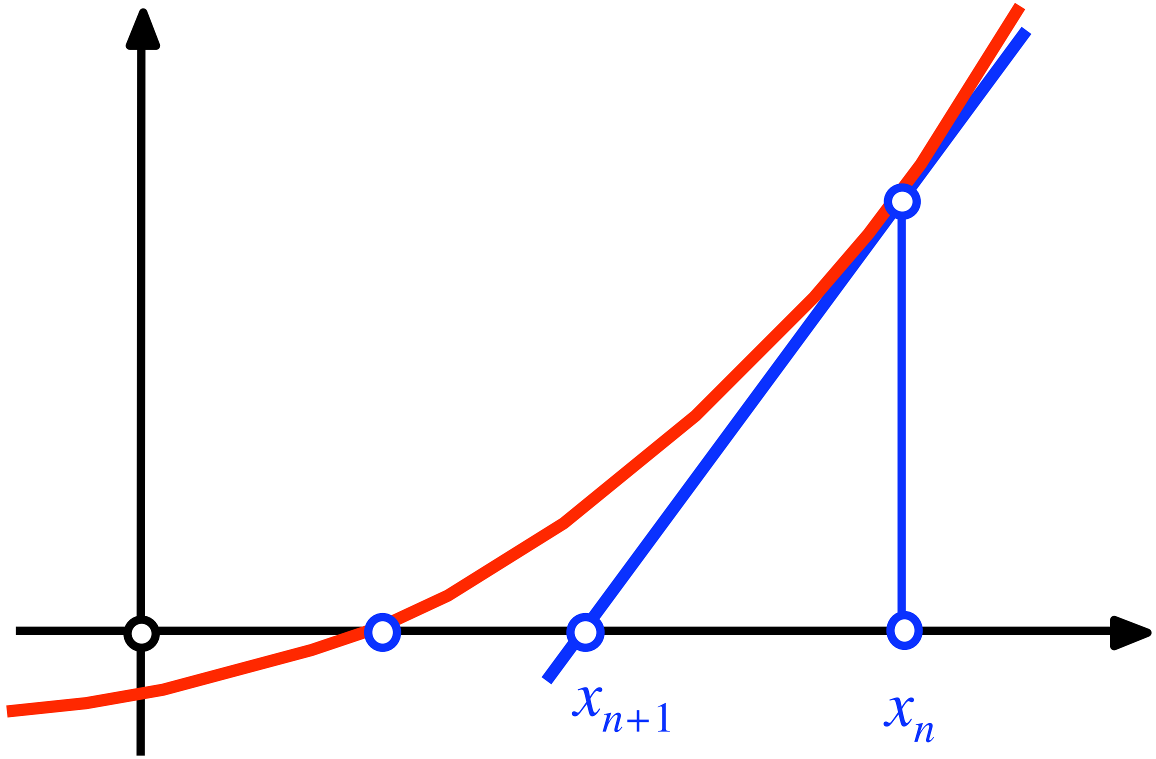


Modul 106

Nullstellen. Verfahren von Newton-Raphson

null

nuller

am nullesten

Gleichung: $\frac{1}{10}x^3 - \frac{1}{5}x^2 - \frac{11}{10}x + \frac{6}{5} = 0$

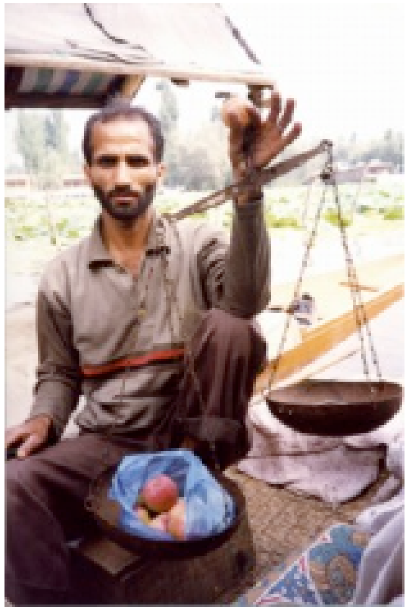
gleich

Funktion: $y = f(x) = \frac{1}{10}x^3 - \frac{1}{5}x^2 - \frac{11}{10}x + \frac{6}{5}$

Funktion

Gleichung: $\frac{1}{10}x^3 - \frac{1}{5}x^2 - \frac{11}{10}x + \frac{6}{5} = 0$

gleich



Gleichung: $\frac{1}{10}x^3 - \frac{1}{5}x^2 - \frac{11}{10}x + \frac{6}{5} = 0$

gleich

Funktion: $y = f(x) = \frac{1}{10}x^3 - \frac{1}{5}x^2 - \frac{11}{10}x + \frac{6}{5}$

Eine Gleichung kann man „lösen“ (oder auch nicht).

```
> Gleichung:=1/10*(x^3-2*x^2-11*x+12)=0;
```

$$Gleichung := \frac{1}{10}x^3 - \frac{1}{5}x^2 - \frac{11}{10}x + \frac{6}{5} = 0$$

```
> Loesungsmenge:={solve(Gleichung, x)};
```

$$Loesungsmenge := \{1, -3, 4\}$$

Nicht alle Gleichungen können gelöst werden.

Niels Henrik Abel
1802 - 1829

Evariste Galois
1811 - 1832

Nicht alle Gleichungen können gelöst werden.

Niels Henrik Abel
1802 - 1829

Abel bewies, dass
die allgemeine Gleichung
fünften oder höheren Grades
nicht gelöst werden kann.

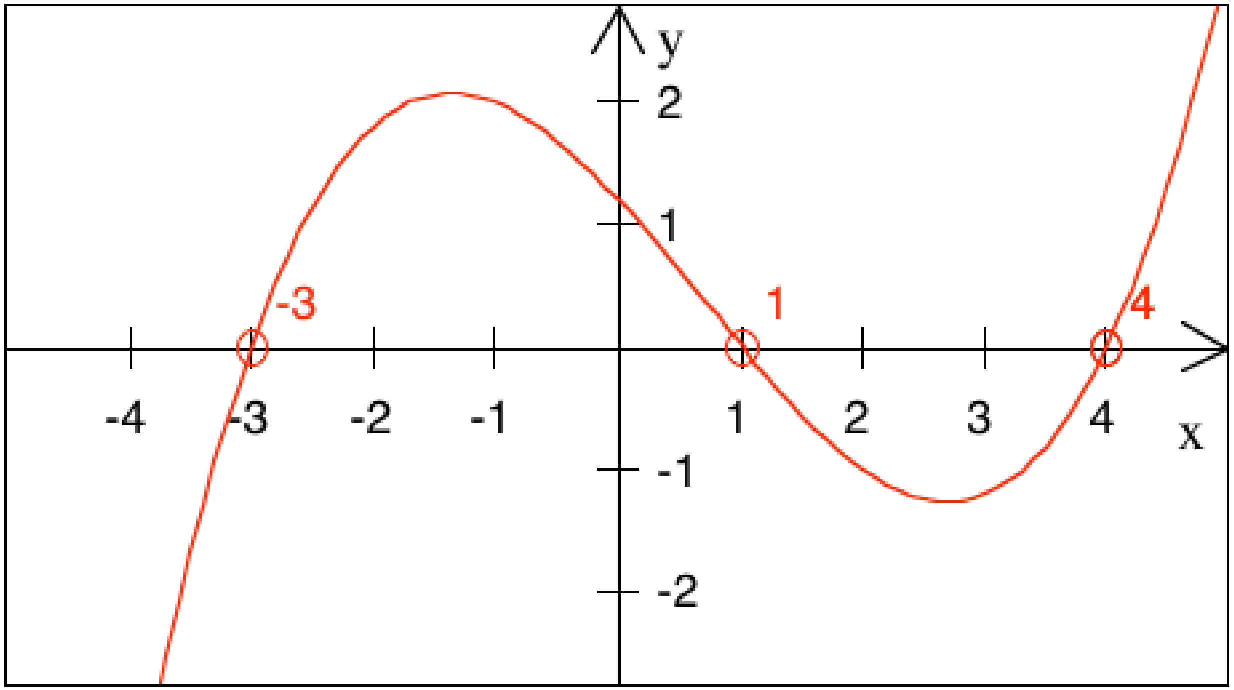
Nicht alle Gleichungen können gelöst werden.

Galois gab an, unter
welchen Bedingungen
eine Gleichung höheren
Grades gelöst werden kann.
(Gruppentheorie)

Evariste Galois
1811 - 1832

Nullstellen einer Funktion

$$y = f(x) = \frac{1}{10}x^3 - \frac{1}{5}x^2 - \frac{11}{10}x + \frac{6}{5}$$



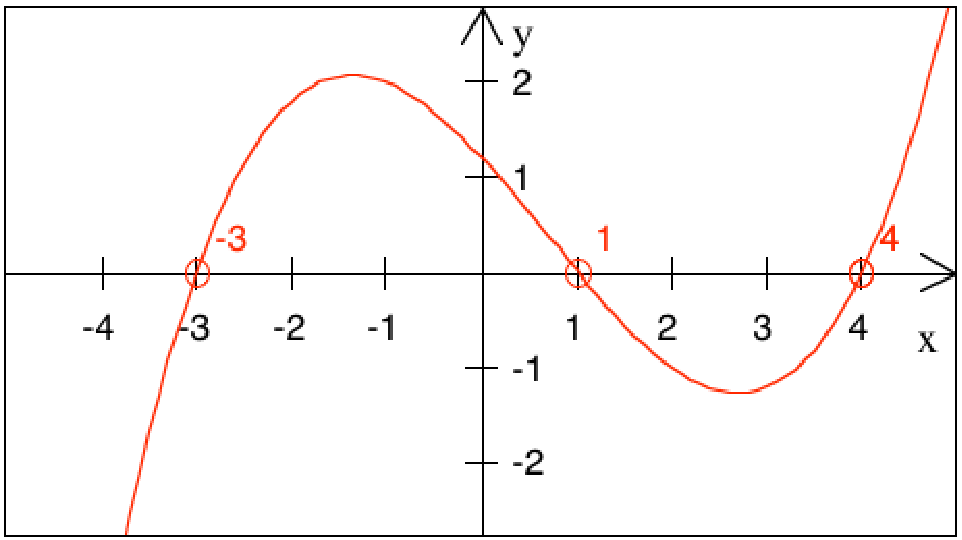
> Gleichung:=1/10*(x^3-2*x^2-11*x+12)=0;

$$Gleichung := \frac{1}{10}x^3 - \frac{1}{5}x^2 - \frac{11}{10}x + \frac{6}{5} = 0$$

> Loesungsmenge:={solve(Gleichung, x)};

$$Loesungsmenge := \{1, -3, 4\}$$

$$y = f(x) = \frac{1}{10}x^3 - \frac{1}{5}x^2 - \frac{11}{10}x + \frac{6}{5}$$



Link:

Die Nullstellen der Funktion

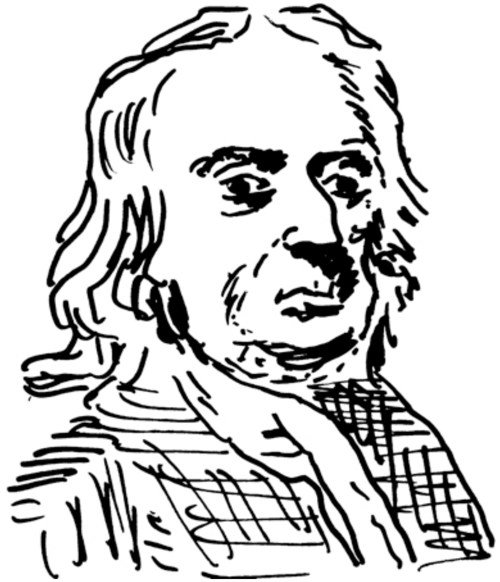
$$y = f(x) = \frac{1}{10}x^3 - \frac{1}{5}x^2 - \frac{11}{10}x + \frac{6}{5}$$

sind die Lösungen der Gleichung

$$\frac{1}{10}x^3 - \frac{1}{5}x^2 - \frac{11}{10}x + \frac{6}{5} = 0$$

Idee von Newton und Raphson:

Nullstellen bestimmen
statt Gleichungen lösen.



Sir Isaac Newton
1643 - 1727

So Null
wie möglich

Formal: Startwert x_0

Falls $f(x_0) = 0$ Schwein gehabt. Und sonst?

$$\underbrace{f(x)}_{\substack{\text{sollte}\\ \text{Null}\\ \text{werden}}} \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

$$\underset{\substack{\uparrow\\ \text{Wunsch}}}{0} \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{Wunsch}}}{0} \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{Wunsch}}}{0} \approx f\left(x_0\right) + f'\left(x_0\right)\left(x - x_0\right)$$

Nach x auflösen:

$$f'\left(x_0\right)\left(x - x_0\right) \approx -f\left(x_0\right)$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{Wunsch}}}{0} \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

Nach x auflösen:

$$f'(x_0)(x - x_0) \approx -f(x_0)$$

$$x - x_0 \approx -\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

Problem, falls

$f'(x_0) = 0$

$$\underset{\substack{\uparrow\\ \text{Wunsch}}}{0} \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

Nach x auflösen:

$$f'(x_0)(x - x_0) \approx -f(x_0)$$

$$x - x_0 \approx -\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

$$x \approx x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

$$\underset{\substack{\uparrow\\ \text{Wunsch}}}{0} \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

Nach x auflösen:

$$f'(x_0)(x - x_0) \approx -f(x_0)$$

$$x - x_0 \approx -\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

$$x \approx x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

x ist nicht genau die Nullstelle, aber besser als x_0

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \qquad x_1 \text{ ist besser als } x_0$$

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \qquad x_1 \text{ ist besser als } x_0$$

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} \qquad x_2 \text{ ist besser als } x_1$$

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \qquad x_1 \text{ ist besser als } x_0$$

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} \qquad x_2 \text{ ist besser als } x_1$$

und so weiter, und so fort:

$$\boxed{x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}}$$

Hoffnung: $\lim\limits_{n \to \infty} x_n =$ exakte Nullstelle

Beispiel:

$$y = f(x) = \frac{1}{10}x^3 - \frac{1}{5}x^2 - \frac{11}{10}x + \frac{6}{5}$$

$$f'(x) = \frac{3}{10}x^2 - \frac{2}{5}x - \frac{11}{10}$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{\frac{1}{10}x_n^{\ 3} - \frac{1}{5}x_n^{\ 2} - \frac{11}{10}x_n + \frac{6}{5}}{\frac{3}{10}x_n^{\ 2} - \frac{2}{5}x_n - \frac{11}{10}} = x_n - \frac{x_n^{\ 3} - 2x_n^{\ 2} - 11x_n + 12}{3x_n^{\ 2} - 4x_n - 11}$$

$$\boxed{x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^{\ 3} - 2x_n^{\ 2} - 11x_n + 12}{3x_n^{\ 2} - 4x_n - 11}}$$

Demo Excel

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n{}^3 - 2x_n{}^2 - 11x_n + 12}{3x_n{}^2 - 4x_n - 11}$$

Excel:

n	x_n
0	0.000000000
1	1.090909091
2	0.999171816
3	0.999999943
4	1.000000000
5	1.000000000
6	1.000000000

Startwert 0

Nullstelle 1

Excel:

n	x_n
0	100.000000000
1	66.916354050
2	44.874223872
3	30.199802919
4	20.447101511
5	13.990145006
6	9.751738567
7	7.023554368
8	5.347154852
9	4.431522981
10	4.067005333
11	4.002035416
12	4.000001970
13	4.000000000
14	4.000000000

Startwert 100

Nullstelle 4

n	x_n
0	0.000000000
1	1.090909091
2	0.999171816
3	0.999999943
4	1.000000000
5	1.000000000
6	1.000000000

n	x_n
0	100.000000000
1	66.916354050
2	44.874223872
3	30.199802919
4	20.447101511
5	13.990145006
6	9.751738567
7	7.023554368
8	5.347154852
9	4.431522981
10	4.067005333
11	4.002035416
12	4.000001970
13	4.000000000
14	4.000000000

Welcher Startwert
führt zu
welcher Nullstelle?

Vorgehen

1. In der Gleichung alles nach links bringen: dadamdadam = 0

2. Linken Teil als Funktionsterm auffassen: $f(x) = 0$

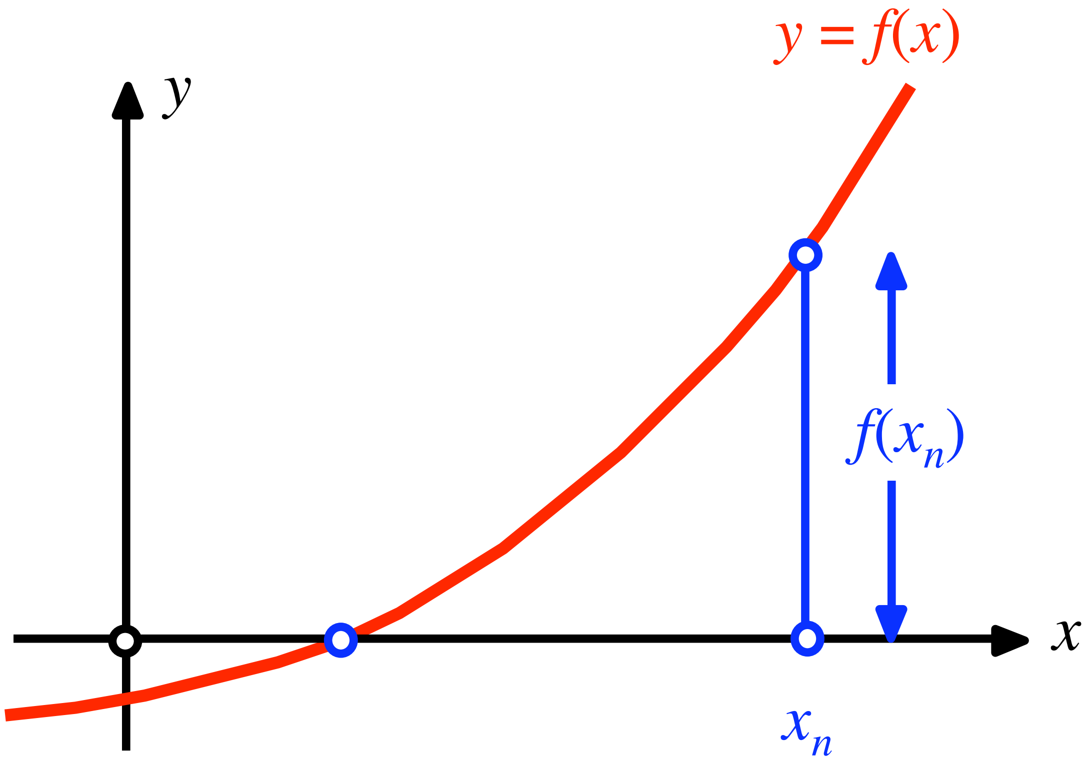
3. Startwert x_0 wählen

4. Rekursionsformel anwenden:

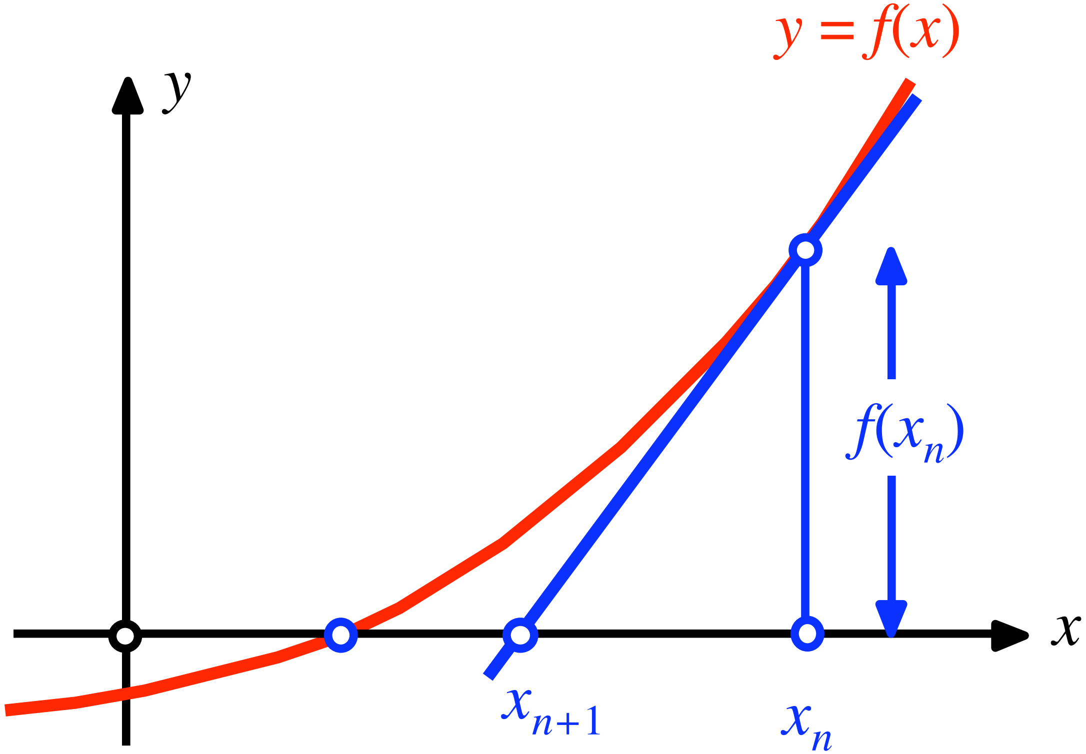
$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

5. Gibt es noch andere Lösungen?

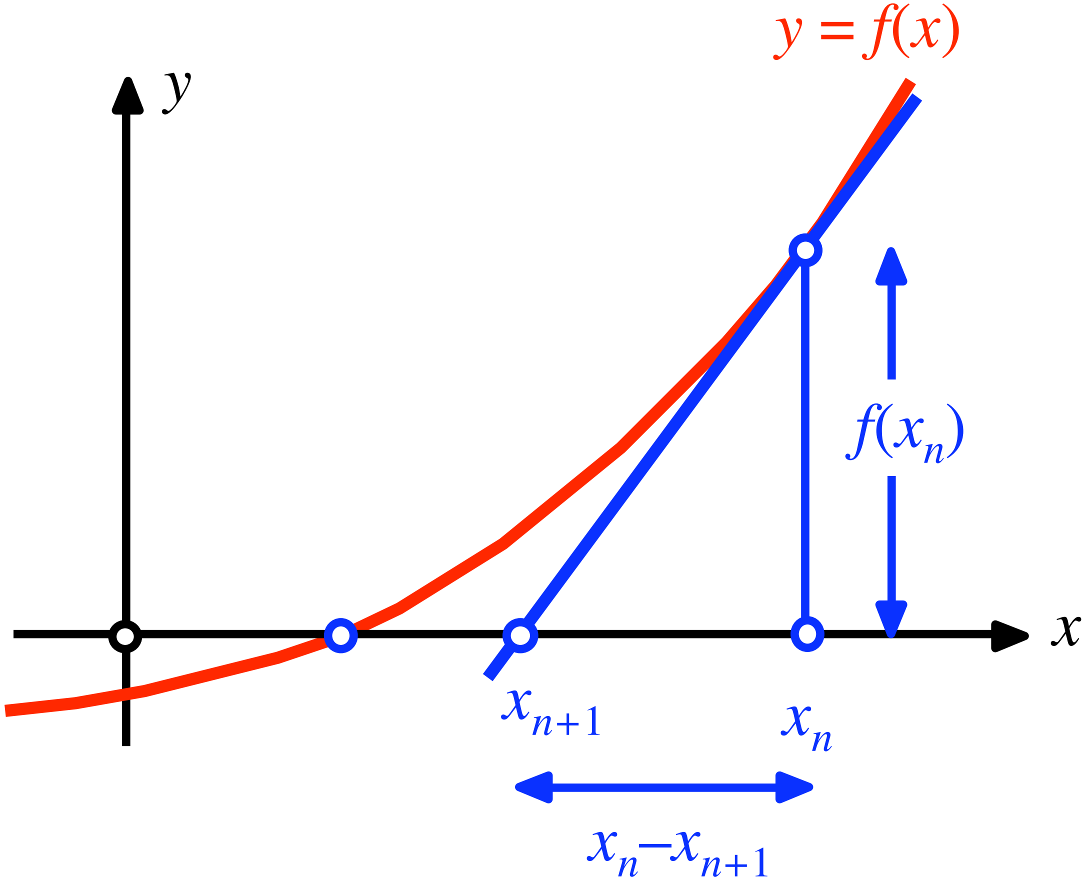
Geometrischer Zugang



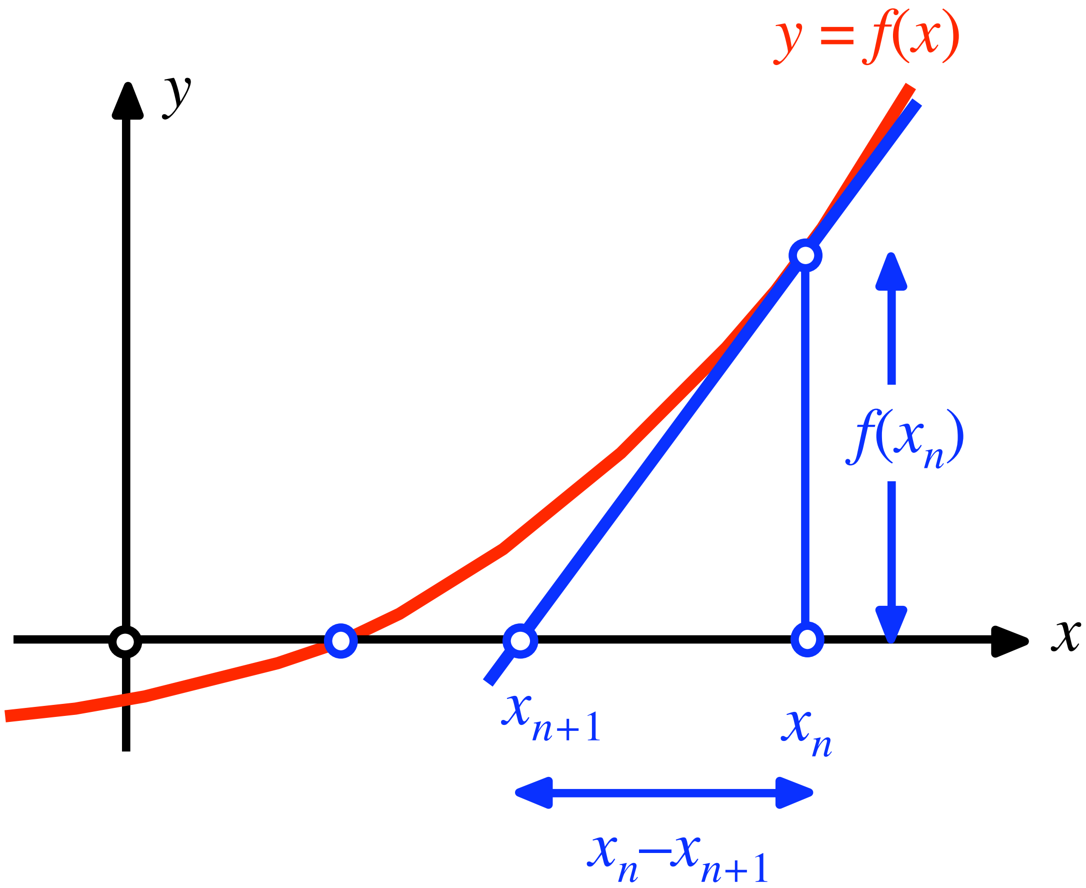
Geometrischer Zugang



Geometrischer Zugang



Geometrischer Zugang



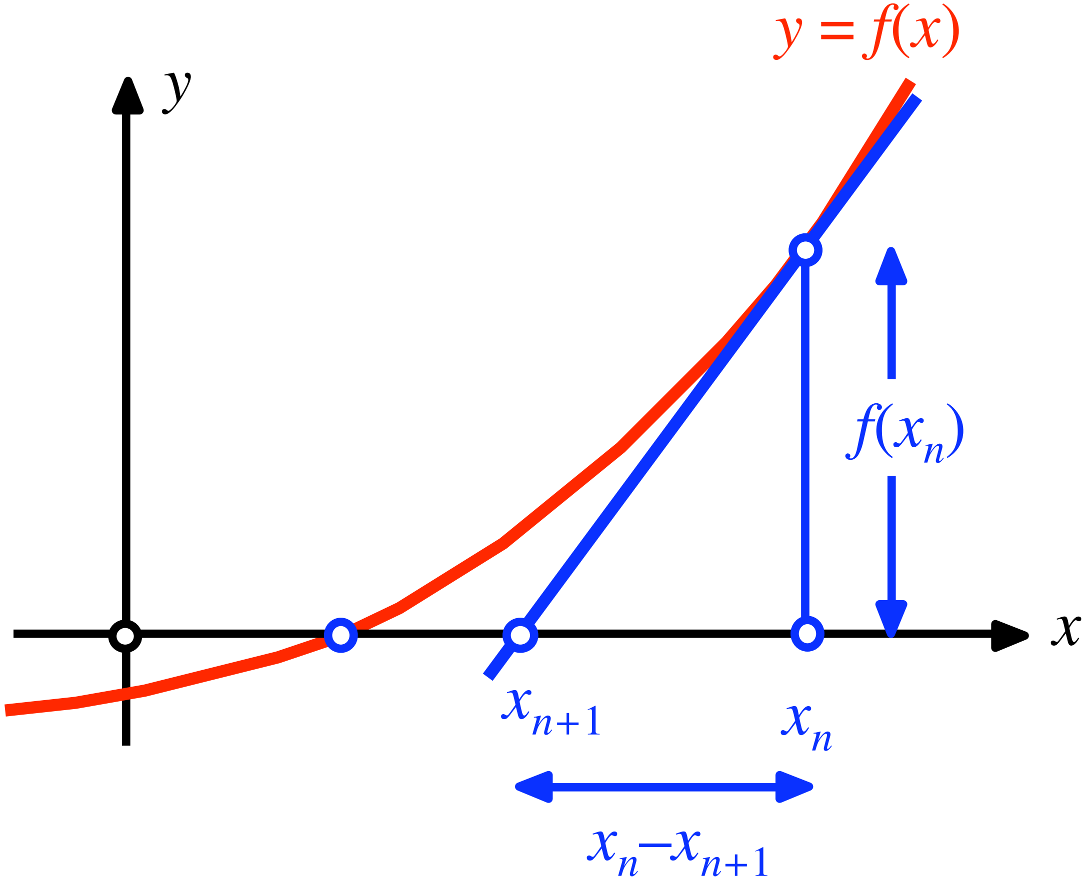
Tangentensteigung:

$$f'(x_n) = \frac{f(x_n)}{x_n - x_{n+1}}$$

einerseits

andererseits

Geometrischer Zugang

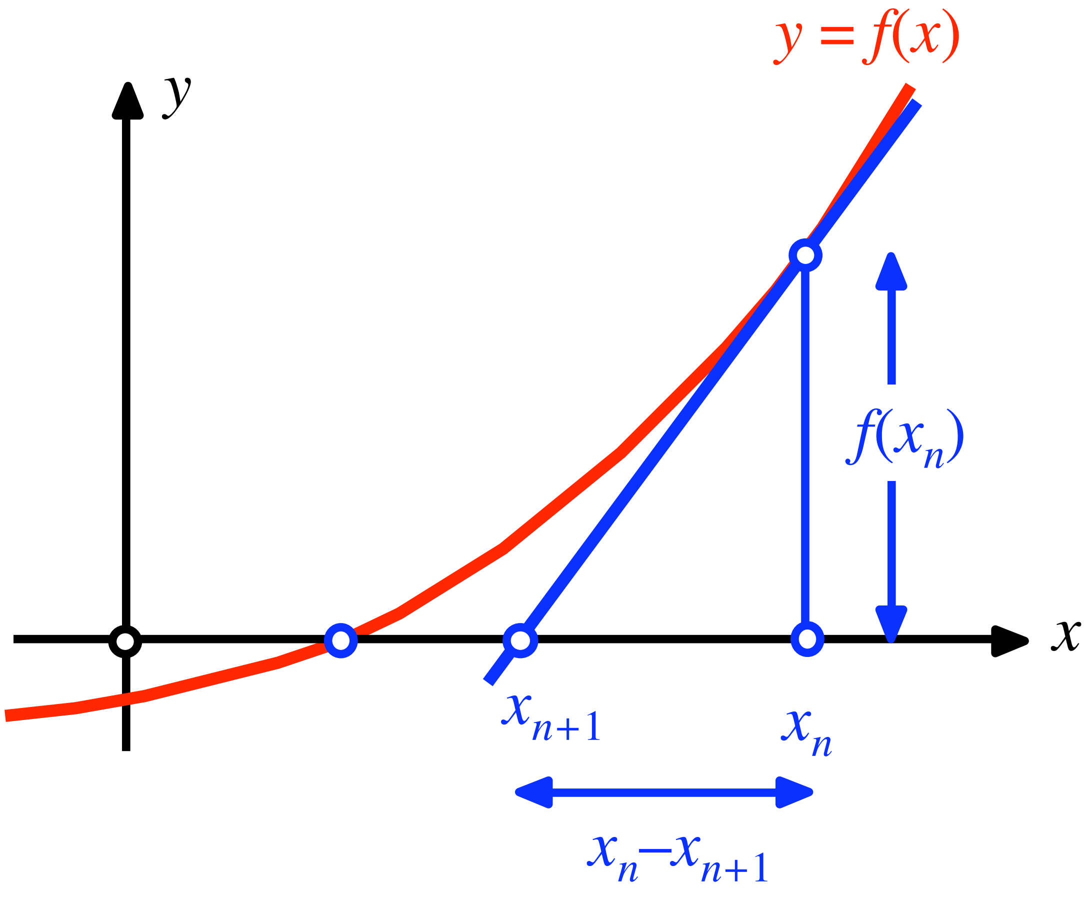


Tangentensteigung:

$$f'(x_n) = \frac{f(x_n)}{x_n - x_{n+1}}$$

$$x_n - x_{n+1} = \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Geometrischer Zugang



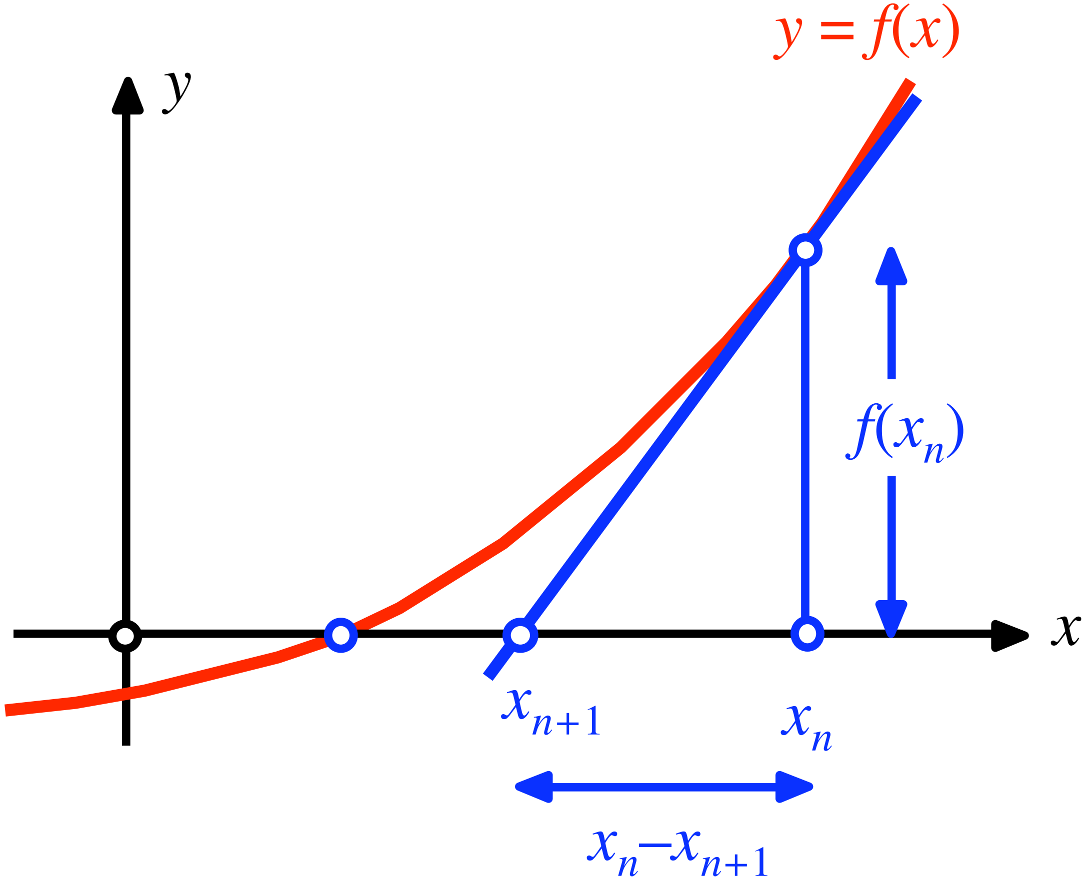
Tangentensteigung:

$$f'(x_n) = \frac{f(x_n)}{x_n - x_{n+1}}$$

$$x_n - x_{n+1} = \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

$$-x_{n+1} = -x_n + \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Geometrischer Zugang



Tangentensteigung:

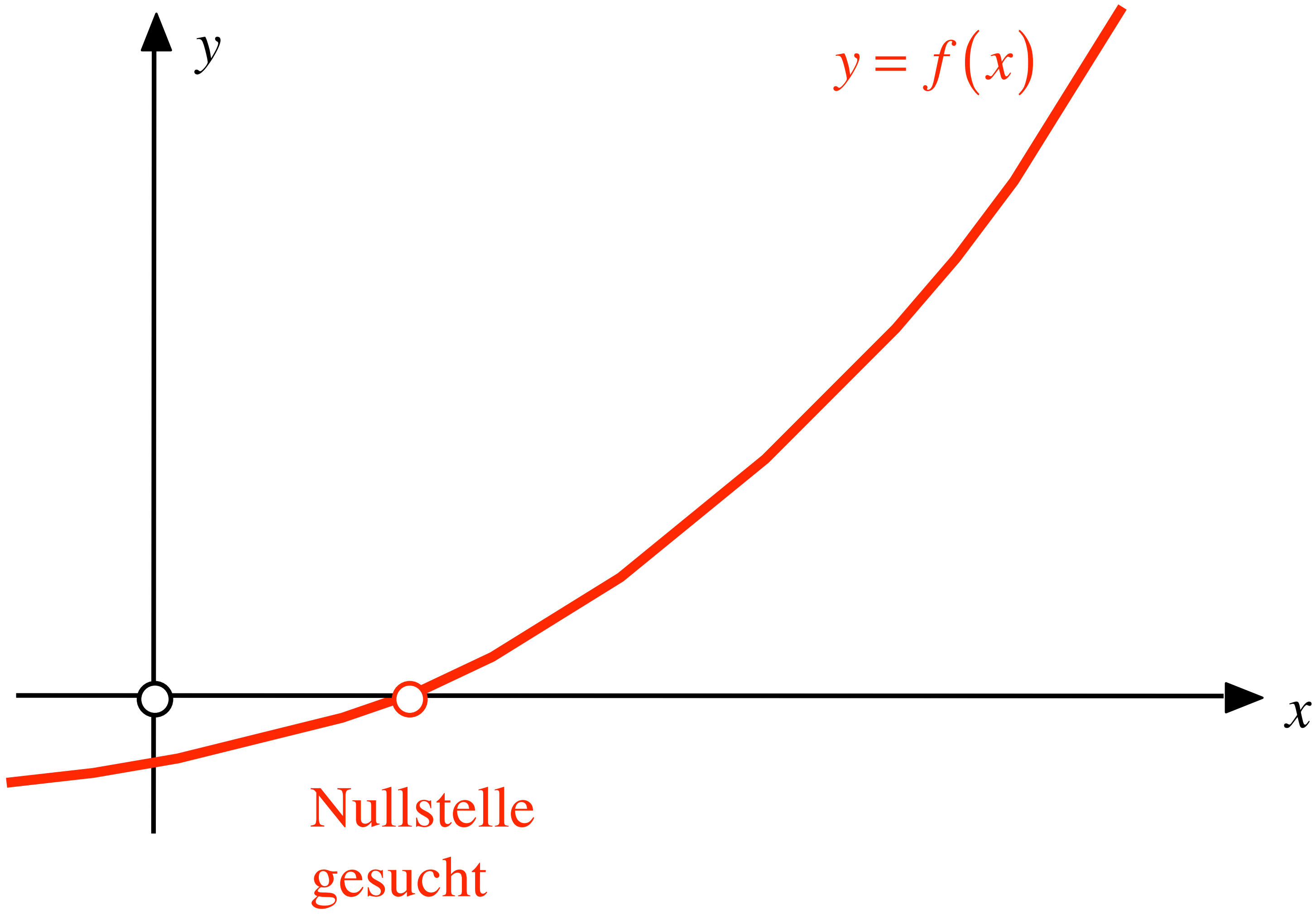
$$f'(x_n) = \frac{f(x_n)}{x_n - x_{n+1}}$$

$$x_n - x_{n+1} = \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

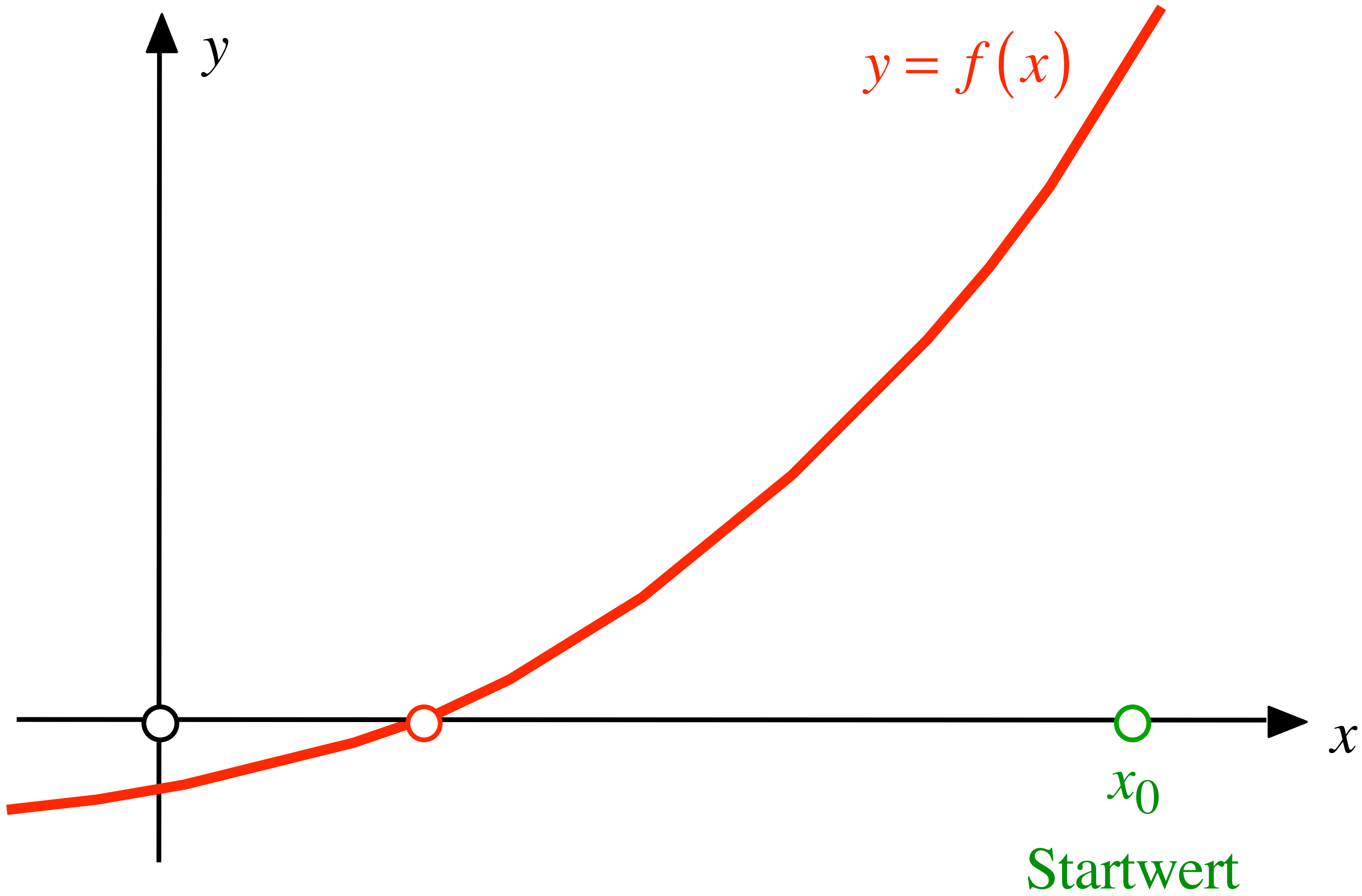
$$-x_{n+1} = -x_n + \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

$$\boxed{x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}}$$

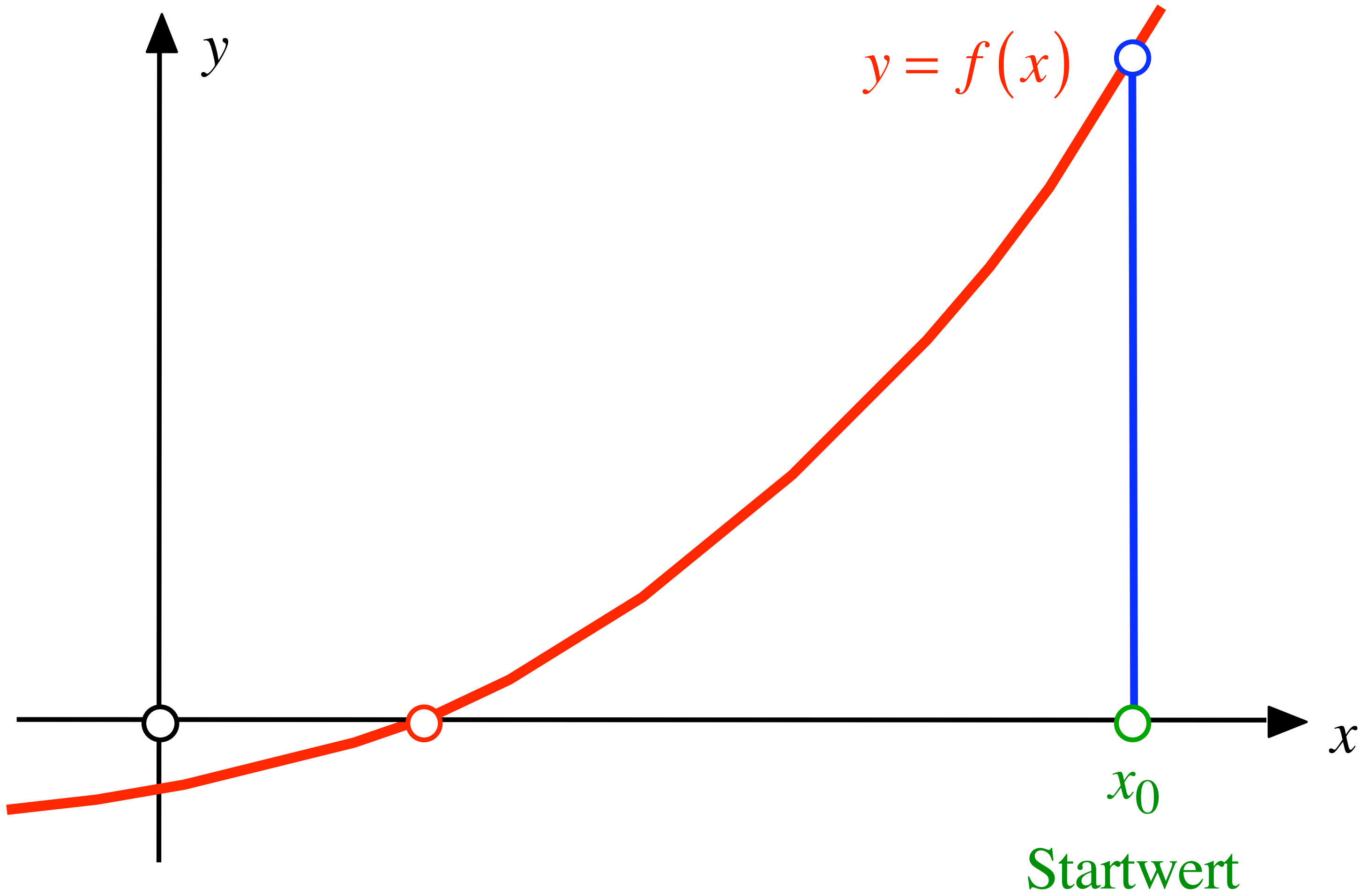
Geometrischer Zugang



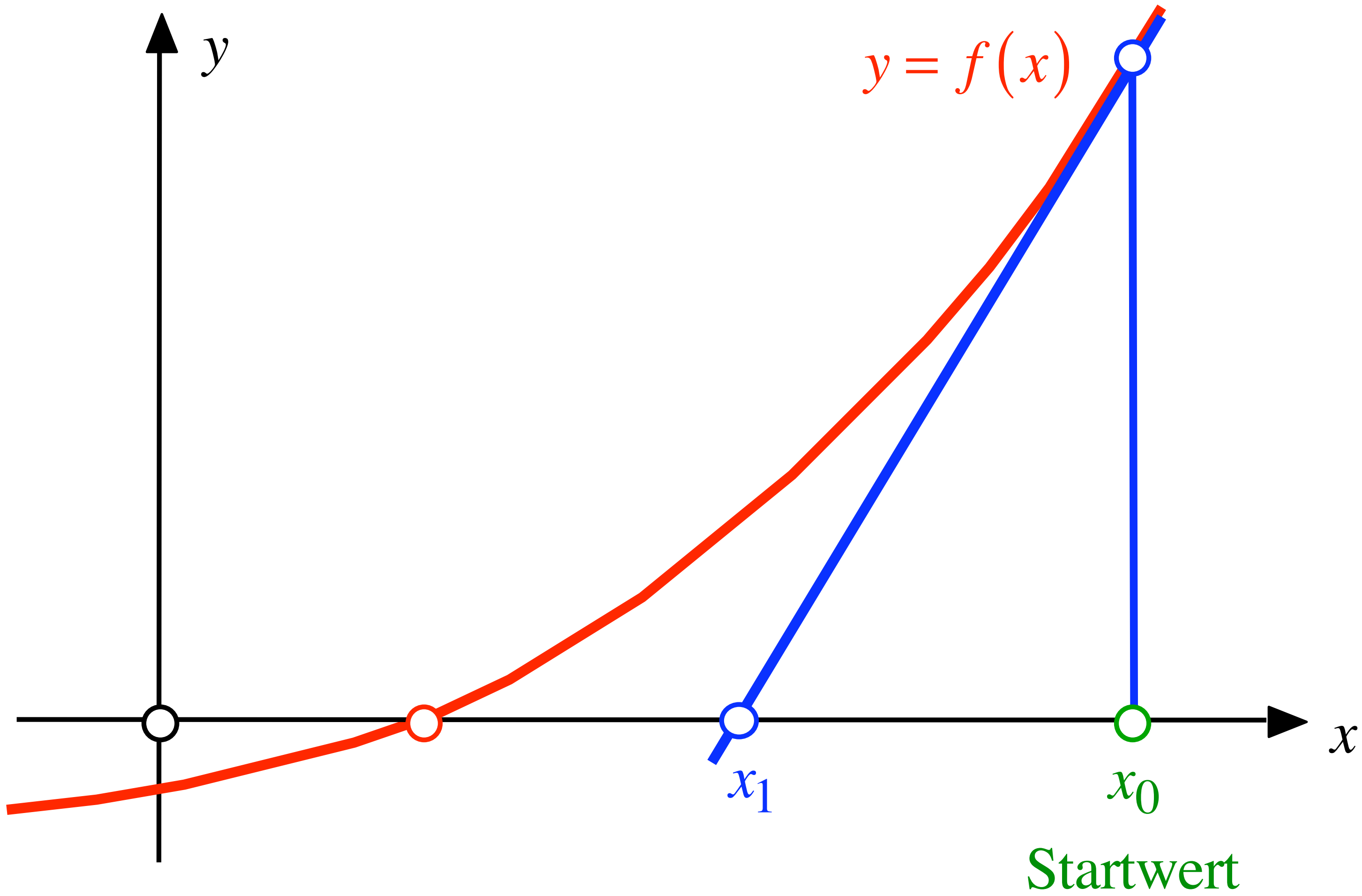
Geometrischer Zugang



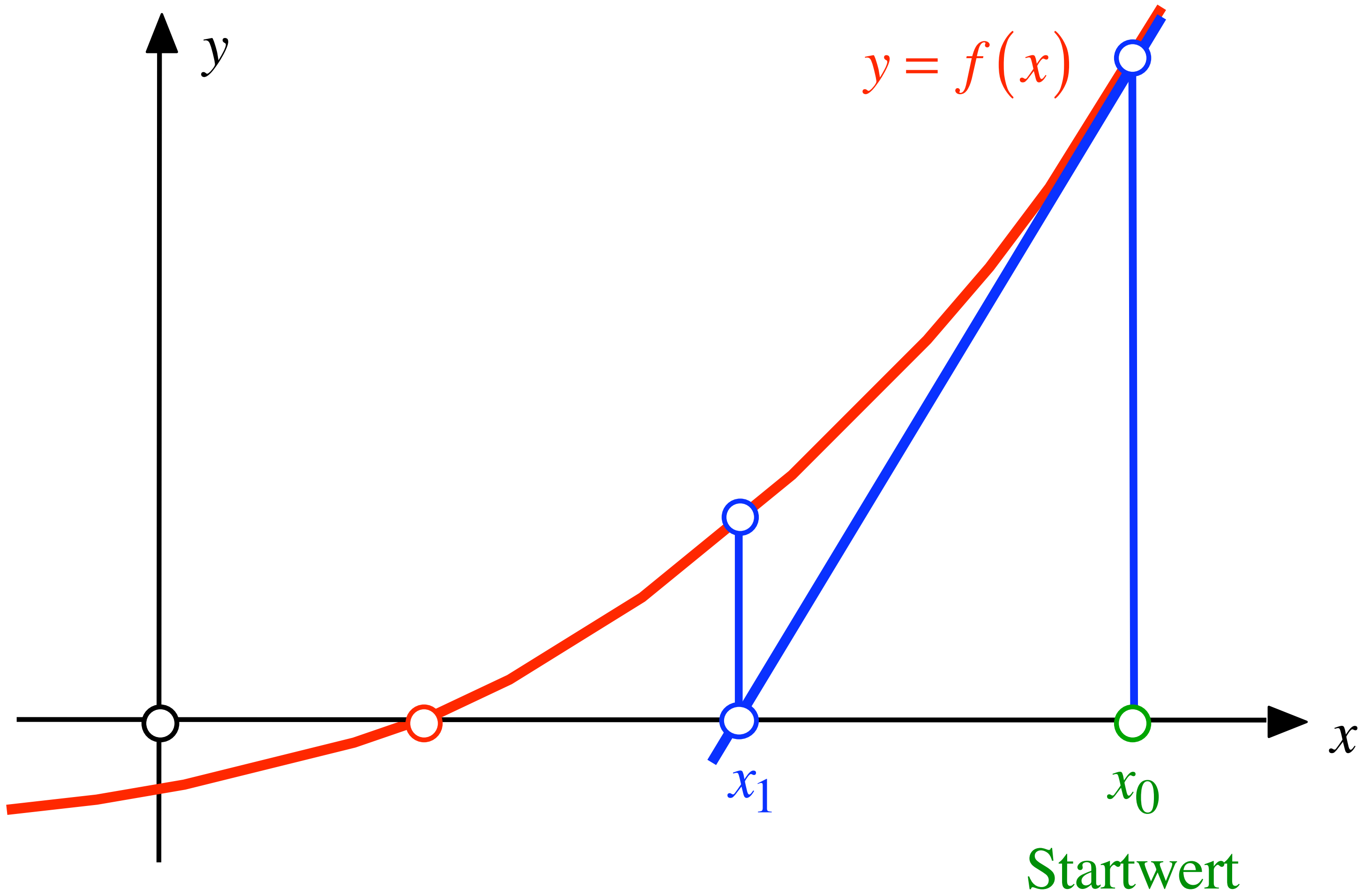
Geometrischer Zugang



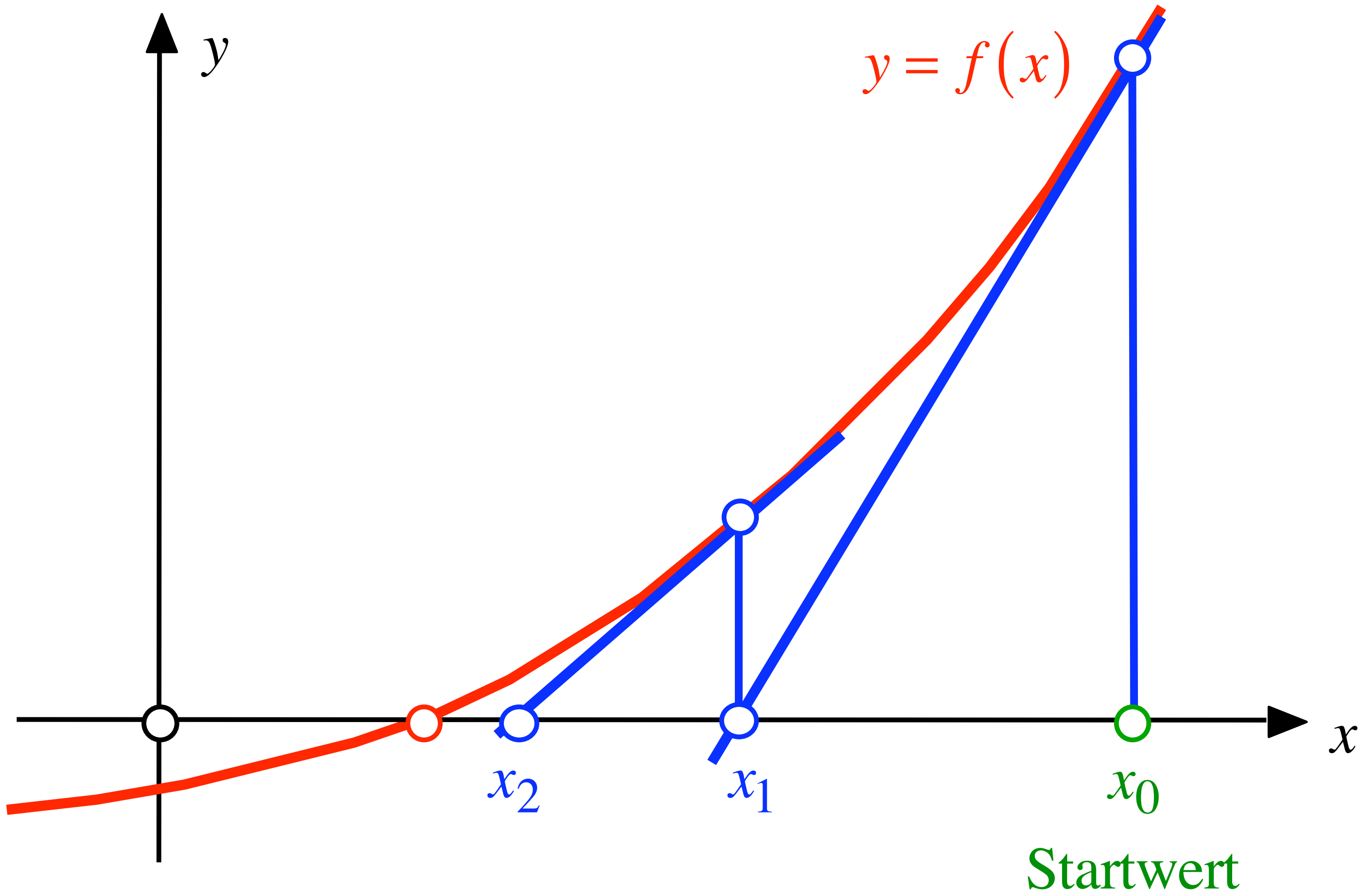
Geometrischer Zugang



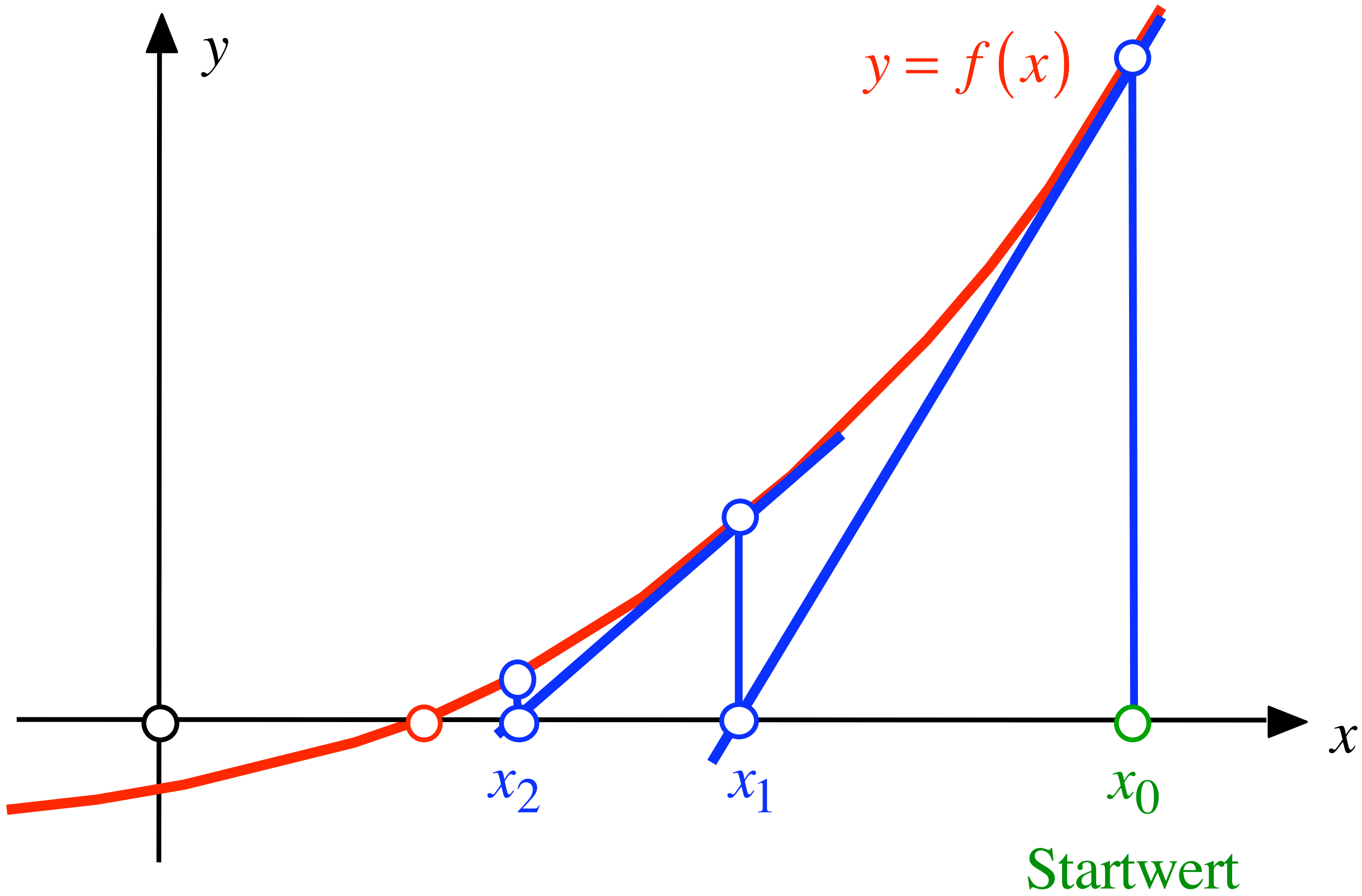
Geometrischer Zugang



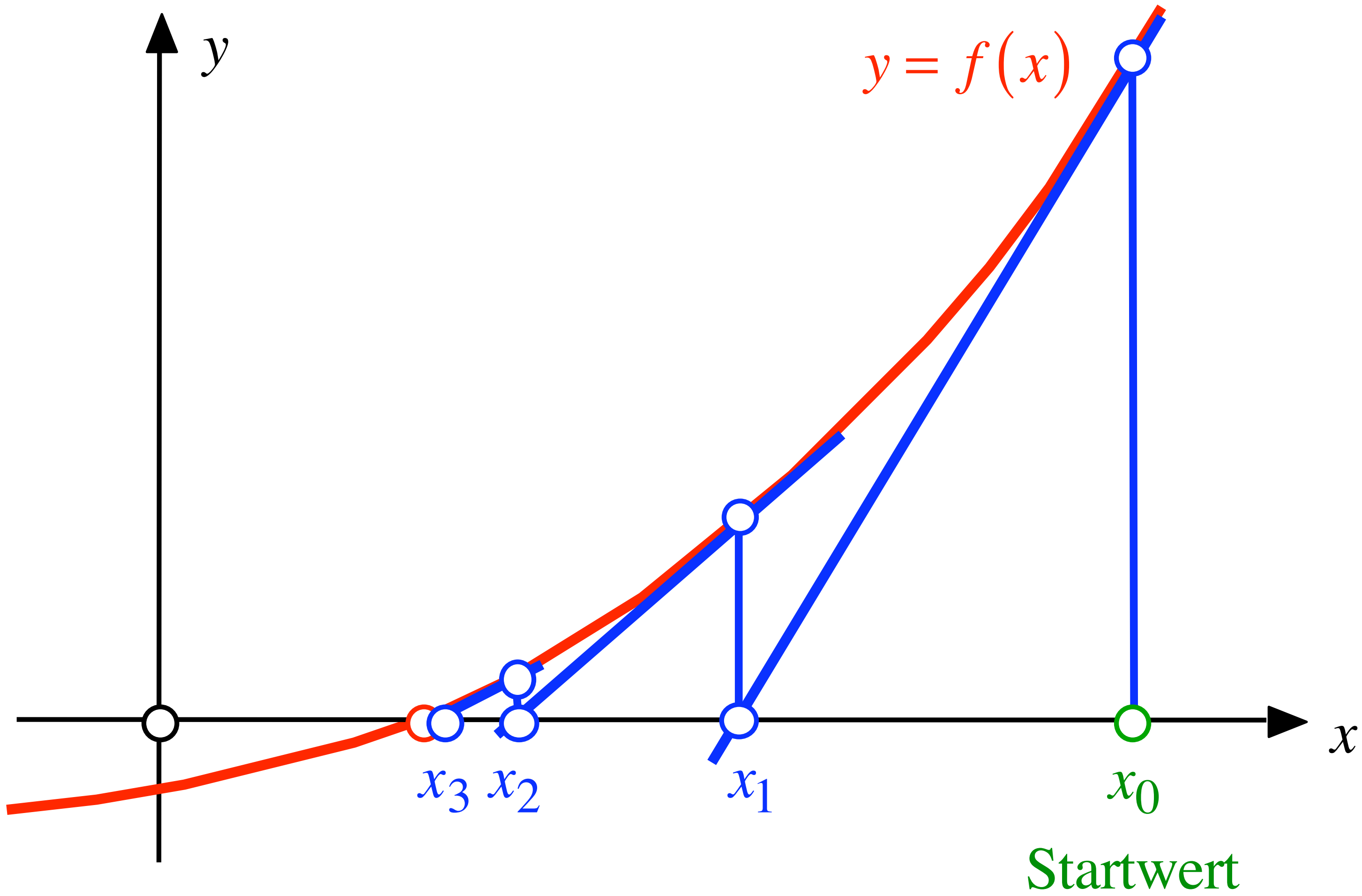
Geometrischer Zugang



Geometrischer Zugang



Geometrischer Zugang



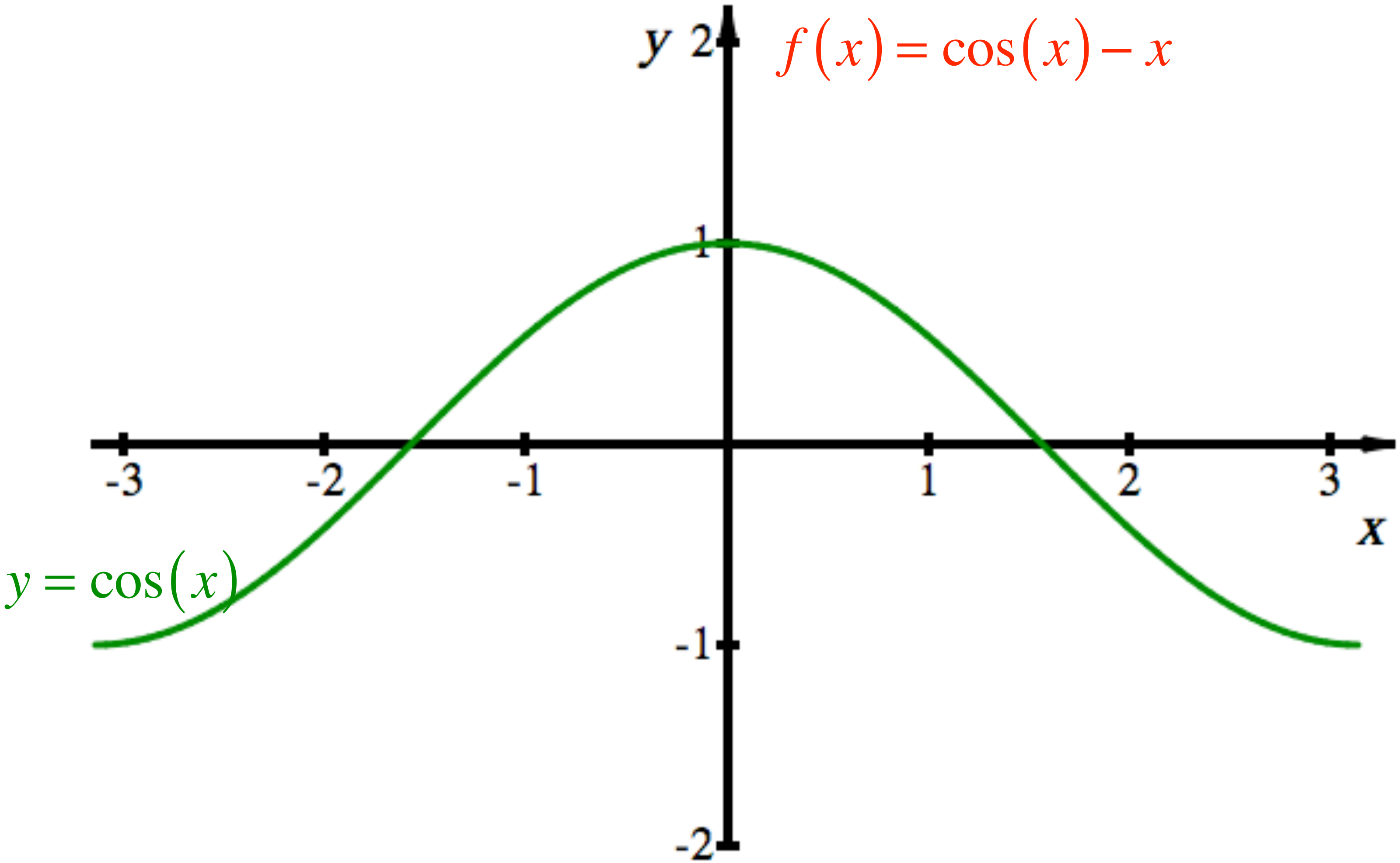
Beispiel: $\cos(x) = x$

$$\text{Beispiel:} \qquad \cos(x) = x \quad \Leftrightarrow \quad \cos(x) - x = 0$$

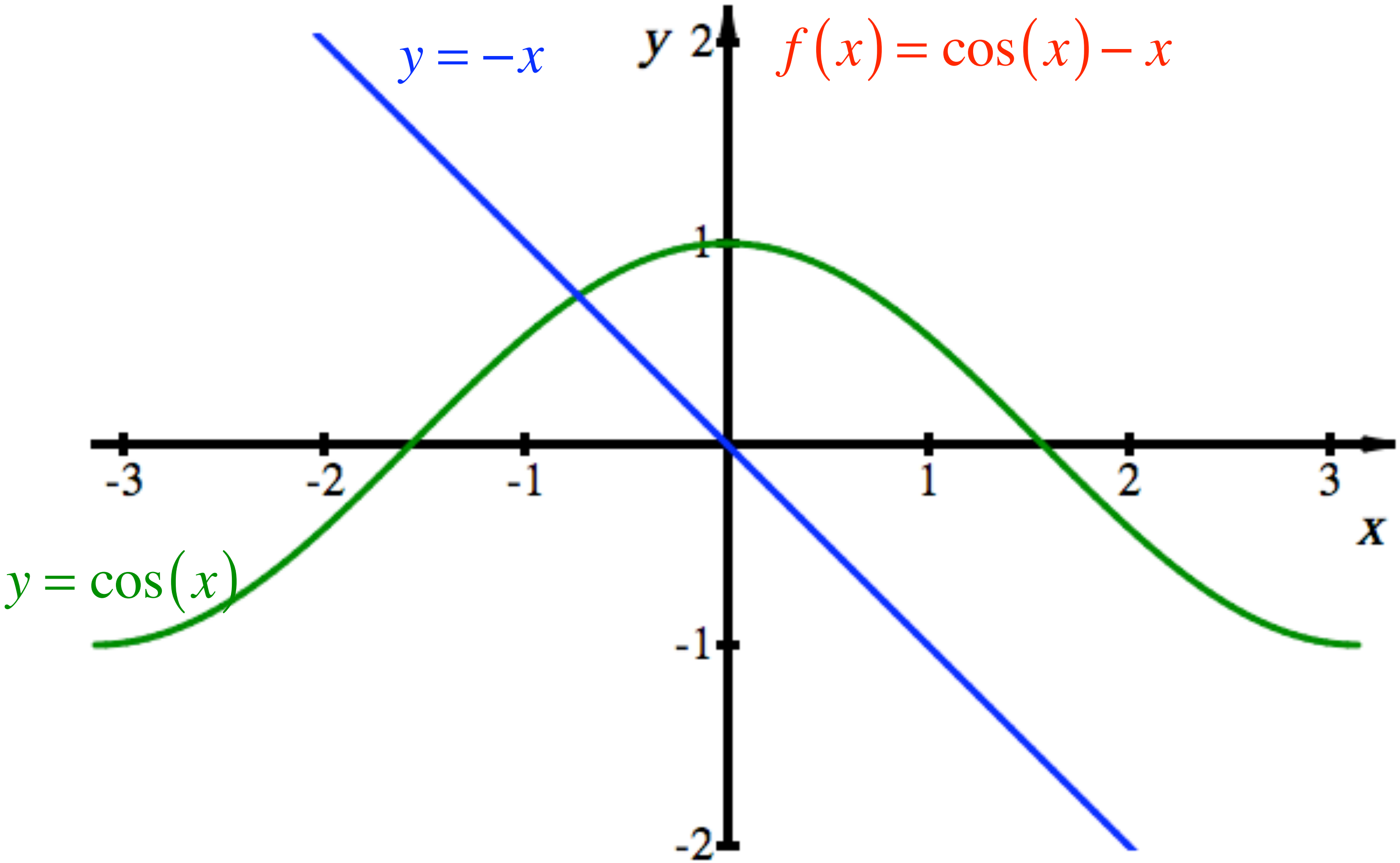
Beispiel: $\cos(x) = x \quad \Leftrightarrow \quad \cos(x) - x = 0$

$$f(x) = \cos(x) - x$$

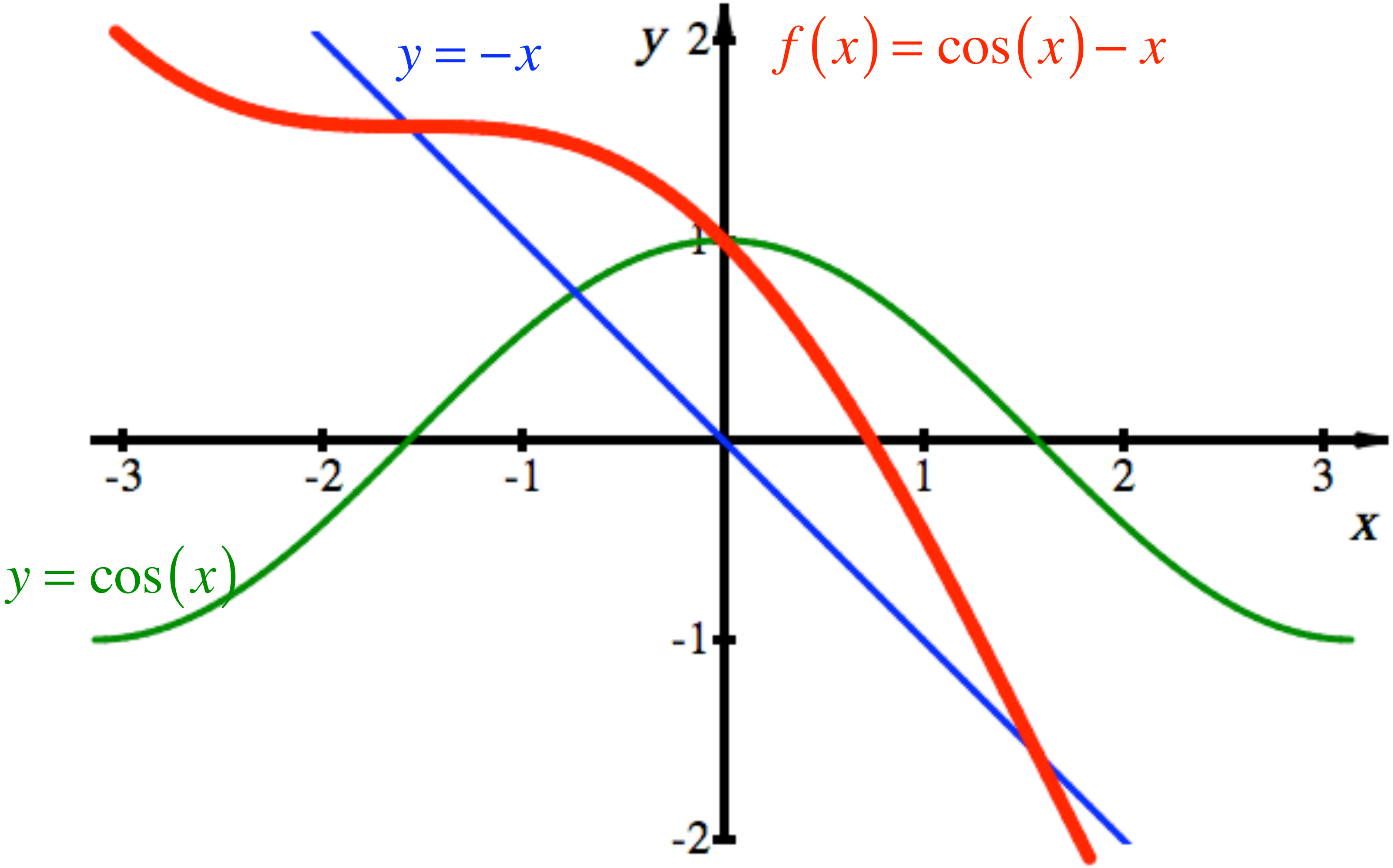
$$\text{Beispiel:} \qquad \cos(x) = x \quad \Leftrightarrow \quad \cos(x) - x = 0$$



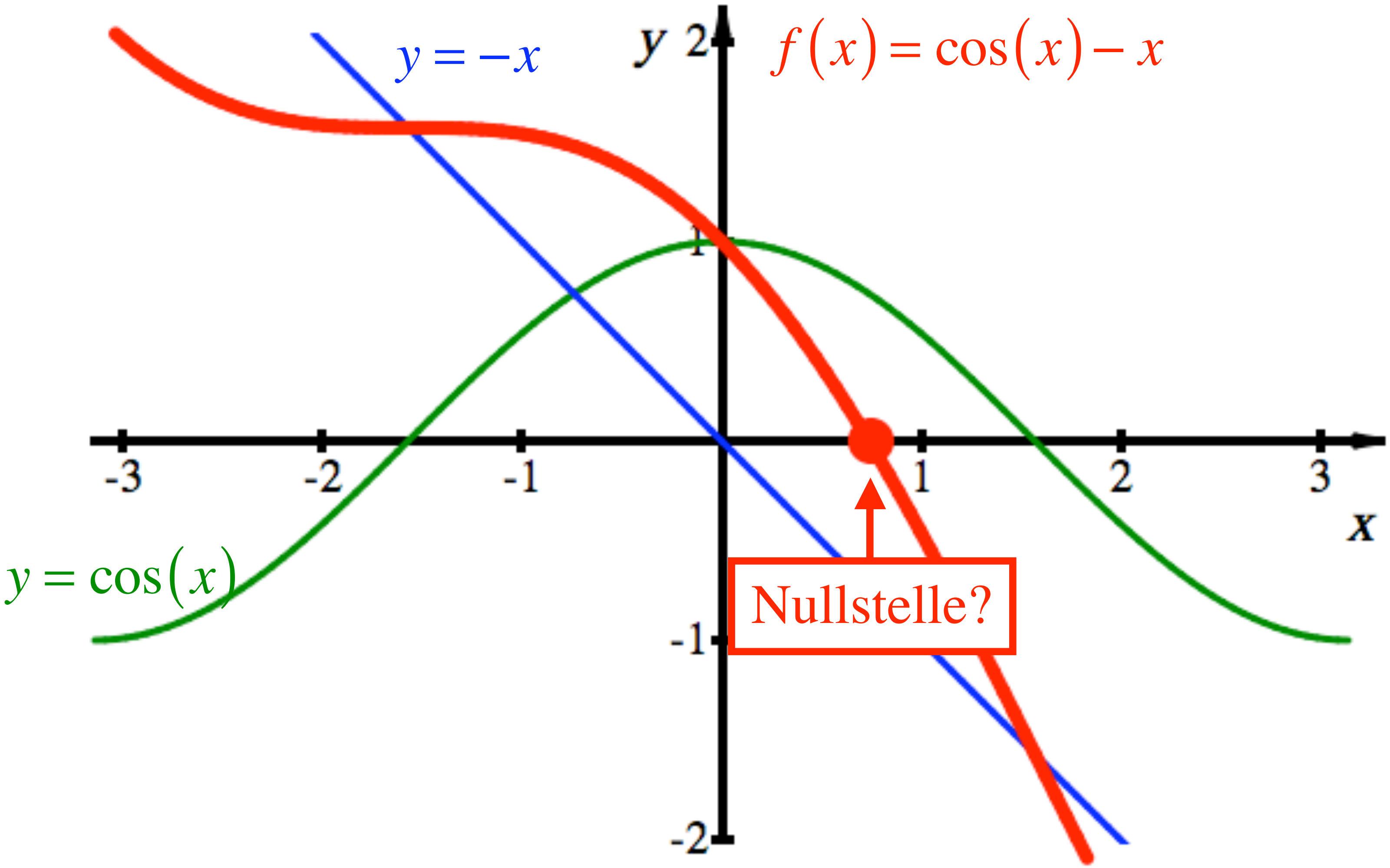
$$\text{Beispiel:} \qquad \cos(x) = x \quad \Leftrightarrow \quad \cos(x) - x = 0$$



$$\text{Beispiel:} \qquad \cos(x) = x \quad \Leftrightarrow \quad \cos(x) - x = 0$$



$$\text{Beispiel:} \qquad \cos(x) = x \quad \Leftrightarrow \quad \cos(x) - x = 0$$



$$\text{Beispiel}: \qquad \cos(x) = x \quad \Leftrightarrow \quad \cos(x) - x = 0$$

Newton:

$$f(x) = \cos(x) - x$$

$$f'(x) = -\sin(x) - 1$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{\cos(x_n) - x_n}{-\sin(x_n) - 1}$$

$$\text{Beispiel:} \qquad \cos(x) = x \quad \Leftrightarrow \quad \cos(x) - x = 0$$

Newton: $\quad x_{n+1} = x_n - \dfrac{\cos(x_n) - x_n}{-\sin(x_n) - 1}$

Startwert: $\quad x_0 = 1$

$$\text{Beispiel:} \qquad \cos(x) = x \quad \Leftrightarrow \quad \cos(x) - x = 0$$

Newton: $$x_{n+1} = x_n - \frac{\cos(x_n) - x_n}{-\sin(x_n) - 1}$$

Startwert: $x_0 = 1$

$\cos(1) - 1 \neq 0$

Kein Schwein gehabt

$$\text{Beispiel}: \qquad \cos(x) = x \quad \Leftrightarrow \quad \cos(x) - x = 0$$

Newton: $$x_{n+1} = x_n - \frac{\cos(x_n) - x_n}{-\sin(x_n) - 1}$$

Startwert: $x_0 = 1$

$$x_1 = x_0 - \frac{\cos(x_0) - x_0}{-\sin(x_0) - 1}$$

$$\text{Beispiel:} \qquad \cos(x) = x \quad \Leftrightarrow \quad \cos(x) - x = 0$$

Newton: $x_{n+1} = x_n - \dfrac{\cos(x_n) - x_n}{-\sin(x_n) - 1}$

Startwert: $x_0 = 1$

$$x_1 = x_0 - \frac{\cos(x_0) - x_0}{-\sin(x_0) - 1} = 1 - \frac{\cos(1) - 1}{-\sin(1) - 1}$$

$$\text{Beispiel:} \quad \cos(x) = x \quad \Leftrightarrow \quad \cos(x) - x = 0$$

Newton: $x_{n+1} = x_n - \dfrac{\cos(x_n) - x_n}{-\sin(x_n) - 1}$

Startwert: $x_0 = 1$

$$x_1 = x_0 - \frac{\cos(x_0) - x_0}{-\sin(x_0) - 1} = 1 - \frac{\cos(1) - 1}{-\sin(1) - 1} \approx 0.7503638678$$

$$\text{Beispiel:} \qquad \cos(x) = x \quad \Leftrightarrow \quad \cos(x) - x = 0$$

Newton: $\quad x_{n+1} = x_n - \dfrac{\cos(x_n) - x_n}{-\sin(x_n) - 1}$

Startwert: $\quad x_0 = 1$

$$x_1 = x_0 - \frac{\cos(x_0) - x_0}{-\sin(x_0) - 1} = 1 - \frac{\cos(1) - 1}{-\sin(1) - 1} \approx 0.7503638678$$

$$x_2 = x_1 - \frac{\cos(x_1) - x_1}{-\sin(x_1) - 1} \approx 0.7503638678 - \frac{\cos(0.7503638678) - 0.7503638678}{-\sin(0.7503638678) - 1}$$

$$\text{Beispiel}: \quad \cos(x) = x \quad \Leftrightarrow \quad \cos(x) - x = 0$$

Newton: $\quad x_{n+1} = x_n - \dfrac{\cos(x_n) - x_n}{-\sin(x_n) - 1}$

Startwert: $\quad x_0 = 1$

$$x_1 = x_0 - \frac{\cos(x_0) - x_0}{-\sin(x_0) - 1} = 1 - \frac{\cos(1) - 1}{-\sin(1) - 1} \approx 0.7503638678$$

$$x_2 = x_1 - \frac{\cos(x_1) - x_1}{-\sin(x_1) - 1} \approx 0.7503638678 - \frac{\cos(0.7503638678) - 0.7503638678}{-\sin(0.7503638678) - 1}$$

$$\approx 0.7391128909$$

$$\text{Beispiel:} \qquad \cos(x) = x \quad \Leftrightarrow \quad \cos(x) - x = 0$$

Newton: $\quad x_{n+1} = x_n - \dfrac{\cos(x_n) - x_n}{-\sin(x_n) - 1}$

Startwert: $\quad x_0 = 1$

$$x_1 = x_0 - \frac{\cos(x_0) - x_0}{-\sin(x_0) - 1} = 1 - \frac{\cos(1) - 1}{-\sin(1) - 1} \approx 0.7503638678$$

$$x_2 = x_1 - \frac{\cos(x_1) - x_1}{-\sin(x_1) - 1} \approx 0.7503638678 - \frac{\cos(0.7503638678) - 0.7503638678}{-\sin(0.7503638678) - 1}$$

$$\approx 0.7391128909$$

$$x_3 = x_2 - \frac{\cos(x_2) - x_2}{-\sin(x_2) - 1} \approx 0.7391128909 - \frac{\cos(0.7391128909) - 0.7391128909}{-\sin(0.7391128909) - 1}$$

$$\approx 0.7390851334$$

$$\text{Beispiel}: \qquad \cos(x) = x \quad \Leftrightarrow \quad \cos(x) - x = 0$$

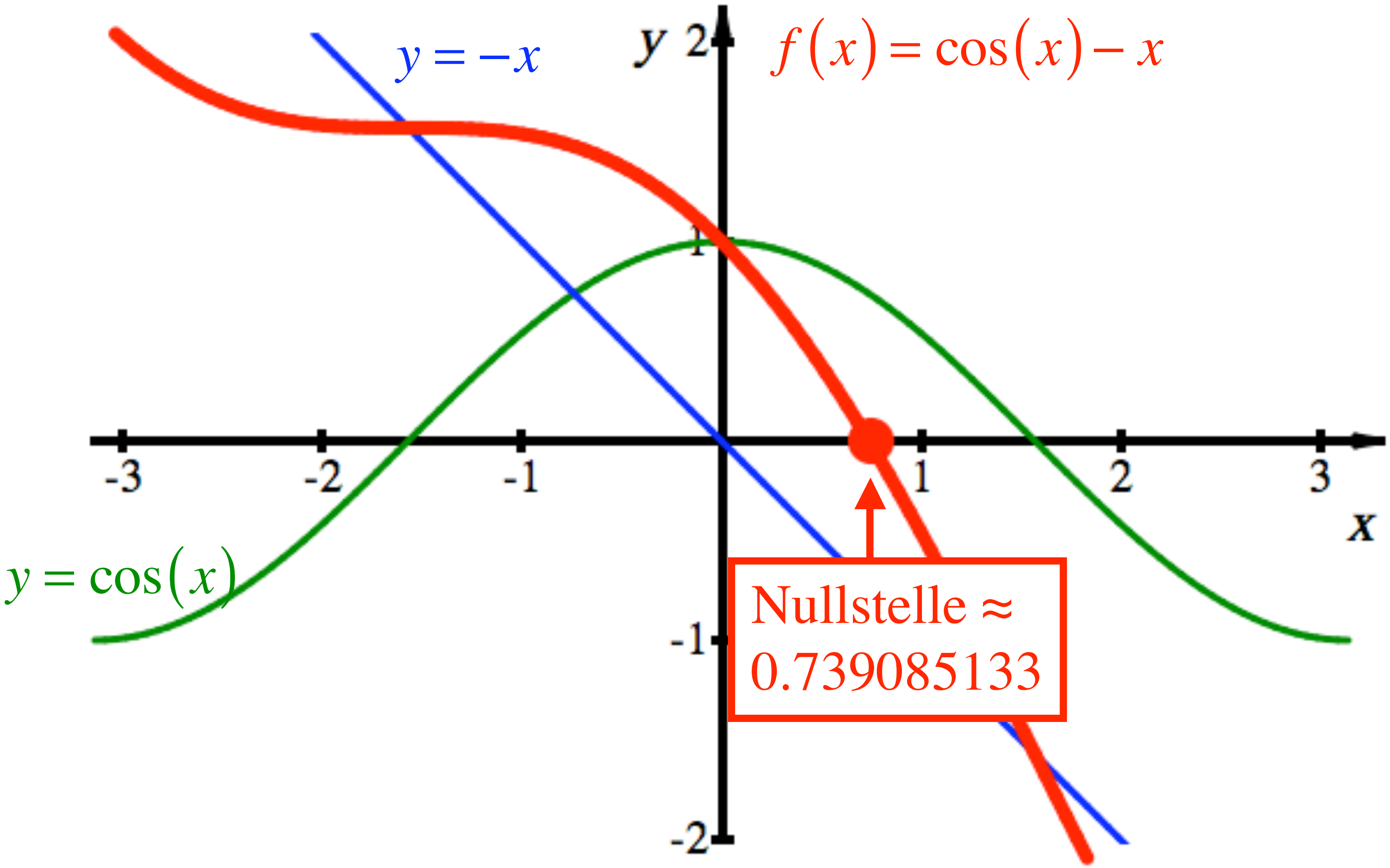
Newton: $\quad x_{n+1} = x_n - \dfrac{\cos(x_n) - x_n}{-\sin(x_n) - 1}$

Startwert: $\quad x_0 = 1$

Excel

n	x_n
0	1.000000000
1	0.750363868
2	0.739112891
3	0.739085133
4	0.739085133
5	0.739085133

Beispiel: $\quad \cos(x) = x \quad \Leftrightarrow \quad \cos(x) - x = 0$



n	x_n	x_n	x_n
0	10.000000000	9.990000000	10.010000000
1	-13.770994202	-13.340205628	-14.215231486
2	199.351177515	33.337516972	4627.812325295
3	-20202.926342871	15.968037018	-1493.801575289
4	31592.341747162	-6.828556606	-746.790007884
5	10059.262159655	9.136660736	-328.992678984
6	-1334.941187693	1.275070994	1081.782973895
7	405.428386581	0.772340880	506.508797719
8	-79.677942223	0.739320921	-958.041090371
9	-38.134489916	0.739085145	160.225153776
10	29.382014907	0.739085133	-1.635852333
11	-253.798182123	0.739085133	740.940190946
12	414.900057058	0.739085133	-624.313991957
13	72.331780110	0.739085133	1971.704497033
14	-6.949485408	0.739085133	-29625.273346810
15	13.305105508	0.739085133	1711.891733429
16	5.795761387	0.739085133	366.114794127
17	-3.443835593	0.739085133	182.345361145
18	-1.525644330	0.739085133	22.222725587
19	1539.697379088	0.739085133	-7.882938637

19	1539.697379088	0.739085133	-7.882938637
20	366.601142266	0.739085133	18726.664944089
21	165.098507280	0.739085133	4962.000227804
22	81.902945060	0.739085133	-465498.881214009
23	15.554253477	0.739085133	220314.910757919
24	1.208239826	0.739085133	108130.664121216
25	0.767114691	0.739085133	-24627.111722149
26	0.739253564	0.739085133	-3509.411890375
27	0.739085139	0.739085133	-703.126576418
28	0.739085133	0.739085133	-250.859703153
29	0.739085133	0.739085133	-77.338260904
30	0.739085133	0.739085133	1064.785786309
31	0.739085133	0.739085133	185.799357952
32	0.739085133	0.739085133	-142.214429486
33	0.739085133	0.739085133	-61.166367368
34	0.739085133	0.739085133	-30.561908403
35	0.739085133	0.739085133	-12.762489650
36	0.739085133	0.739085133	4.307078704
37	0.739085133	0.739085133	-53.720424633
38	0.739085133	0.739085133	-13.384672271
39	0.739085133	0.739085133	38.716852093
40	0.739085133	0.739085133	18.083061060

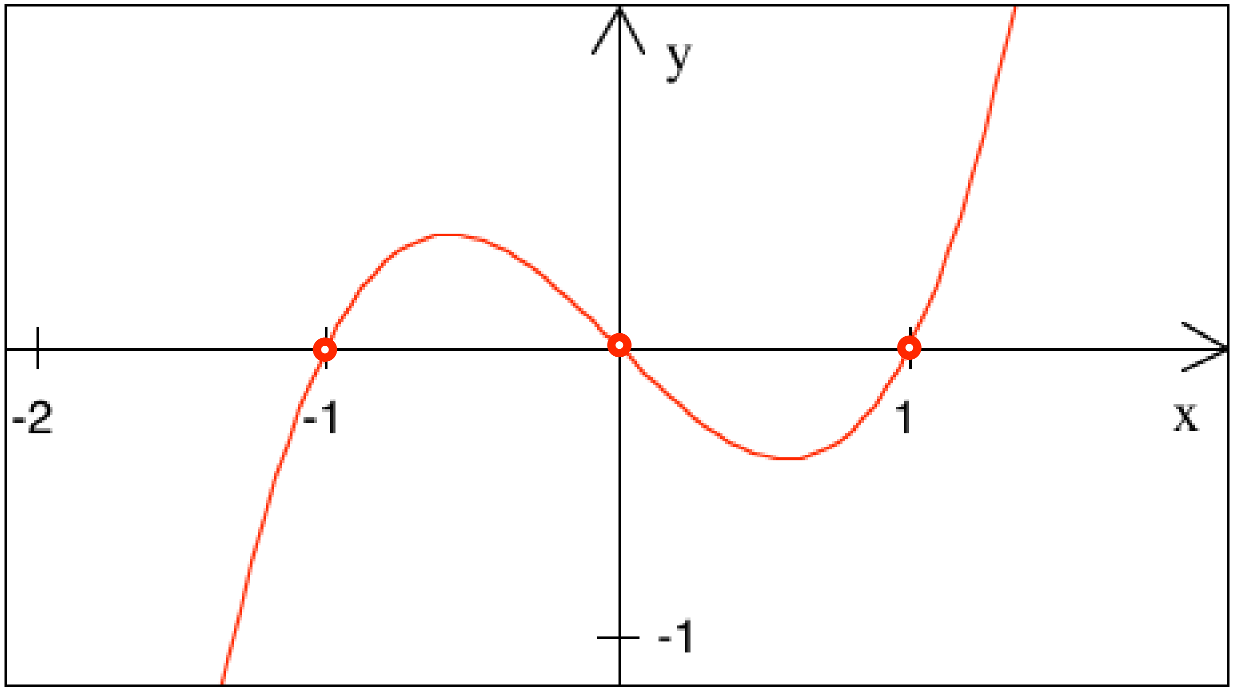
40	0.739085133	0.739085133	18.083061060
41	0.739085133	0.739085133	-38.586461228
42	0.739085133	0.739085133	136.026412310
43	0.739085133	0.739085133	-569.405560868
44	0.739085133	0.739085133	-235.145989906
45	0.739085133	0.739085133	195.446004025
46	0.739085133	0.739085133	75.198781923
47	0.739085133	0.739085133	-17.357220633
48	0.739085133	0.739085133	-8.625989270
49	0.739085133	0.739085133	19.341346192
50	0.739085133	0.739085133	6.802426367
51	0.739085133	0.739085133	2.836281753
52	0.739085133	0.739085133	-0.077808111
53	0.739085133	0.739085133	1.087557942
54	0.739085133	0.739085133	0.757189095
55	0.739085133	0.739085133	0.739156138
56	0.739085133	0.739085133	0.739085134
57	0.739085133	0.739085133	0.739085133
58	0.739085133	0.739085133	0.739085133

geschafft!

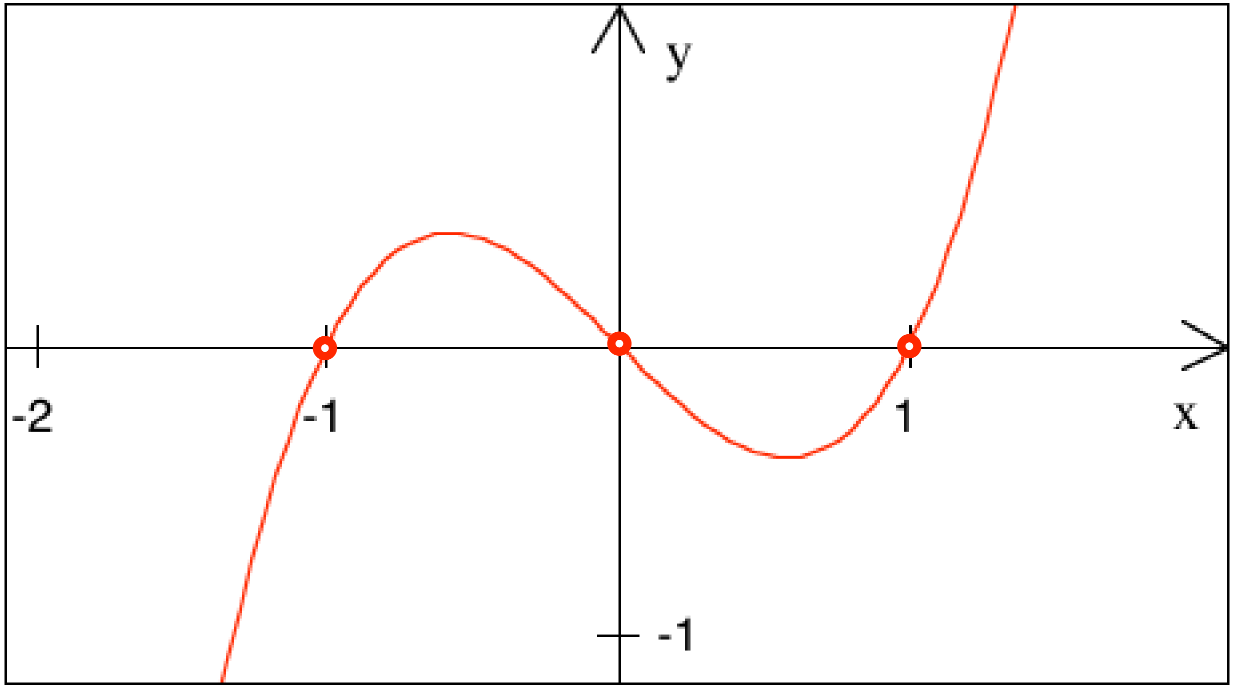
Wenn ein Mathematiker keine Probleme hat,
dann sucht er welche.

Welcher Startwert führt zu welcher Nullstelle?

$$y = f(x) = x^3 - x \quad \Rightarrow \quad \text{Nullstellen}: \; -1, 0, 1$$

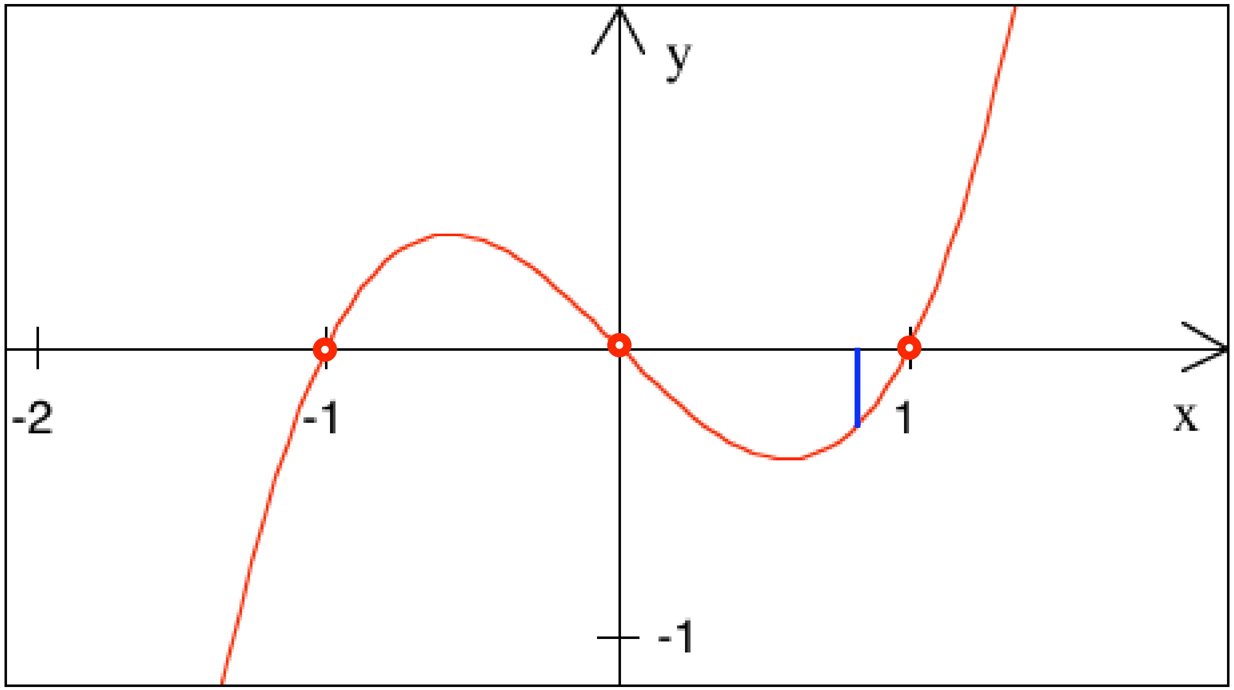


$$y = f(x) = x^3 - x \quad \Rightarrow \quad \text{Nullstellen:} \quad -1, 0, 1$$



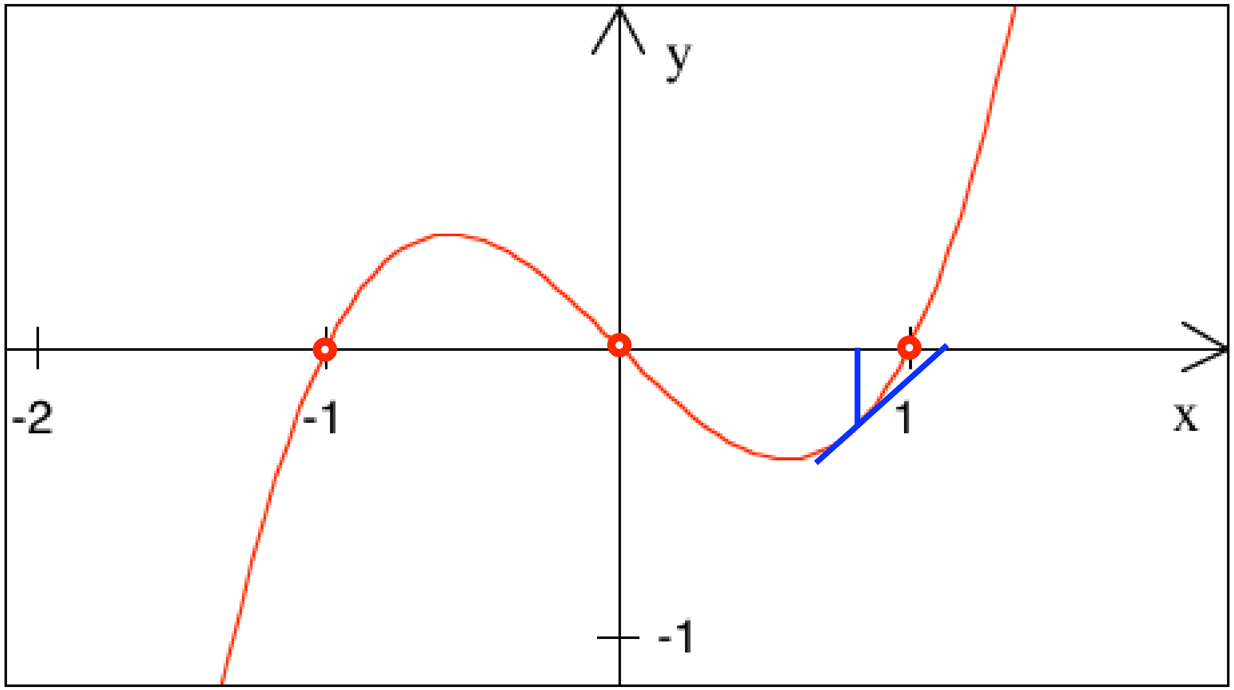
Wählen Sie einige Startwerte. Wohin kommen Sie?

$$y = f(x) = x^3 - x \quad \Rightarrow \quad \text{Nullstellen}: \ -1, 0, 1$$



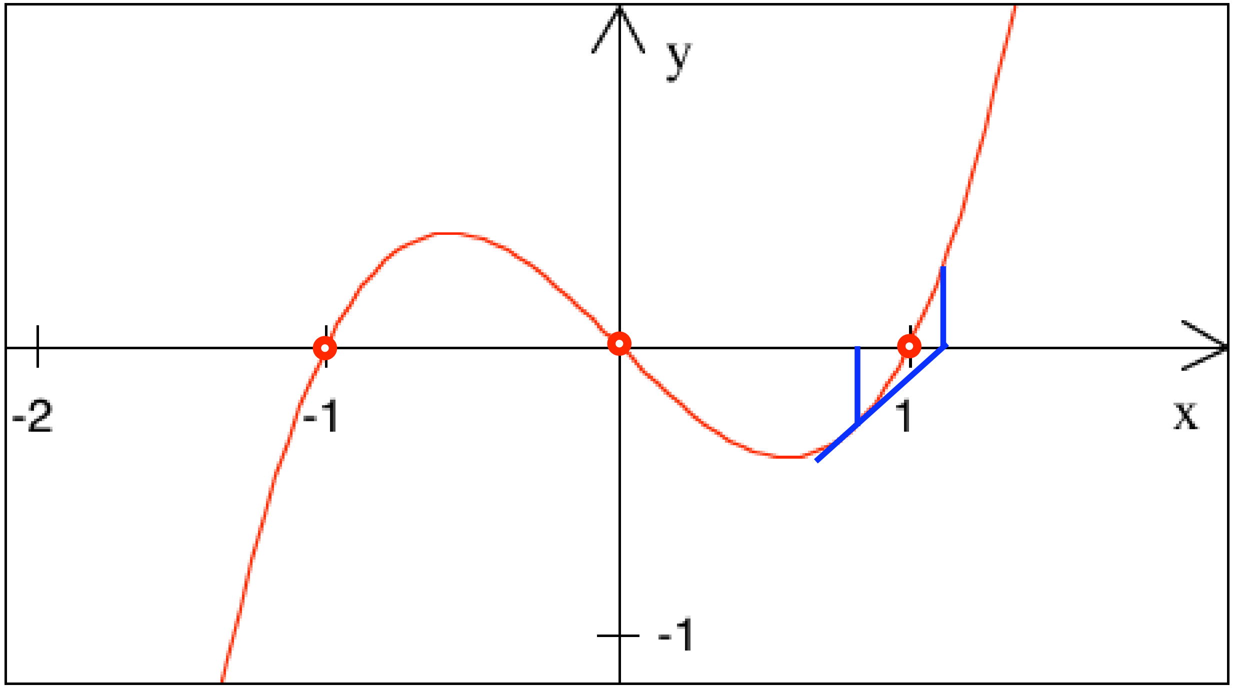
Wählen Sie einige Startwerte. Wohin kommen Sie?

$$y = f(x) = x^3 - x \quad \Rightarrow \quad \text{Nullstellen:} \quad -1, 0, 1$$



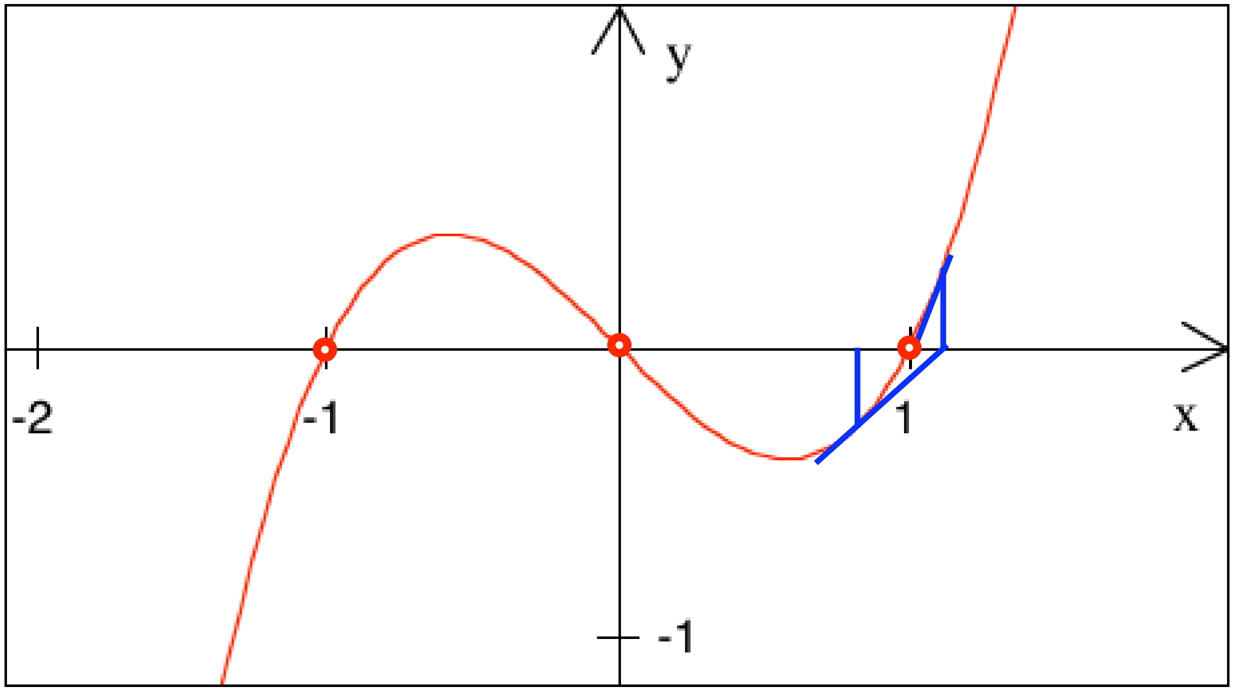
Wählen Sie einige Startwerte. Wohin kommen Sie?

$$y = f(x) = x^3 - x \quad \Rightarrow \quad \text{Nullstellen}: \; -1, 0, 1$$



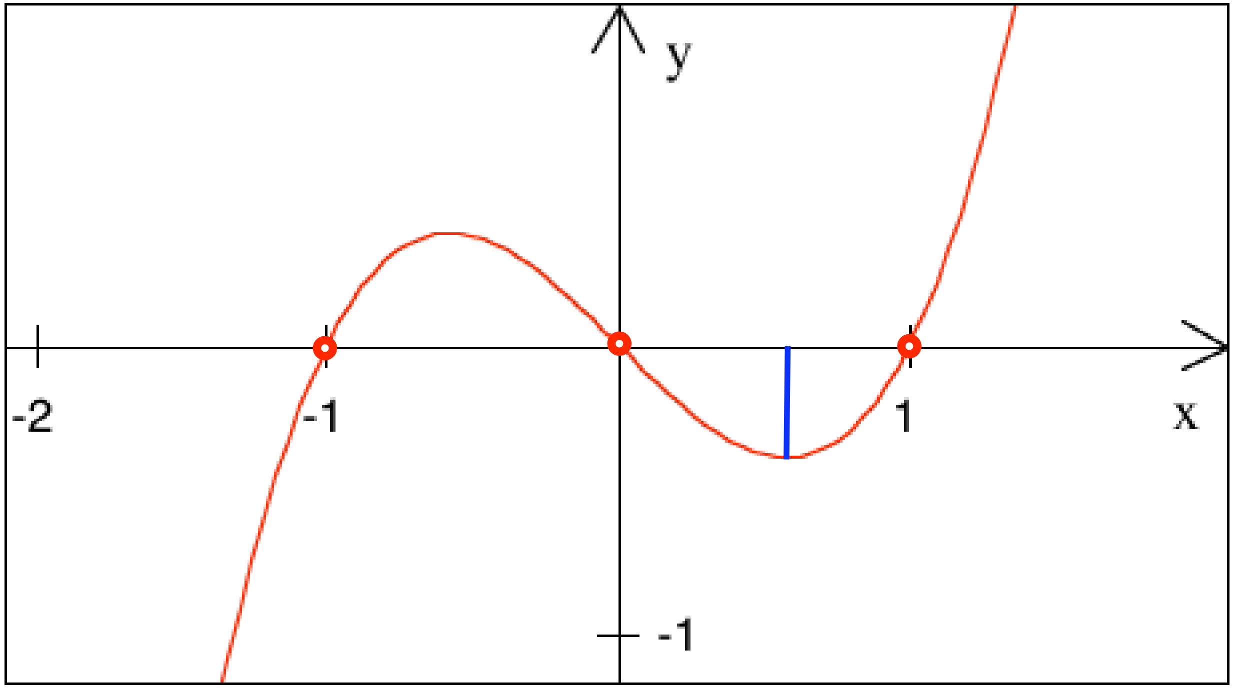
Wählen Sie einige Startwerte. Wohin kommen Sie?

$$y = f(x) = x^3 - x \quad \Rightarrow \quad \text{Nullstellen}: \; -1, 0, 1$$



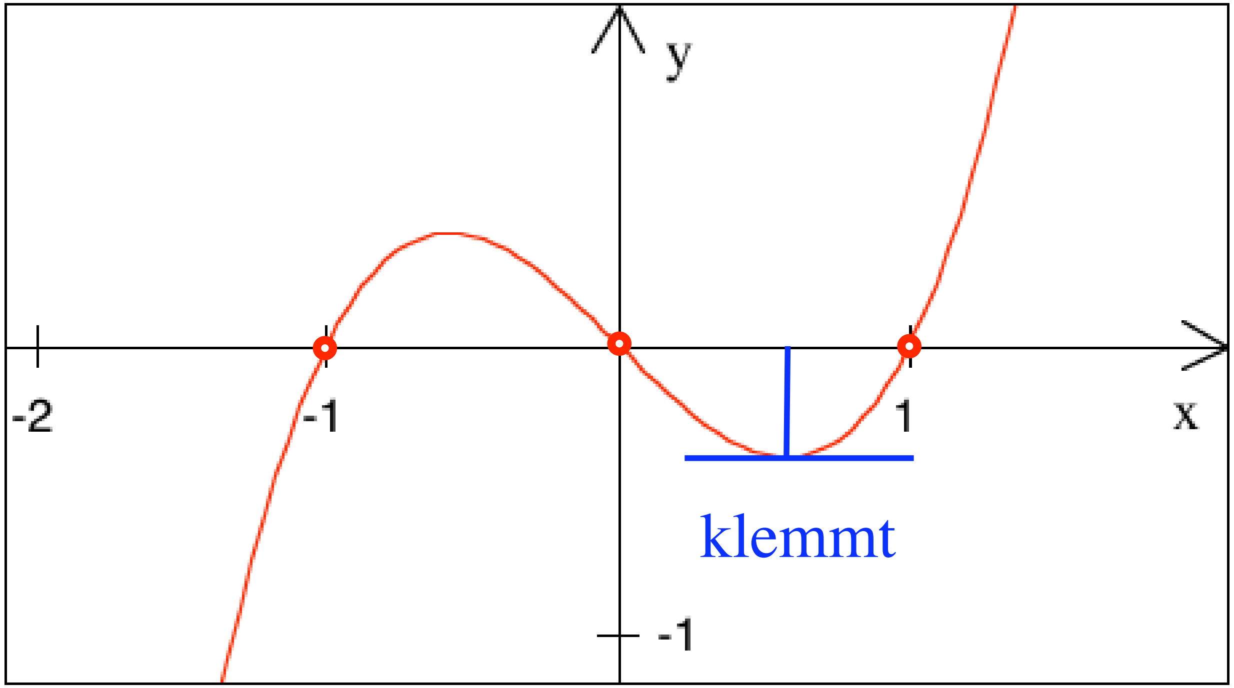
Wählen Sie einige Startwerte. Wohin kommen Sie?

$$y = f(x) = x^3 - x \quad \Rightarrow \quad \text{Nullstellen:} \quad -1, 0, 1$$



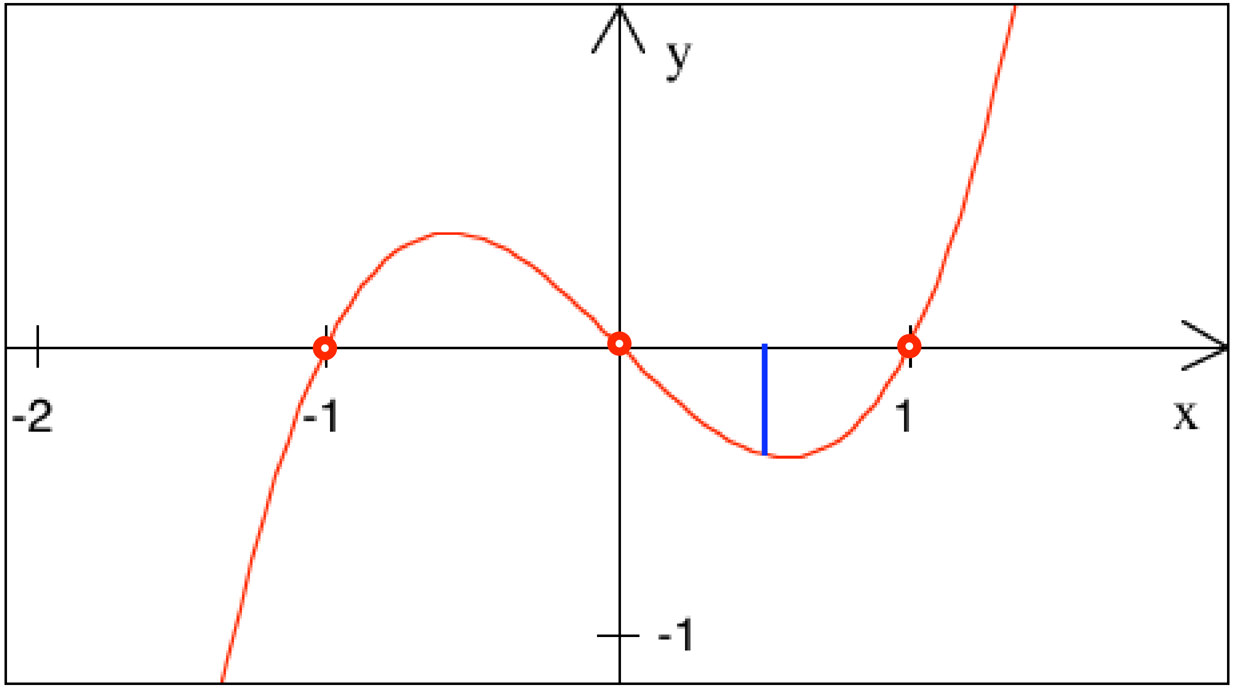
Wählen Sie einige Startwerte. Wohin kommen Sie?

$$y = f(x) = x^3 - x \quad \Rightarrow \quad \text{Nullstellen}: \; -1, 0, 1$$



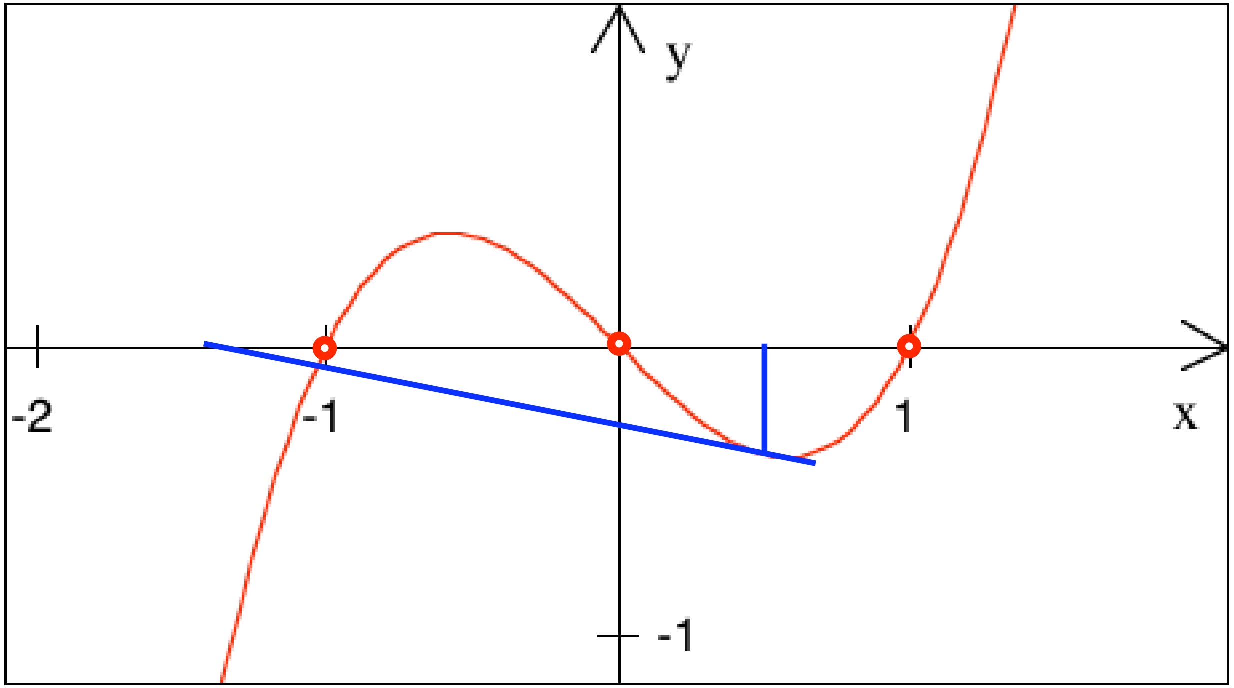
Wählen Sie einige Startwerte. Wohin kommen Sie?

$$y = f(x) = x^3 - x \quad \Rightarrow \quad \text{Nullstellen:} \quad -1, 0, 1$$



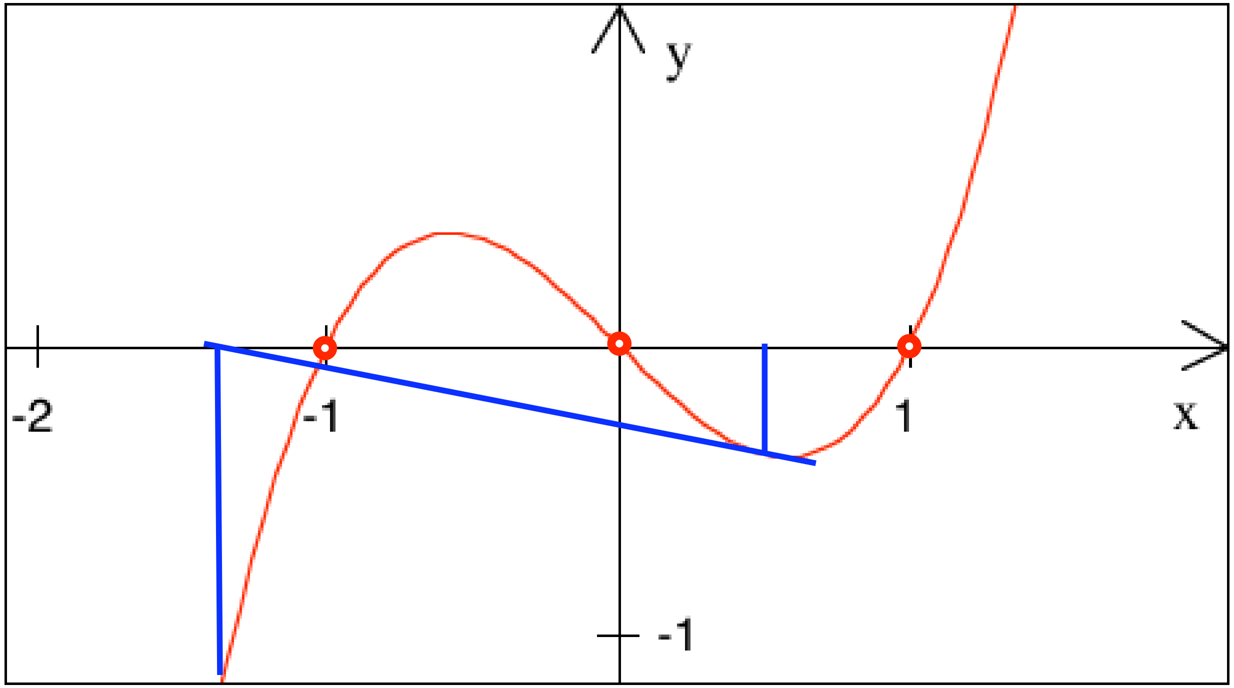
Wählen Sie einige Startwerte. Wohin kommen Sie?

$$y = f(x) = x^3 - x \quad \Rightarrow \quad \text{Nullstellen}: \; -1, 0, 1$$



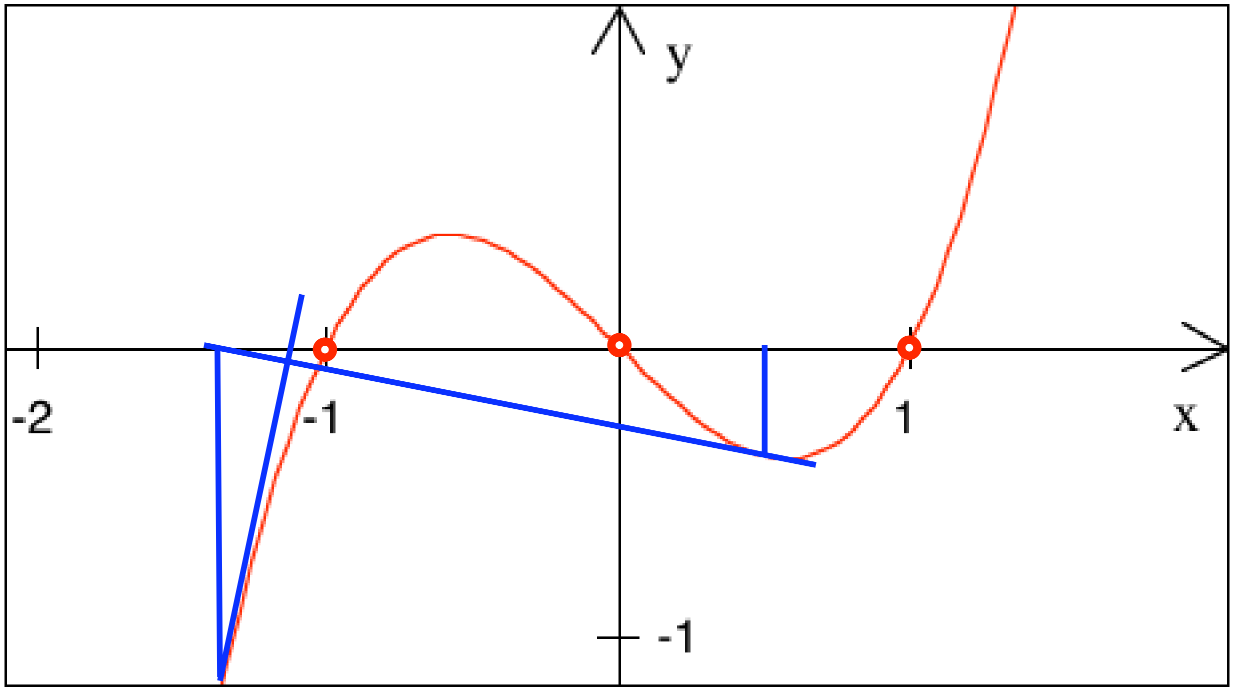
Wählen Sie einige Startwerte. Wohin kommen Sie?

$$y = f(x) = x^3 - x \quad \Rightarrow \quad \text{Nullstellen}: \ -1, 0, 1$$



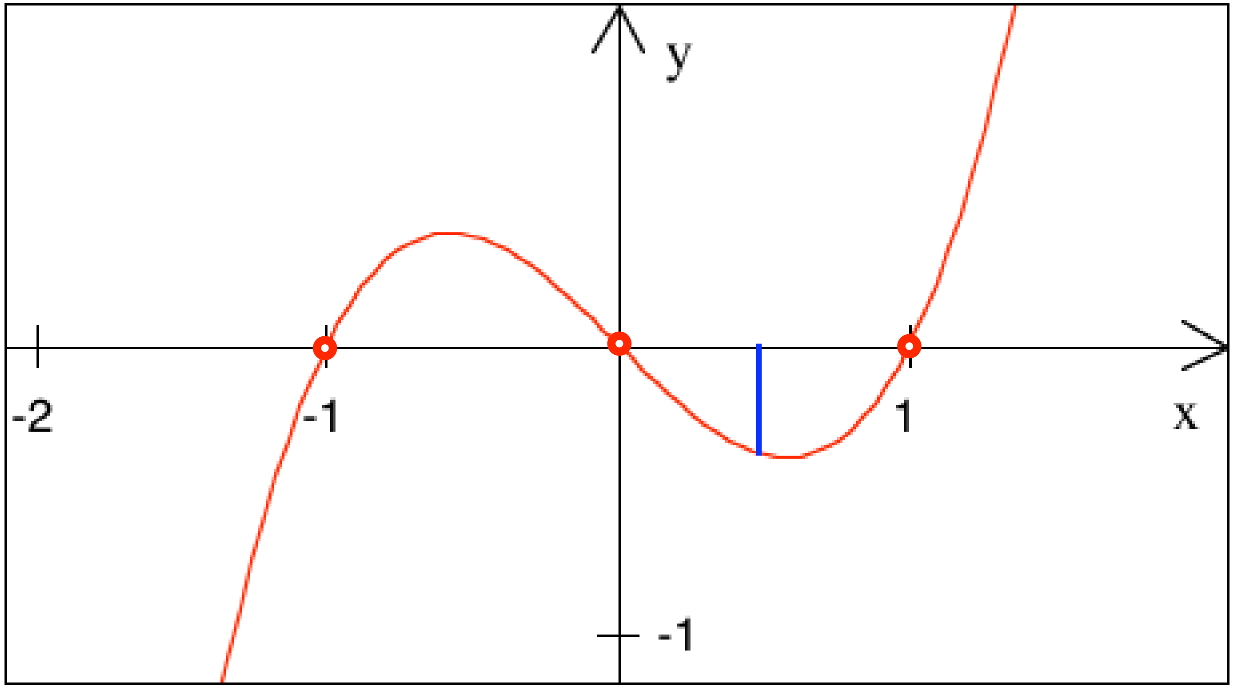
Wählen Sie einige Startwerte. Wohin kommen Sie?

$$y = f(x) = x^3 - x \quad \Rightarrow \quad \text{Nullstellen:} \quad -1, 0, 1$$



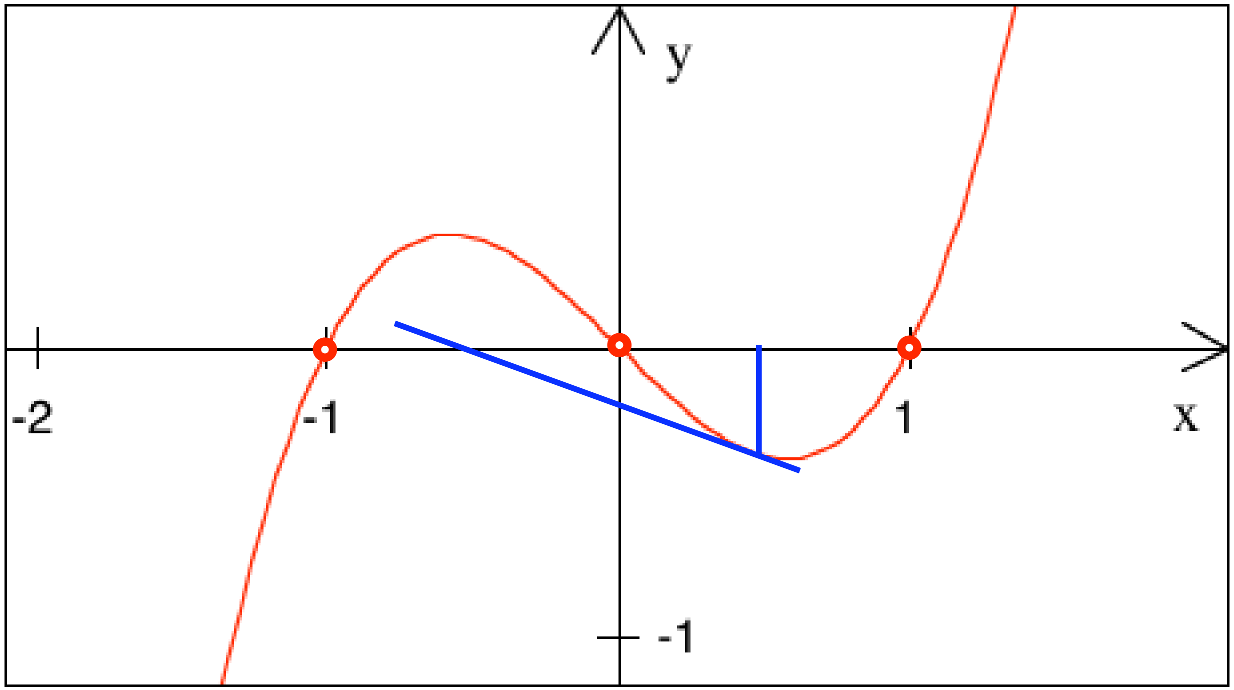
Wählen Sie einige Startwerte. Wohin kommen Sie?

$$y = f(x) = x^3 - x \quad \Rightarrow \quad \text{Nullstellen:} \quad -1, 0, 1$$



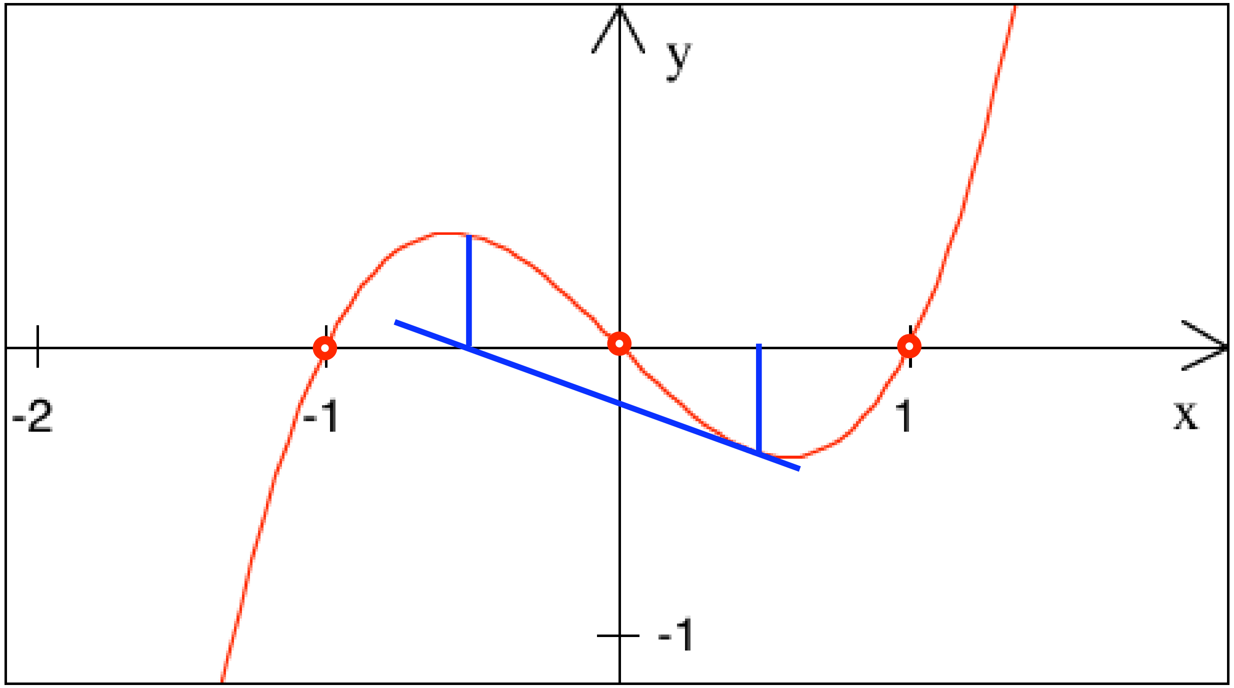
Wählen Sie einige Startwerte. Wohin kommen Sie?

$$y = f(x) = x^3 - x \quad \Rightarrow \quad \text{Nullstellen}: \; -1, 0, 1$$



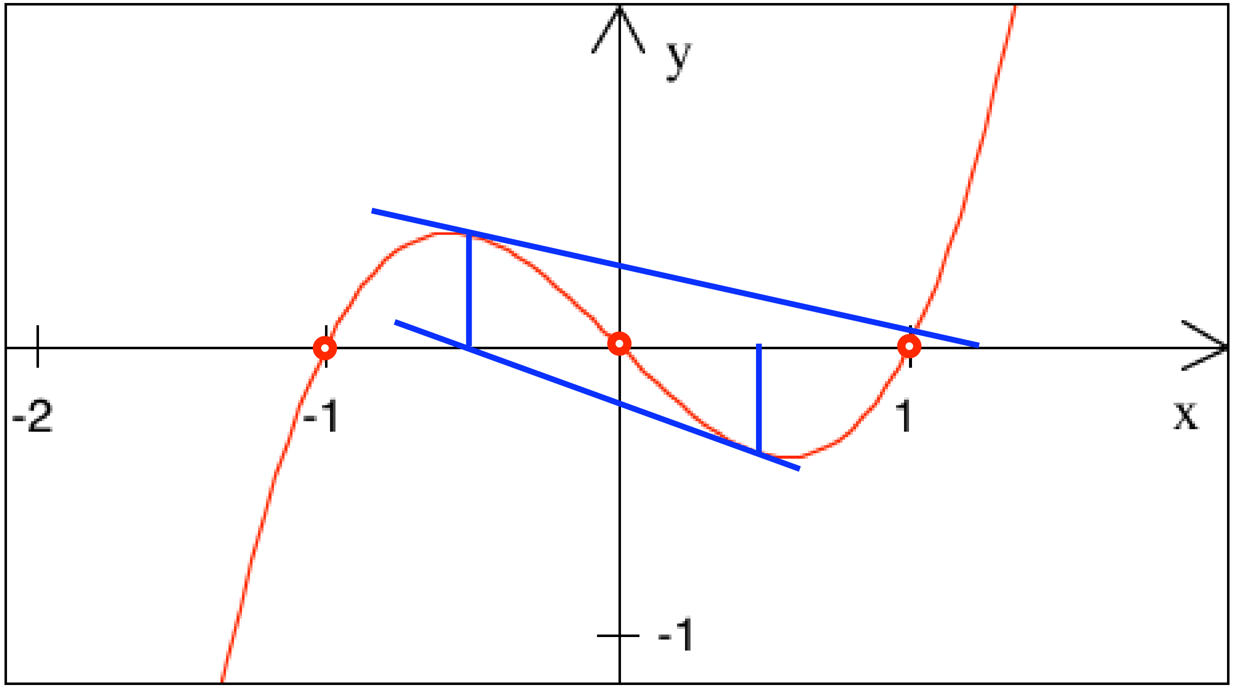
Wählen Sie einige Startwerte. Wohin kommen Sie?

$$y = f(x) = x^3 - x \quad \Rightarrow \quad \text{Nullstellen}: \; -1, 0, 1$$



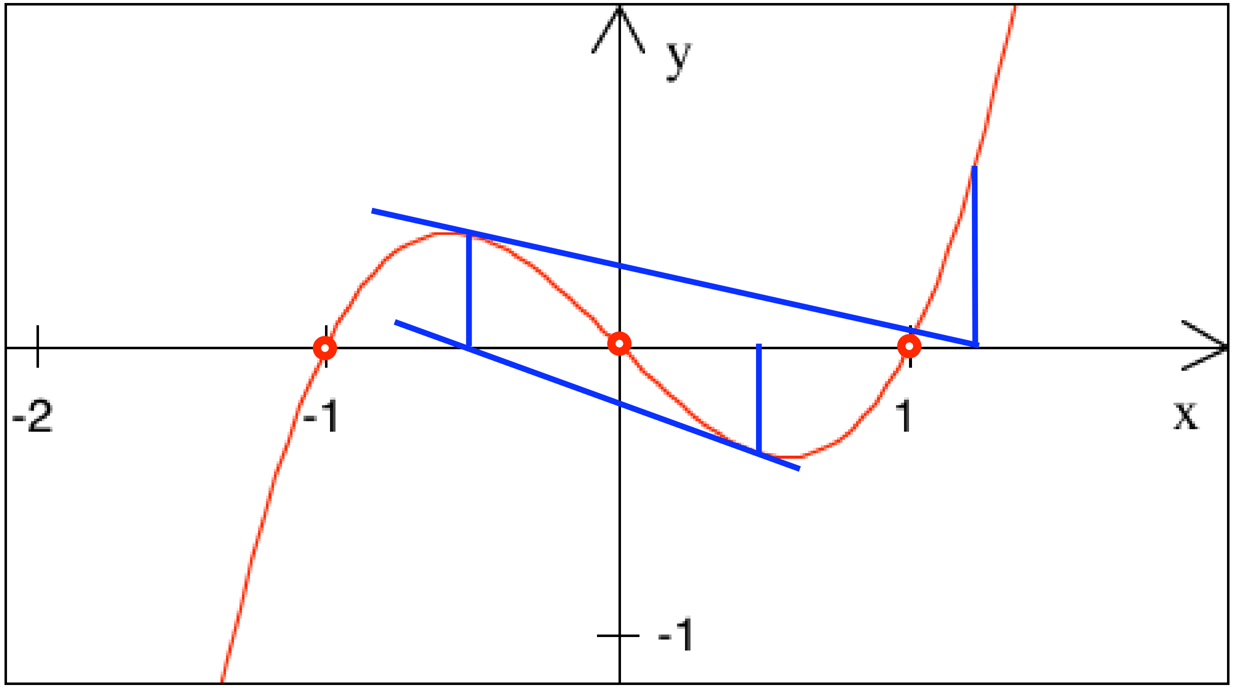
Wählen Sie einige Startwerte. Wohin kommen Sie?

$$y = f(x) = x^3 - x \quad \Rightarrow \quad \text{Nullstellen:} \quad -1, 0, 1$$



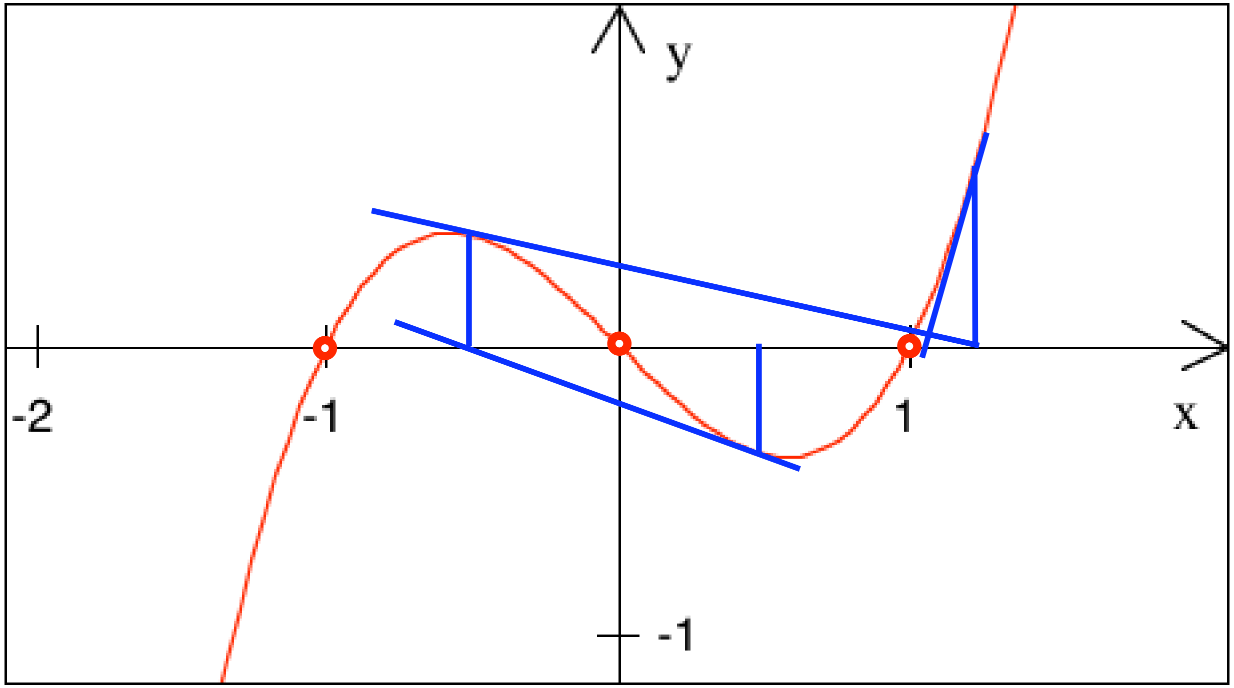
Wählen Sie einige Startwerte. Wohin kommen Sie?

$$y = f(x) = x^3 - x \quad \Rightarrow \quad \text{Nullstellen}: \; -1, 0, 1$$



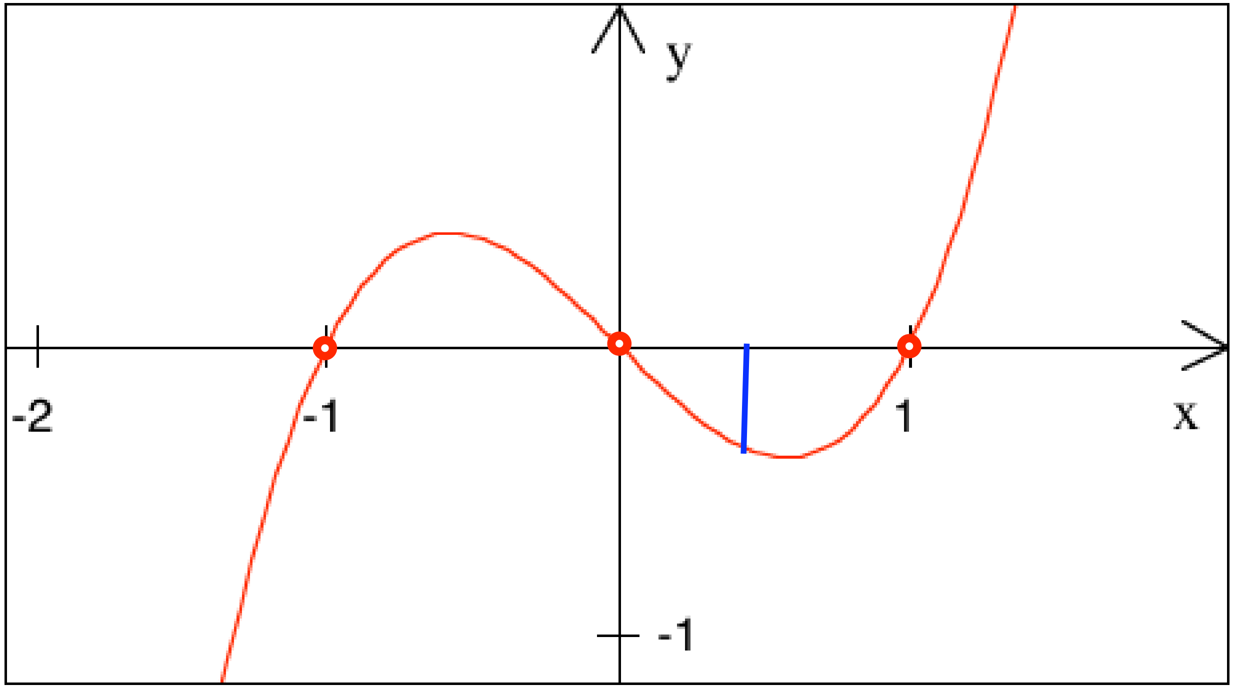
Wählen Sie einige Startwerte. Wohin kommen Sie?

$$y = f(x) = x^3 - x \quad \Rightarrow \quad \text{Nullstellen}: \; -1, 0, 1$$



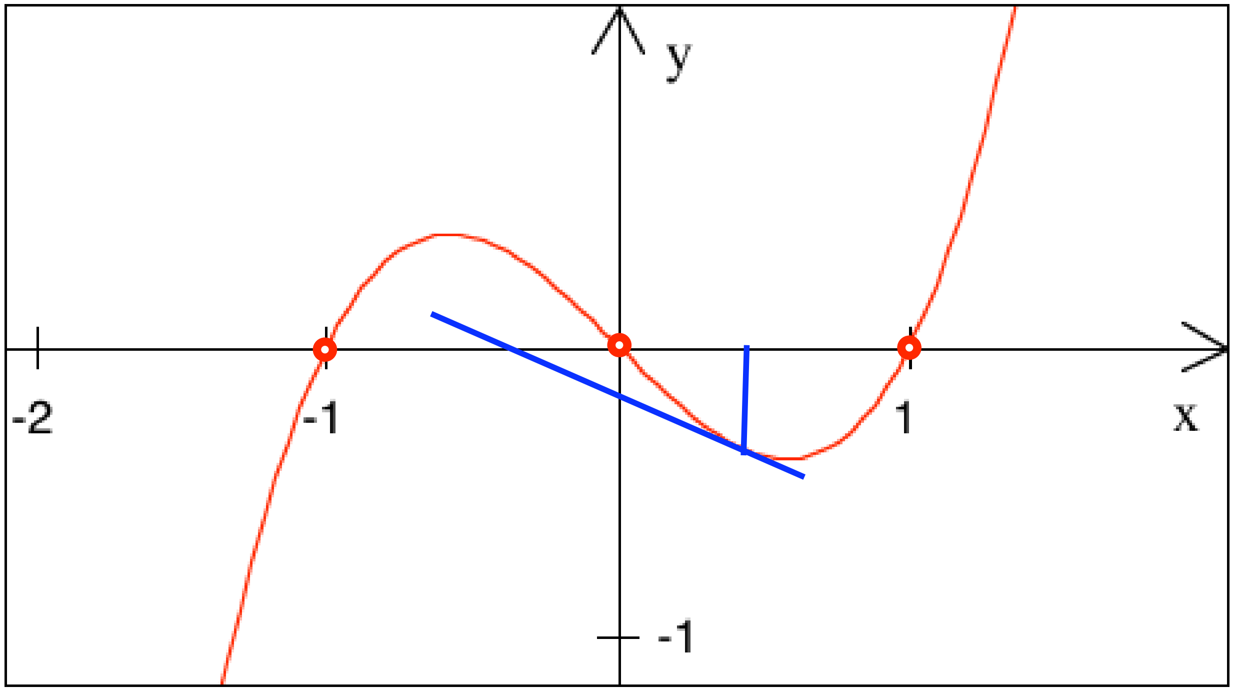
Wählen Sie einige Startwerte. Wohin kommen Sie?

$$y = f(x) = x^3 - x \quad \Rightarrow \quad \text{Nullstellen}: \; -1, 0, 1$$



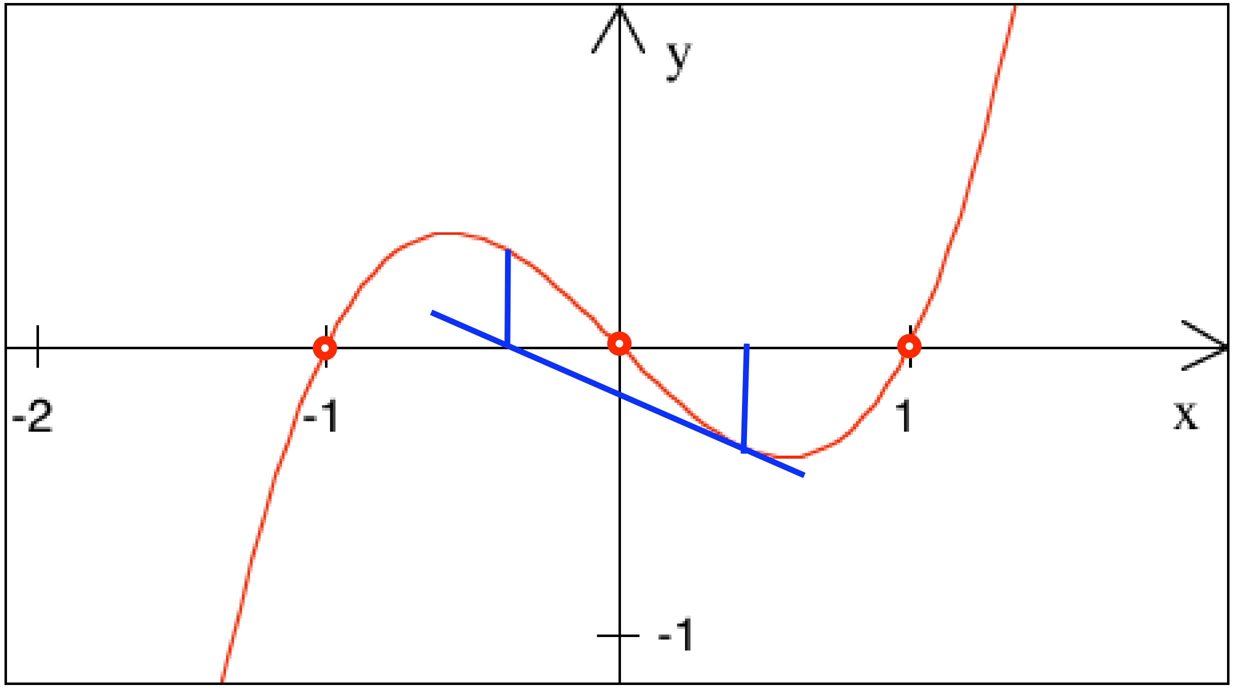
Wählen Sie einige Startwerte. Wohin kommen Sie?

$$y = f(x) = x^3 - x \quad \Rightarrow \quad \text{Nullstellen}: \; -1, 0, 1$$



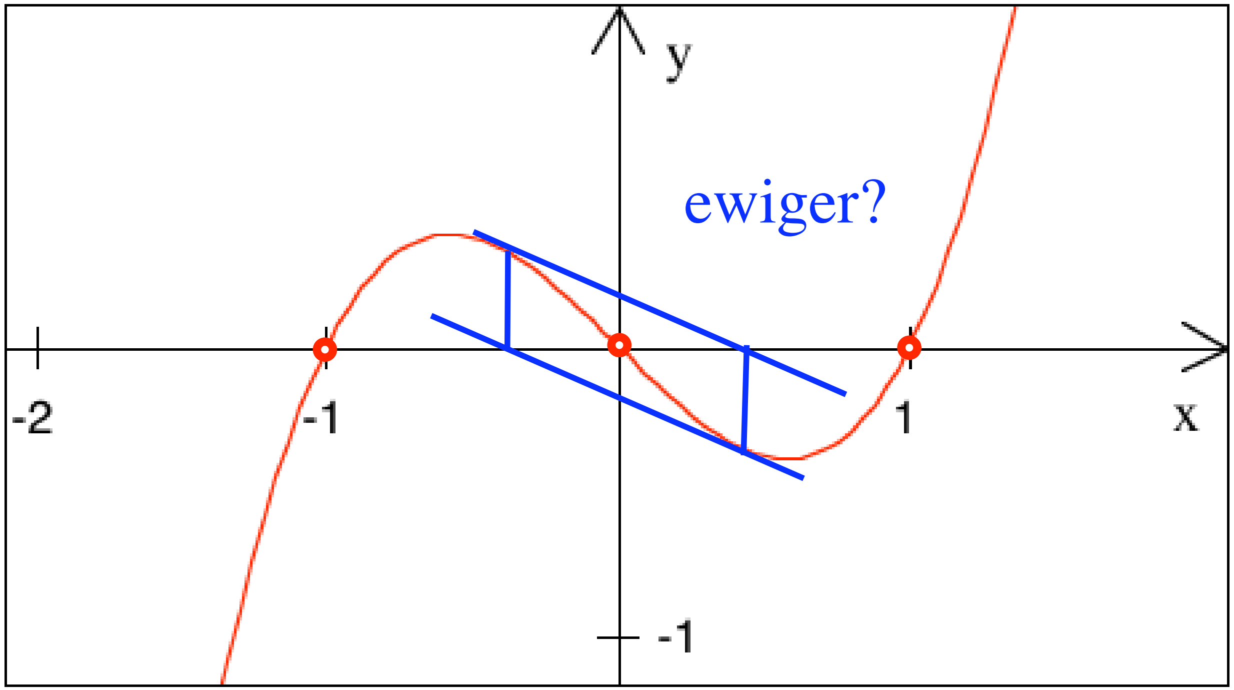
Wählen Sie einige Startwerte. Wohin kommen Sie?

$$y = f(x) = x^3 - x \quad \Rightarrow \quad \text{Nullstellen:} \quad -1, 0, 1$$



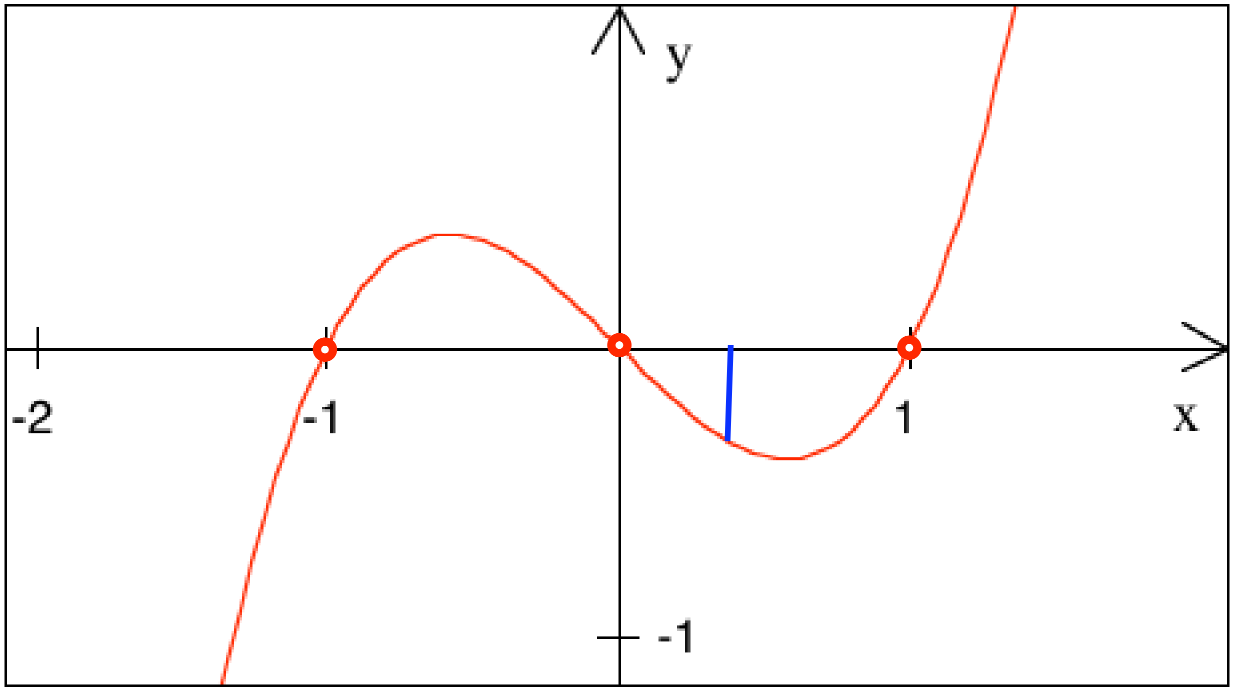
Wählen Sie einige Startwerte. Wohin kommen Sie?

$$y = f(x) = x^3 - x \quad \Rightarrow \quad \text{Nullstellen}: \; -1, 0, 1$$



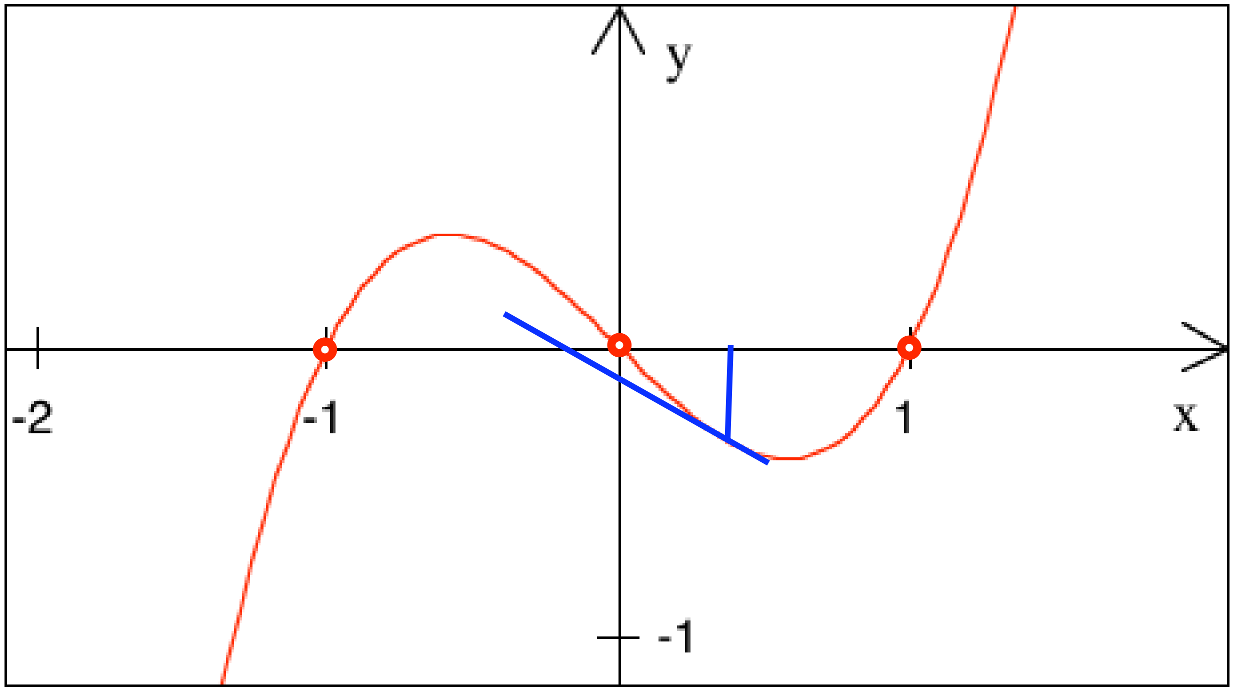
Wählen Sie einige Startwerte. Wohin kommen Sie?

$$y = f(x) = x^3 - x \quad \Rightarrow \quad \text{Nullstellen:} \quad -1, 0, 1$$



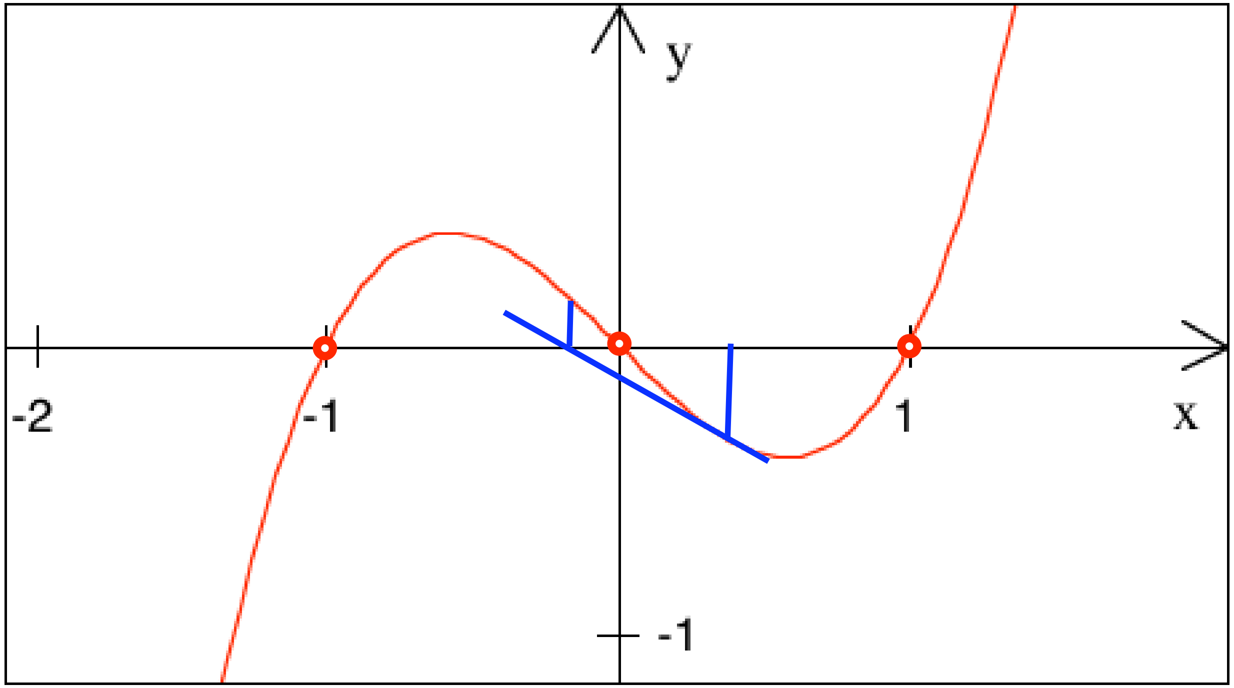
Wählen Sie einige Startwerte. Wohin kommen Sie?

$$y = f(x) = x^3 - x \quad \Rightarrow \quad \text{Nullstellen}: \; -1, 0, 1$$



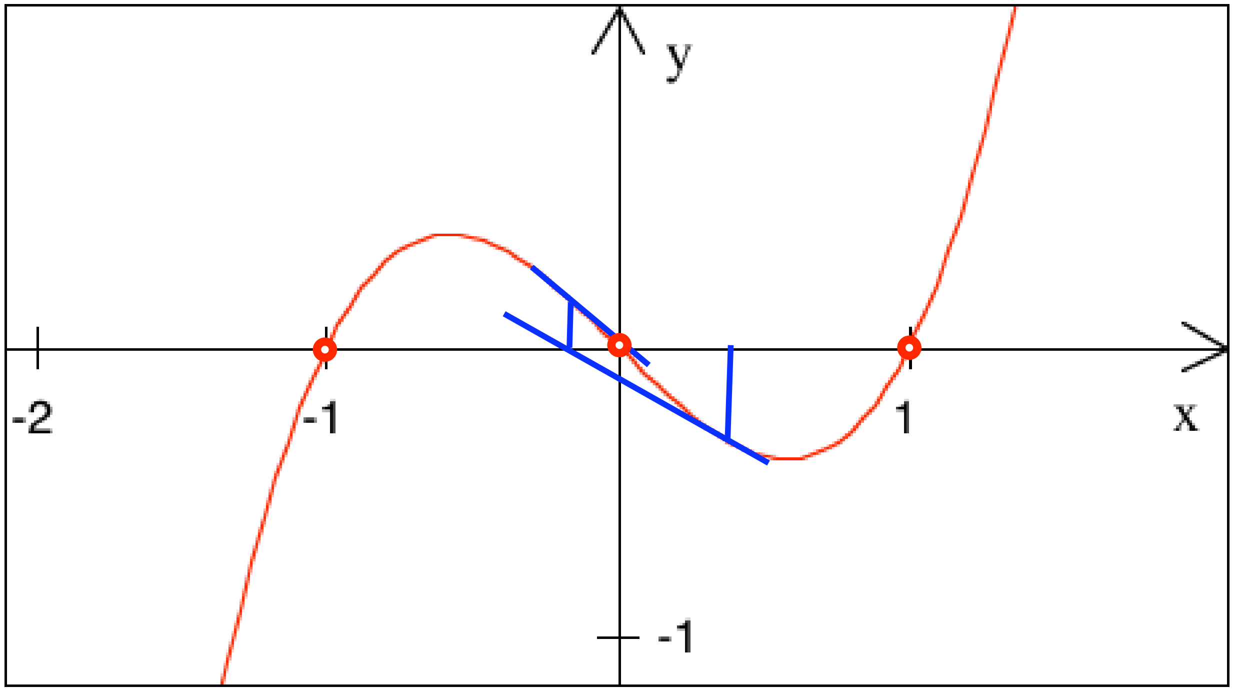
Wählen Sie einige Startwerte. Wohin kommen Sie?

$$y = f(x) = x^3 - x \quad \Rightarrow \quad \text{Nullstellen:} \quad -1, 0, 1$$



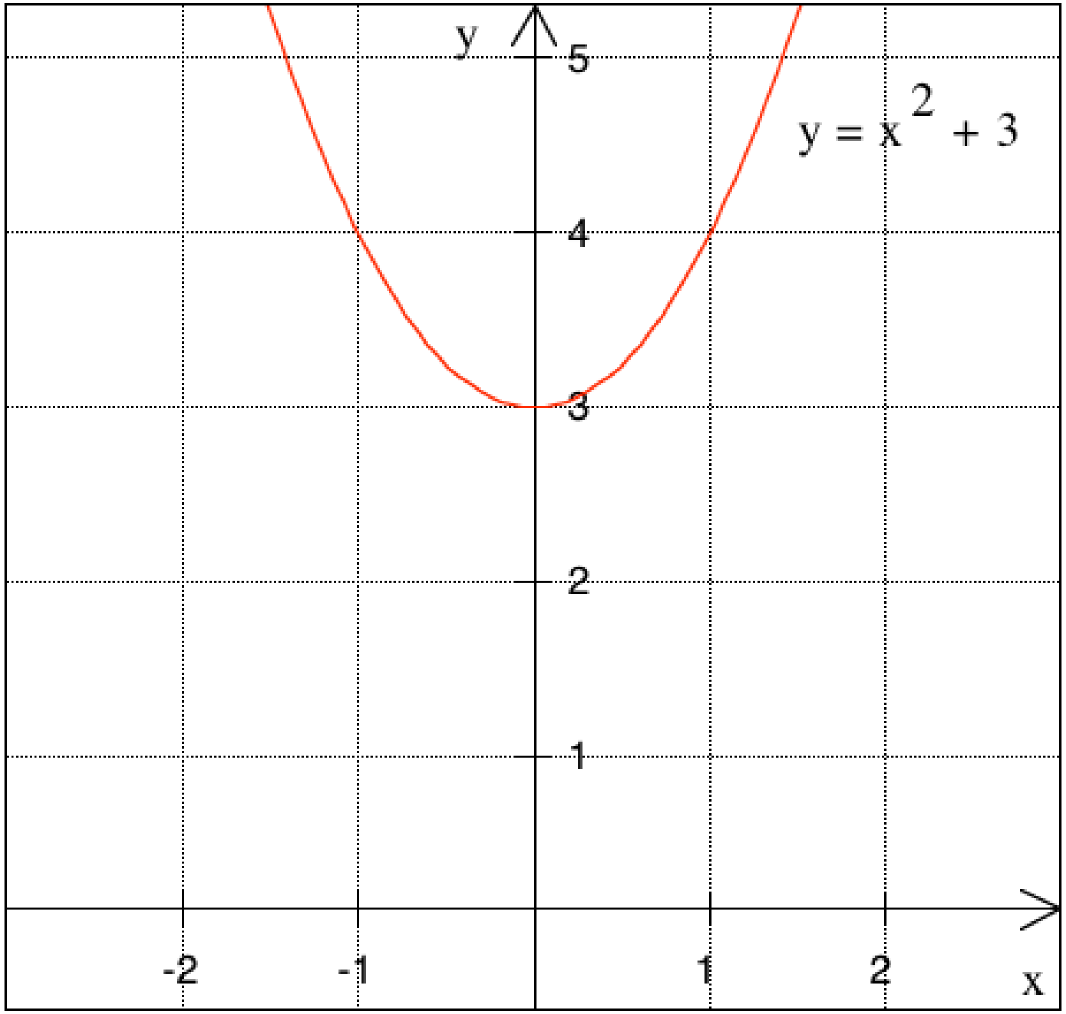
Wählen Sie einige Startwerte. Wohin kommen Sie?

$$y = f(x) = x^3 - x \quad \Rightarrow \quad \text{Nullstellen:} \quad -1, 0, 1$$

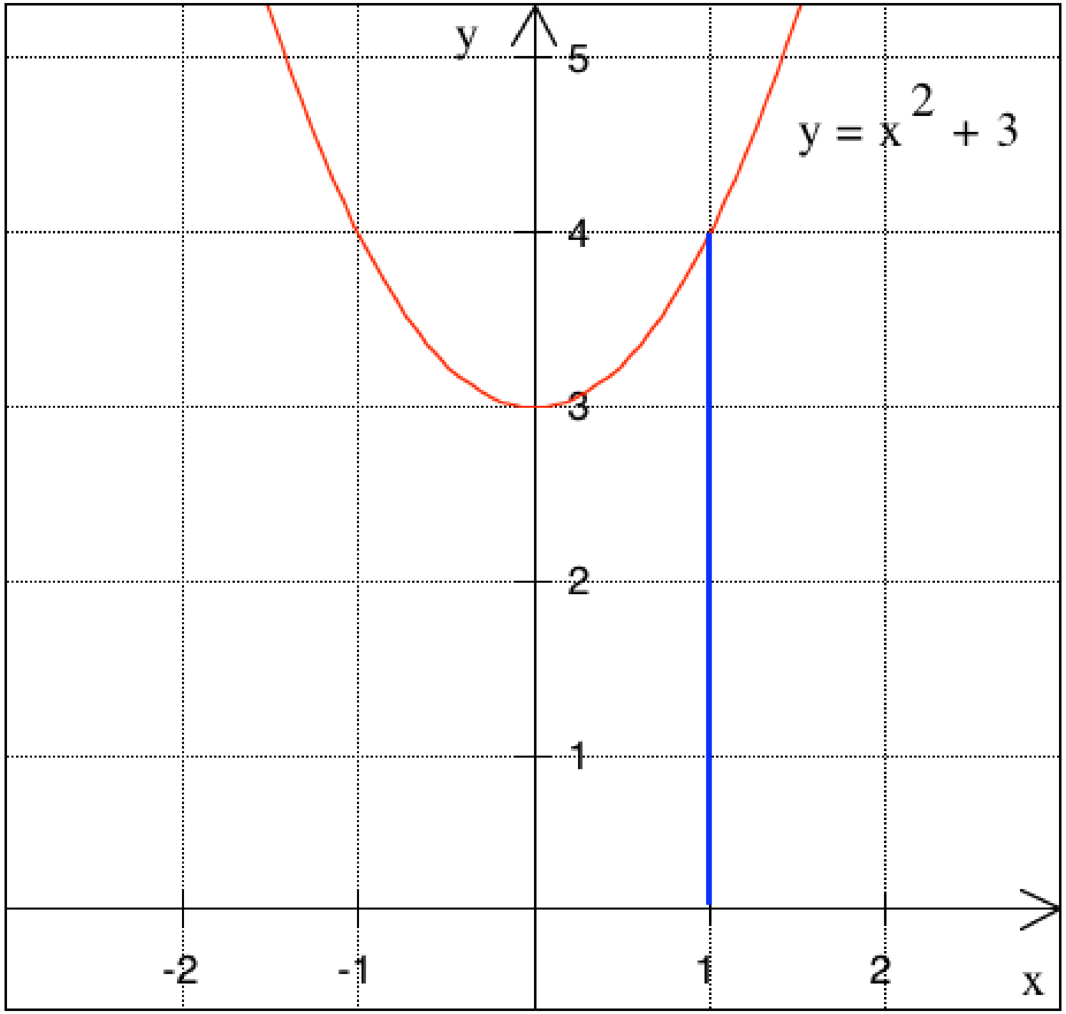


Wählen Sie einige Startwerte. Wohin kommen Sie?

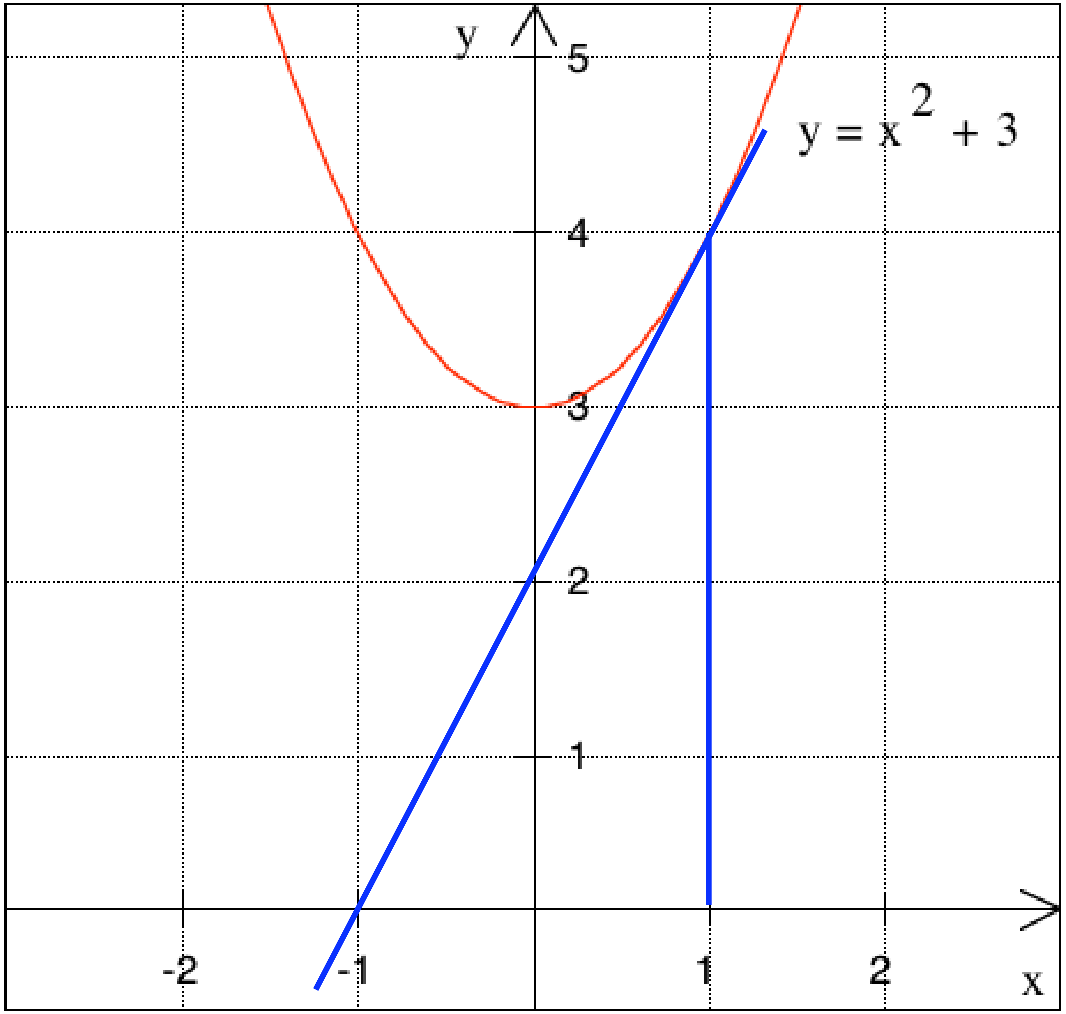
Keine Nullstelle: $f(x) = x^2 + 3$



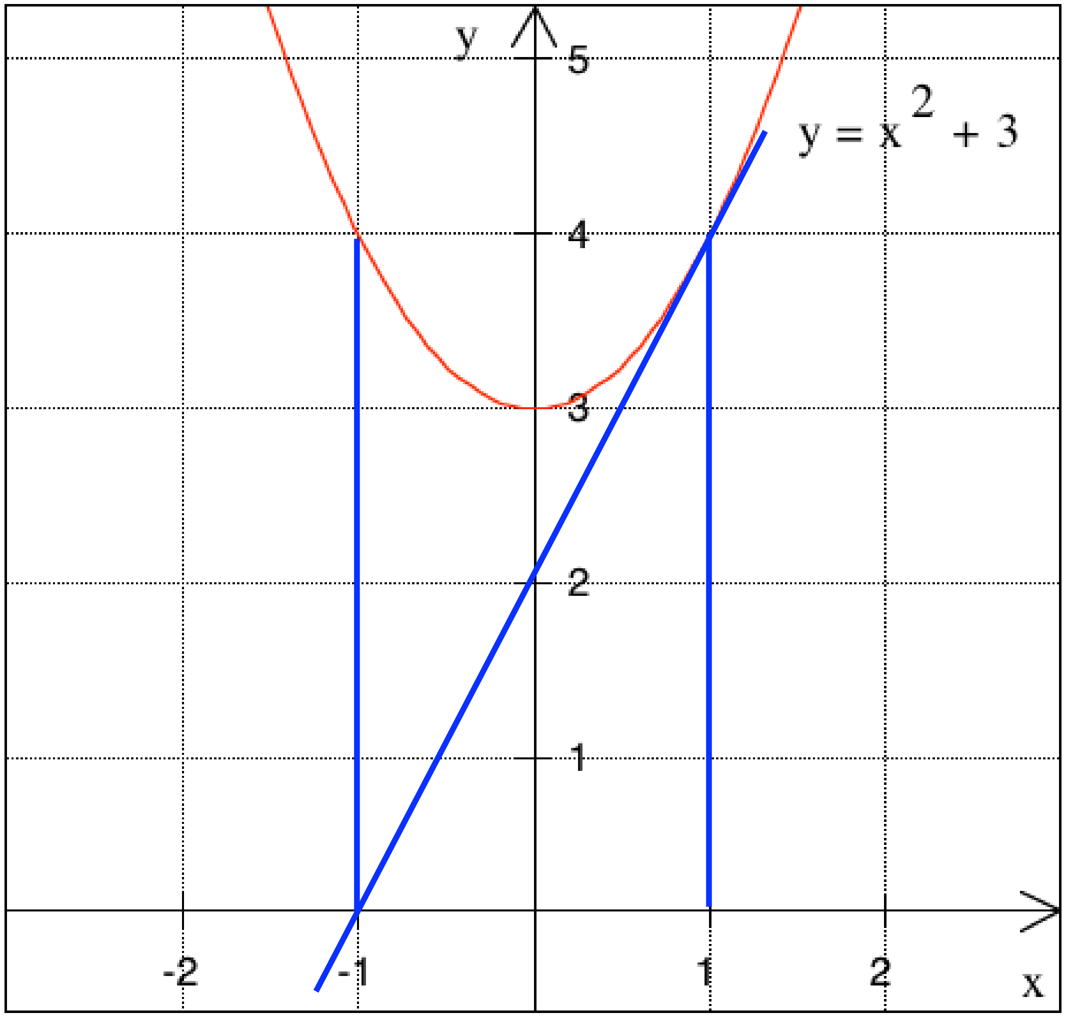
Keine Nullstelle: $\quad f(x) = x^2 + 3$



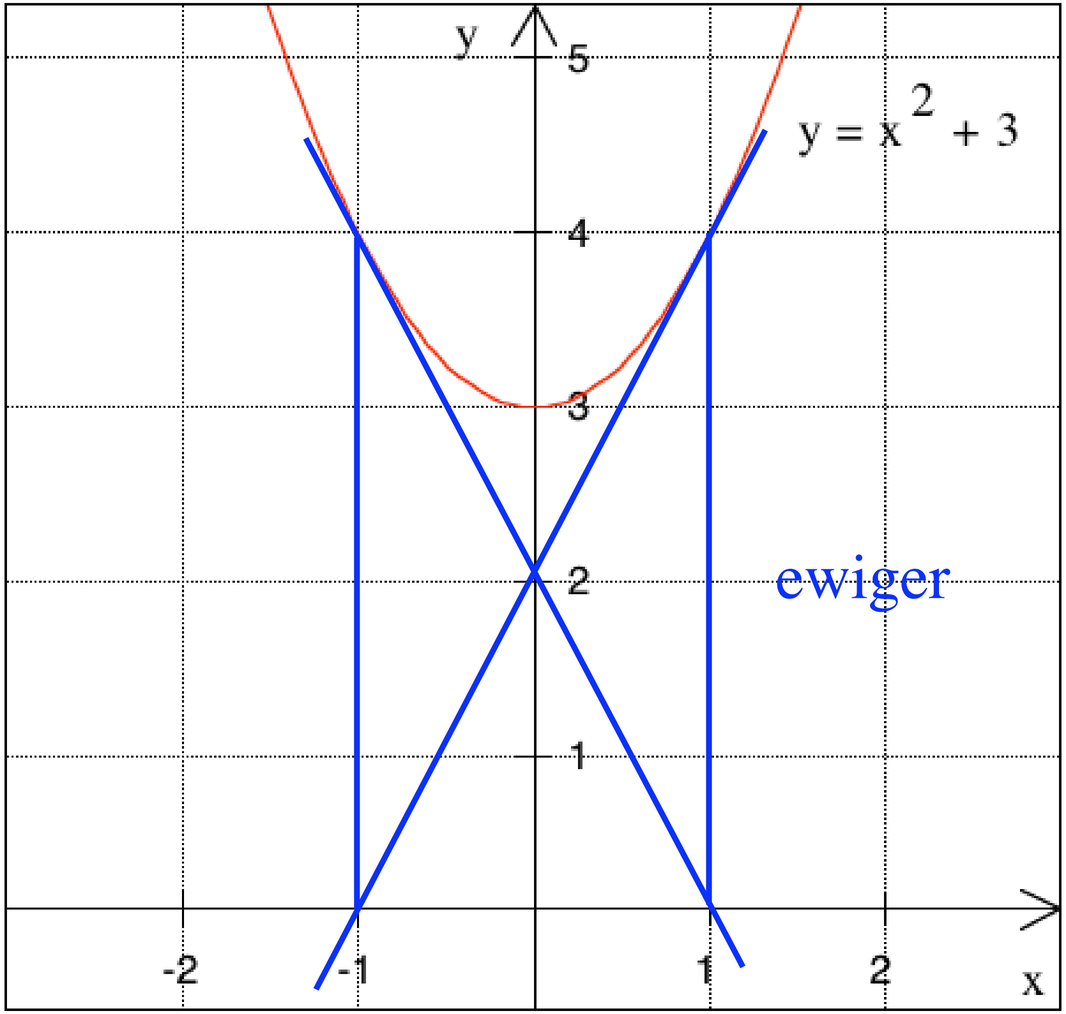
Keine Nullstelle: $f(x) = x^2 + 3$



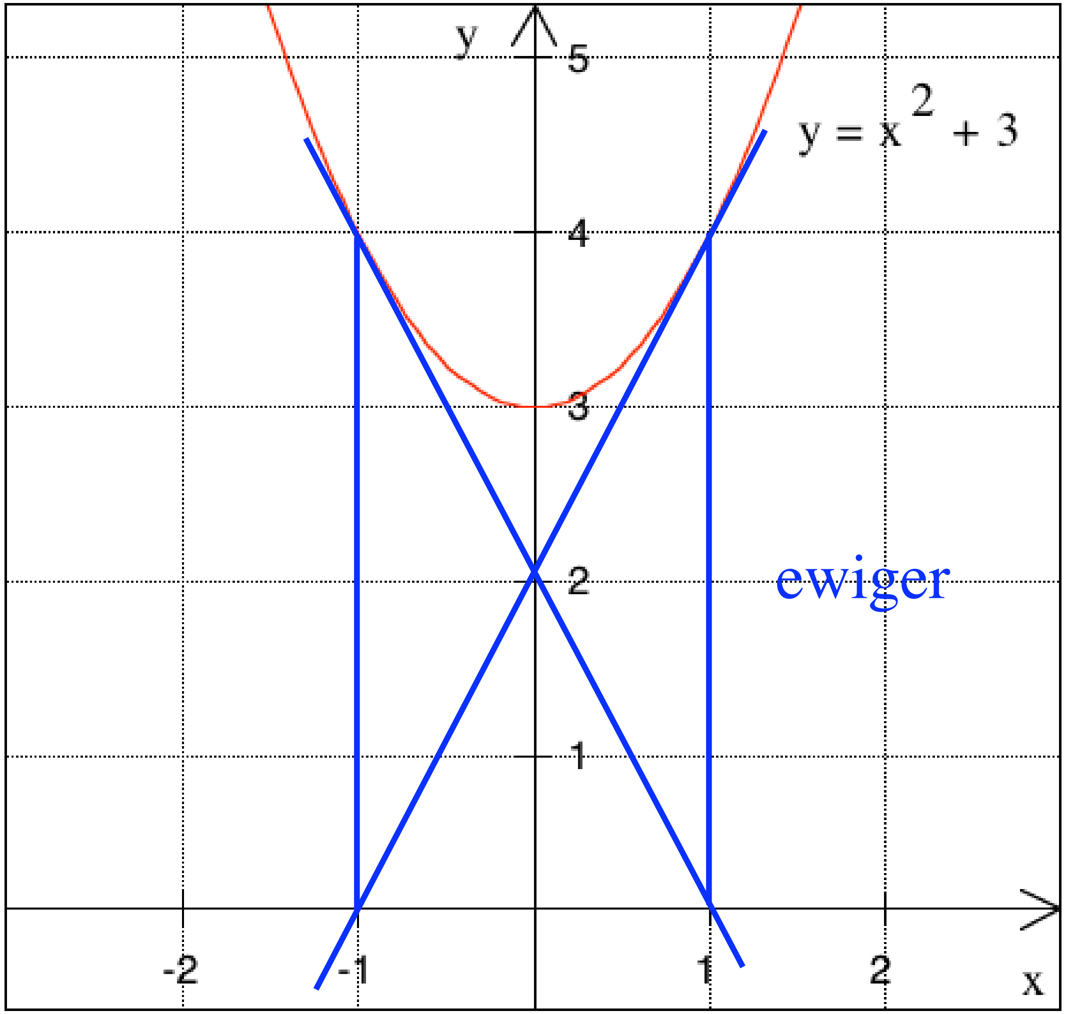
Keine Nullstelle: $f(x) = x^2 + 3$



Keine Nullstelle: $f(x) = x^2 + 3$



Keine Nullstelle: $\quad f(x) = x^2 + 3$



n	x_n
0	1.000000000
1	-1.000000000
2	1.000000000
3	-1.000000000
4	1.000000000
5	-1.000000000
6	1.000000000

n	x_n
0	1.100000000
1	-0.813636364
2	1.436757237
3	-0.325639091
4	4.443507033
5	1.884182317
6	0.145989854
7	-10.201691680
8	-4.953811402
9	-2.174108546
10	-0.397116320
11	3.578672654
12	1.370186507
13	-0.409648223
14	3.456854163
15	1.294506549
16	-0.511489415
17	2.676867300
18	0.778077147
19	-1.538790827
20	0.205395944
21	-7.200269980
22	-3.391809468
23	-1.253662912
24	0.569662423
25	-2.348307188
26	-0.535395595
27	2.533968885
28	0.675027687
29	-1.884617233
30	-0.146391030
31	10.173333959
32	4.939222690
33	2.165919834
34	0.390413510
35	-3.646873407
36	-1.412125470
37	0.356165822
38	-4.033438540
39	-1.644828144
40	0.089535304
41	-16.708400481
42	-8.264425040
43	-3.950711691
44	-1.595677418
45	0.142200914
46	-10.477354912
47	-5.095511551
48	-2.253379051
49	-0.461022558
50	3.023125610
51	1.015387590
52	-0.969574606
53	1.062282919
54	-0.880911745
55	1.262325375
56	-0.557120484
57	2.413855568
58	0.585515294
59	-2.269088330
60	-0.473485721
61	2.931251299
62	0.953898798
63	-1.095544459
64	0.821409996
65	-1.415423253
66	0.352042052
67	-4.084833582
68	-1.675204769
69	0.057810540
70	-25.917920511
71	-12.901085242
72	-6.334273333
73	-2.930329708
74	-0.953277063
75	1.096880918
76	-0.819073531

Wurzelziehen von „Hand“:

+, –, ×, ÷ mit Taschenrechner

√-Taste defekt

Suchen und probieren:

$$\sqrt{c} = ? \qquad x^2 = c \quad \Leftrightarrow \quad \frac{c}{x} = x$$

Suchen und probieren:

$$\sqrt{c} = ? \qquad x^2 = c \quad \Leftrightarrow \quad \frac{c}{x} = x$$

Beispiel

$$\sqrt{3} = ? \qquad x^2 = 3 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{3}{x} = x$$

Suchen und probieren:

$$\sqrt{c} = ? \qquad x^2 = c \quad \Leftrightarrow \quad \frac{c}{x} = x$$

Beispiel

$$\sqrt{3} = ? \qquad x^2 = 3 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{3}{x} = x$$

Startwert: $x_0 = 2 \quad \Rightarrow \quad \dfrac{3}{x_0} = \dfrac{3}{2} = 1.5$

Suchen und probieren:

$$\sqrt{c} = ? \qquad x^2 = c \quad \Leftrightarrow \quad \frac{c}{x} = x$$

Beispiel

$$\sqrt{3} = ? \qquad x^2 = 3 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{3}{x} = x$$

Startwert: $x_0 = 2 \quad \Rightarrow \quad \frac{3}{x_0} = \frac{3}{2} = 1.5$

$\Rightarrow$ 2 ist zu groß, 1.5 ist zu klein

2 ist zu groß, 1.5 ist zu klein

2 ist zu groß, 1.5 ist zu klein

$$x_1 = \frac{2+1.5}{2} = 1.75$$

2 ist zu groß, 1.5 ist zu klein

$$x_1 = \frac{2+1.5}{2} = 1.75 \quad \Rightarrow \quad \frac{3}{x_1} = \frac{3}{1.75} = 1.714285714$$

2 ist zu groß, 1.5 ist zu klein

$$x_1 = \frac{2+1.5}{2} = 1.75 \quad \Rightarrow \quad \frac{3}{x_1} = \frac{3}{1.75} = 1.714285714$$

$\Rightarrow$ 1.75 ist zu groß, 1.714285714 ist zu klein

2 ist zu groß, 1.5 ist zu klein

$$x_1 = \frac{2+1.5}{2} = 1.75 \quad \Rightarrow \quad \frac{3}{x_1} = \frac{3}{1.75} = 1.714285714$$

$\Rightarrow$ 1.75 ist zu groß, 1.714285714 ist zu klein

$$x_2 = \frac{1.75+1.714285714}{2} = 1.73214287 \quad \Rightarrow \quad \frac{3}{x_2} = \frac{3}{1.73214287} = 1.731958763$$

2 ist zu groß, 1.5 ist zu klein

$$x_1 = \frac{2+1.5}{2} = 1.75 \quad \Rightarrow \quad \frac{3}{x_1} = \frac{3}{1.75} = 1.714285714$$

$\Rightarrow$ 1.75 ist zu groß, 1.714285714 ist zu klein

$$x_2 = \frac{1.75+1.714285714}{2} = 1.73214287 \quad \Rightarrow \quad \frac{3}{x_2} = \frac{3}{1.73214287} = 1.731958763$$

$\Rightarrow$ 1.73214287 ist zu groß, 1.731958763 ist zu klein

2 ist zu groß, 1.5 ist zu klein

$$x_1 = \frac{2+1.5}{2} = 1.75 \quad \Rightarrow \quad \frac{3}{x_1} = \frac{3}{1.75} = 1.714285714$$

$\Rightarrow$ 1.75 ist zu groß, 1.714285714 ist zu klein

$$x_2 = \frac{1.75+1.714285714}{2} = 1.73214287 \quad \Rightarrow \quad \frac{3}{x_2} = \frac{3}{1.73214287} = 1.731958763$$

$\Rightarrow$ 1.73214287 ist zu groß, 1.731958763 ist zu klein

$$x_3 = \frac{1.73214287+1.731958763}{2} = 1.73205081 \quad \Rightarrow \quad \frac{3}{x_3} = \frac{3}{1.73205081} = 1.732050805$$

Allgemein:

$$x_1 = \frac{1}{2}\left(x_0 + \frac{c}{x_0}\right)$$

$$x_2 = \frac{1}{2}\left(x_1 + \frac{c}{x_1}\right)$$

$$x_3 = \frac{1}{2}\left(x_2 + \frac{c}{x_2}\right)$$

$$\boxed{x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{c}{x_n}\right)}$$

Dasselbe nach Newton:

Nullstelle von

$$f(x) = x^2 - c$$

Dasselbe nach Newton:

Nullstelle von

$$f(x) = x^2 - c$$

$$f'(x) = 2x$$

Dasselbe nach Newton:

Nullstelle von

$$f(x) = x^2 - c$$

$$f'(x) = 2x$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2 - c}{2x_n} =$$

Dasselbe nach Newton:

Nullstelle von

$$f(x) = x^2 - c$$

$$f'(x) = 2x$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2 - c}{2x_n} = \frac{2x_n^2 - x_n^2 + c}{2x_n} =$$

Dasselbe nach Newton:

Nullstelle von

$$f(x) = x^2 - c$$

$$f'(x) = 2x$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2 - c}{2x_n} = \frac{2x_n^2 - x_n^2 + c}{2x_n} = \frac{x_n^2 + c}{2x_n} =$$

Dasselbe nach Newton:

Nullstelle von

$$f(x) = x^2 - c$$

$$f'(x) = 2x$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2 - c}{2x_n} = \frac{2x_n^2 - x_n^2 + c}{2x_n} = \frac{x_n^2 + c}{2x_n} = \frac{1}{2}\,\frac{x_n^2 + c}{x_n} =$$

Dasselbe nach Newton:

Nullstelle von

$$f(x) = x^2 - c$$

$$f'(x) = 2x$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2 - c}{2x_n} = \frac{2x_n^2 - x_n^2 + c}{2x_n} = \frac{x_n^2 + c}{2x_n} = \frac{1}{2}\,\frac{x_n^2 + c}{x_n} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{c}{x_n}\right)$$

Dasselbe nach Newton:

Nullstelle von

$$f(x) = x^2 - c$$

$$f'(x) = 2x$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2 - c}{2x_n} = \frac{2x_n^2 - x_n^2 + c}{2x_n} = \frac{x_n^2 + c}{2x_n} = \frac{1}{2}\,\frac{x_n^2 + c}{x_n} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{c}{x_n}\right)$$

$$\boxed{x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{c}{x_n}\right)}$$