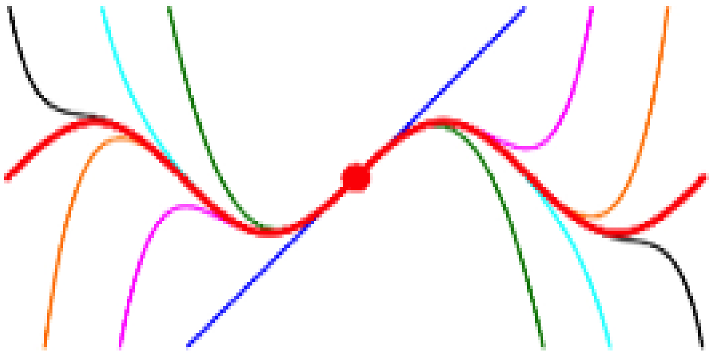
Hans Walser

Mathematik 1 für Naturwissenschaften



Modul 105

Taylor

Lernumgebung Teil 2

Modul 105 für die Lehrveranstaltung *Mathematik 1 für Naturwissenschaften*

Winter 2003/04	Erstausgabe
Winter 2004/05	Erweiterungen. Teilweise Angabe von Lösungswegen
Winter 2005/06	Erweiterungen. Geändertes Layout
Winter 2006/07	Erweiterungen. MathType.
Herbst 2007	Erweiterungen
Herbst 2008	Erweiterungen
Herbst 2009	Erweiterungen
Herbst 2010	Grafische Überarbeitung. Erweiterung. Fehlerkorrekturen
Herbst 2012	Erweiterungen. Unterteilung in zwei Teile
Herbst 2014	Fehlerkorrekturen. Ergänzungen

last modified: 1. November 2013

Hans Walser
Mathematisches Institut, Rheinsprung 21, 4051 Basel
www.walser-h-m.ch/hans

Inhalt

1 Die Eulersche Formel für cosh und sinh

Wir hatten in der Vorlesung die Eulersche Formel

$$e^{ix} = \cos(x) + i\ \sin(x)$$

kennen gelernt. Gibt es eine analoge Formel mit cosh und sinh?

Bearbeitung

Aus den Definitionen $\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ und $\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ folgt unmittelbar:

$$\cosh(x) + \sinh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} + \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \frac{2e^x}{2} = e^x$$

Also:

$$e^x = \cosh(x) + \sinh(x)$$

Die Formel ist weit weniger spannend als die Eulersche Formel für cos und sin. Wir brauchen keine komplexen Zahlen.

Die Formel $e^x = \cosh(x) + \sinh(x)$ könnte natürlich auch über die Taylorentwicklungen von cosh und sinh hergeleitet werden, das ist aber de luxe.

2 Division bei komplexen Zahlen

$\frac{34-13i}{3+4i} = ?$ (Tipp: mit $3-4i$ erweitern; warum dieser Tipp?)

Bearbeitung

$\frac{34-13i}{3+4i} = \frac{34-13i}{3+4i} \cdot \frac{3-4i}{3-4i} = \frac{102-136i-39i-52}{9+16} = \frac{50-175i}{25} = 2 - 7i$

Mit den Tipp erreichen wir, dass der Nenner reell wird. Allgemein kann ein Nenner von der Form $a + ib$ durch Erweitern mit $a - ib$ reell gemacht werden. $a - ib$ heißt die zu $a + ib$ *konjugiert komplexe Zahl*.

3 Funktionen mit komplexen Argumenten

a) $\cosh(ix) =$ b) $\sinh(ix) =$ c) $\cos(ix) =$ d) $\sin(ix) =$

Ergebnis

a) $\cosh(ix) = \cos(x)$ b) $\sinh(ix) = i\sin(x)$ c) $\cos(ix) = \cosh(x)$ d) $\sin(ix) = i\sinh(x)$

4 e hoch 2πi

Idee: Peter Gallin, Zürich

Diese Aufgabe arbeitet mit komplexen Zahlen.

Aus der Formel

$$\lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\tfrac{1}{n}\right)^n\right)=\mathrm{e}$$

folgt:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\tfrac{a}{n}\right)^n\right)=\lim_{\frac{n}{a}\to\infty}\left(\left(\left(1+\tfrac{1}{\frac{n}{a}}\right)^{\frac{n}{a}}\right)^a\right)=\mathrm{e}^a$$

Insbesondere gilt für $a=2\pi\mathrm{i}$ die Eulersche Formel:

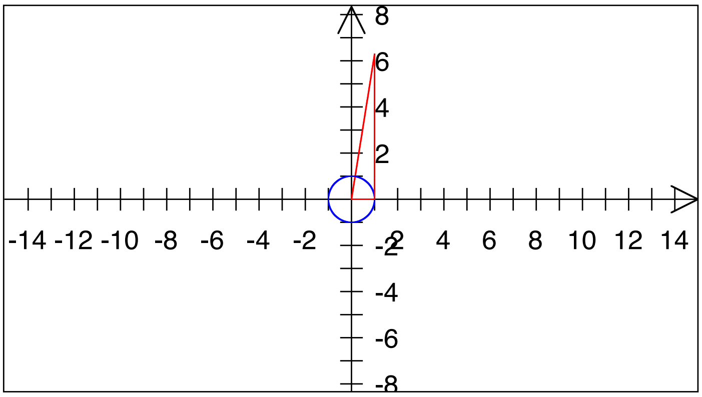
$$\lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\tfrac{2\pi\mathrm{i}}{n}\right)^n\right)=\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}}=1$$

Wir illustrieren diesen Sachverhalt in der Gaußschen Zahlenebene.

Für ein gegebenes n kann $\left(1+\frac{2\pi\mathrm{i}}{n}\right)^n$ durch eine geometrische Folge von ähnlichen rechtwinkligen Dreiecken dargestellt werden. Das erste Dreieck entspricht der komplexen Zahl $\left(1+\frac{2\pi\mathrm{i}}{n}\right)$. Es hat die horizontale Kathete 1 und die vertikale Kathete $\frac{2\pi}{n}$. Die folgenden Dreiecke sind jeweils ähnlich; auf die Hypotenuse des vorhergehenden Dreieckes wird diejenige Kathete aufgesetzt, welche im ersten Dreieck der horizontalen Kathete der Länge 1 entspricht.

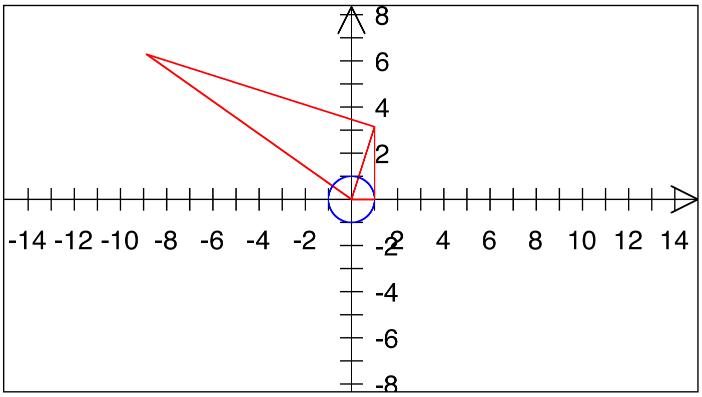
Im Folgenden einige Beispiele.

Für $n = 1$ ergibt sich nur das Grunddreieck, die vertikale Kathete hat die Länge 2π.



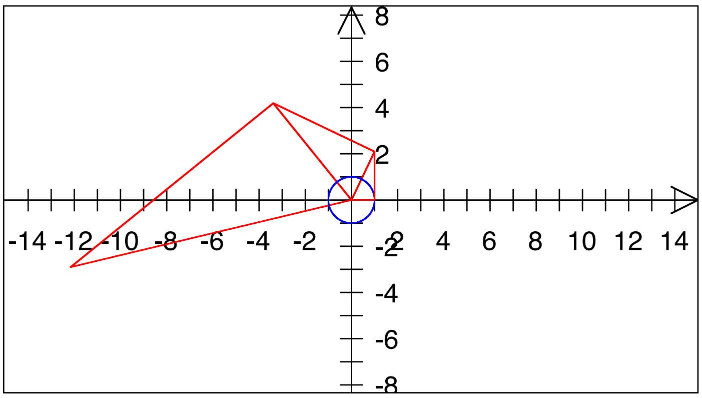
***n* = 1**

Für $n = 2$ ergeben sich 2 Dreiecke. Das erste Dreieck hat die vertikale Kathete der Länge π.



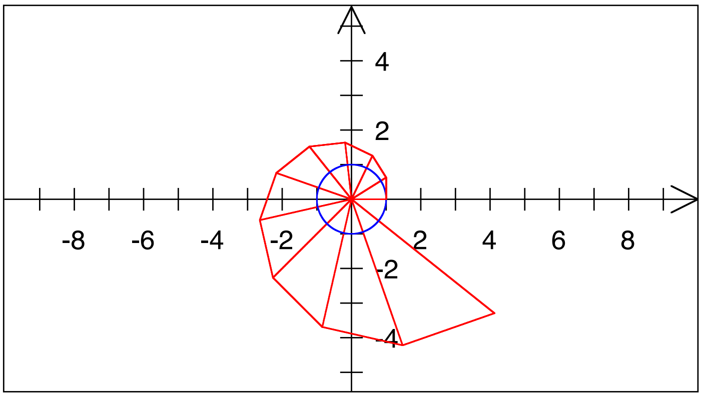
***n* = 2**

Für $n = 3$ ergeben sich 3 Dreiecke. Das erste Dreieck hat die vertikale Kathete der Länge $\frac{2\pi}{3}$.



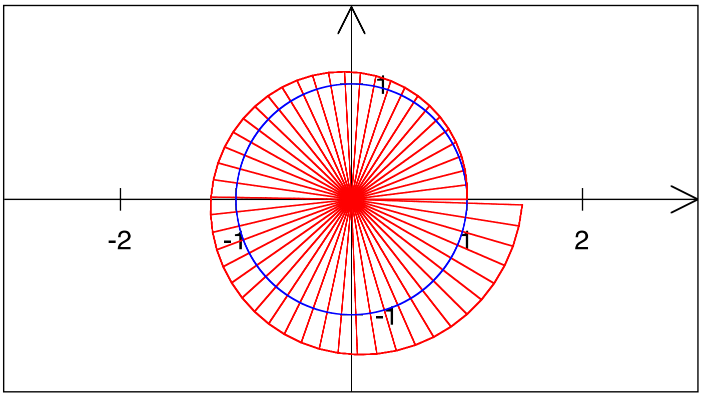
***n* = 3**

Für $n = 10$ fängt die Schnecke an, sich zu schließen.



***n* = 10**

Für $n = 50$ ist die Schnecke schon fast geschlossen und der Endpunkt in der Gegend der reellen Zahl 1.



***n* = 50**

Wer das selber zeichnen möchte: Bei gegebenem n haben die Ecken der Spirale der Reihe nach die Eckpunkte:

$$\left.\begin{aligned} x(n,k) &= \left(1+\tfrac{2\pi}{n}\right)^{\frac{k}{2}} \cos\left(k \arctan\left(\tfrac{2\pi}{n}\right)\right) \\ y(n,k) &= \left(1+\tfrac{2\pi}{n}\right)^{\frac{k}{2}} \sin\left(k \arctan\left(\tfrac{2\pi}{n}\right)\right) \end{aligned}\right\} \quad k = 0, \ldots, n$$

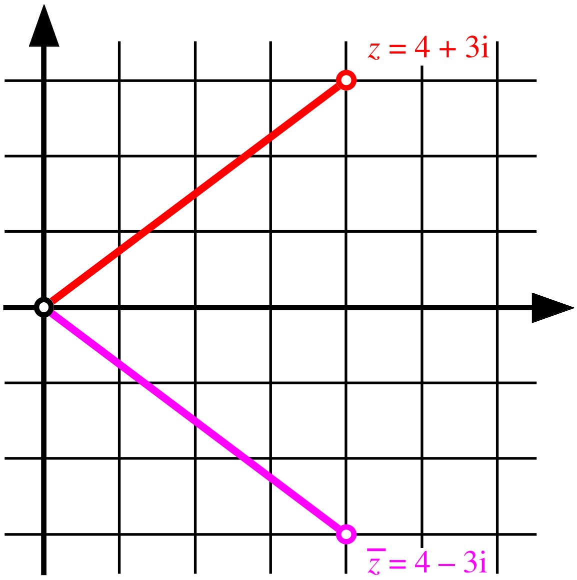
5 Konjugiert komplexe Zahlen

Welche Relationen bestehen zwischen konjugiert komplexen Zahlen?

Antwort

Gleiche Beträge. Entgegengesetzt gleiche Argumente.

In der komplexen Zahlenebene Spiegelung an der x-Achse.



Konjugiert komplexe Zahlen

6 Zwei Lösungswege

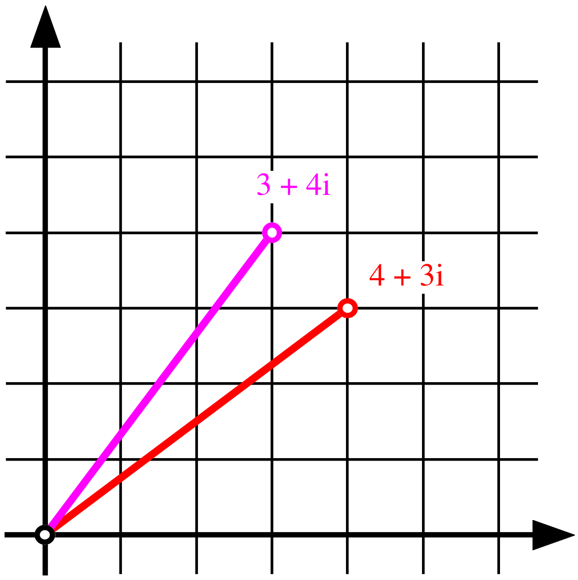
Zeigen Sie auf mindestens zwei Arten, dass das Produkt $(a+b\mathrm{i})(b+a\mathrm{i})$ rein imaginär ist.

Erster Lösungsweg

$$(a+b\mathrm{i})(b+a\mathrm{i}) = (ab-ba) + \mathrm{i}\left(a^2+b^2\right) = \mathrm{i}\left(a^2+b^2\right)$$

Zweiter Lösungsweg

$$\arg(a+b\mathrm{i}) + \arg(b+a\mathrm{i}) = \tfrac{\pi}{2}$$

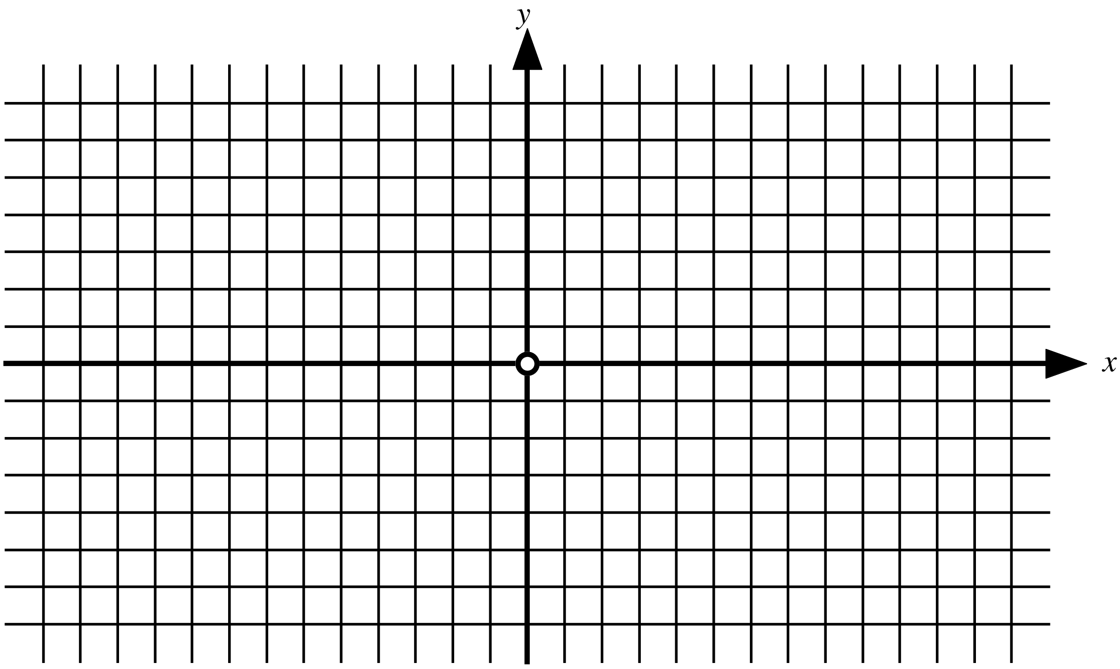


Das Produkt ist rein imaginär

7 Quadratisches

a) $\sqrt{119+120\mathrm{i}} = ?$

b) Gesucht sind alle Lösungen der Gleichung $z^2 = 119+120\mathrm{i}$. Wie liegen diese Lösungen in der Zahlenebene von Gauß?



Wie liegen die Lösungen?

Ergebnis

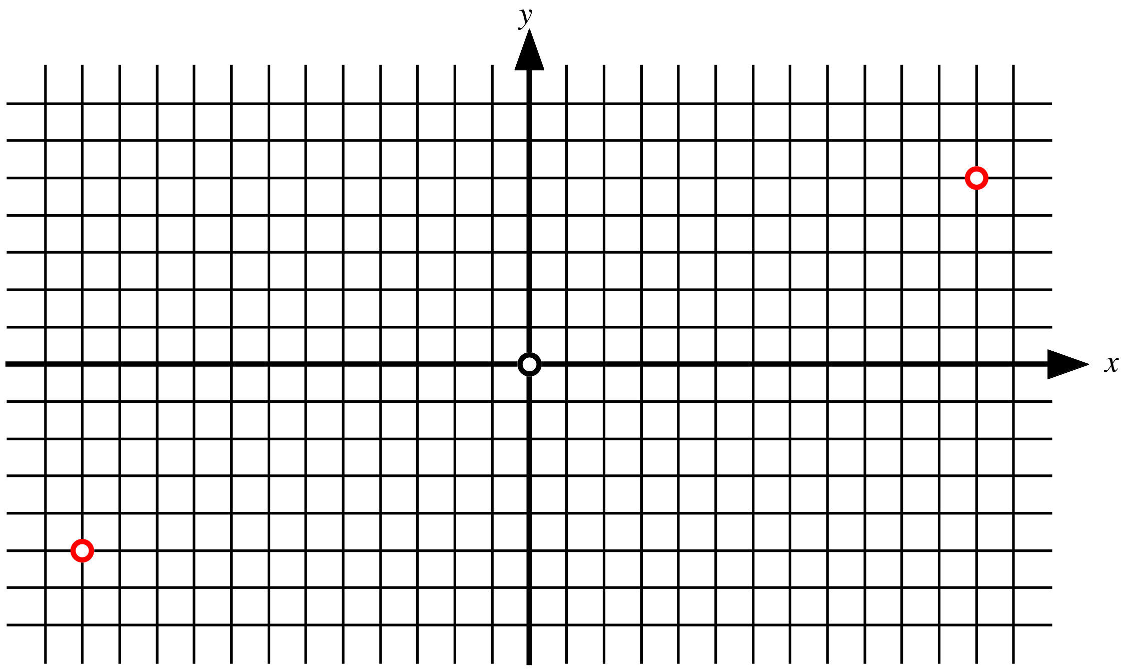
a) $z = \sqrt{|119+120\mathrm{i}|}\, e^{\mathrm{i}\frac{\arg(119+120\mathrm{i})}{2}} = 12+5\mathrm{i}$

b)

$$z_1 = \sqrt{|119+120\mathrm{i}|}\, e^{\mathrm{i}\frac{\arg(119+120\mathrm{i})}{2}} = 12+5\mathrm{i}$$

$$z_2 = \sqrt{|119+120\mathrm{i}|}\, e^{\mathrm{i}\left(\frac{\arg(119+120\mathrm{i})}{2}+\pi\right)} = -12-5\mathrm{i}$$

Die Lösungen liegen spiegelbildlich zum Nullpunkt. Sie bilden ein „Zweieck“ mit dem Nullpunkt als Mittelpunkt.



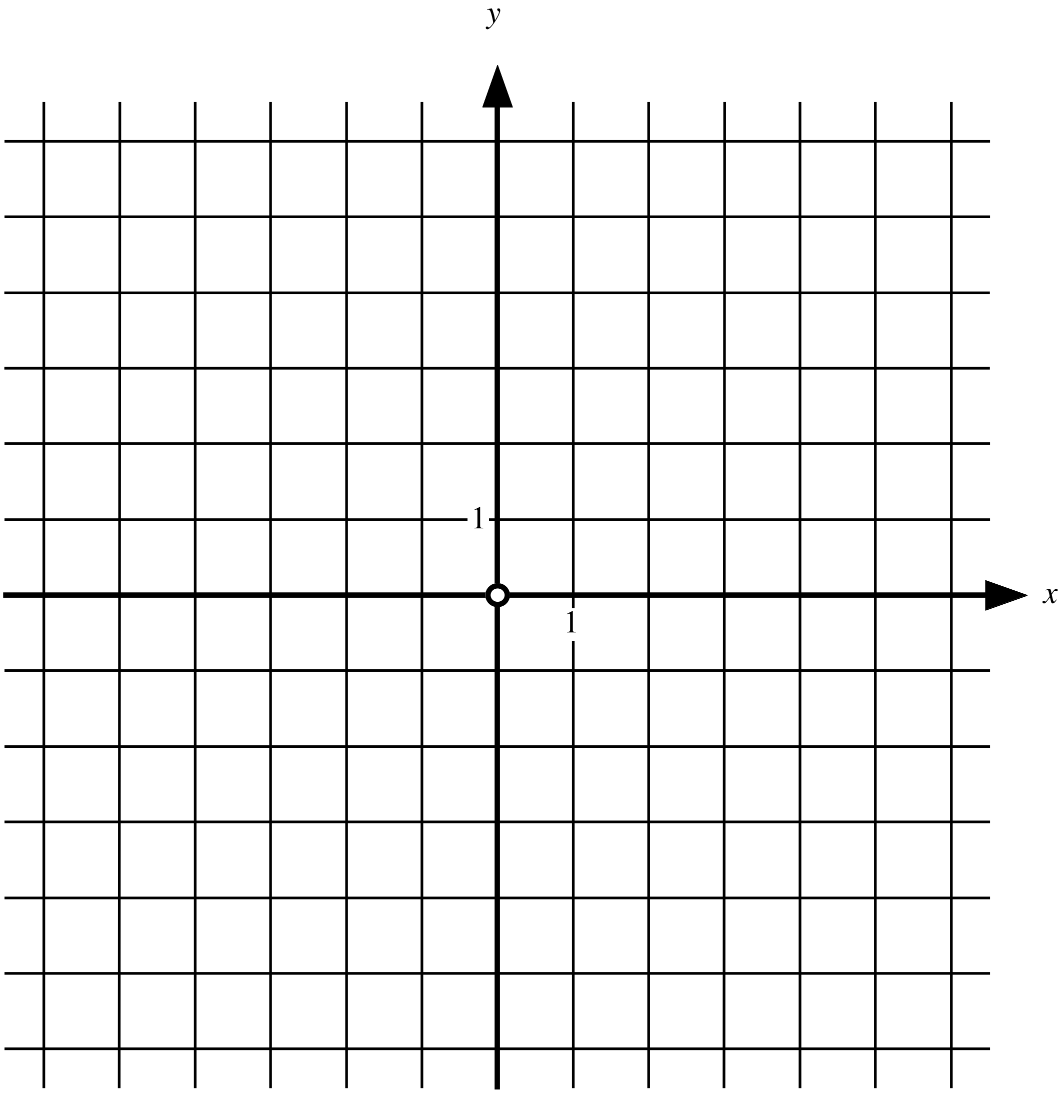
Punktgespiegelte Lösungen

Bemerkung: Im Reellen verstehen wir unter $\sqrt{a}$ die *positive* Zahl, deren Quadrat a ergibt. Im Komplexen macht der Begriff „positiv" keinen Sinn mehr. Die Aufgabe a) ist daher nicht ganz sauber gestellt.

8 Kubisches

a) $\sqrt[3]{65+142\mathrm{i}} = ?$

b) Gesucht sind alle Lösungen der Gleichung $z^3 = 65+142\mathrm{i}$. Wie liegen diese Lösungen in der Zahlenebene von Gauß? Tipp: Dritte Einheitswurzeln



Wie liegen die Lösungen?

Ergebnis

a) $z = \sqrt[3]{|65+142\mathrm{i}|}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\arg(65+142\mathrm{i})}{3}} = 5+2\mathrm{i}$

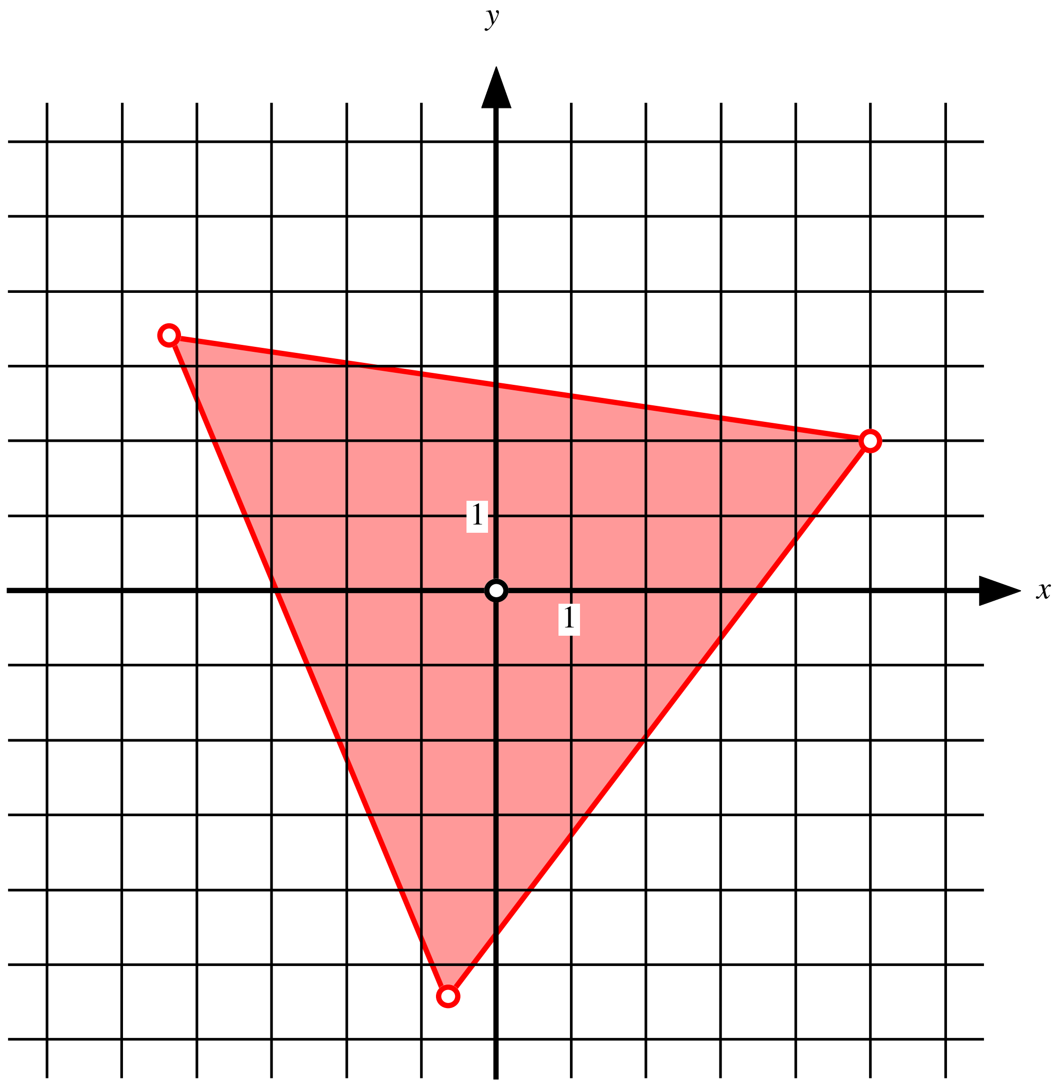
b)

$$z_1 = 5+2\mathrm{i}$$

$$z_2 = (5+2\mathrm{i})\left(-\tfrac{1}{2}+\tfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right) = \left(-\tfrac{5}{2}-\sqrt{3}\right)+\mathrm{i}\left(\tfrac{5}{2}\sqrt{3}-1\right) \approx -4.2321+3.3301\mathrm{i}$$

$$z_3 = (5+2\mathrm{i})\left(-\tfrac{1}{2}-\tfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right) = \left(-\tfrac{5}{2}+\sqrt{3}\right)+\mathrm{i}\left(-\tfrac{5}{2}\sqrt{3}-1\right) \approx -0.7679-5.3301\mathrm{i}$$

Die Lösungen bilden ein Dreieck mit dem Nullpunkt als Mittelpunkt.

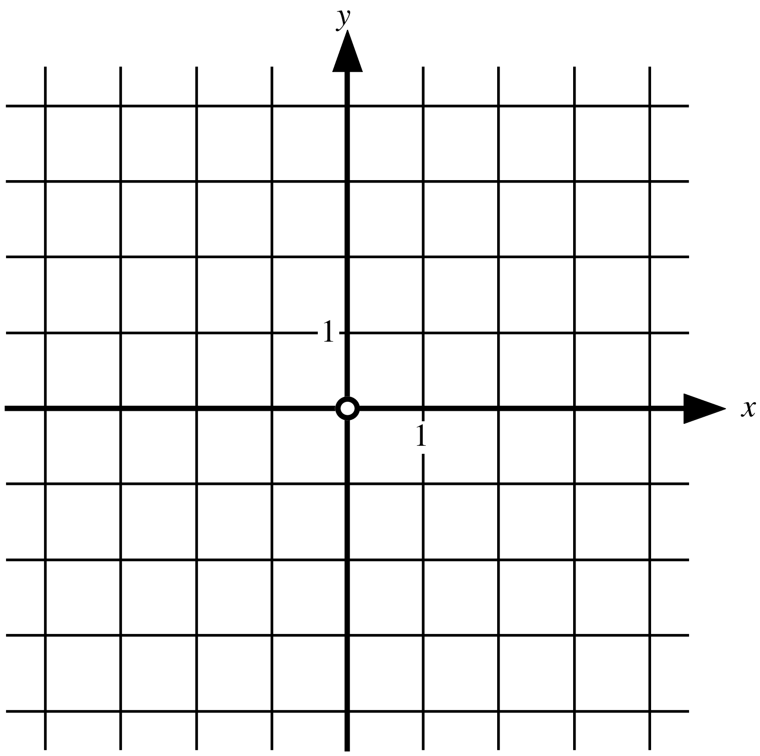


Gleichseitiges Dreieck

9 Vierter Grad

a) $\sqrt[4]{28+96\mathrm{i}}=?$

b) Gesucht sind alle Lösungen der Gleichung $z^4=28+96\mathrm{i}$. Wie liegen diese Lösungen in der Zahlenebene von Gauß?



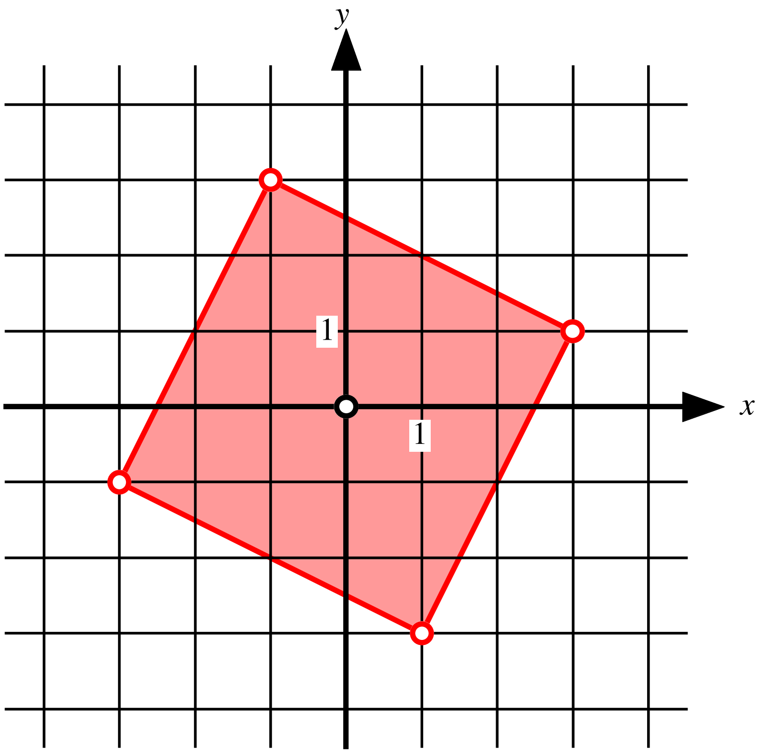
Wie liegen die Lösungen?

Ergebnis

a) $z=\sqrt[4]{|28+96\mathrm{i}|}\,e^{\mathrm{i}\frac{\arg(28+96\mathrm{i})}{4}}=3+\mathrm{i}$

b) $z_1=3+\mathrm{i}$, $z_2=-1+3\mathrm{i}$, $z_3=-3-\mathrm{i}$, $z_4=1-3\mathrm{i}$

Die Lösungen bilden ein Quadrat mit dem Nullpunkt als Mittelpunkt.



Quadrat

10 Additionstheoreme

Mit Hilfe der komplexen Zahlen können auf elegante Weise die Additionstheoreme für Kosinus und Sinus hergeleitet werden.

Tipp: Produkt von $e^{i\phi}$ und $e^{i\psi}$ auf zwei Arten aufschreiben.

Lösungsweg

Es ist: $e^{i\phi} = \cos(\phi) + i\sin(\phi)$, $e^{i\psi} = \cos(\psi) + i\sin(\psi)$. Daraus folgt einerseits:

$$e^{i\phi}e^{i\psi} = e^{i(\phi+\psi)} = \cos(\phi+\psi) + i\sin(\phi+\psi)$$

Andererseits ist:

$$\begin{aligned} e^{i\phi}e^{i\psi} &= \big(\cos(\phi) + i\sin(\phi)\big)\big(\cos(\psi) + i\sin(\psi)\big) \\ &= \big(\cos(\phi)\cos(\psi) - \sin(\phi)\sin(\psi)\big) + i\big(\cos(\phi)\sin(\psi) + \sin(\phi)\cos(\psi)\big) \end{aligned}$$

Vergleich von Realteil und Imaginärteil ergibt:

$$\begin{aligned} \text{Realteil:} \quad & \cos(\phi+\psi) = \cos(\phi)\cos(\psi) - \sin(\phi)\sin(\psi) \\ \text{Imaginärteil:} \quad & \sin(\phi+\psi) = \cos(\phi)\sin(\psi) + \sin(\phi)\cos(\psi) \end{aligned}$$

Wir können also übers Komplexe rein reelle Formeln gewinnen. Das ominöse Minuszeichen im Additionstheorem des Kosinus ist das Quadrat der imaginären Einheit.

11 Dreifachwinkelformel

Gesucht ist eine Formel, welche $\cos(3\phi)$ durch $\cos(\phi)$ und $\sin(\phi)$ ausdrückt. Es gibt einen rein reellen Lösungsweg sowie einen Weg übers Komplexe. Tipp: Dritte Potenz von $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}$ auf zwei Arten aufschreiben.

Ergebnis

$$\cos(3\phi) = \cos^3(\phi) - 3\cos(\phi)\sin^2(\phi)$$

Reeller Lösungsweg

Zweimalige Anwendung der Additionstheoreme:

$$\begin{aligned}
\cos(3\phi) &= \cos(2\phi + \phi) \\
&= \cos(2\phi)\cos(\phi) - \sin(2\phi)\sin(\phi) \\
&= \cos(\phi + \phi)\cos(\phi) - \sin(\phi + \phi)\sin(\phi) \\
&= \left[\cos(\phi)\cos(\phi) - \sin(\phi)\sin(\phi)\right]\cos(\phi) - \left[\cos(\phi)\sin(\phi) + \sin(\phi)\cos(\phi)\right]\sin(\phi) \\
&= \cos^3(\phi) - 3\cos(\phi)\sin^2(\phi)
\end{aligned}$$

Weg übers Komplexe

Es ist: $\mathrm{e}^{3\mathrm{i}\phi} = \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}\right)^3$. Daraus ergibt sich einerseits

$$\mathrm{e}^{3\mathrm{i}\phi} = \cos(3\phi) + \mathrm{i}\sin(3\phi)$$

und andererseits:

$$\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}\right)^3 = \left(\cos(\phi) + \mathrm{i}\sin(\phi)\right)^3 = \cos^3(\phi) + 3\mathrm{i}\cos^2(\phi)\sin(\phi) + 3\mathrm{i}^2\cos(\phi)\sin^2(\phi) + \mathrm{i}^3\sin^3(\phi)$$

Somit ist:

$$\cos(3\phi) + \mathrm{i}\sin(3\phi) = \cos^3(\phi) + 3\mathrm{i}\cos^2(\phi)\sin(\phi) - 3\cos(\phi)\sin^2(\phi) - \mathrm{i}\sin^3(\phi)$$

Trennung in Real- und Imaginärteil ergibt:

$$\begin{aligned}
\cos(3\phi) &= \cos^3(\phi) - 3\cos(\phi)\sin^2(\phi) \\
\sin(3\phi) &= 3\cos^2(\phi)\sin(\phi) - \sin^3(\phi)
\end{aligned}$$

Wir haben also noch de luxe eine Formel für $\sin(3\phi)$ erhalten.

12 Die Formeln von de Moivre

a) Gesucht sind Formeln, welche $\cos(n\phi)$ und $\sin(n\phi)$ durch $\cos(\phi)$ und $\sin(\phi)$ ausdrücken. Tipp: n-te Potenz von $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}$ auf zwei Arten aufschreiben.

b) Wie lauten beispielsweise die Formeln für $\cos(4\phi)$ und $\sin(4\phi)$?

Ergebnis

a) Formeln von de Moivre

$$\cos(n\phi)=\sum_{j=0}^{\left\lfloor \frac{n}{2}\right\rfloor}\binom{n}{2j}\cos^{n-2j}(\phi)(-1)^j\sin^{2j}(\phi)$$

$$\sin(n\phi)=\sum_{j=0}^{\left\lfloor \frac{n}{2}\right\rfloor}\binom{n}{2j+1}\cos^{n-2j-1}(\phi)(-1)^j\sin^{2j+1}(\phi)$$

b) Für $n=4$ ist:

$$\cos(4\phi)=\cos^4(\phi)-6\cos^2(\phi)\sin^2(\phi)+\sin^4(\phi)$$
$$\sin(4\phi)=4\cos^3(\phi)\sin(\phi)-4\cos(\phi)\sin^3(\phi)$$

Lösungsweg

a) Es ist: $\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\phi}=\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}\right)^n$. Daraus ergibt sich einerseits

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\phi}=\cos(n\phi)+\mathrm{i}\sin(n\phi)$$

und andererseits:

$$\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}\right)^n=\left(\cos(\phi)+\mathrm{i}\sin(\phi)\right)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cos^{n-k}(\phi)\mathrm{i}^k\sin^k(\phi)$$

Somit ist:

$$\cos(n\phi)+\mathrm{i}\sin(n\phi)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cos^{n-k}(\phi)\mathrm{i}^k\sin^k(\phi)$$

Trennung in Real- und Imaginärteil ergibt:

$$\cos(n\phi)=\sum_{j=0}^{\left\lfloor \frac{n}{2}\right\rfloor}\binom{n}{2j}\cos^{n-2j}(\phi)(-1)^j\sin^{2j}(\phi)$$

$$\sin(n\phi)=\sum_{j=0}^{\left\lfloor \frac{n}{2}\right\rfloor}\binom{n}{2j+1}\cos^{n-2j-1}(\phi)(-1)^j\sin^{2j+1}(\phi)$$

b) Es ist für $n=4$:

$$\cos(4\phi)=\cos^4(\phi)-6\cos^2(\phi)\sin^2(\phi)+\sin^4(\phi)$$
$$\sin(4\phi)=4\cos^3(\phi)\sin(\phi)-4\cos(\phi)\sin^3(\phi)$$

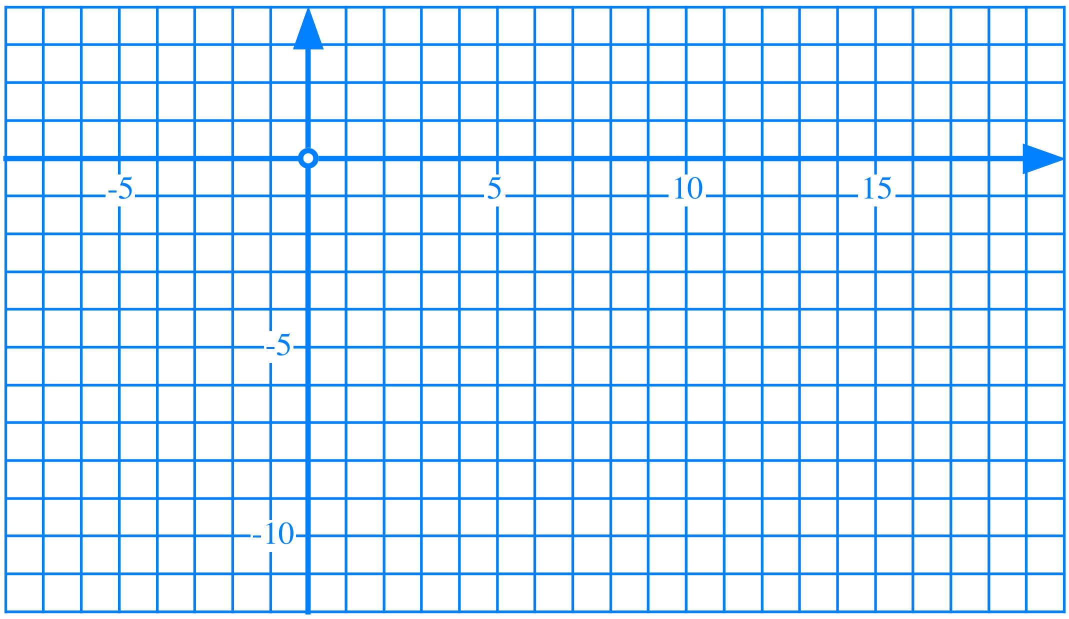
13 Eine logarithmische Spirale

Es sei $z_n = (1+\mathrm{i})^n, \quad n \in \{0,1,2,\ldots\}$.

Tabelle:

n	$z_n = (1+\mathrm{i})^n$	$\lvert z_n \rvert$	$\arg(z_n)$
0			
1			
2			
3			
4			
5			
6			
7			
8			

In der komplexen Ebene:



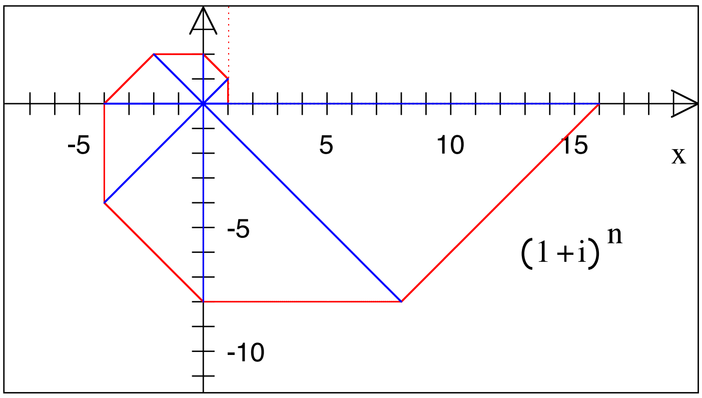
In der komplexen Ebene

Bearbeitung

Tabelle:

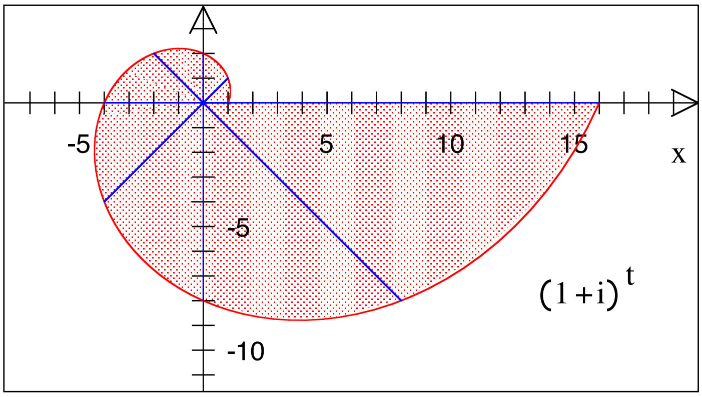
n	$z_n = (1+\mathrm{i})^n$	$\lvert z_n \rvert$	$\arg(z_n)$
0	1	$1 = \sqrt{2}^0$	0
1	$1+\mathrm{i}$	$\sqrt{2} = \sqrt{2}^1$	$\frac{\pi}{4}$
2	$2\mathrm{i}$	$2 = \sqrt{2}^2$	$\frac{\pi}{2} = 2\frac{\pi}{4}$
3	$-2+2\mathrm{i}$	$\sqrt{2}^3$	$3\frac{\pi}{4}$
4	-4	$4 = \sqrt{2}^4$	$\pi = 4\frac{\pi}{4}$
5	$-4-4\mathrm{i}$	$\sqrt{2}^5$	$5\frac{\pi}{4}$
6	$-8\mathrm{i}$	$8 = \sqrt{2}^6$	$6\frac{\pi}{4}$
7	$8-8\mathrm{i}$	$\sqrt{2}^7$	$7\frac{\pi}{4}$
8	16	$16 = \sqrt{2}^8$	$2\pi = 8\frac{\pi}{4}$

Es entsteht eine eckige Schnecke.



Eckige Schnecke

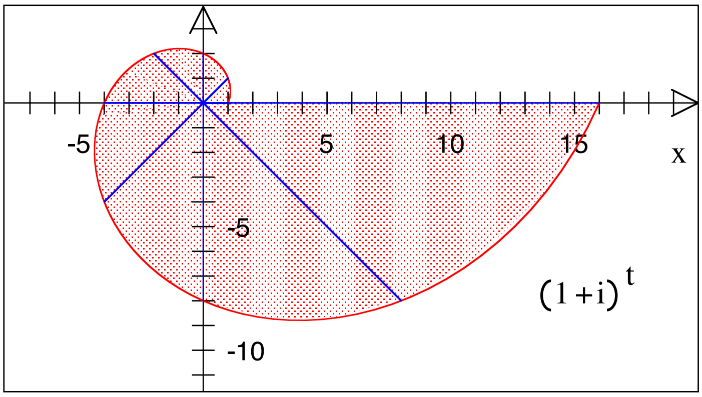
Wenn wir von $z_n = (1+\mathrm{i})^n$ übergehen auf $z(t) = (1+\mathrm{i})^t$, ergibt sich eine logarithmische Spirale.



Logarithmische Spirale

14 Logarithmische Spirale

Wie kann die durch $z(t) = (1+\mathrm{i})^t$ gegebene logarithmische Spirale in Polarkoordinaten in der Form $r(\phi)$ dargestellt werden?



Logarithmische Spirale

Lösungsweg

Wegen $|1+\mathrm{i}| = \sqrt{2}$ und $\arg(1+\mathrm{i}) = \frac{\pi}{4}$ ist zunächst:

$$\phi(t) = t\frac{\pi}{4} \quad \text{und} \quad r(t) = \left(\sqrt{2}\right)^t$$

Somit ist $t = \phi\frac{4}{\pi}$ und:

$$r(\phi) = \left(\sqrt{2}\right)^{\phi\frac{4}{\pi}} = \mathrm{e}^{\frac{2}{\pi}\ln(2)\phi}$$

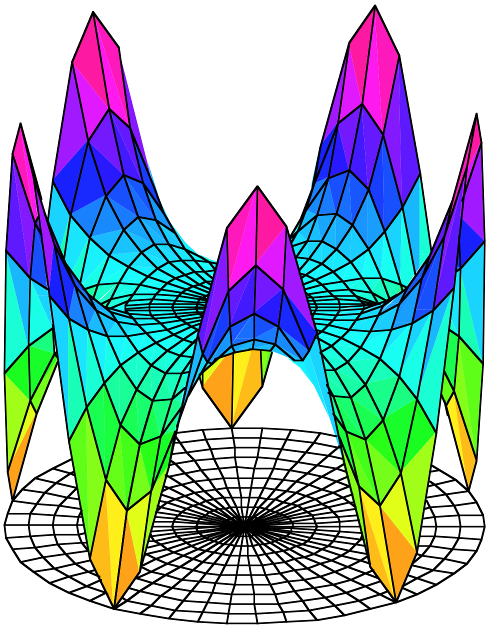
Der Radius wächst exponentiell mit dem Winkel.

15 Nullstellen

Das folgende Bild stellt die reellwertige Funktion zweier Variablen

$$f(x,y) = \left|\mathrm{Re}\left((x+\mathrm{i}y)^5 - 1\right)\right|$$

dar.



Fünfteilige Drehsymmetrie

Die fünften Einheitswurzeln sind Nullstellen dieser Funktion. Es sind allerdings nicht die einzigen Nullstellen, da der Realteil von $z^5 - 1$ auch anderswo Null sein kann. Die anderen (unendlich vielen) Nullstellen haben aber einen Betrag größer als 1 und sind daher auf dem Bild nicht sichtbar.

Gesucht ist ein Beispiel einer weiteren Nullstelle.

Exemplarische Lösung

Für die Zahl $z = \sqrt[10]{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{20}}$ gilt:

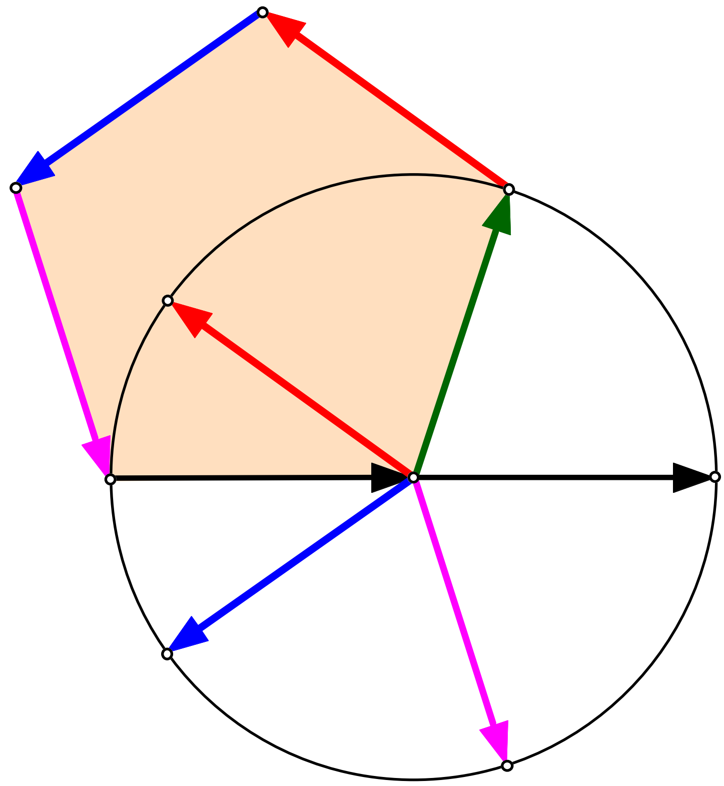
$$z^5 - 1 = \left(\sqrt[10]{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{20}}\right)^5 - 1 = \sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}} - 1 = \sqrt{2}\left(\cos\left(\tfrac{\pi}{4}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\tfrac{\pi}{4}\right)\right) - 1 = 1 + \mathrm{i} - 1 = \mathrm{i}$$

Wir haben somit den Realteil Null und den Imaginärteil 1.

16 Einheitswurzeln

Die Summe aller n-ten Einheitswurzeln ist Null. Verifizieren Sie diese Tatsache für $n = 5$ mit Hilfe einer Zeichnung. Beweisen Sie die Behauptung mit Hilfe der Summenformel für die Glieder einer geometrischen Folge.

Ergebnis



Summe der fünften Einheitswurzeln

$$z_1 = e^{i\frac{2\pi}{5}}; \quad z_k = z_1^k; \quad z_5 = z_1^5 = 1$$

$$s = \sum_{k=1}^{5} z_k = z_1 \frac{1-z_1^5}{1-z_1} = 0$$

17 Gleichung sechsten Grades

Berechnen Sie alle komplexen Lösungen der Gleichung $z^6 - 5z^4 + 9z^2 - 5 = 0$

Ergebnis

glg:=z^6-5*z^4+9*z^2-5=0;solns:={solve(glg)};glg := z^6-5*z^4+9*z^2-5 = 0

solns := {1, -1, (2+I)^(1/2), -(2+I)^(1/2), (2-I)^(1/2), -(2-I)^(1/2)}

Lösungsweg

Substitution: $y := z^2$. Damit erhalten wir die kubische Gleichung

$$y^3 - 5y^2 + 9y - 5 = 0,$$

welche offensichtlich die Lösung $y_1 = 1$. Dividieren durch den zugehörigen Linearfaktor liefert:

$$\left(y^3 - 5y^2 + 9y - 5\right) : (y-1) = y^2 - 4y + 5$$

Die Gleichung $y^2 - 4y + 5 = 0$ hat die beiden konjugiert komplexen Lösungen $y_2 = 2 + \mathrm{i}$ und $y_3 = 2 - \mathrm{i}$.

Rückgängigmachung der Substitution ergibt:

$$y_1 = 1 \quad \Rightarrow \quad z_1 = 1, z_2 = -1$$

$$y_2 = 2 + \mathrm{i} \quad \Rightarrow \quad z_3 = \sqrt[4]{5}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{1}{2}\arctan\left(\frac{1}{2}\right)}, z_4 = \sqrt[4]{5}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{1}{2}\arctan\left(\frac{1}{2}\right)+\pi\right)}$$

$$y_3 = 2 - \mathrm{i} \quad \Rightarrow \quad z_5 = \sqrt[4]{5}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{1}{2}\arctan\left(-\frac{1}{2}\right)}, z_6 = \sqrt[4]{5}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{1}{2}\arctan\left(-\frac{1}{2}\right)+\pi\right)}$$