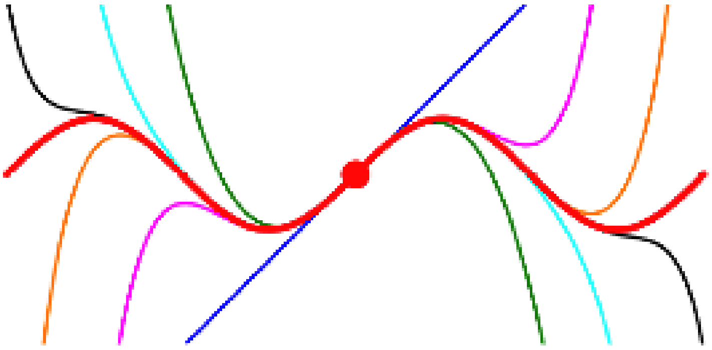
Hans Walser

# Mathematik 1 für Naturwissenschaften



## Modul 105

## TAYLOR

UNI BASEL

## Inhalt



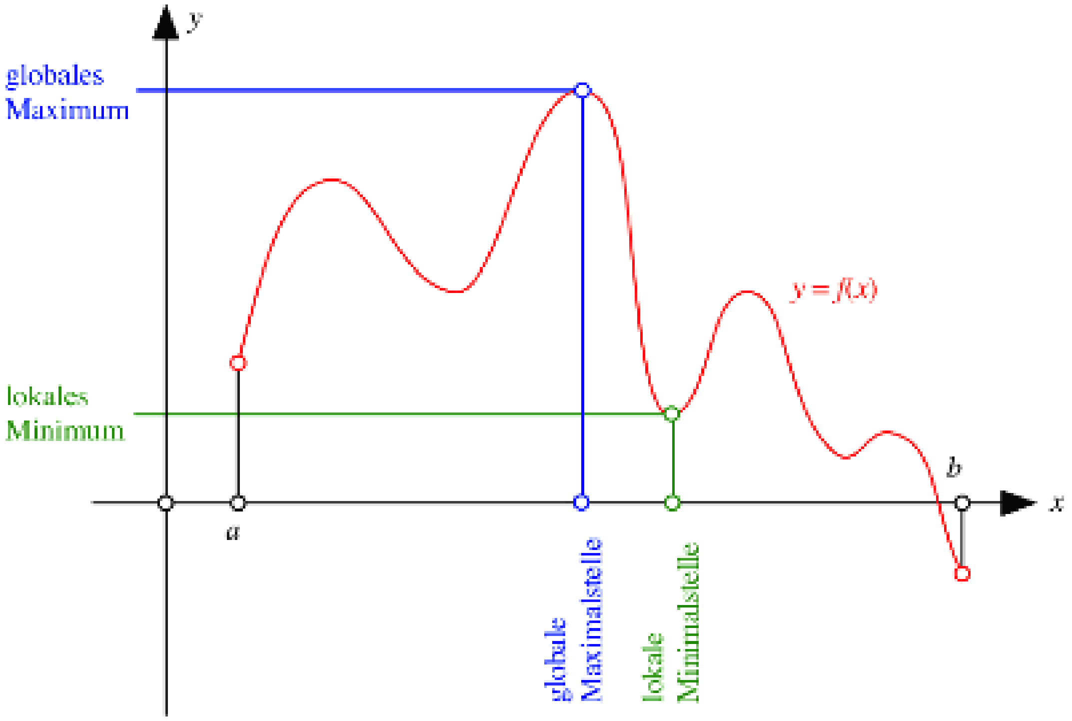
Modul 105 für die Vorlesung *Mathematik 1 für Naturwissenschaften*

Winter 2002/03 Probeausgabe
Winter 2003/04 Fehlerkorrekturen. Ergänzungen. Straffung
Winter 2004/05 Kürzungen und Erweiterungen
Winter 2005/06 Neues Layout
Winter 2006/07 MathType. Kürzung
Herbst 2007 Kleine Erweiterung
Herbst 2008 Kleine Erweiterung. Kürzung
Herbst 2010 Grafische Überarbeitung
Herbst 2012 Kürzung und Erweiterung
Herbst 2013 Kleine Erweiterung
Herbst 2014 Formale Korrekturen
last modified: 20. Oktober 2013

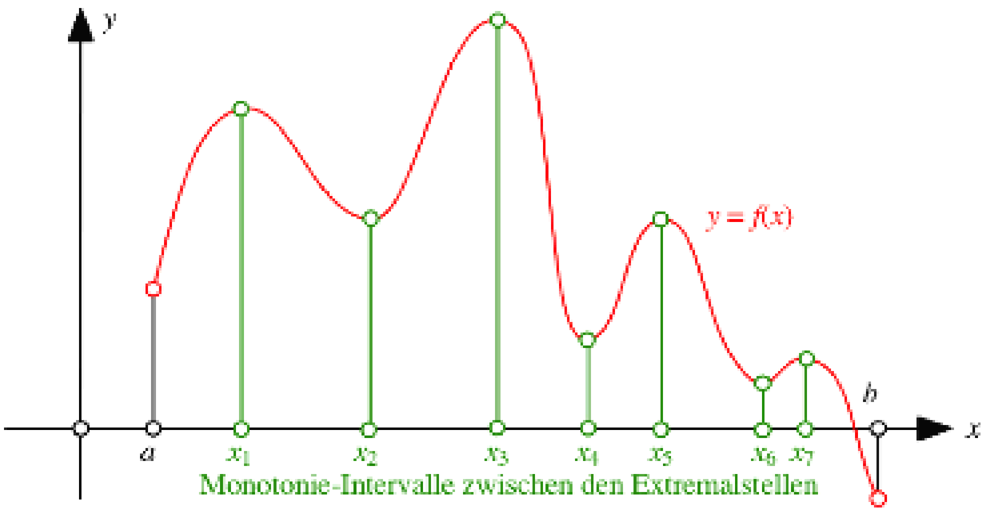
Hans Walser, Mathematisches Institut, Rheinsprung 21, 4051 Basel
www.walser-h-m.ch/hans

# 1 Kurvendiskussion

## 1.1 Begriffe




**Extrema und Extremalstellen**

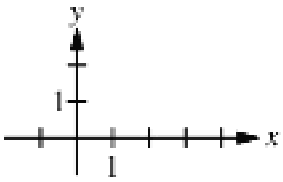



**Monotonie-Intervalle**

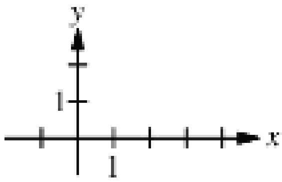
### 1.2 Verschwinden der Ableitung

Eine Stelle $x_0$ mit $f'(x_0) = 0$ heißt stationäre Stelle. Die Tangente an den Funktionsgraphen ist horizontal.

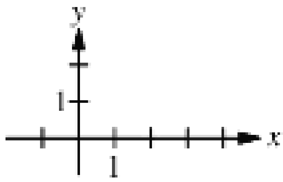
Beispiele:




**Extrema**



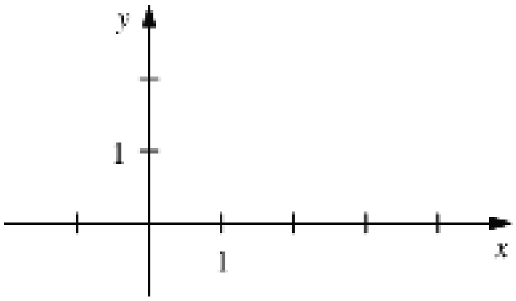

**Konstante Funktion**

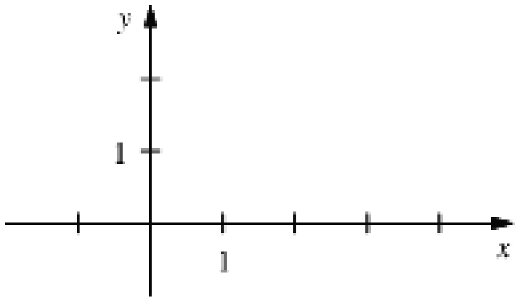



**Terrassenpunkt**

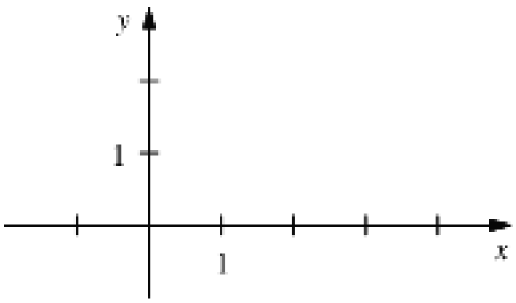
### 1.3 Wo sind Extremalstellen?

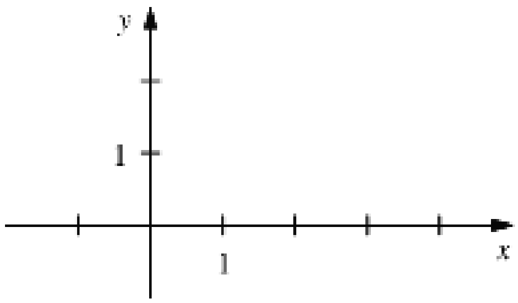
Verdächtig sind:



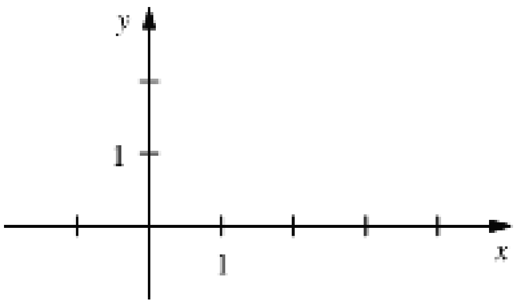




**Randpunkte**

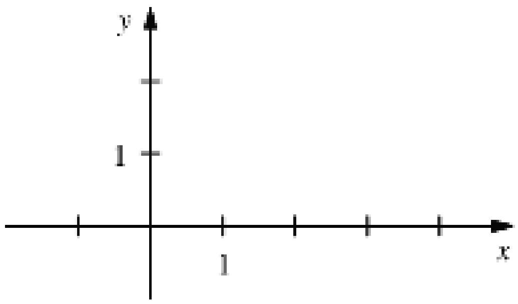



**Stellen, an denen *f* nicht differenzierbar ist**



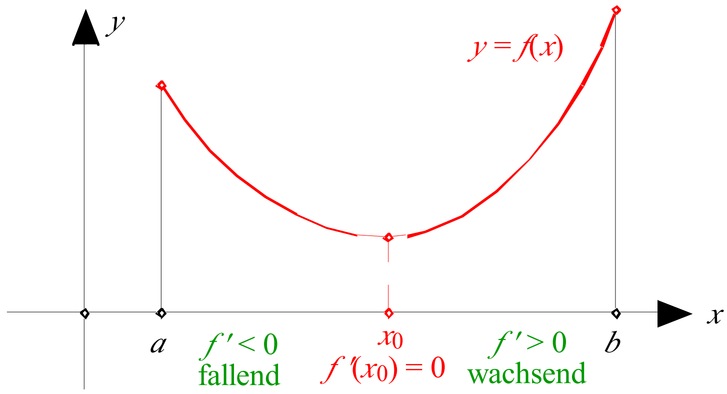

**Stationäre Stellen**




**Vorsicht Terrassenpunkte!**

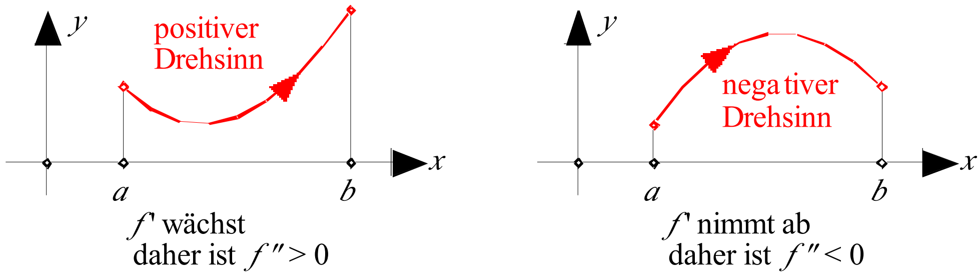
### 1.3.1 Sichere Extremalstellen

Stationäre Stelle mit Vorzeichenwechsel der Ableitung.




**Sichere Extremalstelle**

#### 1.3.1.1 Intermezzo: Zweite Ableitung




**Zweite Ableitung und Krümmung**

Daher gilt:

$$\text{Stationäre Stelle } f'(x_0) = 0 \text{ mit } f''(x_0) > 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Sichere Minimalstelle}$$

$$\text{Stationäre Stelle } f'(x_0) = 0 \text{ mit } f''(x_0) < 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Sichere Maximalstelle}$$

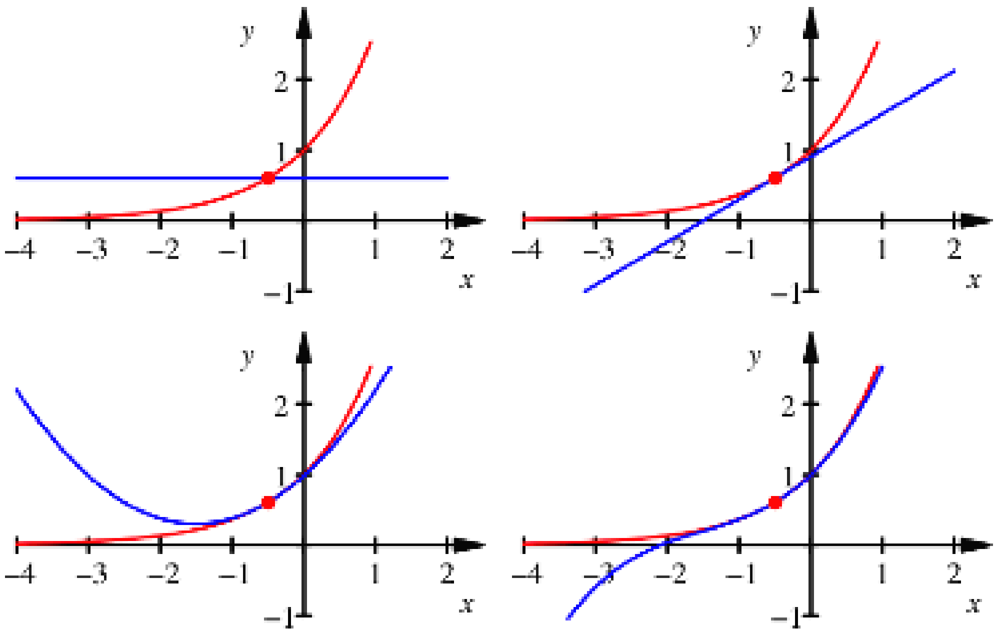
# 2 Taylorpolynome und Taylorreihen

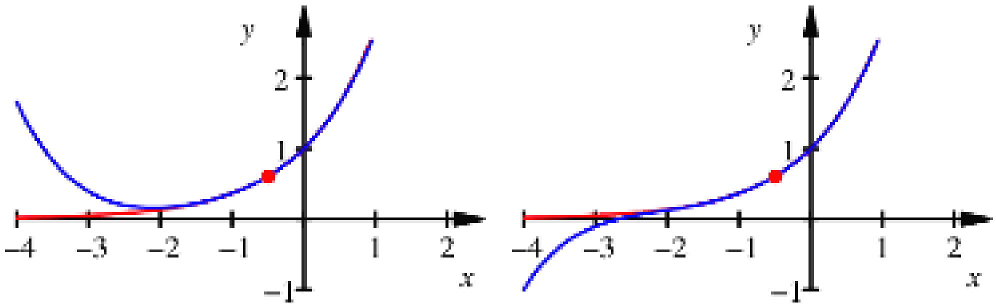
## 2.1 Die Idee von Taylor

**Brook Taylor, 1685 - 1731**

Die Idee von Taylor besteht darin, die Technik der linearen Approximation zu verallgemeinern.

Die folgende Figurensequenz zeigt die Exponentialfunktion $y = e^x$ mit der konstanten, der linearen, der quadratischen und den Approximationen dritten bis fünften Grades an der Stelle $x_0 = -\frac{1}{2}$.






**Approximationen der Exponentialfunktion**

## 2.2 Formaler Einstieg

$$f(x) \approx f(x_0)$$
$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$
$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + (\quad ? \quad)(x - x_0)^2$$

Welcher Koeffizient ist bei $(x - x_0)^2$ zu erwarten?

## 2.3 Taylorpolynom

| | |
|---|---|
| Gegeben: | Funktion $f(x)$ |
| Gesucht: | Polynom $p(x)$ $n$-ten Grades, das mit $f(x)$ in $x_0$ den Funktionswert und die ersten $n$ Ableitungen gemeinsam hat. |

Wir machen folgenden Ansatz:

$$p(x) = \underset{\substack{\uparrow \\ f(x_0)}}{a_0} + \underset{\substack{\uparrow \\ f'(x_0)}}{a_1}(x - x_0) + \underset{\substack{\uparrow \\ ?}}{a_2}(x - x_0)^2 + \underset{\substack{\uparrow \\ ?}}{a_3}(x - x_0)^3 + \cdots + \underset{\substack{\uparrow \\ ?}}{a_n}(x - x_0)^n$$

Zur Berechnung von $a_2$, $a_3$, … , $a_n$ vergleichen wir die Ableitungen von $p(x)$ und $f(x)$ an der Stelle $x_0$.

Somit erhalten wir, wobei $f^{(k)}(x_0)$ die $k$-te Ableitung von $f$ an der Stelle $x_0$ bedeutet:

$$a_k = \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot k} f^{(k)}(x_0)$$

### 2.3.1 Erinnerung: Fakultäten

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \quad \cdots \quad \cdot k = k! \qquad (\text{"}k\text{-Fakultät"})$$

$$\begin{array}{ll}
0! = 1 & \\
 & \cdot 1 \\
1! = 1 & \\
 & \cdot 2 \\
2! = 1 \cdot 2 = 2 & \\
 & \cdot 3 \\
3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6 & \\
 & \cdot 4 \\
4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24 & \\
 & \cdot 5 \\
5! = 120 & \\
 & \cdot 6 \\
6! = 720 & \\
 & \cdot 7 \\
7! = 5040 &
\end{array}$$

Die Fakultäten wachsen sehr rasch. Mein Taschenrechner funktioniert bis 69! (Warum nachher nicht mehr?)

Somit können wir für $a_k = \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot k} f^{(k)}(x_0)$ kürzer schreiben:

$$a_k = \tfrac{1}{k!} f^{(k)}(x_0)$$

Für das TAYLORpolynom $n$-ten Grades an der Stelle $x_0$ erhalten wir:

$$p(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \tfrac{1}{2} f''(x_0)(x - x_0)^2 + \tfrac{1}{3!} f'''(x_0)(x - x_0)^3 + \cdots + \tfrac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n$$

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} \tfrac{1}{k!} f^{(k)}(x_0)(x - x_0)^k$$

Wir erhalten damit die Approximation:

$$f(x) \approx \sum_{k=0}^{n} \tfrac{1}{k!} f^{(k)}(x_0)(x - x_0)^k$$

## 2.4 Taylorreihe

Unter

$$\sum_{k=0}^{\infty} \tfrac{1}{k!} f^{(k)}(x_0)(x - x_0)^k$$

verstehen wir die ***Taylorreihe*** der Funktion *f* an der Stelle $x_0$.

Hier stellt sich die Frage, für welche *x*-Werte diese Reihe konvergiert.

## 2.5 Beispiele

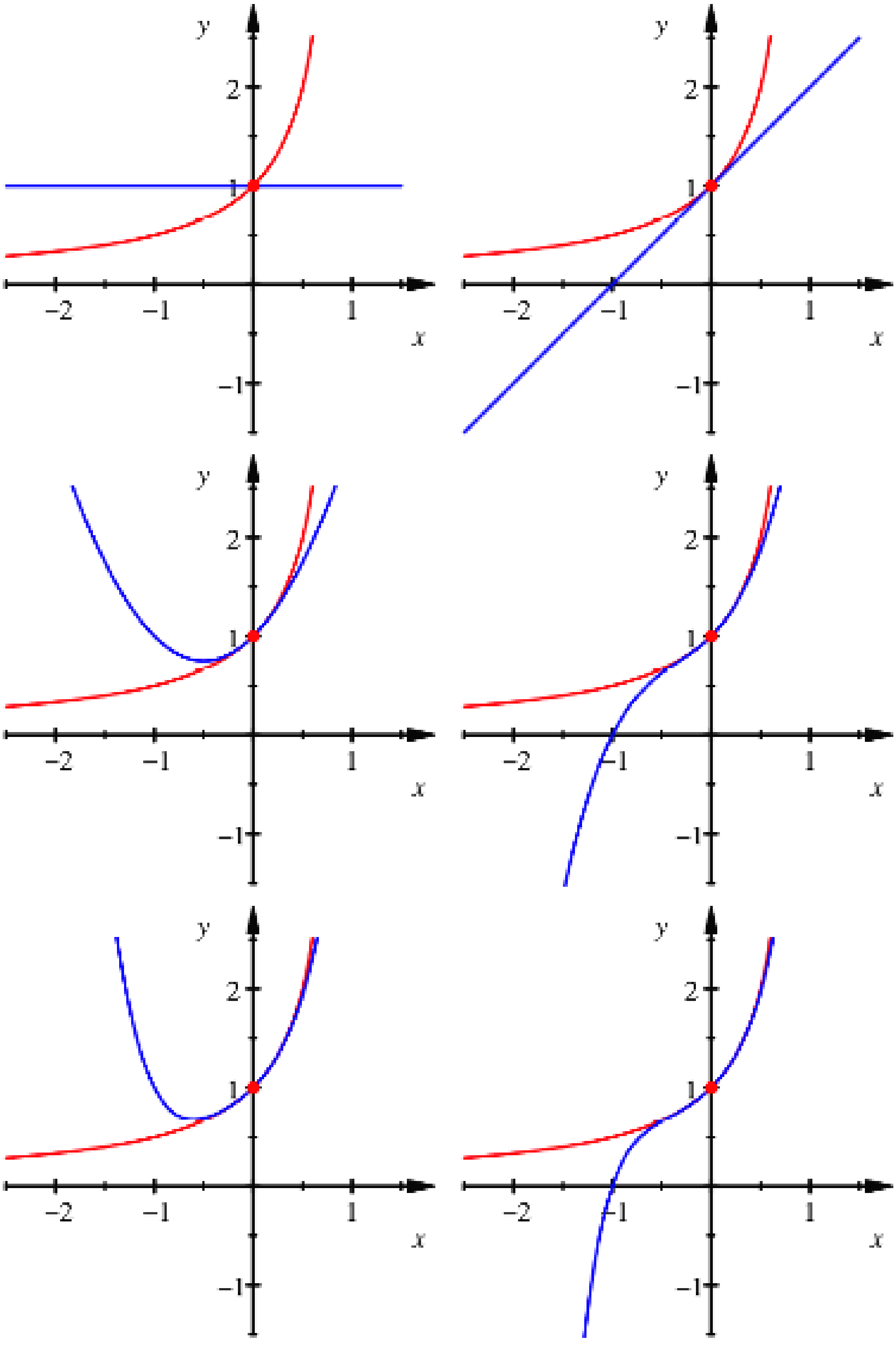
### 2.5.1 Eine gebrochen lineare Funktion

Es sei $f(x) = \frac{1}{1-x}$. Gesucht ist das Taylorpolynom an der Stelle $x_0 = 0$.

Wir erhalten:

$$\tfrac{1}{1-x} \approx 1 + x + x^2 + \cdots + x^n$$

Die folgende Figurensequenz zeigt die Approximationen der Grade null bis fünf.




**TAYLORpolynome für** $f(x) = \frac{1}{1-x}$

Erinnerung: Für $|q| < 1$ gilt die geometrische Reihe:

$$1 + q + q^2 + \cdots = \frac{1}{1-q}$$

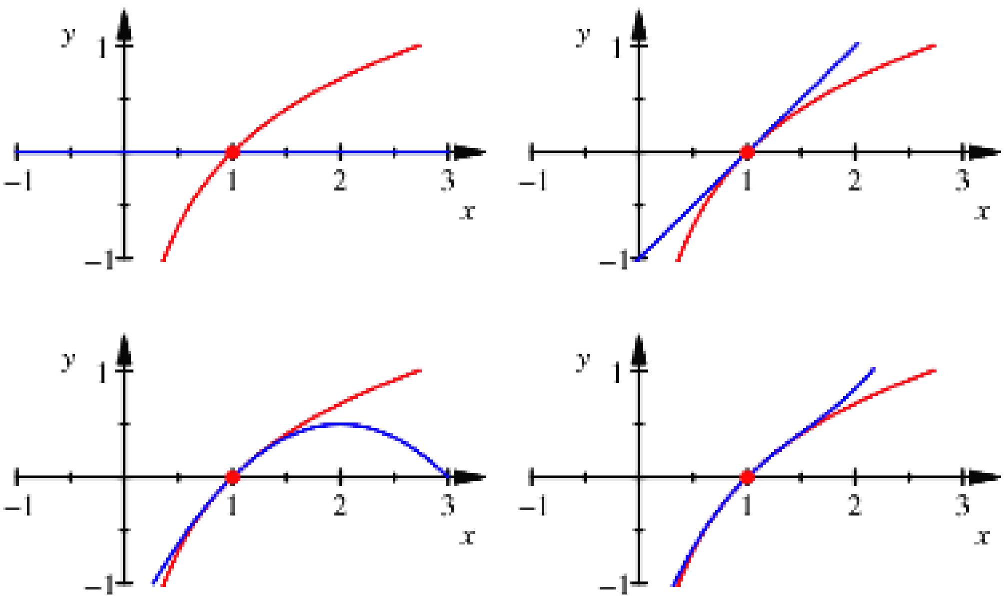
### 2.5.2 Der natürliche Logarithmus

$f(x) = \ln(x)$. Gesucht ist das TAYLORpolynom an der Stelle $x_0 = 1$ (warum ist $x_0 = 0$ nicht sinnvoll?).

Wir erhalten:

$$\ln(x) = (x-1) - \tfrac{1}{2}(x-1)^2 + \tfrac{1}{3}(x-1)^3 - \tfrac{1}{4}(x-1)^4 \pm \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \tfrac{1}{k}(x-1)^k$$

Im Folgenden die Approximationen der Grade null bis 3.




**Approximationen von ln(*x*) an der Stelle $x_0 = 1$**

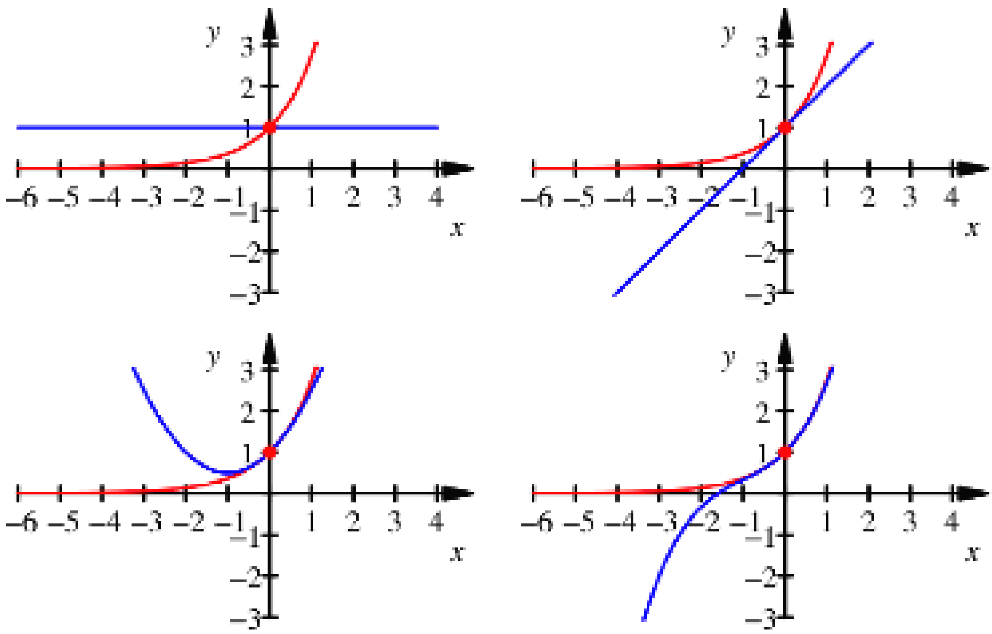
### 2.5.3 Die Exponentialfunktion

$f(x) = \mathrm{e}^x$. Gesucht ist das Taylorpolynom an der Stelle $x_0 = 0$.

Wir erhalten:

$$\mathrm{e}^x \approx 1 + x + \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{3!}x^3 + \cdots + \tfrac{1}{n!}x^n$$

Die folgende Figurensequenz zeigt die Approximationen der Grade null bis drei.




Approximationen der Exponentialfunktion

TAYLORreihe der Exponentialfunktion:

$$e^x = 1 + x + \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{3!}x^3 + \tfrac{1}{4!}x^4 + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \tfrac{1}{k!}x^k$$

**Leonhard EULER, 1707 – 1783 (Zeichnung von Bigna Steiner)**

Für $x = 1$ folgt:

$$e = 1 + 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3!} + \tfrac{1}{4!} + \cdots$$

$$e = \sum_{k=0}^{\infty} \tfrac{1}{k!}$$

Die folgende Tabelle zeigt die ersten 14 Teilsummen.

| ***k*** | ***k*!** | **1/*k*!** | **Summe** |
|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 1 | 1.0000000000 |
| 1 | 1 | 1 | 2.0000000000 |
| 2 | 2 | 0.5 | 2.5000000000 |
| 3 | 6 | 0.166666667 | 2.6666666667 |
| 4 | 24 | 0.041666667 | 2.7083333333 |
| 5 | 120 | 0.008333333 | 2.7166666667 |
| 6 | 720 | 0.001388889 | 2.7180555556 |
| 7 | 5040 | 0.000198413 | 2.7182539683 |
| 8 | 40320 | 2.48016E-05 | 2.7182787698 |
| 9 | 362880 | 2.75573E-06 | 2.7182815256 |
| 10 | 3628800 | 2.75573E-07 | 2.7182818011 |
| 11 | 39916800 | 2.50521E-08 | 2.7182818262 |
| 12 | 479001600 | 2.08768E-09 | 2.7182818283 |
| 13 | 6227020800 | 1.6059E-10 | 2.7182818284 |
| 14 | 87178291200 | 1.14707E-11 | 2.7182818285 |

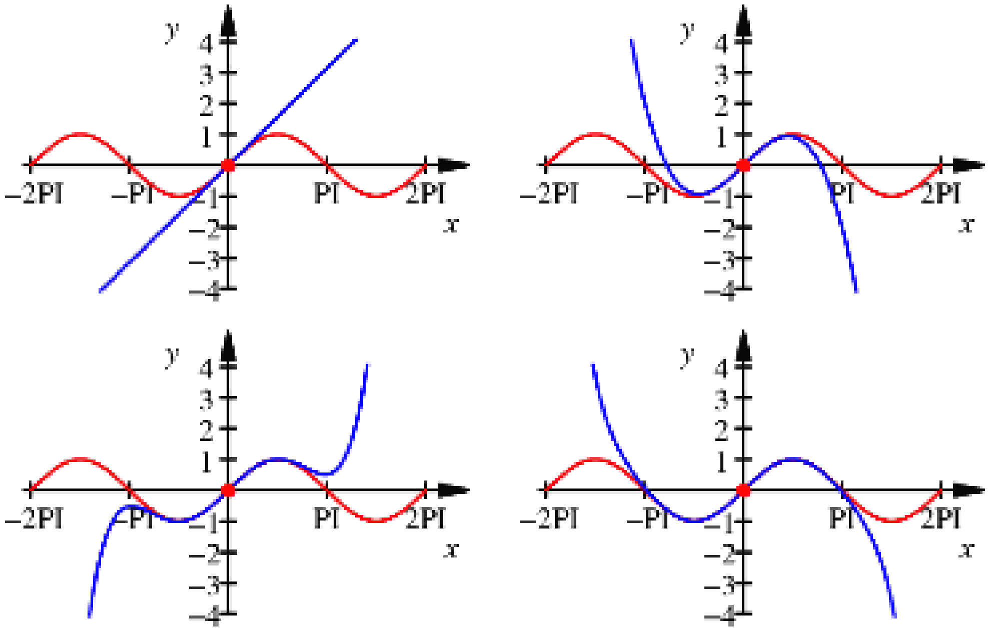
### 2.5.4 Die Sinusfunktion

$f(x) = \sin(x)$. Gesucht ist das TAYLORpolynom an der Stelle $x_0 = 0$.

Wir erhalten:

$$\sin(x) = x - \tfrac{1}{3!}x^3 + \tfrac{1}{5!}x^5 - \tfrac{1}{7!}x^7 \pm \cdots$$

Die Figurenfolge zeigt die Approximationen der Grade 1, 3, 5, 7.

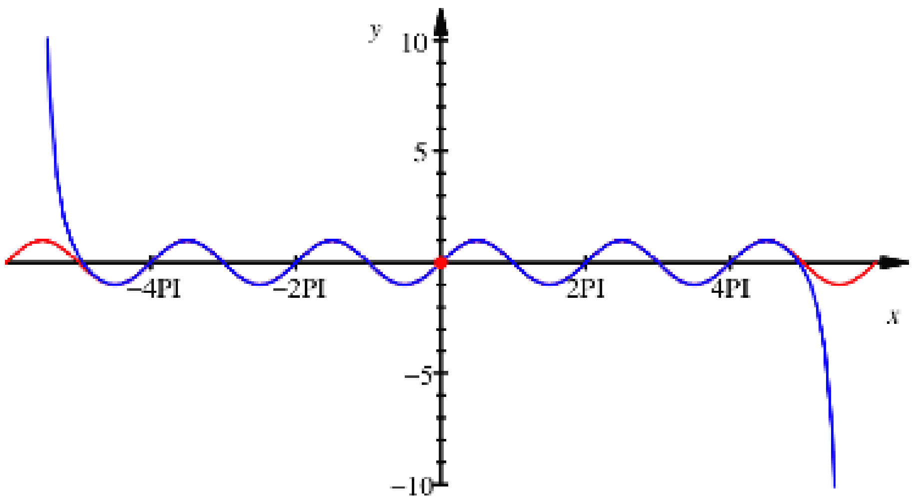



**Approximationen von sin(*x*)**

Bemerkungen:

- Es handelt sich um eine *ungerade* Funktion.
- Die Verwandtschaft mit der TAYLORreihe von $e^x$ ist offensichtlich.
- Darstellung mit Summenzeichen:

$$\boxed{\sin(x) = x - \tfrac{1}{3!}x^3 + \tfrac{1}{5!}x^5 - \tfrac{1}{7!}x^7 \pm \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \tfrac{1}{(2k+1)!} x^{2k+1}}$$



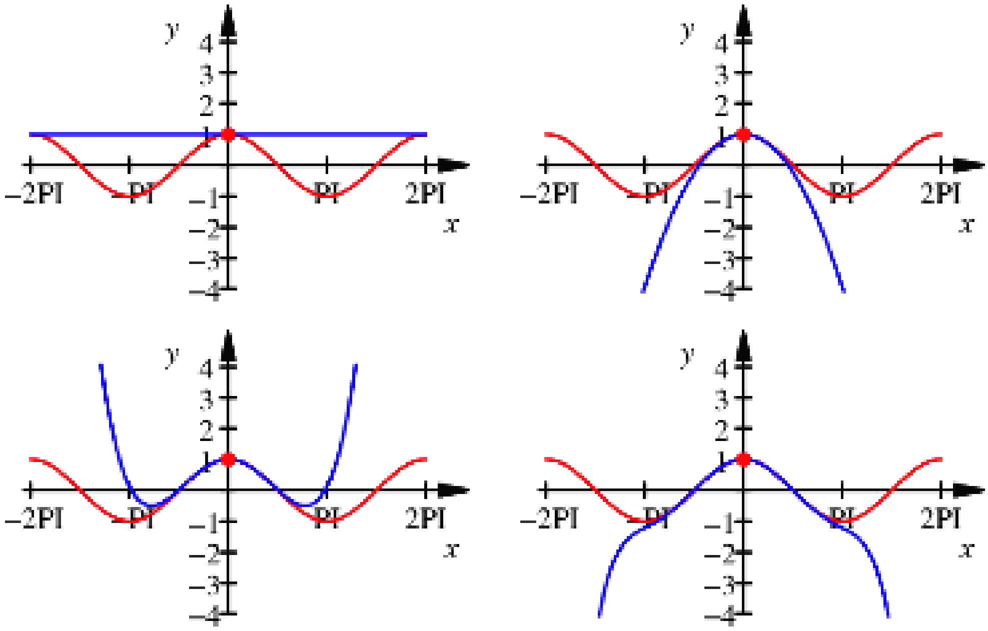

**TAYLORpolynom vom Grad 39 für sin(*x*) an der Stelle $x_0 = 0$**

### 2.5.5 Die Cosinusfunktion

Für $f(x) = \cos(x)$ ergibt sich analog für die Taylorentwicklung an der Stelle $x_0 = 0$:

$$\boxed{\cos(x) = 1 - \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{4!}x^4 - \tfrac{1}{6!}x^6 \pm \cdots = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \tfrac{1}{(2k)!}x^{2k}}$$

Die Figurenfolge zeigt die Approximationen der Grade 0, 2, 4, 6.




**Approximationen von cos(*x*)**

Bemerkungen:

- Es handelt sich um eine *gerade* Funktion.
- Die Verwandtschaft mit der Taylorreihe von $e^x$ ist ebenfalls offensichtlich.

## 3 Ausflug ins Komplexe

Menge der komplexen Zahlen:

$$\mathbb{C} = \left\{ a + \mathrm{i}b \;\middle|\; a, b \in \mathbb{R},\ \mathrm{i}^2 = -1 \right\}$$

Es ist dann:

$$\begin{aligned} \mathrm{i}^0 &= 1 \\ \mathrm{i}^1 &= \mathrm{i} \\ \mathrm{i}^2 &= -1 \\ \mathrm{i}^3 &= -\mathrm{i} \\ \mathrm{i}^4 &= 1 \\ \mathrm{i}^5 &= \mathrm{i} \end{aligned}$$

Periodizität

Damit berechnen wir:

$$e^{\mathrm{i}x}$$

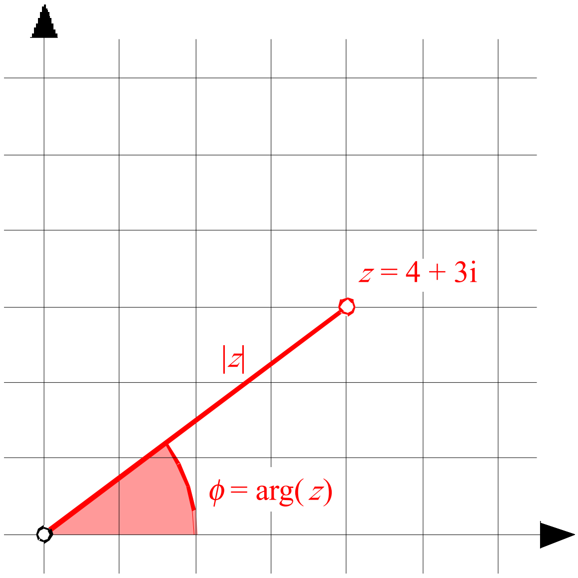
### 3.1 Die berühmteste Formel

Wir erhalten die Eulersche Formel:

$$e^{\mathrm{i}x} = \cos(x) + \mathrm{i}\,\sin(x)$$

### 3.2 Die komplexe Zahlenebene

Erinnerung:




**Argument und Betrag**

Es gelten die Formeln:

$$\tan(\arg(z)) = \frac{\mathrm{Im}(z)}{\mathrm{Re}(z)}$$

$$|z| = \sqrt{(\mathrm{Re}(z))^2 + (\mathrm{Im}(z))^2} = \sqrt{z\bar{z}}$$

Umgekehrt gilt:

$$\mathrm{Re}(z) = |z|\cos(\phi)$$
$$\mathrm{Im}(z) = |z|\sin(\phi)$$

Somit ist:

$$z = \mathrm{Re}(z) + \mathrm{i}\,\mathrm{Im}(z) = |z|(\cos(\phi) + \mathrm{i}\sin(\phi))$$

Mit der Eulerschen Formel

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi} = \cos(\phi) + \mathrm{i}\sin(\phi)$$

gilt also:

$$z = \mathrm{Re}(z) + \mathrm{i}\,\mathrm{Im}(z) = |z|(\cos(\phi) + \mathrm{i}\sin(\phi)) = |z|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}$$

$$z = |z|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}$$

Insbesondere ist $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi} = \cos(\phi) + \mathrm{i}\sin(\phi)$ eine komplexe Zahl mit dem Argument $\phi$ und dem Betrag $1$, liegt also auf dem Einheitskreis.

## 3.3 Multiplikation

Für die Multiplikation zweier komplexer Zahlen $z$ und $w$ verwenden wir die Schreibweisen $z = |z|e^{i\phi}$ und $w = |w|e^{i\psi}$. Es ist dann

$$zw = |z|e^{i\phi}|w|e^{i\psi} = |z||w|e^{i(\phi+\psi)}$$

Andererseits ist $zw = |zw|e^{i\arg(zw)}$. Durch Vergleich folgt:

Der Betrag des Produktes ist gleich dem Produkt der Beträge der Faktoren.

Das Argument des Produktes ist gleich der *Summe* der Argumente der Faktoren.

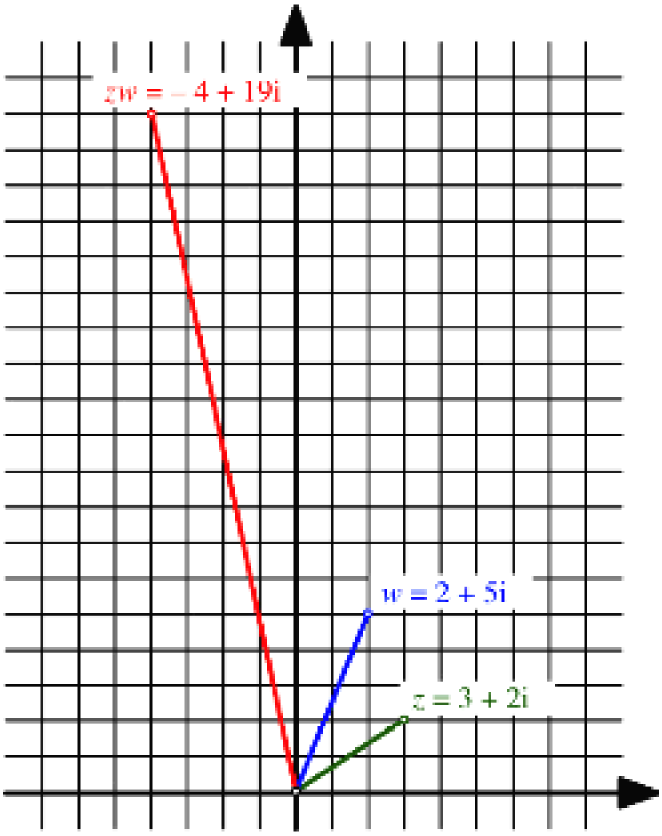
$$|zw| = |z||w|$$
$$\arg(zw) = \arg(z) + \arg(w)$$

Entsprechendes gilt für die Division:

$$\left|\frac{z}{w}\right| = \frac{|z|}{|w|}$$
$$\arg\left(\frac{z}{w}\right) = \arg(z) - \arg(w)$$

Die Regeln für das Argument entsprechen den Regeln für den Logarithmus.

Beispiel:




**Multiplikation**

Aus $z = 3 + 2i$ und $w = 2 + 5i$ ergibt sich $zw = -4 + 19i$. Es ist:

$$|z| = \sqrt{13}, \quad |w| = \sqrt{29} \quad \text{und} \quad |zw| = \sqrt{377} = \sqrt{13}\sqrt{29}$$

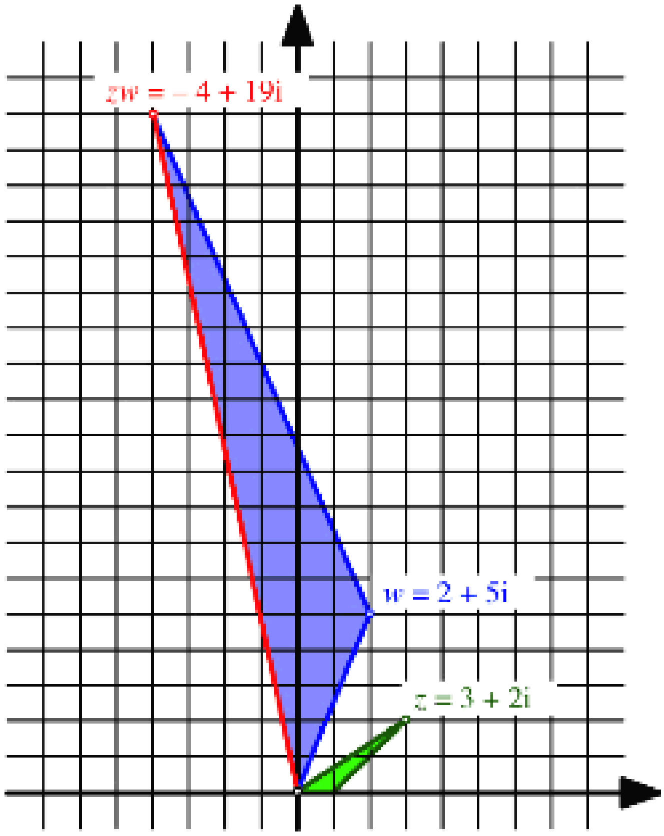
$$\arg(z) = \arctan\left(\tfrac{2}{3}\right) \approx 0.588 \approx 33.69°$$

$$\arg(w) = \arctan\left(\tfrac{5}{2}\right) \approx 1.190 \approx 68.20°$$

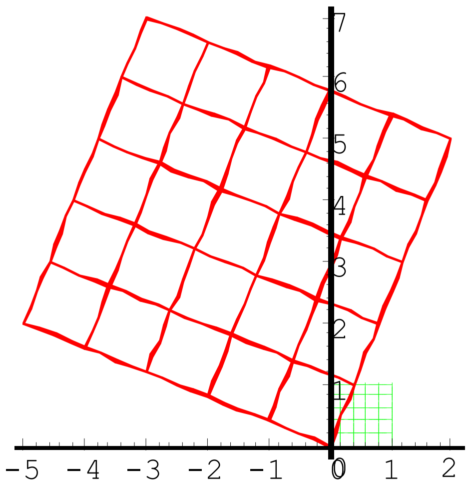
und

$$\arg(zw) = \arctan\left(\tfrac{19}{-4}\right) + \pi \approx 1.778 \approx 101.89°$$

Die Multiplikation mit $w = 2 + 5\mathrm{i}$ kann als Drehstreckung mit dem Drehwinkel $\arg(w) \approx 68.20°$ und dem Faktor $|w| = \sqrt{29} \approx 5.385$ interpretiert werden.




**Drehstreckung mit** $w = 2 + 5\mathrm{i}$




**Drehstreckung mit** $w = 2 + 5\mathrm{i}$

### 3.4 Potenzen und Wurzeln

Das Potenzieren kann als mehrfaches Multiplizieren gesehen werden. Daher ist:

$$\boxed{\begin{gathered}\left|z^n\right| = |z|^n \\ \arg\left(z^n\right) = n\arg(z)\end{gathered}}$$

Entsprechend gilt für das Wurzelziehen:

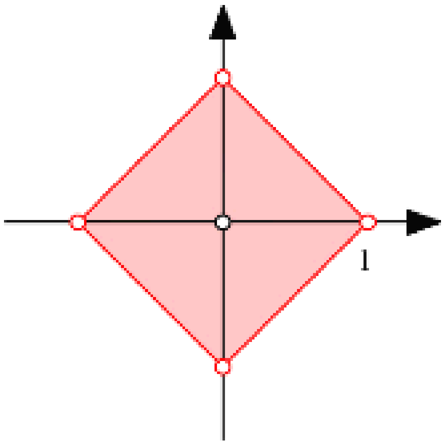
$$\boxed{\begin{gathered}\left|\sqrt[n]{z}\right| = \sqrt[n]{|z|} \\ \arg\left(\sqrt[n]{z}\right) = \tfrac{1}{n}\arg(z)\end{gathered}}$$

#### 3.4.1 Einheitswurzeln

Im Reellen hat die Gleichung $z^n = 1$ oder $z^n - 1 = 0$ nur die Lösungen $\pm 1$ für gerades $n$ und sogar nur die Lösung 1 für ungerades $n$. Im Komplexen wird es spannender und gleichzeitig systematisch. Wir wissen ja aus dem Fundamentalsatz, dass es $n$ Lösungen geben muss.

Für $z^2 - 1 = 0$ haben wir die Lösungen $\{-1, 1\}$.

Für $z^4 - 1 = 0$ finden wir mit etwas Fantasie die Lösungen $\{\mathrm{i}, -1, -\mathrm{i}, 1\}$. Diese vier Lösungen bilden in der komplexen Zahlenebene ein Quadrat, das auf einer Spitze steht.



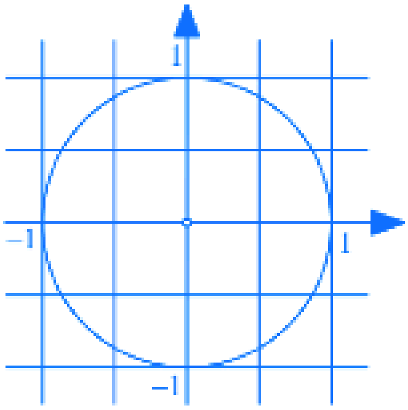

**Lösungsmenge**

Die Gleichung $z^3 - 1 = 0$ hat die reelle Lösung 1. Durch Herausdividieren des entsprechenden Linearfaktors erhalten wir:

Es ist also $z^3 - 1 = (z-1)\left(z^2 + z + 1\right)$. Für weitere Lösungen der Gleichung $z^3 - 1 = 0$ müssen wir die Gleichung $z^2 + z + 1 = 0$ bearbeiten. Diese hat, da die Diskriminante $D = -3$ ist, keine reellen Lösungen, hingegen die beiden konjugiert komplexen Lösungen $-\frac{1}{2} \pm \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}$. Die Gleichung $z^3 - 1 = 0$ hat also die drei Lösungen:

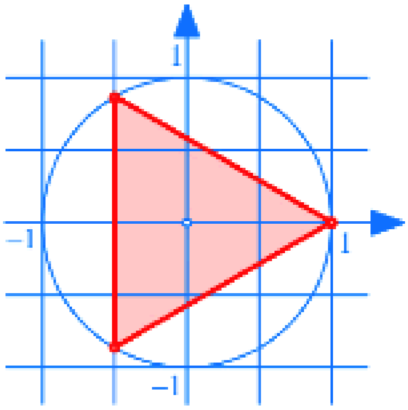
$$\left\{-\tfrac{1}{2}+\mathrm{i}\tfrac{\sqrt{3}}{2},\quad -\tfrac{1}{2}-\mathrm{i}\tfrac{\sqrt{3}}{2},\quad 1\right\}$$

Wo liegen diese Lösungen in der komplexen Zahlenebene?




**Lösungsmenge**

Alle drei Lösungen haben den Betrag 1, liegen also auf dem Einheitskreis. Die Argumente sind $\left\{\frac{2\pi}{3},\quad \frac{4\pi}{3},\quad 0\right\}$. Die Punkte bilden also ein gleichseitiges Dreieck.




**Lösungsmenge**

Aus diesen Beispielen ersehen wir einen allgemeinen Sachverhalt:

Die $n$ Lösungen der Gleichung $z^n = 1$ sind:

$$z_k = \mathrm{e}^{\mathrm{i}k\frac{2\pi}{n}} = \cos\left(k\tfrac{2\pi}{n}\right) + \mathrm{i}\sin\left(k\tfrac{2\pi}{n}\right) \quad k \in \{1,2,\ldots,n\}$$

Wir können das durch Einsetzen verifizieren:

$$z_k^n = \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\frac{2\pi}{n}}\right)^n = \mathrm{e}^{\mathrm{i}2k\pi} = \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi}\right)^k = 1^k = 1$$

Bemerkungen:

- Diese Lösungen werden im Jargon als *n-te Einheitswurzeln* bezeichnet.
- Sie sind die Ecken eines regelmäßigen $n$-Eckes mit dem Einheitskreis als Umkreis.

- Die Nummerierung kann von $k \in \{1,2,\ldots,n\}$ laufen oder oft auch $k \in \{0,1,2,\ldots,n-1\}$.
- Eine Ecke, nämlich $z_n$ beziehungsweise $z_0$ ist die Zahl 1.
- Die $x$-Achse ist eine Symmetrieachse des regelmäßigen $n$-Eckes.

### 3.4.2 Beispiel

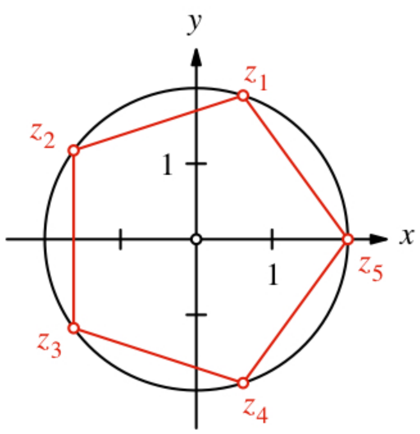
Die 5 Lösungen der Gleichung $z^5 = 32$ sind:

$$z_k = 2e^{ik\frac{2\pi}{5}} = 2\left(\cos\left(k\tfrac{2\pi}{5}\right) + i\sin\left(k\tfrac{2\pi}{5}\right)\right) \quad k \in \{1,2,\ldots,5\}$$

Die Lösungsmenge ist also:

$$\text{Lösungsmenge} = \left\{z_1 = 2e^{i\frac{2\pi}{5}}, z_2 = 2e^{i2\frac{2\pi}{5}}, z_3 = 2e^{i3\frac{2\pi}{5}}, z_4 = 2e^{i4\frac{2\pi}{5}}, z_5 = 2e^{i5\frac{2\pi}{5}}\right\}$$

In der Gaußschen Ebene der komplexen Zahlen ist das ein regelmäßiges Fünfeck mit dem Umkreisradius 2.




**Lösungsmenge**

## 4 Zusammenfassung

### 4.1 Kurvendiskussion

Extremum, Extremalstelle

Maximum, Maximalstelle, Minimum, Minimalstelle, global, lokal

Randextremum

Stationäre Stelle $f'(x_0) = 0$ mit $f''(x_0) > 0 \quad \Rightarrow$ Sichere Minimalstelle

Stationäre Stelle $f'(x_0) = 0$ mit $f''(x_0) < 0 \quad \Rightarrow$ Sichere Maximalstelle

### 4.2 Taylorpolynome und Taylorreihen

Fakultäten: $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \cdots \cdot k = k!$ ("$k$ - Fakultät")

TAYLORpolynom $n$-ten Grades an der Stelle $x_0$:

$$p(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \tfrac{1}{2} f''(x_0)(x - x_0)^2 + \tfrac{1}{3!} f'''(x_0)(x - x_0)^3 + \cdots + \tfrac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n$$

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} \tfrac{1}{k!} f^{(k)}(x_0)(x - x_0)^k$$

Approximation: $$f(x) \approx \sum_{k=0}^{n} \tfrac{1}{k!} f^{(k)}(x_0)(x - x_0)^k$$

Taylorreihe: $$\sum_{k=0}^{\infty} \tfrac{1}{k!} f^{(k)}(x_0)(x - x_0)^k$$

Wichtige Beispiele:

$$e^x = 1 + x + \tfrac{1}{2} x^2 + \tfrac{1}{3!} x^3 + \tfrac{1}{4!} x^4 + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \tfrac{1}{k!} x^k$$

Daraus ergibt sich: $e = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$

$$\cos(x) = 1 - \tfrac{1}{2} x^2 + \tfrac{1}{4!} x^4 - \tfrac{1}{6!} x^6 \pm \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \tfrac{1}{(2k)!} x^{2k}$$

$$\sin(x) = x - \tfrac{1}{3!} x^3 + \tfrac{1}{5!} x^5 - \tfrac{1}{7!} x^7 \pm \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \tfrac{1}{(2k+1)!} x^{2k+1}$$

### 4.3 Formel von Euler

$$e^{ix} = \cos(x) + i \sin(x)$$

### 4.4 Rechenregeln im Komplexen

$$z = |z| e^{i\phi}$$

$|zw| = |z||w|$ aber $\arg(zw) = \arg(z) + \arg(w)$

$\left|\frac{z}{w}\right| = \frac{|z|}{|w|}$ aber $\arg\left(\frac{z}{w}\right) = \arg(z) - \arg(w)$

$|z^n| = |z|^n$ aber $\arg(z^n) = n \arg(z)$

$n$-te Einheitswurzeln: $z_k = e^{ik\frac{2\pi}{n}} = \cos\left(k\frac{2\pi}{n}\right) + i \sin\left(k\frac{2\pi}{n}\right) \quad k \in \{1, 2, \ldots, n\}$