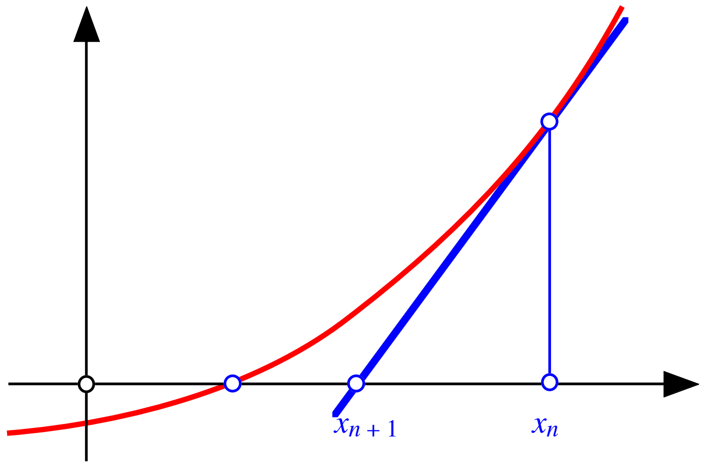
Hans Walser

Mathematik 1 für Naturwissenschaften



Modul 106

Nullstellen. Verfahren von NEWTON-RAPHSON

UNI
BASEL

Inhalt

Modul 106 für die Lehrveranstaltung: *Mathematik 1 für Naturwissenschaften*

Winter 2002/03 Probeausgabe
Winter 2003/04 Überarbeitung, Straffung
Winter 2004/05 Fehlerbereinigung
Winter 2005/06 Geändertes Layout. Kürzung
Winter 2006/07 Kleine Ergänzung. MathType
Herbst 2007 Kleine Erweiterung. Kürzungen
Herbst 2008 Kleine Ergänzung
Herbst 2009 Kleine Erweiterungen
Herbst 2010 Kleine Erweiterung und Kürzung
Herbst 2013 Grafische Überarbeitung
Herbst 2014 Fehlerkorrekturen

last modified: 24. Oktober 2013

Hans Walser
Mathematisches Institut, Rheinsprung 21, 4051 Basel
www.walser-h-m.ch/hans

1 Der kleine Unterschied

Gleichung:

$$\frac{1}{10}x^3 - \frac{1}{5}x^2 - \frac{11}{10}x + \frac{6}{5} = 0$$

Funktion:

$$y = f(x) = \frac{1}{10}x^3 - \frac{1}{5}x^2 - \frac{11}{10}x + \frac{6}{5}$$

1.1 Lösungen einer Gleichung

```
> Gleichung:=1/10*(x^3-2*x^2-11*x+12)=0;
```

$$Gleichung := \frac{1}{10}x^3 - \frac{1}{5}x^2 - \frac{11}{10}x + \frac{6}{5} = 0$$

```
> Loesung:=solve(Gleichung, x);
```

$$Loesung := 1, -3, 4$$

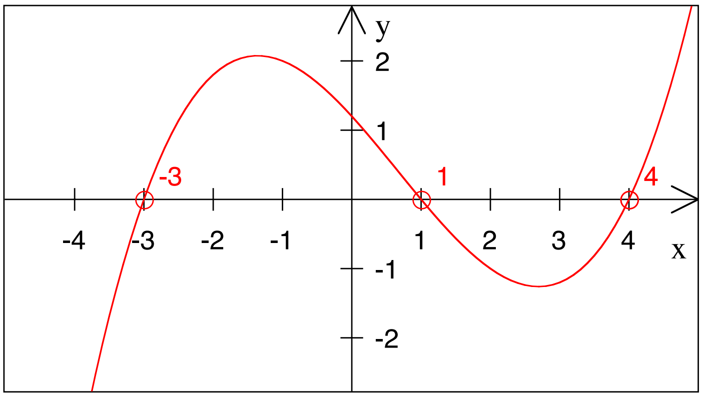
Wir haben in der Schule eine Lösungsformel für quadratische Gleichungen gelernt. Es gibt analoge (wenn auch kompliziertere) Formeln für kubische Gleichungen und solche vierten Grades. Lange Zeit war die Frage offen, ob es auch Formeln für Gleichungen fünften und höheren Grades gibt. Die Arbeiten von Niels ABEL und Evariste GALOIS zeigten, dass dies nicht allgemein möglich ist.

Niels Henrik ABEL, 1802 - 1829

Evariste GALOIS, 1811 - 1832

1.2 Nullstellen einer Funktion

Die Funktion $y = f(x) = \frac{1}{10}x^3 - \frac{1}{5}x^2 - \frac{11}{10}x + \frac{6}{5}$ hat gemäß ihrem Funktionsgraphen die Nullstellen $-3, 1, 4$.



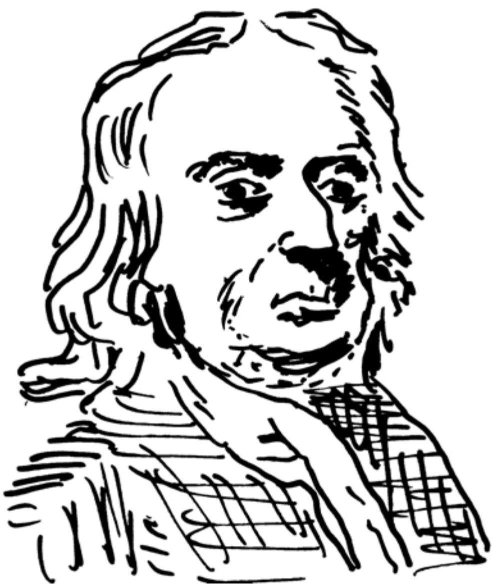
Nullstellen von $y = f(x) = \frac{1}{10}x^3 - \frac{1}{5}x^2 - \frac{11}{10}x + \frac{6}{5}$

1.3 Zusammenhang

Die *Nullstellen einer Funktion f* sind die *Lösungen der Gleichung* $f(x) = 0$.

2 Approximation von Nullstellen nach dem NEWTON-RAPHSON-Verfahren

Newton und Joseph Raphson (1648-1715) entwickelten ein Verfahren, um die Nullstellen einer Funktion zwar nicht exakt, aber beliebig genau zu ermitteln. Voraussetzung ist, dass die Funktion differenzierbar ist.



Sir Isaac NEWTON, 1643 - 1727

2.1 Formaler Zugang

Wir wählen einen Startwert x_0. Dann ist:

$$\underbrace{f(x)}_{\substack{\text{sollte}\\\text{Null}\\\text{werden}}} \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

Wir tun so, als ob $f(x) = 0$, also:

$$0 \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

Daraus ergibt sich:

$$x \approx x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

Dieses x sollte an sich die Nullstelle sein, der Ausdruck $x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$ stimmt aber nicht ganz. Immerhin dürfte dies ein besserer Wert für die Nullstelle sein als der Startwert x_0. Daraus ergibt sich folgende Methode.

2.2 Iterationsverfahren nach NEWTON-RAPHSON

x_0	Startwert (wählen). In der Regel keine Nullstelle
$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$	x_1 ist ein besserer Wert
$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$	x_2 ist noch besser

Nun ist kein Halten mehr:

$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$	gibt (hoffentlich) immer bessere Werte

Hoffnung: $\lim\limits_{n \to \infty} x_n =$ exakte Nullstelle

2.2.1 Beispiel

Wir bestimmen die Nullstelle(n) der Funktion:

$$y = f(x) = \tfrac{1}{10}x^3 - \tfrac{1}{5}x^2 - \tfrac{11}{10}x + \tfrac{6}{5}$$

Es ist dann:

$$y' = f'(x) = \tfrac{3}{10}x^2 - \tfrac{2}{5}x - \tfrac{11}{10}$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{\frac{1}{10}x_n^3 - \frac{1}{5}x_n^2 - \frac{11}{10}x_n + \frac{6}{5}}{\frac{3}{10}x_n^2 - \frac{2}{5}x_n - \frac{11}{10}} = x_n - \frac{x_n^3 - 2x_n^2 - 11x_n + 12}{3x_n^2 - 4x_n - 11}$$

Für den Startwert $x_0 = 0$ erhalten wir mit Excel:

n	x_n
0	0.000000000
1	1.090909091
2	0.999171816
3	0.999999943
4	1.000000000
5	1.000000000
6	1.000000000

Für den Startwert $x_0 = 100$ liefert Excel:

n	x_n
0	100.000000000
1	66.916354050
2	44.874223872
3	30.199802919
4	20.447101511
5	13.990145006
6	9.751738567
7	7.023554368
8	5.347154852
9	4.431522981
10	4.067005333
11	4.002035416
12	4.000001970
13	4.000000000
14	4.000000000
15	4.000000000

Für den Startwert $x_0 = 3$ liefert Excel:

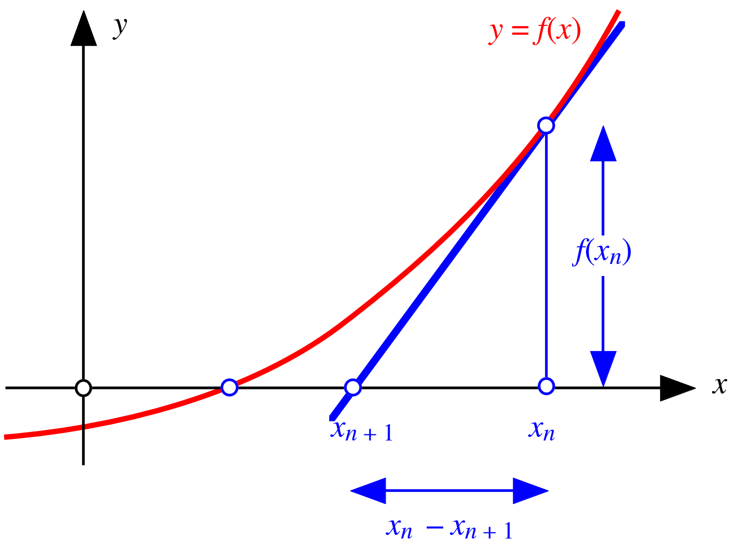
n	x_n
0	3.000000000
1	6.000000000
2	4.767123288
3	4.178116661
4	4.013324831
5	4.000083709
6	4.000000003
7	4.000000000
8	4.000000000
9	4.000000000

Welcher Startwert führt zu welcher Nullstelle?

2.3 Vorgehen allgemein

1. In der Gleichung alles nach links bringen: dadamdadam = 0
2. Linken Teil als Funktionsterm auffassen: $f(x) = 0$
3. Startwert x_0 wählen
4. Rekursionsformel anwenden: $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$
5. Gibt es noch mehr Lösungen?

2.4 Geometrischer Zugang



Schritt von x_n auf x_{n+1}

Wir können die Tangentensteigung auf zwei Arten bestimmen:

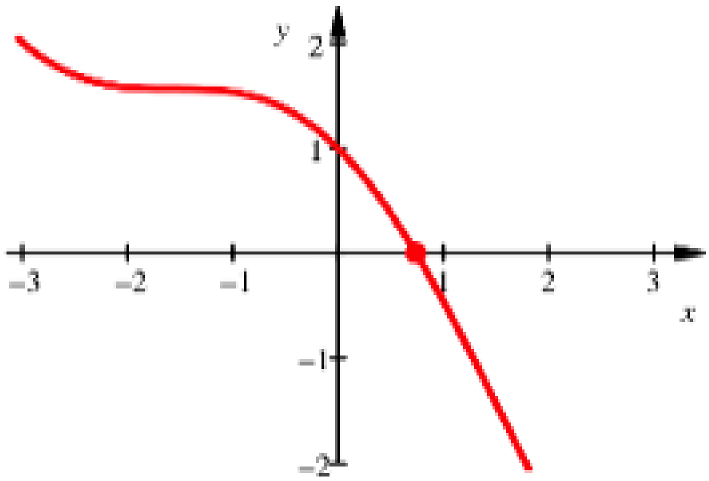
$$f'(x_n) = \frac{f(x_n)}{x_n - x_{n+1}}$$

Daraus ergibt sich die Iterationsformel von NEWTON-RAPHSON:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

2.5 Beispiel

Wir untersuchen die Gleichung $\cos(x) = x$ und wollen das Verfahren von Newton-Raphson für die ersten paar Schritte von Hand durchführen. Wir suchen die Nullstellen der Funktion $f(x) = \cos(x) - x$.



Wo ist die Nullstelle der Funktion $f(x) = \cos(x) - x$?

Offenbar hat die Funktion nur eine Nullstelle. Als Startwert wählen wir $x_0 = 1$.

$$f(x) = \cos(x) - x$$

$$f'(x) = -\sin(x) - 1$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{\cos(x_n) - x_n}{-\sin(x_n) - 1}$$

Dasselbe mit Excel:

n	x_n
0	1.000000000
1	0.750363868
2	0.739112891
3	0.739085133
4	0.739085133
5	0.739085133

Manchmal kann es ziemlich lange gehen, bis wir zum Ziel kommen:

n	x_n	x_n	x_n
0	10.000000000	9.990000000	10.010000000
1	-13.770994202	-13.340205628	-14.215231486
2	199.351177515	33.337516972	4627.812325295
3	-20202.926342871	15.968037018	-1493.801575289
4	31592.341747162	-6.828556606	-746.790007884
5	10059.262159655	9.136660736	-328.992678984
6	-1334.941187693	1.275070994	1081.782973895
7	405.428386581	0.772340880	506.508797719
8	-79.677942223	0.739320921	-958.041090371
9	-38.134489916	0.739085145	160.225153776
10	29.382014907	0.739085133	-1.635852333
11	-253.798182123	0.739085133	740.940190946
12	414.900057058	0.739085133	-624.313991957
13	72.331780110	0.739085133	1971.704497033
14	-6.949485408	0.739085133	-29625.273346810
15	13.305105508	0.739085133	1711.891733429
16	5.795761387	0.739085133	366.114794127
17	-3.443835593	0.739085133	182.345361145
18	-1.525644330	0.739085133	22.222725587
19	1539.697379088	0.739085133	-7.882938637
20	366.601142266	0.739085133	18726.664944089
21	165.098507280	0.739085133	4962.000227804
22	81.902945060	0.739085133	-465498.881214009
23	15.554253477	0.739085133	220314.910757919
24	1.208239826	0.739085133	108130.664121216
25	0.767114691	0.739085133	-24627.111722149
26	0.739253564	0.739085133	-3509.411890375
27	0.739085139	0.739085133	-703.126576418
28	0.739085133	0.739085133	-250.859703153
29	0.739085133	0.739085133	-77.338260904
30	0.739085133	0.739085133	1064.785786309
31	0.739085133	0.739085133	185.799357952
32	0.739085133	0.739085133	-142.214429486
33	0.739085133	0.739085133	-61.166367368

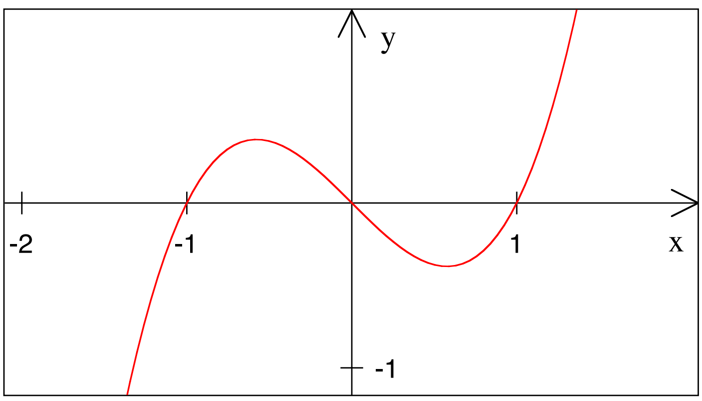
34	0.739085133	0.739085133	-30.561908403
35	0.739085133	0.739085133	-12.762489650
36	0.739085133	0.739085133	4.307078704
37	0.739085133	0.739085133	-53.720424633
38	0.739085133	0.739085133	-13.384672271
39	0.739085133	0.739085133	38.716852093
40	0.739085133	0.739085133	18.083061060
41	0.739085133	0.739085133	-38.586461228
42	0.739085133	0.739085133	136.026412310
43	0.739085133	0.739085133	-569.405560868
44	0.739085133	0.739085133	-235.145989906
45	0.739085133	0.739085133	195.446004025
46	0.739085133	0.739085133	75.198781923
47	0.739085133	0.739085133	-17.357220633
48	0.739085133	0.739085133	-8.625989270
49	0.739085133	0.739085133	19.341346192
50	0.739085133	0.739085133	6.802426367
51	0.739085133	0.739085133	2.836281753
52	0.739085133	0.739085133	-0.077808111
53	0.739085133	0.739085133	1.087557942
54	0.739085133	0.739085133	0.757189095
55	0.739085133	0.739085133	0.739156138
56	0.739085133	0.739085133	0.739085134
57	0.739085133	0.739085133	0.739085133
58	0.739085133	0.739085133	0.739085133

geschafft!

2.6 Probleme

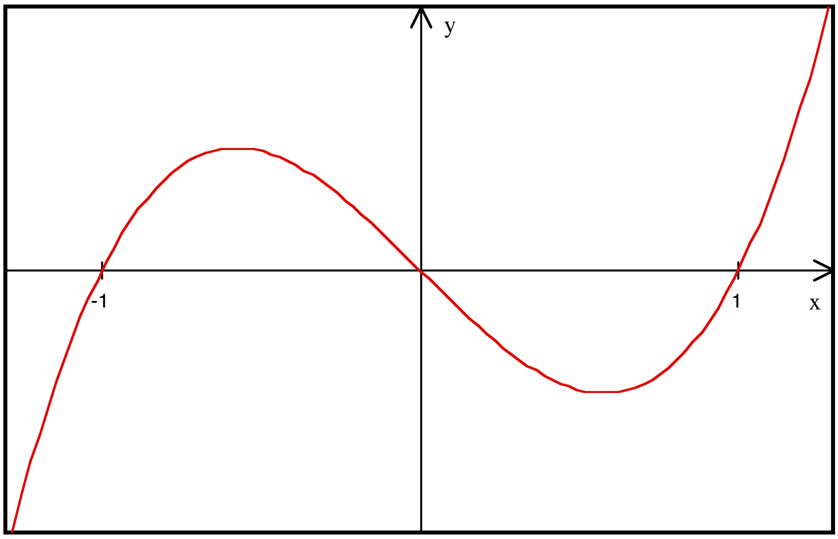
2.6.1 Mehrere Nullstellen

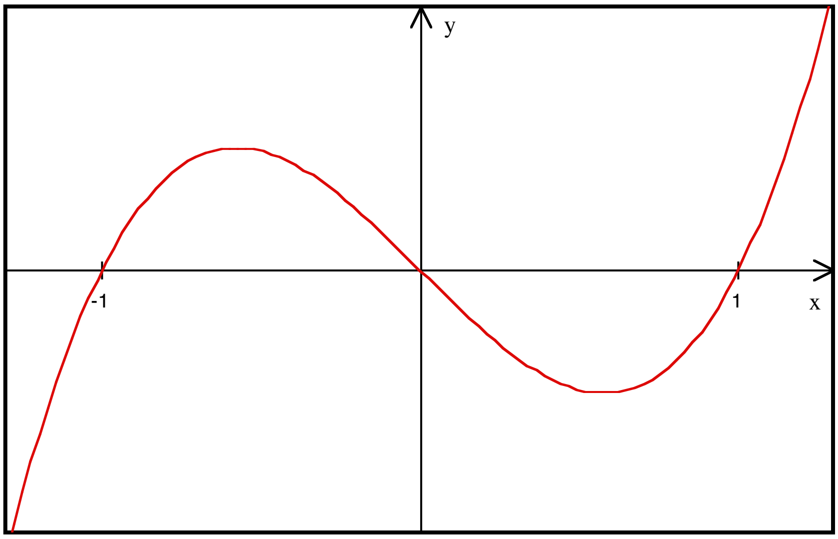
Beispiel: Die Funktion $y = f(x) = x^3 - x$ sieht zunächst ganz harmlos aus, sie hat die drei Nullstellen $-1, 0, +1$.

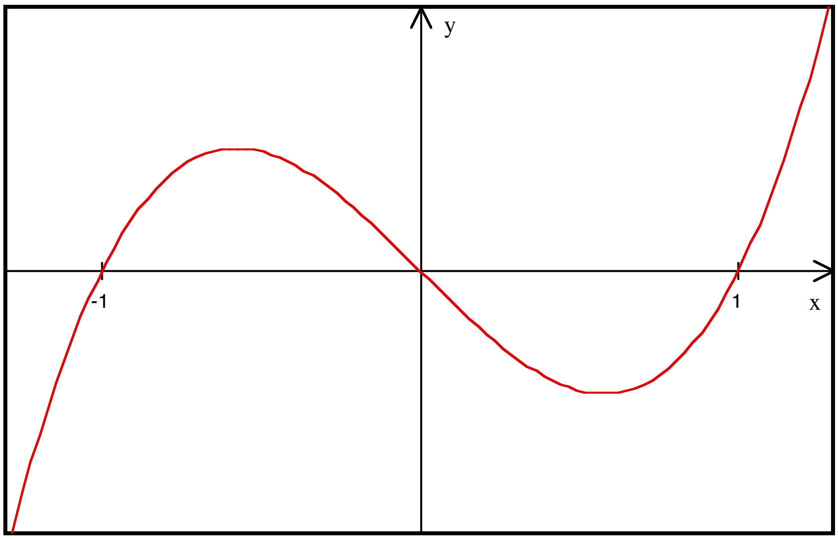


$y = f(x) = x^3 - x$

Welcher Startwert führt nun zu welcher Nullstelle? Wir probieren ein bisschen:

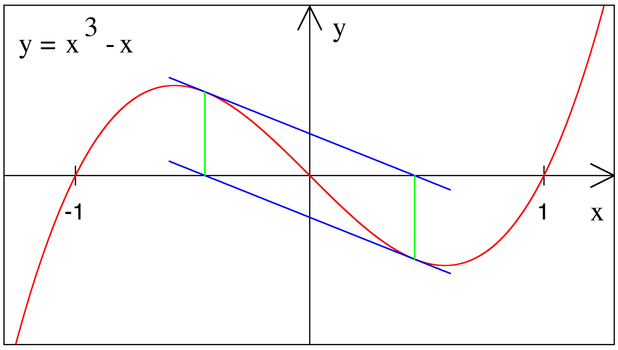






Welcher Startwert führt zu welcher Nullstelle?

Es gibt sogar Startwerte, die zu keiner der drei Nullstellen führen, sondern zu einem “ewigen Paarlauf” führen.



Ewiger Paarlauf

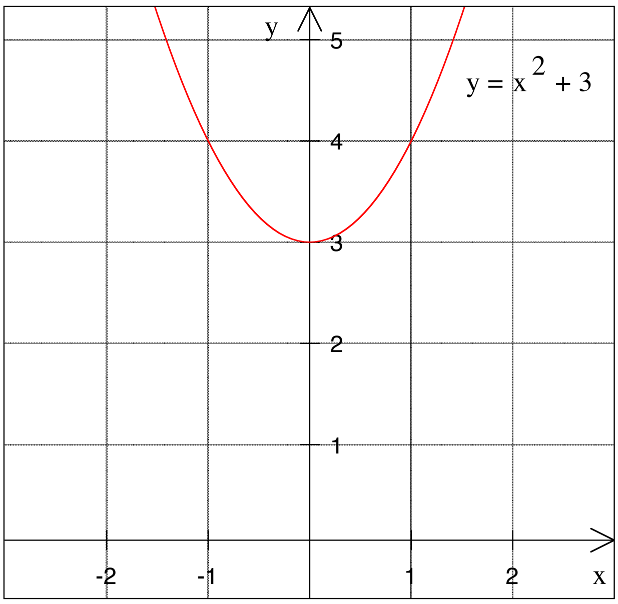
2.6.2 Ungeeigneter Startwert

Wenn wir als Startwert eine stationäre Stelle x_0 wählen, versagt das NEWTON-Verfahren. An einer stationären Stelle ist $f'(x_0) = 0$; es ergäbe sich eine “Division durch Null”. Geometrisch heißt das, dass die Tangente an der Stelle x_0 horizontal ist und die x-Achse nicht schneidet.

2.6.3 Fehlende Nullstelle

Wie verhält sich das NEWTON-Verfahren bei fehlender Nullstelle?

Dazu ein Beispiel: $f(x) = x^2 + 3$



Was ergibt sich beim Startwert $x_0 = 1$?

Beim Startwert $x_0 = 1$ ergibt sich wieder ein ewiger Paarlauf.

Das bestätigt auch die Rechnung mit Excel:

n	x_n
0	1.000000000
1	-1.000000000
2	1.000000000
3	-1.000000000
4	1.000000000
5	-1.000000000
6	1.000000000

Bei einem anderen Startwert kann man selig werden:

n	x_n
0	1.100000000
1	-0.813636364
2	1.436757237
3	-0.325639091
4	4.443507033
5	1.884182317
6	0.145989854
7	-10.201691680
8	-4.953811402
9	-2.174108546
10	-0.397116320
11	3.578672654
12	1.370186507
13	-0.409648223
14	3.456854163
15	1.294506549
16	-0.511489415
17	2.676867300
18	0.778077147
19	-1.538790827
20	0.205395944
21	-7.200269980
22	-3.391809468
23	-1.253662912
24	0.569662423
25	-2.348307188
26	-0.535395595
27	2.533968885
28	0.675027687
29	-1.884617233
30	-0.146391030

31	10.173333959
32	4.939222690
33	2.165919834
34	0.390413510
35	-3.646873407
36	-1.412125470
37	0.356165822
38	-4.033438540
39	-1.644828144
40	0.089535304
41	-16.708400481
42	-8.264425040
43	-3.950711691
44	-1.595677418
45	0.142200914
46	-10.477354912
47	-5.095511551
48	-2.253379051
49	-0.461022558
50	3.023125610
51	1.015387590
52	-0.969574606
53	1.062282919
54	-0.880911745
55	1.262325375
56	-0.557120484
57	2.413855568
58	0.585515294
59	-2.269088330
60	-0.473485721
61	2.931251299
62	0.953898798

63	-1.095544459
64	0.821409996
65	-1.415423253
66	0.352042052
67	-4.084833582
68	-1.675204769
69	0.057810540
70	-25.917920511
71	-12.901085242
72	-6.334273333
73	-2.930329708
74	-0.953277063
75	1.096880918
76	-0.819073531
77	1.421800646
78	-0.344099901
79	4.187149206
80	1.735335638
81	0.003281721
82	-457.075573849
83	-228.534505192
84	-114.260689035
85	-57.117216643
86	-28.532346538
87	-14.213601357
88	-7.001267959
89	-3.286387074
90	-1.186765257

2.7 Wurzelziehen „von Hand”

2.7.1 Rückrechnen und Mittelwert

Wir dürfen den Taschenrechner nur für die Operationen plus, minus, mal und durch verwenden, nicht aber die Wurzeltaste benützen.

Wir wählen $c =$

Beispiel: $\sqrt{c} = ?$

Wir suchen also x so dass $x^2 = c$ oder $\frac{c}{x} = x$.

Wir wählen einen Startwert: $x_0 =$

Nun kontrollieren wir: $\frac{c}{x_0} =$

Nun wählen wir den Mittelwert als besseren Wert:

$$x_1 = \frac{1}{2}\left(x_0 + \frac{c}{x_0}\right) =$$

2.7.2 Newton-Raphson

Wir haben die positive Nullstelle von $f(x) = x^2 - c$ zu bestimmen. Für das Newton-Raphson-Verfahren finden wir:

3 Zusammenfassung

3.1 Grundidee

Nullstellen einer Funktion statt Lösungen einer Gleichung.

Die *Nullstellen einer Funktion f* sind die *Lösungen der Gleichung* $f(x) = 0$.

3.2 Vorgehen

1. In der Gleichung alles nach links bringen: dadamdadam = 0
2. Linken Teil als Funktionsterm auffassen: $f(x) = 0$
3. Startwert x_0 wählen
4. Rekursionsformel anwenden: $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$
5. Gibt es noch mehr Lösungen?

3.3 Probleme

Welcher Startwert führt zu welcher Nullstelle?