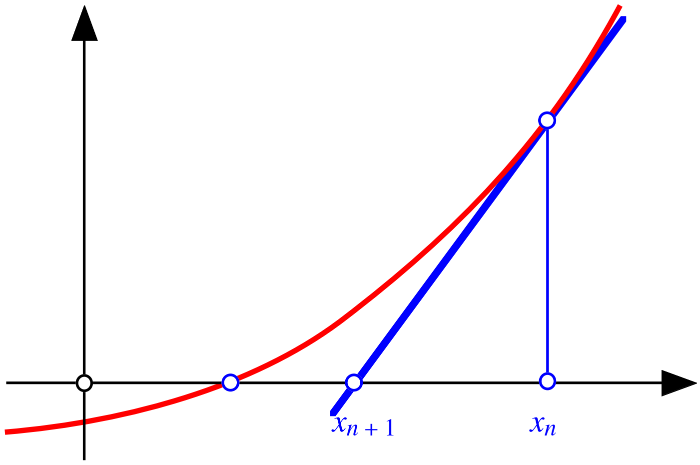
Hans Walser

Mathematik 1 für Naturwissenschaften



Modul 106

Nullstellen. Verfahren von Newton-Raphson

Lernumgebung

UNI BASEL

Inhalt

Modul 106 für die Lehrveranstaltung *Mathematik 1 für Naturwissenschaften*

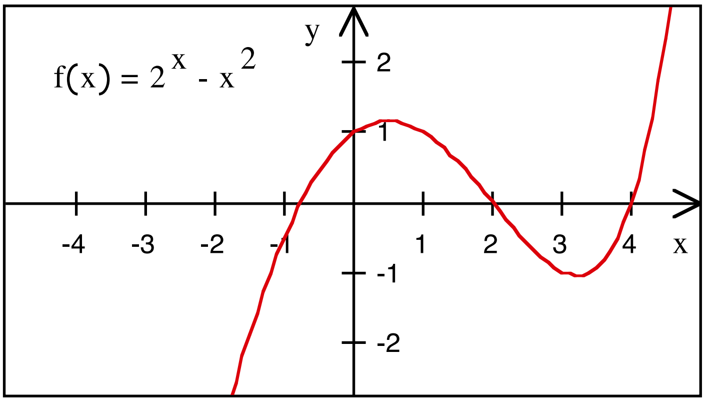
Winter 2003/04	Erstausgabe
Winter 2004/05	Erweiterung. Teilweise Angabe von Lösungswegen.
Winter 2005/06	Kleine Ergänzungen
Winter 2006/07	Formel Editor revidiert (MathType)
Herbst 2007	Erweiterungen
Herbst 2008	Erweiterungen
Herbst 2009	Erweiterungen
Herbst 2012	Fehlerkorrekturen, Erweiterungen und Kürzungen

last modified: 14. November 2011

Hans Walser
Mathematisches Institut, Rheinsprung 21, 4051 Basel
www.math.unibas.ch/~walser

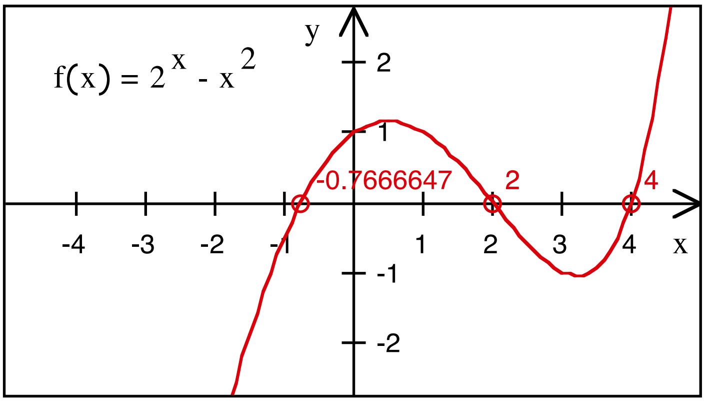
1 Exponentialfunktion gegen Potenzfunktion

Gesucht sind die Nullstellen der Funktion $y = f(x) = 2^x - x^2$.



Nullstellen?

Ergebnis



Nullstellen

Lösungsweg

Die Nullstellen $x = 2$ und $x = 4$ finden sich leicht (Verifikation!). Für die verbleibende dritte Nullstelle verwenden wir das Verfahren von Newton:

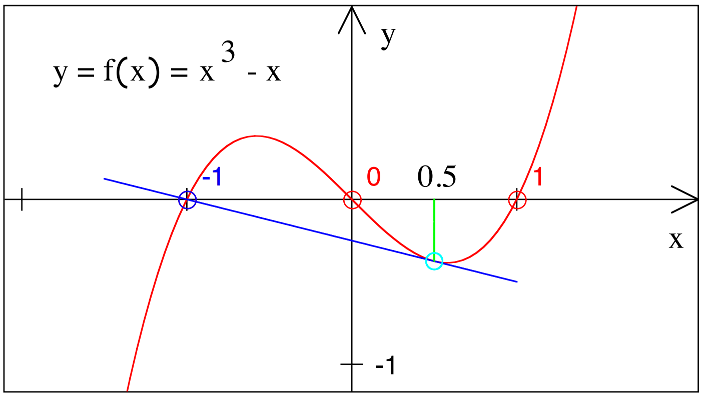
$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{2^{x_n} - x_n^2}{\ln(2)2^{x_n} - 2x_n}$$

Mit dem Startwert $x_0 = -1$ ergibt sich (EXCEL):

n	$x[n]$
0	-1.0000000000
1	-0.7869233669
2	-0.7668433794
3	-0.7666647101
4	-0.7666646960
5	-0.7666646960

2 Der Esel zwischen zwei Heuhaufen - welchen frisst er?

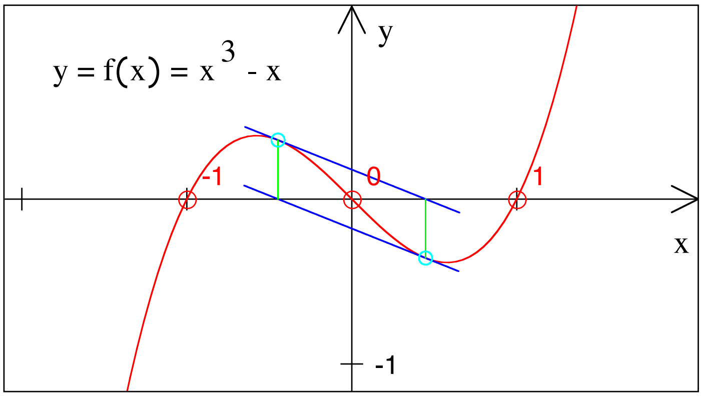
Zeigen Sie, dass bei der Funktion $y = f(x) = x^3 - x$ der Startwert $x_0 = \frac{1}{2}$ genau zu $x_1 = -1$, einer Nullstelle von $y = f(x) = x^3 - x$, führt.



$y = f(x) = x^3 - x$

3 Ewiger Paarlauf

Es sei $f(x) = x^3 - x$. Gesucht ist ein Startwert x_0, der zu einem ewigen Paarlauf gemäß Skizze führt. Also: x_0 so, dass $x_2 = x_0$.



Paarlauf

Ergebnis mit Lösungsweg

Zunächst ist $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{x_n^3 - x_n}{3x_n^2 - 1}$. Für einen Paarlauf muss, aus Symmetriegründen, $x_1 = -x_0$ gelten, also $-x_0 = x_0 - \frac{x_0^3 - x_0}{3x_0^2 - 1}$ oder umgeformt $5x_0^3 - x_0 = 0$. Diese kubische Gleichung hat die drei Lösungen $\left\{0, \pm\sqrt{\frac{1}{5}}\right\}$. Die Lösung Null führt aber nicht zu einem Paar. Somit verbleiben die beiden Lösungen $x_0 = \pm\sqrt{\frac{1}{5}} \approx \pm 0.4472135955$.

Für die numerische Kontrolle erhalten wir (Excel):

n	x_n
0	0.4472135955
1	-0.4472135955
2	0.4472135955
3	-0.4472135955
4	0.4472135955
5	-0.4472135955
6	0.4472135955
7	-0.4472135955
8	0.4472135955
9	-0.4472135958
10	0.4472135971
11	-0.4472136051
12	0.4472136530
13	-0.4472139407
14	0.4472156669
15	-0.4472260244
16	0.4472881766
17	-0.4476613619
18	0.4499103159
19	-0.4637675584
20	0.5623383788
21	-6.9291555006
22	-4.6517318152
23	-3.1496738963
24	-2.1727897251
25	-1.5585714176
26	-1.2043054123
27	-1.0424576215
28	-1.0024604616
29	-1.0000090290
30	-1.0000000001
31	-1.0000000000
32	-1.0000000000
33	-1.0000000000

Zunächst läuft die Sache gut; dann aber driftet das Paar auseinander und findet sich dann bei -1 wieder. Der Grund sind Rundungsprobleme: Da $\sqrt{5}$ irrational ist, kann numerisch gar nicht exakt gearbeitet werden.

Wenn wir hingegen mit einem CAS arbeiten (Maple), wird exakt gerechnet:

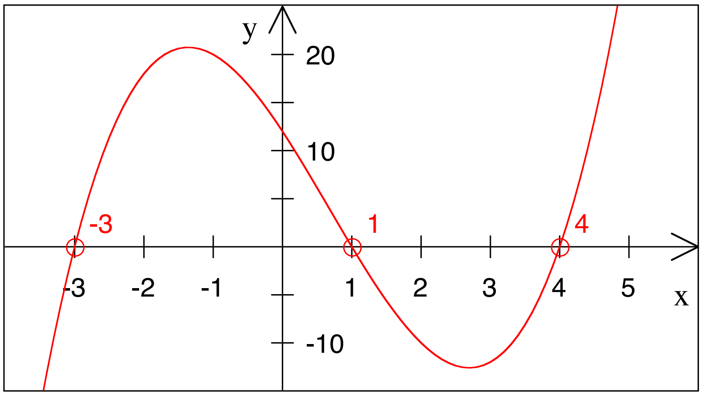
```
> f:=x->x^3-x:
> Startwert:=sqrt(1/5):
AnzahlSchritte:= 33:
x:=array(0..AnzahlSchritte):
x[0]:=Startwert:
for n from 0 to AnzahlSchritte-1 do
        x[n+1]:=x[n]-f(x[n])/D(f)(x[n]):
        od:
infolevel[a] := 3:
userinfo(3,a,`    `,`Schritt`,`|       x[n]`);
userinfo(3,a,`    `,`______`,` _________________`);
for n from 0 to AnzahlSchritte do
        userinfo(3,a,`        `,n,`   |  `,x[n]);od:
```

Schritt	|	x[n]
0	|	1/5*5^(1/2)
1	|	-1/5*5^(1/2)
2	|	1/5*5^(1/2)
3	|	-1/5*5^(1/2)
4	|	1/5*5^(1/2)
5	|	-1/5*5^(1/2)
6	|	1/5*5^(1/2)
7	|	-1/5*5^(1/2)
8	|	1/5*5^(1/2)
9	|	-1/5*5^(1/2)
10	|	1/5*5^(1/2)
11	|	-1/5*5^(1/2)
12	|	1/5*5^(1/2)
13	|	-1/5*5^(1/2)
14	|	1/5*5^(1/2)
15	|	-1/5*5^(1/2)
16	|	1/5*5^(1/2)

17 | -1/5*5^(1/2)
18 | 1/5*5^(1/2)

4 Der Esel zwischen zwei Heuhaufen - welchen frisst er?

Die Funktion $f(x) = x^3 - 2x^2 - 11x + 12$ hat die drei Nullstellen $x^* = -3$, $x^{**} = 1$ und $x^{***} = 4$.



$f(x) = x^3 - 2x^2 - 11x + 12$

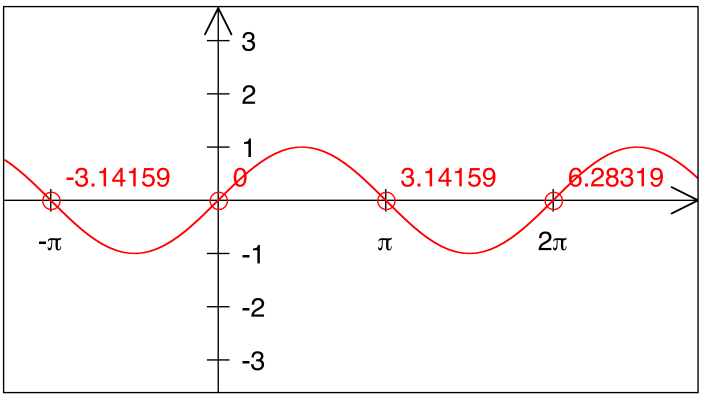
Wählen Sie nun einen Startwert, der *genau* in der Mitte zweier Nullstellen liegt, und wenden Sie damit das Newtonsche Approximationsverfahren an. Was geschieht?

Ergebnis

Wird für x_0 der Mittelwert zweier Nullstellen genommen, ergibt sich für x_1 die *dritte* Nullstelle. Der Esel ist schnäderfräßig.

5 „Berechnung" von π

Berechnen Sie π als Nullstelle von $\sin(x)$. Verwenden Sie das Newton-Verfahren mit dem Startwert $x_0 = 3$, bis die Genauigkeit Ihres Taschenrechners ausgereizt ist. Wenn es *nicht* klappen sollte, überlegen Sie, warum.



Sinus

Ergebnis

n	x_n
0	3 (Startwert)
1	3.142546543
2	3.141592653
3	3.141592654

Ist der Taschenrechner auf RAD eingestellt?

6 Newton'sches Verfahren

Gesucht sind (approximative) Lösungen der Gleichung:

$$\tan(x) = \tfrac{1}{x}.$$

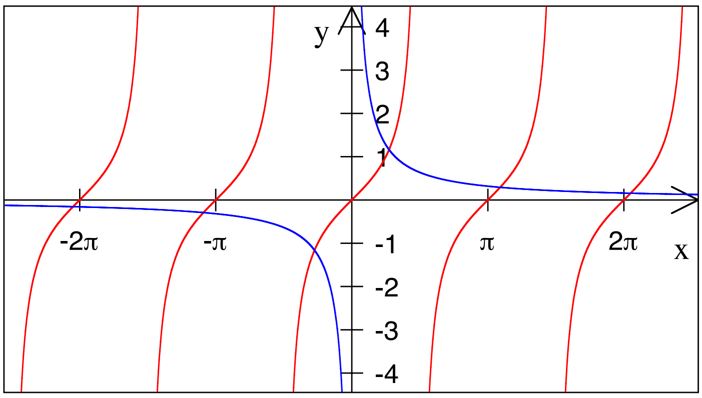
a) Wie viele Lösungen gibt es in $\mathbb{R}$?

b) Welches sind die Lösungen im Intervall $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$?

c) Welches sind die Lösungen im Intervall $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$?

Bearbeitung

a) Es gibt unendliche viele Lösungen



Unendlich viele Schnittpunkte

b) Wir suchen die Nullstellen von $f(x) = \tan(x) - \frac{1}{x}$. Es ist dann

$$f(x) = \tan(x) - \tfrac{1}{x}$$

$$f'(x) = 1 + \tan^2(x) + \tfrac{1}{x^2}$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{\tan(x_n) - \frac{1}{x_n}}{1 + \tan^2(x_n) + \frac{1}{x_n^2}}$$

Mit dem Startwert $x_0 = 1$ ergibt sich (Excel):

n	x[n]
0	1
1	0.8740469203
2	0.8604001630
3	0.8603335904
4	0.8603335890
5	0.8603335890

Dasselbe mit Maple:

```
restart:
f:=x->tan(x)-1/x:
Startwert:=1:
AnzahlSchritte:= 5:
x[0]:=evalf(Startwert);
for n from 0 to AnzahlSchritte-1 do
        x[n+1]:=evalf(x[n]-f(x[n])/D(f)(x[n]));
        end do;
```

x[0] := 1.

x[1] := 0.8740469203

x[2] := 0.8604001629

x[3] := 0.8603335905

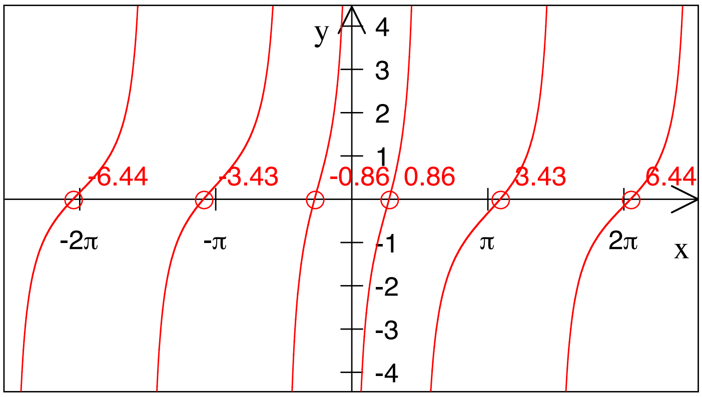
x[4] := 0.8603335891

x[5] := 0.8603335891

Für die Frage b) ergeben sich die beiden Lösungen ±0.860333589.

c) 3.42561846

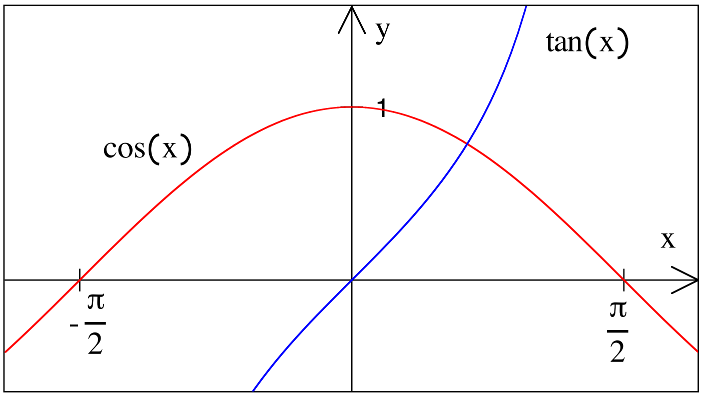
Die folgende Abbildung zeigt die Funktion $f(x) = \tan(x) - \frac{1}{x}$ mit eingetragenen Nullstellen.



$f(x) = \tan(x) - \frac{1}{x}$

7 Verschiedene Lösungswege

Die Gleichung $\cos(x) = \tan(x)$ lässt sich auf verschiedene Weisen lösen.



$\cos(x) = \tan(x)$

Erster Lösungsweg

Newton-Approximation: $x_{n+1} = x_n - \frac{\cos(x_n) - \tan(x_n)}{-\sin(x_n) - 1 - \tan^2(x_n)}$

n	$x_{n+1} = x_n - \frac{\cos(x_n) - \tan(x_n)}{-\sin(x_n) - 1 - \tan^2(x_n)}$
0	1
1	0.76163397
2	0.67320682
3	0.66627564
4	0.66623943
5	0.66623943

Zweiter Lösungsweg

$$\cos(x) = \tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

$$\underbrace{\cos^2(x)}_{1-\sin^2(x)} = \sin(x)$$

$$\sin^2(x) + \sin(x) - 1 = 0$$

$$\sin(x) = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Es kommt nur die Lösung $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ in Frage, da der Betrag nicht größer als 1 sein darf. Daher:

$$x = \arcsin\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right) \approx 0.666239432493$$

Dritter Lösungsweg

$\cos(x) = \tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = \frac{\sqrt{1-(\cos(x))^2}}{\cos(x)}$. Ergibt biquadratische Gleichung für $\cos(x)$:

$$\cos(x) = \tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = \frac{\sqrt{1-(\cos(x))^2}}{\cos(x)}$$

$$(\cos(x))^2 = \sqrt{1-(\cos(x))^2}$$

$$(\cos(x))^4 = 1-(\cos(x))^2$$

$$(\cos(x))^4 + (\cos(x))^2 - 1 = 0$$

Damit ergibt sich:

$$(\cos(x))^2 = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

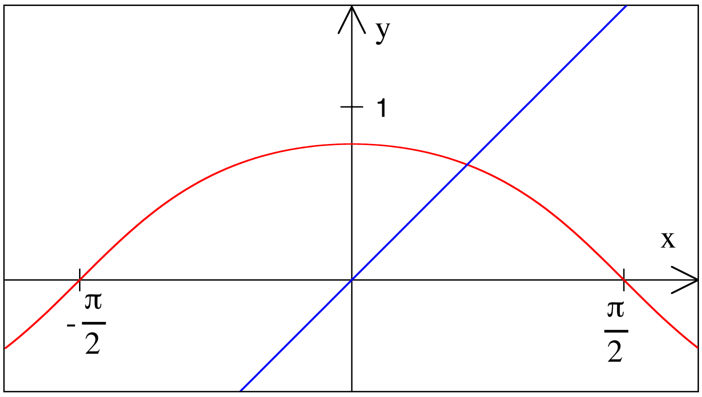
$$\cos(x) = \pm\sqrt{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}} \qquad \text{Minuszeichen vor } \sqrt{5} \text{ geht nicht.}$$

$$x = \arccos\left(\pm\sqrt{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}\right) \approx 0.666239432493$$

Vierter Lösungsweg

Dem Fixpunktverfahren nachempfunden (siehe Modul *Fixpunkte*):

Aus $\tan(x) = \cos(x)$ folgt $x = \arctan(\cos(x))$.



$x = \arctan(\cos(x))$

Nun können wir das Fixpunktverfahren anwenden mit der Rekursion:

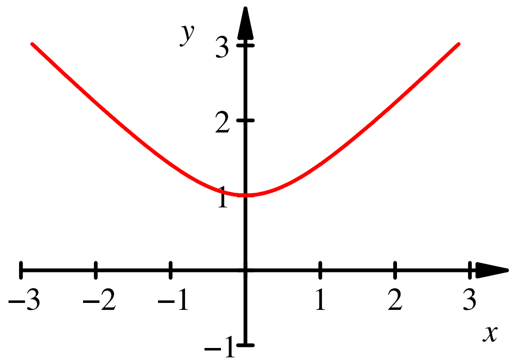
$$x_{n+1} = \arctan(\cos(x_n))$$

Tabelle:

n	$x_{n+1} = \arctan(\cos(x_n))$
0	1.0000000000
1	0.4953672892
2	0.7215388429
3	0.6440066130
4	0.6745559120
5	0.6630380283
6	0.6674585979
7	0.6657732210
8	0.6664174317
9	0.6661714315
10	0.6662654049
11	0.6662295117
12	0.6662432219
13	0.6662379851
14	0.6662399854
15	0.6662392213
16	0.6662395132
17	0.6662394017
18	0.6662394443
19	0.6662394280
20	0.6662394342
21	0.6662394318
22	0.6662394327
23	0.6662394324
24	0.6662394325
25	0.6662394325

8 Keine Nullstelle

Die Funktion $y = f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$ hat keine Nullstellen.



Funktionsgraf

Was geschieht, wenn wir trotzdem versuchen, mit dem Verfahren von Newton-Raphson und dem Startwert $x_0 = 2$ eine Nullstelle zu bestimmen?

Bearbeitung

Mit dem MuPAD-Programm

```
f:=x->sqrt(x^2+1):
x[0]:=2:
N:=10:
for n from 0 to N do
 x[n+1]:=(x[n]-f(x[n])/f'(x[n])):
end_for:
for n from 0 to N do
 print(Unquoted,"  x[".n."]\t= ".x[n]);
end_for:
```

erhalten wir:

```
  x[0]  = 2
  x[1]  = -1/2
  x[2]  = 2
  x[3]  = -1/2
  x[4]  = 2
  x[5]  = -1/2
  x[6]  = 2
  x[7]  = -1/2
  x[8]  = 2
  x[9]  = -1/2
  x[10] = 2
```

Die Werte pendeln zwischen 2 und $-\frac{1}{2}$.

Hintergrund

Für einen beliebigen Startwert $x_0 = a \neq 0$ pendeln die Werte zwischen a und $-\frac{1}{a}$.

Beweis:

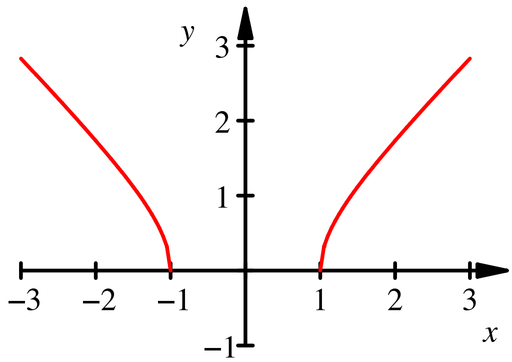
$$f(x) = \sqrt{x^2+1}$$
$$f'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

Damit erhalten wir für die Rekursion nach Newton-Raphson:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{\sqrt{x_n^2+1}}{\frac{x_n}{\sqrt{x_n^2+1}}} = x_n - \frac{x_n^2+1}{x_n} = -\frac{1}{x_n}$$

9 Ein unsinniger Paarlauf

Die Funktion $y = f(x) = \sqrt{x^2-1}$ ist nur für $|x| \geq 1$ definiert. Sie hat die Nullstellen ± 1.



Funktionsgraf

Was geschieht, wenn wir versuchen, mit dem Verfahren von Newton-Raphson und dem Startwert $x_0 = 2$ eine Nullstelle zu bestimmen?

Bearbeitung

Mit dem MuPAD-Programm

```
f:=x->sqrt(x^2-1):
x[0]:=2:
N:=10:
for n from 0 to N do
 x[n+1]:=(x[n]-f(x[n])/f'(x[n])):
end_for:
for n from 0 to N do
 print(Unquoted,"  x[".n."]\t= ".x[n]);
end_for:
```

erhalten wir:

```
  x[0]  = 2
  x[1]  = 1/2
  x[2]  = 2
  x[3]  = 1/2
  x[4]  = 2
```

```
x[5]  = 1/2
x[6]  = 2
x[7]  = 1/2
x[8]  = 2
x[9]  = 1/2
x[10] = 2
```

Die Werte pendeln zwischen 2 und $\frac{1}{2}$. Das ist völliger Unsinn, denn der Wert $x_1 = \frac{1}{2}$ ist *nicht* im Definitionsbereich der Funktion und kann daher nicht weiter verarbeitet werden.

Hintergrund

Für einen beliebigen Startwert $x_0 = a \neq 0$ pendeln die Werte zwischen a und $\frac{1}{a}$.

Beweis:

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$$
$$f'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2-1}} = \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$$

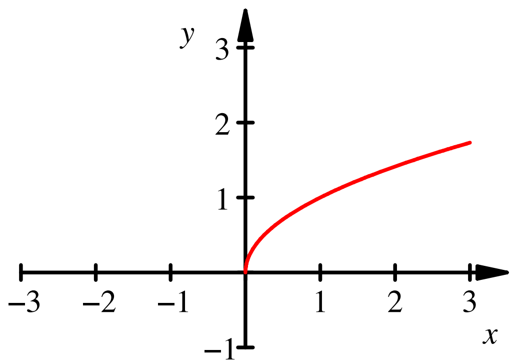
Damit erhalten wir für die Rekursion nach Newton-Raphson:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{\sqrt{x_n^2-1}}{\frac{x_n}{\sqrt{x_n^2-1}}} = x_n - \frac{x_n^2-1}{x_n} = \frac{1}{x_n}$$

Wir sehen, dass die für $|x| < 1$ rein imaginäre Zahl $\sqrt{x^2 - 1}$ durch das Quadrieren wieder reell wird.

10 Versagen von Newton-Raphson

Die Funktion $y = f(x) = \sqrt{x}$ ist nur für $x \geq 0$ definiert. Sie hat die Nullstelle 0.



Funktionsgraf

Was geschieht, wenn wir versuchen, mit dem Verfahren von Newton-Raphson und dem Startwert $x_0 = 2$ die Nullstelle zu bestimmen?

Bearbeitung

Mit dem MuPAD-Programm

```
f:=x->sqrt(x):
x[0]:=2:
N:=10:
for n from 0 to N do
 x[n+1]:=(x[n]-f(x[n])/f'(x[n])):
end_for:
for n from 0 to N do
   print(Unquoted,"  x[".n."]\t= ".x[n]);
end_for:
```

erhalten wir:

```
x[0]  = 2
x[1]  = -2
x[2]  = 2
x[3]  = -2
x[4]  = 2
x[5]  = -2
x[6]  = 2
x[7]  = -2
x[8]  = 2
x[9]  = -2
x[10] = 2
```

Die Werte pendeln zwischen 2 und -2. Das ist völliger Unsinn, denn der Wert $x_1 = -2$ ist *nicht* im Definitionsbereich der Funktion und kann daher nicht weiter verarbeitet werden.

Hintergrund

Für einen beliebigen Startwert $x_0 = a \neq 0$ pendeln die Werte zwischen a und $-a$.

Beweis:

$$f(x) = \sqrt{x}$$
$$f'(x) = \tfrac{1}{2\sqrt{x}}$$

Damit erhalten wir für die Rekursion nach Newton-Raphson:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{\sqrt{x_n}}{\frac{1}{2\sqrt{x_n}}} = x_n - 2x_n = -x_n$$

Wir sehen, dass die für $x < 0$ rein imaginäre Zahl $\sqrt{x}$ durch das Quadrieren wieder reell und sogar scheinbar wieder positiv wird.

Illustration am Fall $x_1 = -2$:

$$\sqrt{-2}\sqrt{-2} = ?$$

Zunächst eine falsche Rechnung: Wir verwenden die Formel $\sqrt{a}\sqrt{b} = \sqrt{ab}$. Damit wird:

$$\sqrt{-2}\sqrt{-2} = \sqrt{(-2)(-2)} = \sqrt{2} = 2$$

Die korrekte Rechnung benötigt komplexe Zahlen:

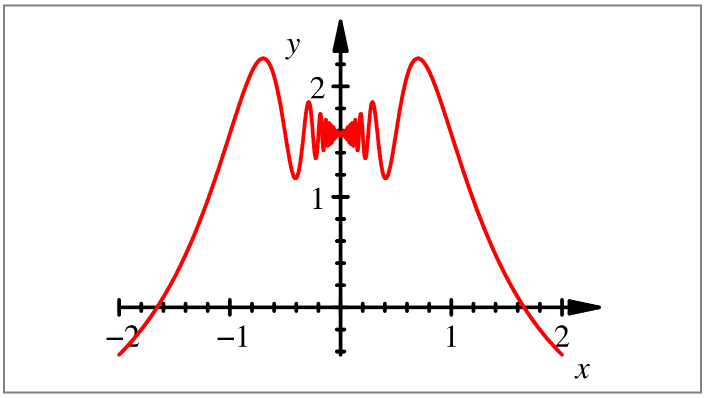
$$\sqrt{-2}\sqrt{-2} = \mathrm{i}\sqrt{2}\ \mathrm{i}\sqrt{2} = \mathrm{i}^2\sqrt{2}^2 = -2$$

Die Formel $\sqrt{a}\sqrt{b} = \sqrt{ab}$ ist nur für $a \geq 0, b \geq 0$ anwendbar.

11 Fooling Newton

Es sei

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} - x\sin\left(\frac{\pi}{x}\right) & \text{für} \quad x \neq 0 \\ \frac{\pi}{2} & \text{für} \quad x = 0 \end{cases}$$



Funktionsgraf

Was liefert die Methode nach Newton-Raphson mit dem Startwerten:

a) $x_0 = \frac{1}{2}$

b) $x_0 = 1$

Bearbeitung

Es ist

$$x_{n+1} = x_n - \frac{\frac{\pi}{2} - x_n \sin\left(\frac{\pi}{x_n}\right)}{\frac{\pi}{x_n}\cos\left(\frac{\pi}{x_n}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{x_n}\right)}$$

a) Mit dem Startwert $x_0 = \frac{1}{2}$ liefert Excel:

n	x_n
0	0.5000000000
1	0.2500000000
2	0.1250000000
3	0.0625000000
4	0.0312500000
5	0.0156250000

MuPAD liefert:

```
x[0]:=1/2:
f:=x->PI/2-x*sin(PI/x):
for n from 0 to 5 do
 print(Unquoted, "x[".n."] = ".x[n]):
 x[n+1]:=x[n]-f(x[n])/f'(x[n]):
end_for:

x[0] = 1/2
x[1] = 1/4
x[2] = 1/8
x[3] = 1/16
x[4] = 1/32
x[5] = 1/64
```

Es ist $x_n = \frac{1}{2^{n+1}}$ und daher $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{2^{n+1}} = 0$, obwohl das keine Nullstelle der Funktion f ist.

b) Mit dem Startwert $x_0 = 1$ liefert Excel:

n	x_n
0	1.0000000000
1	1.5000000000
2	1.6420421077
3	1.6572450638
4	1.6574002243
5	1.6574002403

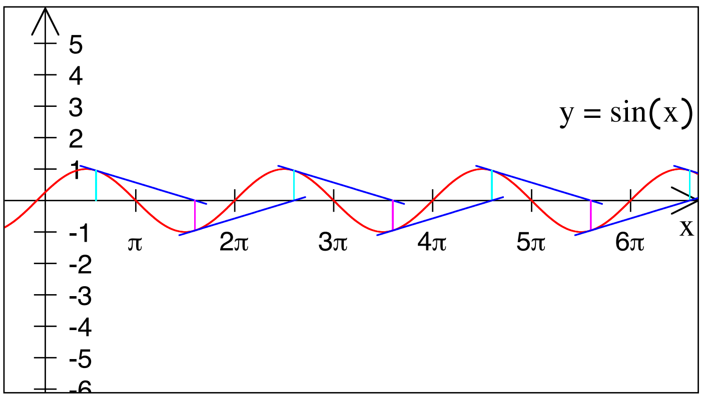
Wir erhalten offensichtlich die erste positive Nullstelle von f.

Literatur

[Horton 2007] Horton, Peter: No Fooling! Newton's Method Can Be Fooled. *Mathematics Magazine*, Vol. 80, No. 5, December 2007, p. 383-387

12 Ornament

Bei welchem Startwert entsteht bei der Sinusfunktion das skizzierte endlose Ornament?

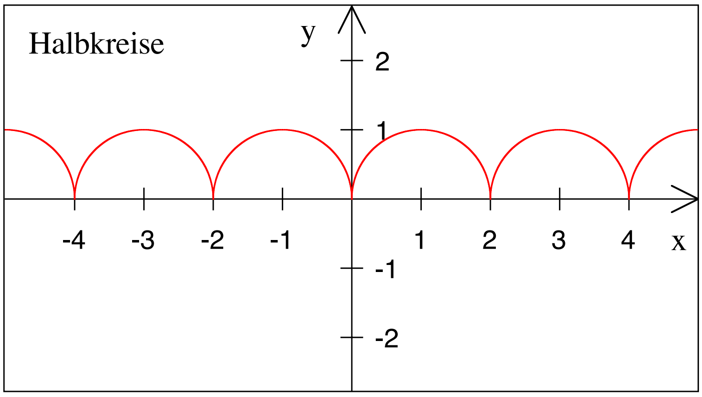


Ornament

Ergebnis

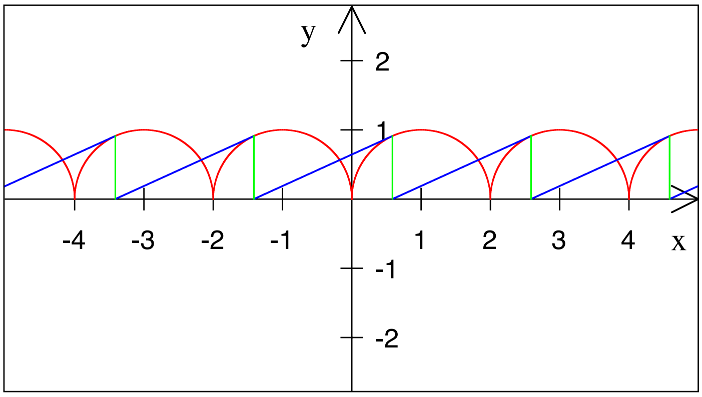
$x_0 = \pi - \arctan(\pi) \approx 1.87897$

13 NEWTON-Zähne in Halbkreisen



Halbkreise

Gesucht ist ein geeigneter Startwert, um dann gemäß dem Newton-Verfahren die Tangenten gemäß Skizze in das Ornament einzufügen.



NEWTON-Zähne

Ergebnis

Zum Beispiel $x_0 = 2 - \sqrt{2} \approx 0.585786$

Lösungsweg

Für den ersten Halbkreis rechts vom Ursprung ist $y = f(x) = \sqrt{1-(x-1)^2} = \sqrt{-x^2 + 2x}$ und $f'(x) = \frac{-2x+2}{2\sqrt{-x^2+2x}} = \frac{-x+1}{\sqrt{-x^2+2x}}$. Damit ist:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{\sqrt{-x_n^2+2x_n}}{\frac{-x_n+1}{\sqrt{-x_n^2+2x_n}}} = x_n - \frac{-x_n^2+2x_n}{-x_n+1} = \frac{-x_n}{-x_n+1}$$

Die “Zahnbedingung” heißt: $x_1 = x_0 - 2$. Somit ist:

$$x_0 - 2 = \frac{-x_0}{-x_0+1}$$

Daraus ergibt sich die quadratische Gleichung $x_0^2 - 4x_0 + 2 = 0$ mit den beiden Lösungen:

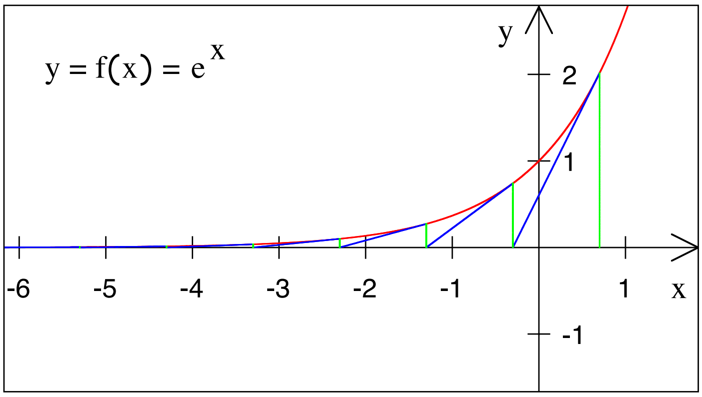
$$x_{0,1} = 2 - \sqrt{2} \text{ und } x_{0,2} = 2 + \sqrt{2}$$

Die Figur bezieht sich auf die erste Lösung. Die zweite Lösung liefert ein an der y-Achse gespiegeltes Sägezahnmuster.

14 Die Exponentialfunktion ist eine schöne

Die Funktion $y = f(x) = \mathrm{e}^x$ hat keine Nullstellen. Was geschieht, wenn mit einem beliebigen Startwert x_0 versucht wird, die Nullstellen nach der NEWTON-Methode zu bestimmen?

Ergebnis



$y = f(x) = \mathrm{e}^x$

Es ist $x_n = x_0 - n$ und $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$.

15 Umgekehrte Proportionalität

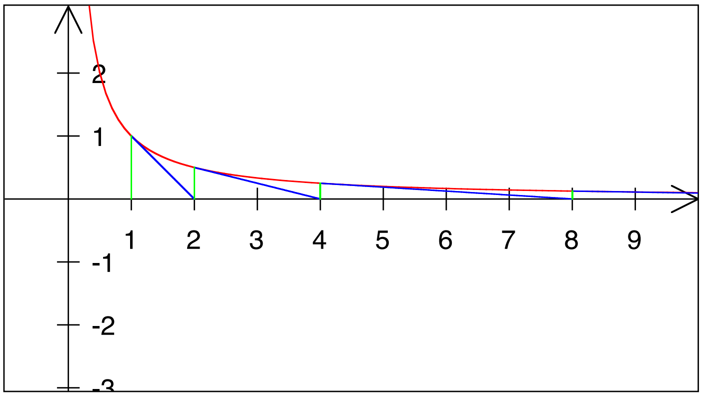
Wir wollen bei der Funktion $y = f(x) = \frac{1}{x}$ (welche natürlich keine Nullstellen hat) die Nullstellen nach dem Verfahren von Newton mit dem Starwert $x_0 = 1$ bestimmen.

Bearbeitung

Es ist $y = f(x) = \frac{1}{x}$ und $y' = f'(x) = -\frac{1}{x^2}$. Daraus ergibt sich die Newton-Rekursion:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{\frac{1}{x_n}}{-\frac{1}{x_n^2}} = 2x_n$$

Wir erhalten, unabhängig vom Startwert, eine Verdoppelungsfolge. Die Figur zeigt die Situation für $x_0 = 1$.



Sägezahnmuster

16 Eine geometrische Folge

Wir wollen bei der Funktion $y = f(x) = \frac{1}{x^a}, a > 0$ (welche natürlich keine Nullstellen hat) die Nullstellen nach dem Verfahren von Newton bestimmen.

Bearbeitung

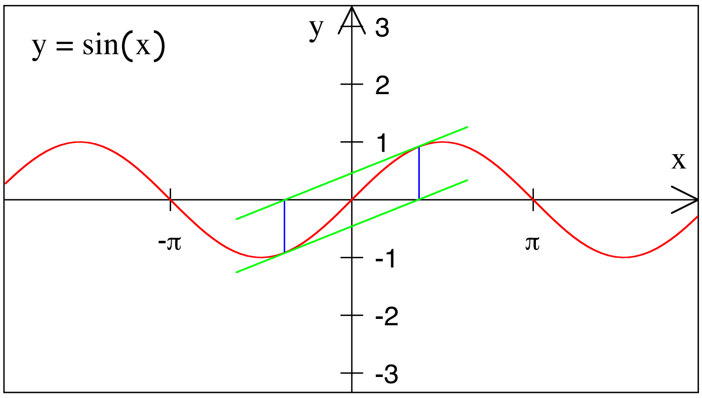
Es ist $y = f(x) = \frac{1}{x^a}$ und $y' = f'(x) = -a\frac{1}{x^{a+1}}$. Daraus ergibt sich die Newton-Rekursion:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{\frac{1}{x_n^a}}{-a\frac{1}{x_n^{a+1}}} = \left(1 + \frac{1}{a}\right)x_n$$

Wir erhalten eine geometrische Folge.

17 Anspruchsvolle Aufgabe

Bei welchem Startwert entsteht bei der Sinusfunktion der skizzierte „Paarlauf"?



Paarlauf

Ergebnis mit Lösungsweg

Zunächst ist $x_{n+1} = x_n - \frac{\sin(x_n)}{\cos(x_n)} = x_n - \tan(x_n)$. Für einen Paarlauf muss, aus Symmetriegründen, $x_1 = -x_0$ gelten, also $-x_0 = x_0 - \tan(x_0)$ oder umgeformt $x_0 = \frac{1}{2}\tan(x_0)$; diese Gleichung muss approximativ mit dem NEWTONschen Verfahren oder mit der Fixpunktmethode gelöst werden. Numerisch ergibt sich $x_0 \approx \pm\ 1.165561185$.

Wegen Rundungsproblemen rückt das Paar immer näher zusammen:

n	x_n
0	1.165561185
1	-1.165561184
2	1.165561179
3	-1.165561152
4	1.165561005
5	-1.165560203
6	1.165555849
7	-1.165532191
8	1.165403638
9	-1.164705423
10	1.160921820
11	-1.140669432
12	1.039050113
13	-0.660863740
14	0.116626106
15	-0.000531662
16	0.000000000
17	0.000000000

18 Wurzeln

a) Berechnen Sie $\sqrt{2}$ nach dem Verfahren von Newton mit dem Startwert $x_0 = 1$.

b) Berechnen Sie $\sqrt{9}$ nach dem Verfahren von Newton mit dem Startwert $x_0 = 1$.

Ergebnis

a) Berechnen Sie $\sqrt{2}$ nach dem Verfahren von Newton mit dem Startwert $x_0 = 1$.

n	x_n
0	1
1	1.5000000000
2	1.4166666667
3	1.4142156863
4	1.4142135624
5	1.4142135624

b) Berechnen Sie $\sqrt{9}$ nach dem Verfahren von Newton mit dem Startwert $x_0 = 1$.

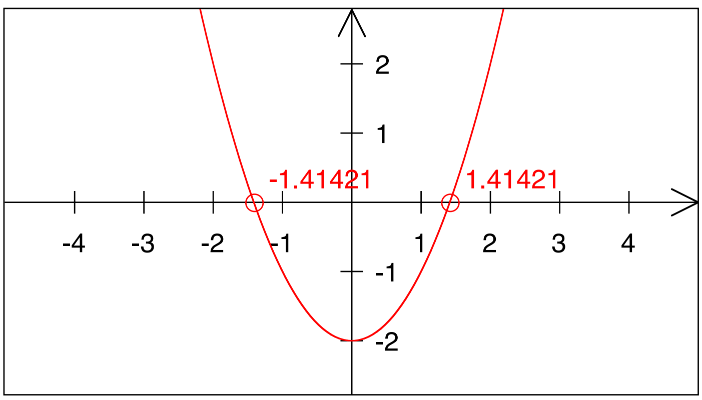
n	x_n
0	1
1	5.0000000000
2	3.4000000000
3	3.0235294118
4	3.0000915541
5	3.0000000014
6	3.0000000000
7	3.0000000000

19 Richtiges Resultat trotz fehlerhafter Rechnung.

Wir verwenden die Rekursionsformel von Newton

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

für die Berechung der Nullstellen der Funktion $f(x) = x^2 - 2$. Die Lösungen sind natürlich $\pm\sqrt{2} \approx \pm 1.414213562$.



$f(x) = x^2 - 2$

Mit dem Startwert $x_0 = 1$ erhalten wir (Maple):

```
restart:
f:=x->x^2-2:
Startwert:=1:
AnzahlSchritte:= 5:
x[0]:=evalf(Startwert);
for n from 0 to AnzahlSchritte-1 do
    x[n+1]:=evalf(x[n]-f(x[n])/D(f)(x[n]));
    end do;
                    x[0] := 1.
                    x[1] := 1.500000000
                    x[2] := 1.416666667
                    x[3] := 1.414215686
                    x[4] := 1.414213562
                    x[5] := 1.414213562
```

Nun machen wir bewusst einen Fehler, indem wir bei der Ableitung einen Faktor $\lambda \neq 1$ einbauen. Dies ergibt die Rekursionsformel:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{\lambda f'(x_n)}$$

Für $\lambda = 1.1$ und dem Startwert $x_0 = 1$ erhalten wir (Maple):

```
restart:
lambda:=1.1;
f:=x->x^2-2:
Startwert:=1:
AnzahlSchritte:= 10:
x[0]:=evalf(Startwert);
for n from 0 to AnzahlSchritte-1 do
    x[n+1]:=evalf(x[n]-f(x[n])/(lambda*D(f)(x[n])));
    end do;
                    lambda := 1.1
                    x[0] := 1.
                    x[1] := 1.454545455
                    x[2] := 1.418388430
                    x[3] := 1.414598681
```

x[4] := 1.414248621

x[5] := 1.414216750

x[6] := 1.414213852

x[7] := 1.414213589

x[8] := 1.414213565

x[9] := 1.414213563

x[10] := 1.414213562

Für $\lambda = 0.9$ und dem Startwert $x_0 = 1$ erhalten wir (Maple):

lambda := 0.9

x[0] := 1.

x[1] := 1.555555556

x[2] := 1.405643739

x[3] := 1.415194792

x[4] := 1.414104915

x[5] := 1.414225639

x[6] := 1.414212221

x[7] := 1.414213711

x[8] := 1.414213546

x[9] := 1.414213564

x[10] := 1.414213562

Wir erhalten, wenn auch etwas später, das „richtige“ Resultat. Warum ist das so?

Bearbeitung

Wir überlegen geometrisch: Statt auf der Tangenten fahren wir auf einer etwas steileren oder flacheren Geraden auf die x-Achse. So kommen wir den Nullstelle auch näher, aber nicht so gut.

Die Sache kann aber in die Hosen gehen. Für $\lambda = 0.5$ und dem Startwert $x_0 = 1$ erhalten wir:

lambda := 0.5

x[0] := 1.

x[1] := 2.000000000

x[2] := 1.000000000

x[3] := 2.000000000

x[4] := 1.000000000

x[5] := 2.000000000

x[6] := 1.000000000

x[7] := 2.000000000

x[8] := 1.000000000

x[9] := 2.000000000

x[10] := 1.000000000

Für $\lambda = 0.1$ und dem Startwert $x_0 = 1$ wird es dramatisch:

lambda := 0.1

x[0] := 1.

x[1] := 6.000000000

x[2] := -22.33333333

x[3] := 88.88557207

x[4] := -355.4297841

x[5] := 1421.691001

x[6] := -5686.756969

x[7] := 22747.02611

x[8] := -90988.10399

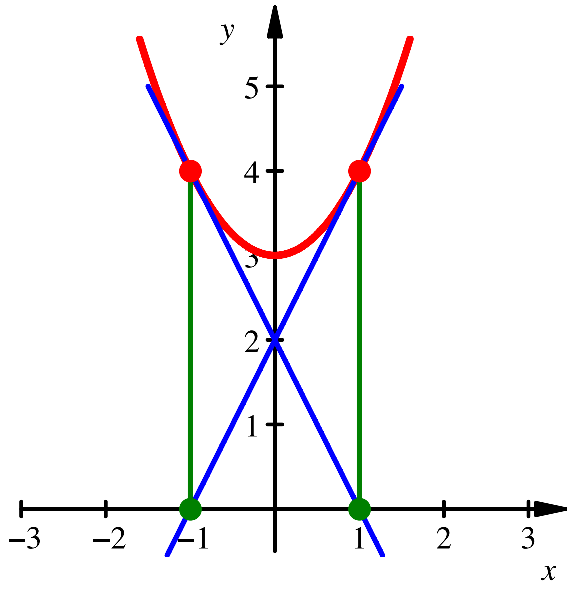
x[9] := $3.639524158 \cdot 10^5$

x[10] := $-1.455809663 \cdot 10^6$

20 Newton komplex

Diese Aufgabe benötigt Kenntnisse der komplexen Zahlen.

Wir haben in der Vorlesung gesehen, dass die Anwendung des Newton-Verfahrens auf die Funktion $y = f(x) = x^2 + 3$ nicht zielführend ist; die Funktion hat je keine (reellen) Nullstellen. Für den Startwert $x_0 = 1$ erhalten wir sogar ein ewiges Hin und Her zwischen 1 und -1.



Hin und Her

Berechung mit MuPAD:

```
f:=x->x^2+3:
x[0]:=1:
for n from 0 to 6 do
   x[n+1]:=x[n]-f(x[n])/f'(x[n])
end_for:
for n from 0 to 7 do
   print(Unquoted, "   x[".n."] = ".x[n])
end_for:
```

```
   x[0] = 1
   x[1] = -1
   x[2] = 1
   x[3] = -1
   x[4] = 1
   x[5] = -1
   x[6] = 1
   x[7] = -1
```

Wie ist es nun mit komplexen Startwerten?

Bearbeitung

Im Komplexen hat die Funktion $y = f(x) = x^2 + 3$ die Nullstellen $\pm\mathrm{i}\sqrt{3}$.

Aus $y = f(x) = x^2 + 3$ ergibt sich die Newton-Rekursion:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^3+3}{2x_n}$$

$$\boxed{x_{n+1} = \frac{x_n^2-3}{2x_n}}$$

Für den Startwert $x_0 = \mathrm{i}$ ergibt sich aber:

$$x_0 = \mathrm{i}$$
$$x_1 = \frac{-1-3}{2\mathrm{i}} = \frac{-4}{2\mathrm{i}} = \frac{-2}{\mathrm{i}}\,\frac{\mathrm{i}}{\mathrm{i}} = \frac{-2\mathrm{i}}{-1} = 2\mathrm{i}$$
$$x_2 = \frac{-4-3}{4\mathrm{i}} = \frac{7}{4}\mathrm{i} = 1.75\mathrm{i}$$

Die Sache lässt sich gut an. Weitere Berechung mit MuPAD:

```
f:=x->x^2+3:
x[0]:=1.0*I:
for n from 0 to 5 do
   x[n+1]:=x[n]-f(x[n])/f'(x[n])
end_for:
for n from 0 to 6 do
   print(Unquoted, "   x[".n."] = ".x[n])
end_for:

   x[0] = 1.0*I
   x[1] = 2.0*I
   x[2] = 1.75*I
   x[3] = 1.732142857*I
   x[4] = 1.73205081*I
   x[5] = 1.732050808*I
   x[6] = 1.732050808*I
```

Das funktioniert auch mit anderen Startwerten. Für $x_0 = 1 + \mathrm{i}$ erhalten wir:

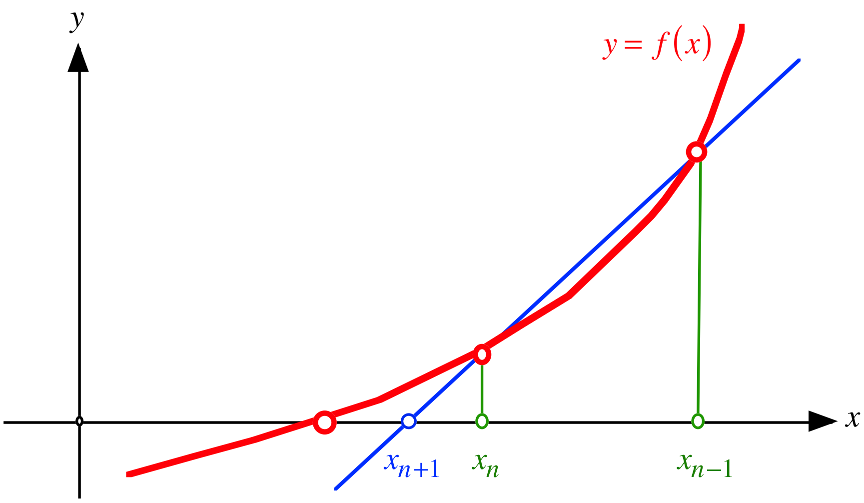
```
f:=x->x^2+3:
x[0]:=1.0+I:
for n from 0 to 5 do
   x[n+1]:=x[n]-f(x[n])/f'(x[n])
end_for:
for n from 0 to 6 do
   print(Unquoted, "   x[".n."] = ".x[n])
end_for:

   x[0] = 1.0 + 1.0*I
   x[1] = - 0.25 + 1.25*I
   x[2] = 0.1057692308 + 1.778846154*I
   x[3] = 0.002922465498 + 1.729695598*I
   x[4] = - 0.000003977850612 + 1.732049935*I
   x[5] = 2.002937947e-12 + 1.732050808*I
   x[6] = 1.061519962e-19 + 1.732050808*I
```

Der Realteil geht gegen Null.

21 Sekante statt Tangente

Wie lässt sich dass Newton-Verfahren zur Bestimmung einer Nullstelle einer Funktion $y = f(x)$ auf die durch die Abbildung angedeutete Art abändern?



Sekantenverfahren

Bearbeitung

Es ist:

$$\frac{f(x_n)}{x_n - x_{n+1}} = \frac{f(x_{n-1})}{x_{n-1} - x_{n+1}}$$

Daraus ergibt sich:

$$\boxed{x_{n+1} = \frac{x_n f(x_{n-1}) - x_{n-1} f(x_n)}{f(x_{n-1}) - f(x_n)}}$$

Das ist eine Rekursionsformel, welche auf die beiden vorhergehenden Werte zurückgreift. Wir brauchen daher zwei verschiedene Startwerte.

Beispiel:

Die Funktion $y = f(x) = x^2 - 2$ hat die beiden Nullstellen $\pm\sqrt{2} \approx \pm 1.41421356237$. Wir verwenden die Rekursionsformel mit den Startwerten $x_0 = 1$ und $x_1 = 4$.

MuPAD liefert:

```
f:=x->x^2-2:
x[0]:=1.0: x[1]:=2.0:
for n from 1 to 6 do
   x[n+1]:=(x[n]*f(x[n-1])-x[n-1]*f(x[n]))/(f(x[n-1])-f(x[n]))
end_for:
for n from 0 to 7 do
   print(Unquoted, "   x[".n."] = ".x[n])
end_for:

   x[0] = 1.0
   x[1] = 2.0
   x[2] = 1.333333333
   x[3] = 1.4
   x[4] = 1.414634146
   x[5] = 1.414211438
   x[6] = 1.414213562
```

```
   x[7] = 1.414213562
```

22 Bisektionsverfahren

Gesucht ist eine Nullstelle der Funktion $y = f(x)$.

Die Idee ist, mit zwei Startwerten zu beginnen, deren Funktionswerte unterschiedliche Vorzeichen haben, also $f(x_0)f(x_1) < 0$. Dann gehen wir in die Mitte zwischen diesen beiden Startwerten und fahren dann mit demjenigen der beiden Halbintervalle weiter, an dessen Enden die Funktionswerte verschiedene Vorzeichen haben.

Bearbeiten

Wir arbeiten mit der Funktion $y = f(x) = x^2 - 2$, welche die Nullstellen $\pm\sqrt{2} \approx \pm 1.41421356237$ hat, und verwenden die Startwerte $x_0 = 1$ und $x_1 = 2$

Die Idee führt dann etwa zu folgendem Programm:

```
f:=x->x^2-2:
x[0]:=1.0: x[1]:=2.0:
if f(x[0])*f(x[1])<0 then
   print(Unquoted, "Startwerte okay")
   else print(Unquoted, "Startwerte  nicht okay")
end_if:
a:=x[0]: b:=x[1]:
for n from 1 to 32 do
   x[n+1]:=1/2*(a+b):
   b:=x[n+1]:
   if f(x[n+1])*f(x[n])<0 then
      a:=x[n]
   end_if:
end_for:
for n from 0 to 9 do
   print(Unquoted, "   x[ ".n."] = ".x[n]):
end_for:
for n from 10 to 33 do
   print(Unquoted, "   x[".n."] = ".x[n]):
end_for:
```

```
Startwerte okay
   x[ 0] = 1.0
   x[ 1] = 2.0
   x[ 2] = 1.5
   x[ 3] = 1.25
   x[ 4] = 1.375
   x[ 5] = 1.4375
   x[ 6] = 1.40625
   x[ 7] = 1.421875
   x[ 8] = 1.4140625
   x[ 9] = 1.41796875
   x[10] = 1.416015625
   x[11] = 1.415039062
   x[12] = 1.414550781
```

```
x[13] = 1.414306641
x[14] = 1.41418457
x[15] = 1.414245605
x[16] = 1.414215088
x[17] = 1.414199829
x[18] = 1.414207458
x[19] = 1.414211273
x[20] = 1.414213181
x[21] = 1.414214134
x[22] = 1.414213657
x[23] = 1.414213419
x[24] = 1.414213538
x[25] = 1.414213598
x[26] = 1.414213568
x[27] = 1.414213553
x[28] = 1.414213561
x[29] = 1.414213564
x[30] = 1.414213562
x[31] = 1.414213561
x[32] = 1.414213562
x[33] = 1.414213562
```

Wir sehen, dass die Sache relativ langsam konvergiert. Pro Rechenschritt erhalten wir eine zusätzliche Dualstelle. Für die Umrechung von x Dualstellen in y Dezimalstellen gilt die Faustformel:

$$2^x \approx 10^y$$

$$y \approx x \frac{\ln(2)}{\ln(10)} \approx 0.3x$$

Pro Rechenschritt erhalten wir also etwa 0.3 Dezimalstellen.