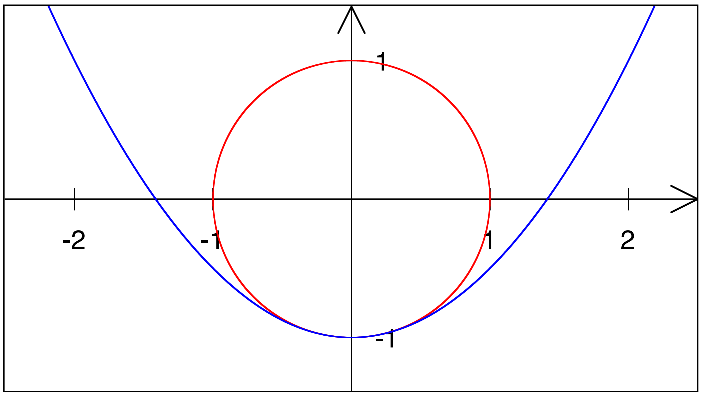


$p_3(x)=1-\frac{1}{2}(x-1)+\frac{3}{8}(x-1)^2-\frac{5}{16}(x-1)^3$

b) $\frac{1}{\sqrt{x}}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(2k)!}{2^{2k}(k!)^2}(-1)^k(x-1)^k$

25 Taylor-Polynom

Gesucht ist die quadratische Parabel, welche den Einheitskreis im Punkt (0,-1) am besten approximiert.



Kreis und Parabel

Ergebnis

$p_2(x) = -1 + \frac{1}{2}x^2$

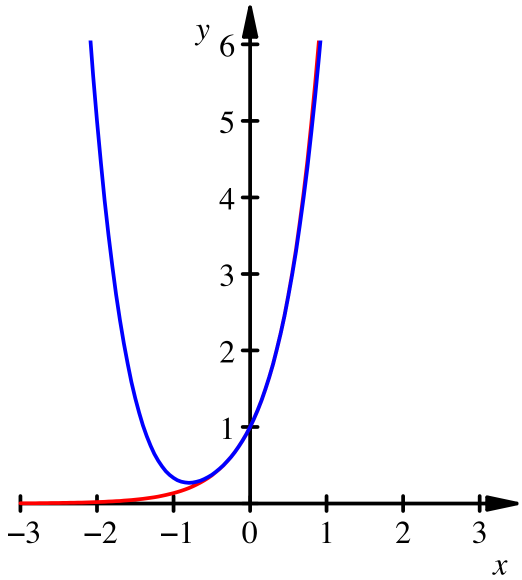
26 Mehrere Lösungswege

Gesucht ist das Taylorpolynom vierten Grades der Funktion $f(x) = \mathrm{e}^{2x}$ an der Stelle $x_0 = 0$. Es gibt verschiedene Lösungswege.

Ergebnis

$$p_4(x) = 1 + 2x + 2x^2 + \tfrac{4}{3}x^3 + \tfrac{2}{3}x^4 = \sum_{k=0}^{4} \tfrac{2^k}{k!}x^k$$

Die Abbildung zeigt rot die Funktion und blau das Taylorpolynom.



Funktion (rot) und Taylorapproximation (blau)

Erster Lösungsweg: Straightforward

$$\begin{array}{lcl}
f(x) = \mathrm{e}^{2x} & \Rightarrow & f(0) = 1 \\
f'(x) = 2\mathrm{e}^{2x} & \Rightarrow & f'(0) = 2 \\
f''(x) = 4\mathrm{e}^{2x} & \Rightarrow & f''(0) = 4 \\
f'''(x) = 8\mathrm{e}^{2x} & \Rightarrow & f'''(0) = 8 \\
f''''(x) = 16\mathrm{e}^{2x} & \Rightarrow & f''''(0) = 16 \\
f^{(k)}(x) = 2^k \mathrm{e}^{2x} & \Rightarrow & f^{(k)}(0) = 2^k
\end{array}$$

Damit erhalten wird das Taylorpolynom:

$$p_4(x) = \sum_{k=0}^{4} \frac{2^k}{k!} x^k = 1 + 2x + \frac{4}{2}x^2 + \frac{8}{3!}x^3 + \frac{16}{4!}x^4 = 1 + 2x + 2x^2 + \frac{4}{3}x^3 + \frac{2}{3}x^4$$

Zweiter Lösungsweg: Vorhandenes Wissen nutzen

Wir kennen bereits die Taylorentwicklung: $\mathrm{e}^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$

Nun ersetzen wir x durch $2x$ und erhalten:

$$\mathrm{e}^{2x} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2x)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k}{k!} x^k$$

Dritter Lösungsweg: Funktionsterm umformen

$$f(x) = \mathrm{e}^{2x} = \left(\mathrm{e}^{x}\right)^2 = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}\right)^2$$

Es genügt, in der Taylorentwicklung von $\mathrm{e}^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ bis zum vierten Grad zu gehen.

$$\begin{aligned}
&\left(1 + x + \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{6}x^3 + \tfrac{1}{24}x^4\right) \cdot \left(1 + x + \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{6}x^3 + \tfrac{1}{24}x^4\right) = \\
&= 1 + 2 \cdot x + \left(2 \cdot \tfrac{1}{2}x^2 + x^2\right) + \left(2 \cdot \tfrac{1}{6}x^3 + 2 \cdot x \cdot \tfrac{1}{2}x^2\right) \\
&\qquad + \left(2 \cdot \tfrac{1}{24}x^4 + 2 \cdot x \cdot \tfrac{1}{6}x^3 + \tfrac{1}{2}x^2 \cdot \tfrac{1}{2}x^2\right) + \text{höhere Glieder} \\
&= 1 + 2x + 2x^2 + \tfrac{4}{3}x^3 + \tfrac{2}{3}x^4 + \text{höhere Glieder}
\end{aligned}$$

Vierter Lösungsweg: Die billige Tour mit CAS

MuPAD gibt:

```
f:=x->exp(2*x):
taylor(f(x),x=0, AbsoluteOrder=5);
```

$$1 + 2 \cdot x + 2 \cdot x^2 + \frac{4 \cdot x^3}{3} + \frac{2 \cdot x^4}{3} + O\left(x^5\right)$$

27 Andere Darstellung

Gesucht ist die Darstellung der Funktion $f(x) = 3x^3 - 7x^2 + 2x + 1$ in der Form:

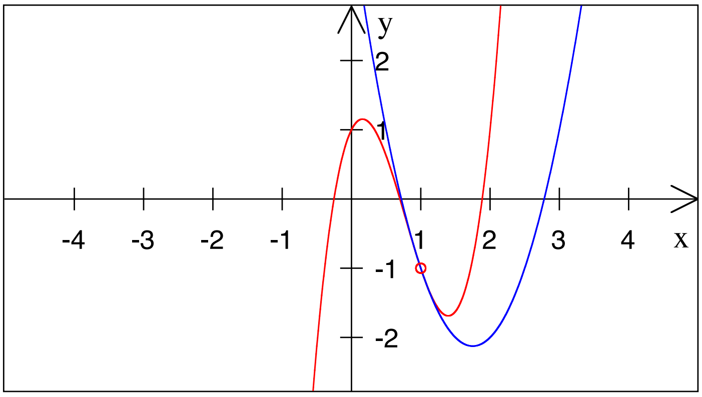
$$f(x) = a_3(x-1)^3 + a_2(x-1)^2 + a_1(x-1) + a_0$$

Ergebnis

$f(x) = 3(x-1)^3 + 2(x-1)^2 - 3(x-1) - 1$

28 Eine Aufgabe mit steigendem Schwierigkeitsgrad, die aber immer leichter wird

a) $f(x) = 3x^3 - 7x^2 + 2x + 1$. Gesucht ist zunächst die quadratische Parabel, welche die kubische Parabel von f an der Stelle $x_0 = 1$ optimal approximiert. Zeigen Sie dann, dass diese beiden Parabeln keinen weiteren Punkt mehr gemeinsam haben.



Kurve und quadratische Approximation

b) $f(x)=3x^3-7x^2+2x+1$. Gesucht ist zunächst die quadratische Parabel, welche die kubische Parabel von *f* an der Stelle x_0 optimal approximiert. Zeigen Sie dann, dass diese beiden Parabeln keinen weiteren Punkt mehr gemeinsam haben.

c) Wird eine beliebige kubische Parabel an einer beliebigen Stelle x_0 durch eine quadratische Parabel approximiert, dann haben die beiden Parabeln keinen weiteren Schnittpunkt mehr gemeinsam. Dies ist zu zeigen.

Tipp: Die kubische Parabel lässt sich in der Form

$$y=a_3(x-x_0)^3+a_2(x-x_0)^2+a_1(x-x_0)+a_0$$

darstellen.

d) Wird eine beliebige Parabel *n*-ten Grades an einer beliebigen Stelle x_0 durch eine Parabel $(n-1)$-ten Grades approximiert, dann haben die beiden Parabeln keinen weiteren Schnittpunkt mehr gemeinsam. Dies ist zu zeigen.

Ergebnis

a) $p(x)=2x^2-7x+4$. Die Gleichung $f(x)=p(x)$ ist äquivalent zu $(x-1)^3=0$.

b) $p(x)=(9x_0-7)x^2+\left(-9x_0^2+2\right)x+3x_0^3+1$. Die Gleichung $f(x)=p(x)$ ist äquivalent zu $(x-x_0)^3=0$.

c) Aus $y=f(x)=a_3(x-x_0)^3+a_2(x-x_0)^2+a_1(x-x_0)+a_0$ ergibt sich $p(x)=a_2(x-x_0)^2+a_1(x-x_0)+a_0$. Die Gleichung $f(x)=p(x)$ ist äquivalent zu $(x-x_0)^3=0$.

d) Aus $y=f(x)=\sum_{k=0}^{n}a_k(x-x_0)^k$ ergibt sich $p(x)=\sum_{k=0}^{n-1}a_k(x-x_0)^k$. Die Gleichung $f(x)=p(x)$ ist äquivalent zu $(x-x_0)^n=0$.

29 Null durch Null

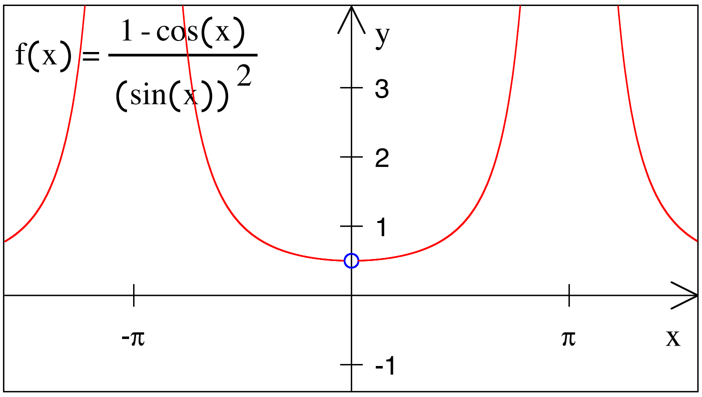
$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1-\cos(x)}{(\sin(x))^2}\right) = ?$$

a) Anwendung der Regel von Bernoulli - de l'Hôpital

b) Geeignete Taylor-Entwicklung in Zähler und Nenner

Ergebnis

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1-\cos(x)}{(\sin(x))^2}\right) = \frac{1}{2}$$



Grenzwert = 0.5

30 Taylorentwicklung der Arcustangens-Funktion

Gesucht ist die Taylorentwicklung vom Grad 7 der Funktion $\arctan(t)$ an der Stelle $t_0 = 0$. Was ergibt sich, wenn der Wert $t = 1$ eingesetzt wird?

Bearbeitung

Wir erhalten der Reihe nach die Ableitungen (bis zum Grad 6 habe ich es von Hand nachgerechnet):

```
restart:
for n from 1 to 7 do
        Diff(arctan(t),t$n)=simplify(diff(arctan(t),t$n));
end do;
```

$$\frac{d}{dt}\arctan(t) = \frac{1}{1+t^2}$$

$$\frac{d^2}{dt^2}\arctan(t) = -\frac{2\,t}{(1+t^2)^2}$$

$$\frac{d^3}{dt^3}\arctan(t) = \frac{2\,(3\,t^2-1)}{(1+t^2)^3}$$

$$\frac{d^4}{dt^4}\arctan(t) = -\frac{24\,t\,(t^2-1)}{(1+t^2)^4}$$

$$\frac{d^5}{dt^5}\arctan(t) = \frac{24\,(5\,t^4-10\,t^2+1)}{(1+t^2)^5}$$

$$\frac{d^6}{dt^6}\arctan(t) = -\frac{240\,t\,(3\,t^4-10\,t^2+3)}{(1+t^2)^6}$$

$$\frac{d^7}{dt^7}\arctan(t) = \frac{720\,(7\,t^6-35\,t^4+21\,t^2-1)}{(1+t^2)^7}$$

Für $t_0 = 0$ erhalten wir somit:

$$\arctan(0) = 0 \qquad \frac{d}{dt}\arctan(0) = 1 \qquad \frac{d^2}{dt^2}\arctan(0) = 0 \qquad \frac{d^3}{dt^3}\arctan(0) = -2$$

$$\frac{d^4}{dt^4}\arctan(0) = 0 \qquad \frac{d^5}{dt^5}\arctan(0) = 24 \qquad \frac{d^6}{dt^6}\arctan(0) = 0 \qquad \frac{d^7}{dt^7}\arctan(0) = -720$$

Für die Koeffizienten

$$a_k = \tfrac{1}{k!}f^{(k)}(t_0)$$

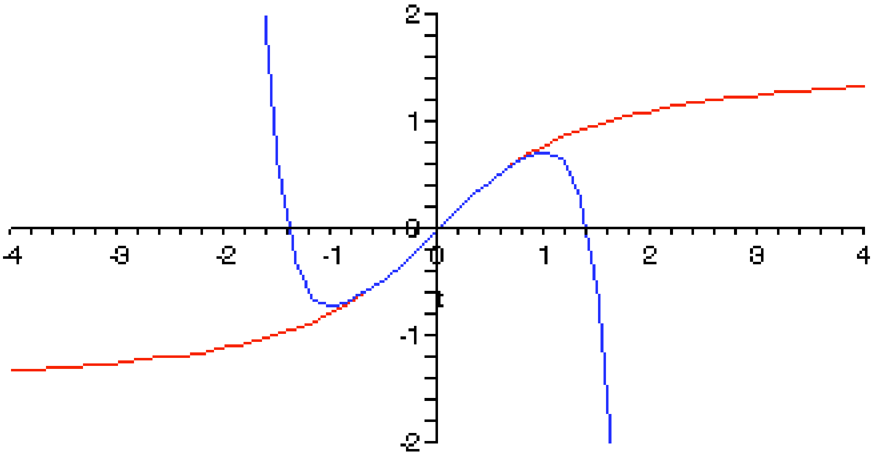
erhalten wir:

k	0	1	2	3	4	5	6	7
a_k	0	1	0	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{5}$	0	$-\frac{1}{7}$

und damit die Entwicklung:

$$\arctan(t) \approx t - \tfrac{1}{3}t^3 + \tfrac{1}{5}t^5 - \tfrac{1}{7}t^7$$

Die Figur zeigt die Graphen von Arcustangens und der Approximation.



Taylor

Es ist offensichtlich, wie es weitergeht:

$$\arctan(t) = t - \tfrac{1}{3}t^3 + \tfrac{1}{5}t^5 - \tfrac{1}{7}t^7 \pm \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \tfrac{1}{2k+1} t^{2k+1}$$

Wegen $\arctan(1) = \frac{\pi}{4}$ erhalten wir für $t = 1$ eine Approximation von $\frac{\pi}{4}$. Es ist:

$$\pi = 4\left(t - \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{7} \pm \cdots\right) = 4\sum_{k=0}^{\infty} \tfrac{(-1)^k}{2k+1}$$

Diese Formel geht auf Leibniz (1646-1716) zurück. Die Reihe konvergiert nicht sehr schnell.

```
for k from 1 to 20 do
p:=4*sum('evalf((-1)^n/(2*n+1))', 'n'=0..k):
print('n'=k,'Näherungswert'=p);
od:
```

$n = 1$, Näherungswert = 2.666666667
$n = 2$, Näherungswert = 3.466666667
$n = 3$, Näherungswert = 2.895238095
$n = 4$, Näherungswert = 3.339682540
$n = 5$, Näherungswert = 2.976046176
$n = 6$, Näherungswert = 3.283738484
$n = 7$, Näherungswert = 3.017071817
$n = 8$, Näherungswert = 3.252365934
$n = 9$, Näherungswert = 3.041839619
$n = 10$, Näherungswert = 3.232315809
$n = 11$, Näherungswert = 3.058402766
$n = 12$, Näherungswert = 3.218402766
$n = 13$, Näherungswert = 3.070254618
$n = 14$, Näherungswert = 3.208185652

$n = 15$, Näherungswert = 3.079153394
$n = 16$, Näherungswert = 3.200365515
$n = 17$, Näherungswert = 3.086079801
$n = 18$, Näherungswert = 3.194187909

31 Taylor-Polynom der Ableitung

Eine Funktion f hat die Taylor-Polynom:

$$f(x) \approx \sum_{k=0}^{n} \tfrac{1}{k!} f^{(k)}(x_0)(x-x_0)^k$$

Was kann über die Ableitung $g(x) = f'(x)$ gesagt werden?

Bearbeitung

Wir können auf zwei Wege vorgehen.

a) Ableitung des Taylor-Polynoms von f:

$$g(x) = f'(x) \approx \left(\sum_{k=0}^{n} \tfrac{1}{k!} f^{(k)}(x_0)(x-x_0)^k \right)'$$

Da wir für $k=0$ in f eine Konstante haben, fällt diese beim Ableiten weg:

$$\begin{aligned} g(x) = f'(x) &\approx \left(\sum_{k=0}^{n} \tfrac{1}{k!} f^{(k)}(x_0)(x-x_0)^k \right)' \\ &= \sum_{k=1}^{n} \tfrac{1}{k!} f^{(k)}(x_0)\left((x-x_0)^k\right)' \\ &= \sum_{k=1}^{n} \tfrac{1}{k!} f^{(k)}(x_0)k(x-x_0)^{k-1} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \tfrac{1}{(k-1)!} f^{(k)}(x_0)(x-x_0)^{k-1} \end{aligned}$$

b) Direktes Vorgehen: Es ist:

$$f'(x) = g(x) \approx \sum_{k=0}^{n-1} \tfrac{1}{k!} g^{(k)}(x_0)(x-x_0)^k$$

Man beachte, dass der Grad um 1 kleiner wird.

Nun ist aber $g^{(k)} = (f')^{(k)} = f^{(k+1)}$. Somit erhalten wir:

$$f'(x) = g(x) \approx \sum_{k=0}^{n-1} \tfrac{1}{k!} f^{(k+1)}(x_0)(x - x_0)^k$$

Jetzt haben wir zwei Darstellungen:

a) $$g(x) \approx \sum_{k=1}^{n} \tfrac{1}{(k-1)!} f^{(k)}(x_0)(x - x_0)^{k-1}$$

b) $$g(x) \approx \sum_{k=0}^{n-1} \tfrac{1}{k!} f^{(k+1)}(x_0)(x - x_0)^k$$

Die vermeintlichen Unterschiede sind ein Bezeichnungsproblem. Wir ersetzen zunächst in b) die Summationsvariable k durch $k = i - 1$. Dann ist $k + 1 = i$. Weil k von 0 bis $n - 1$ läuft, läuft i von 1 bis n. Somit haben wir:

$$g(x) \approx \sum_{k=0}^{n-1} \tfrac{1}{k!} f^{(k+1)}(x_0)(x - x_0)^k = \sum_{i=1}^{n} \tfrac{1}{(i-1)!} f^{(i)}(x_0)(x - x_0)^{i-1}$$

Wenn wir nun i direkt durch k ersetzen, erhalten wir die Version a).

32 Herleitung von Formeln

Gesucht sind für $|q| < 1$ Formeln für:

$$\sum_{k=1}^{\infty} kq^k = ? \qquad \sum_{k=1}^{\infty} k^2 q^k = ? \qquad \sum_{k=1}^{\infty} k^3 q^k = ? \qquad \sum_{k=1}^{\infty} k^4 q^k = ?$$

Tipp: Funktion $f(q) = \sum_{k=1}^{\infty} q^k = \frac{q}{1-q}$ ableiten

Bearbeitung

$$f(q) = \sum_{k=1}^{\infty} q^k = \frac{q}{1-q}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}q} f(q) = \sum_{k=1}^{\infty} kq^{k-1} = \frac{1}{(1-q)^2}$$

Daher ist (Multiplikation mit q):

$$\sum_{k=1}^{\infty} kq^k = \frac{q}{(1-q)^2}$$

Weiter:

$$g(q) = \sum_{k=1}^{\infty} kq^k = \frac{q}{(1-q)^2}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}q} g(q) = \sum_{k=1}^{\infty} k^2 q^{k-1} = \frac{1+q}{(1-q)^3}$$

Daher ist (Multiplikation mit q):

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^2 q^k = \frac{q+q^2}{(1-q)^3}$$

Weiter:

$$h(q) = \sum_{k=1}^{\infty} k^2 q^k = \frac{q+q^2}{(1-q)^3}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}q} h(q) = \sum_{k=1}^{\infty} k^3 q^{k-1} = \frac{1+4q+q^2}{(1-q)^4}$$

Daher ist (Multiplikation mit q):

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^3 q^k = \frac{q+4q^2+q^3}{(1-q)^4}$$

Weiter:

$$i(q) = \sum_{k=1}^{\infty} k^3 q^k = \frac{q+4q^2+q^3}{(1-q)^4}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}q} i(q) = \sum_{k=1}^{\infty} k^4 q^{k-1} = \frac{1+11q+11q^2+q^3}{(1-q)^5}$$

Daher ist (Multiplikation mit q):

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^4 q^k = \frac{q+11q^2+11q^3+q^4}{(1-q)^5}$$

33 Die Eulersche Zahl

In die binomische Formel

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k = a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2!} a^{n-2} b^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} a^{n-3} b^3 + \cdots$$

setzen wir $a = 1$ und $b = \frac{1}{n}$:

$$\left(1+\tfrac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\left(\tfrac{1}{n}\right)^k = 1 + n\left(\tfrac{1}{n}\right) + \frac{n(n-1)}{2!}\left(\tfrac{1}{n}\right)^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\left(\tfrac{1}{n}\right)^3 + \cdots$$

$$= 1 + 1 + \frac{1\left(1-\frac{1}{n}\right)}{2!} + \frac{1\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)}{3!} + \cdots$$

Für $n \to \infty$ schließt nun Euler:

$$\mathrm{e} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\tfrac{1}{n}\right)^n = 1 + 1 + \tfrac{1}{2!} + \tfrac{1}{3!} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty}\tfrac{1}{k!}$$