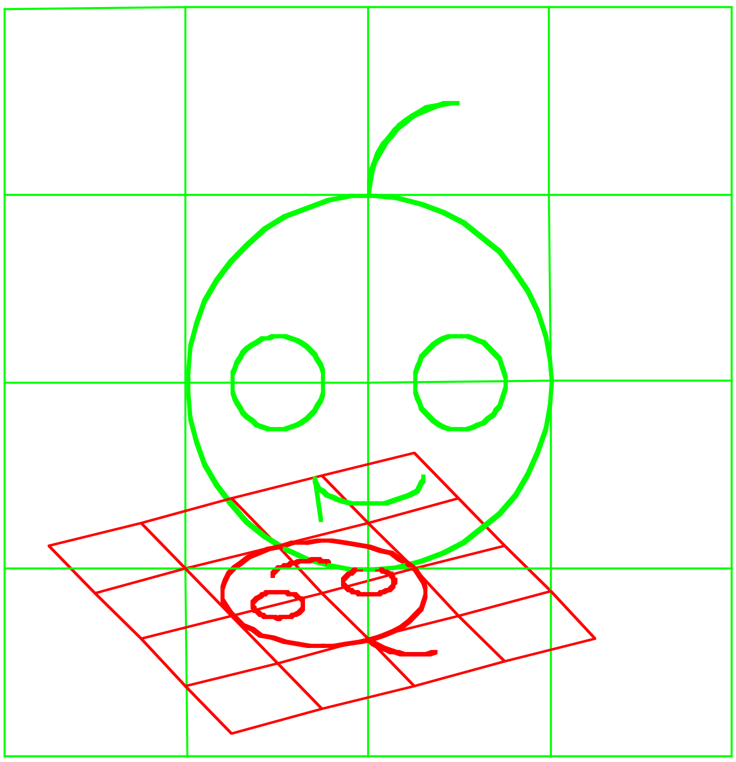
Hans Walser

Mathematatik 1 für Naturwissenschaften



Modul 107

Fixpunkte

Lernumgebung Teil 1

UNI BASEL

Inhalt

1 Bei welcher Temperatur ist es gleich warm? 1
2 Ein blödsinnig einfaches Beispiel 2
3 A4 → A5 3
4 Drehstreckung 7
5 Kontrahierende Funktion? 13
6 Spiel mit Taschenrechner 14
7 Fixpunktmethode 15
8 Fixpunktmethode 15
9 Fixpunktmethode 17
10 Fixpunktmethode 17
11 Fixpunktmethode 18
12 Fixpunktmethode 19
13 Fixpunktmethode 19
14 Fixpunktmethode 20
15 Fixpunktmethode 21
16 Fixpunktmethode 22
17 Fixpunktmethode 22
18 Fixpunktmethode 23

Modul 107 für die Lehrveranstaltung *Mathematik 1 für Naturwissenschaften*

Winter 2003/04	Erstausgabe
Winter 2004/05	Erweiterung
Winter 2005/06	Geändertes Layout
Winter 2006/07	Ergänzungen. Formel Editor revidiert (MathType)
Herbst 2007	Geändertes Layout. Erweiterungen
Herbst 2008	Erweiterungen
Herbst 2009	Fehlerkorrektur. Erweiterung
Herbst 2010	Erweiterung. Unterteilung in zwei Teile
Herbst 2012	Ergänzungen
Herbst 2013	Straffung

last modified: 23. September 2013

Hans Walser
Mathematisches Institut, Rheinsprung 21, 4051 Basel
www.walser-h-m.ch/hans

Etliche Aufgaben verdanke ich Anregungen von H. Beusch, Mülheim (D).

1 Bei welcher Temperatur ist es gleich warm?

Der Aufgabentitel ist natürlich idiotisch. Die Frage ist folgende: Bei welcher Temperatur zeigen die Celsius-Skala und die Fahrenheit-Skala denselben Wert an? (Fixpunkt)

Spezifikation	°Celsius	°Fahrenheit
Siedpunkt Wasser	100°C	212°F
Gefrierpunkt Wasser	0°C	32°F
Differenz	100°C	180°F

Bearbeitung

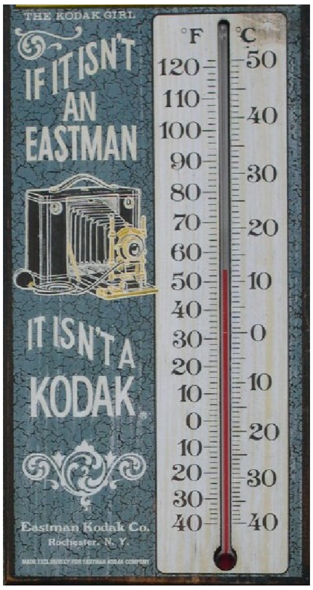
Es bezeichne x die Angabe in der Fahrenheit-Skala und y die Angabe in der Celsius-Skala. Für die Umrechung gilt die Formel:

$$y = f(x) = \tfrac{100}{180}(x - 32)$$

Wir suchen nun den Fixpunkt dieser linearen Funktion (eine lineare Funktion mit Steigung $\neq 1$ hat immer genau einen Fixpunkt).

$$\begin{aligned} x \overset{!}{=} f(x) &= \tfrac{100}{180}(x - 32) \\ x\left(1 - \tfrac{5}{9}\right) &= -\tfrac{5}{9} \cdot 32 \\ x &= \frac{-\frac{160}{9}}{\frac{4}{9}} = -40 \end{aligned}$$

Der Fixpunkt ist bei – 40°. Im folgenden Bild fehlen die Minuszeichen.



Gegenüberstellung der beiden Skalen

2 Ein blödsinnig einfaches Beispiel

Wir lösen die Gleichung $3x = 12$ nach der Fixpunktmethode.

Bearbeitung

Zunächst ist $x = 12 - 2x$. Mit $y = f(x) = 12 - 2x$ suche wir also den Fixpunkt der Funktion f. Dummerweise ist $f'(x) = -2$, also $|f'(x)| > 1$; wir haben einen labilen Fixpunkt. Somit wechseln wir zur Umkehrfunktion g:

$$\begin{aligned} &y = f(x) = 12 - 2x \\ &x = 12 - 2y \\ &y = 6 - \tfrac{1}{2}x \\ &y = g(x) = 6 - \tfrac{1}{2}x \end{aligned}$$

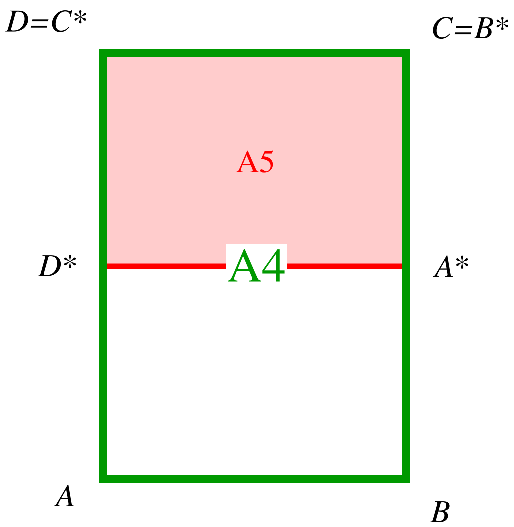
Wir suchen nun den Fixpunkt von g. Mit zum Beispiel dem Startwert $x_0 = 0$ erhalten wir:

n	x[n]	Fehler
0	0.00000000	-4.00000000
1	6.00000000	2.00000000
2	3.00000000	-1.00000000
3	4.50000000	0.50000000
4	3.75000000	-0.25000000
5	4.12500000	0.12500000
6	3.93750000	-0.06250000
7	4.03125000	0.03125000
8	3.98437500	-0.01562500
9	4.00781250	0.00781250
10	3.99609375	-0.00390625

Der Fehlbetrag zum richtigen Wert 4 wird mit jedem Schritt halbiert.

3 A4 → A5

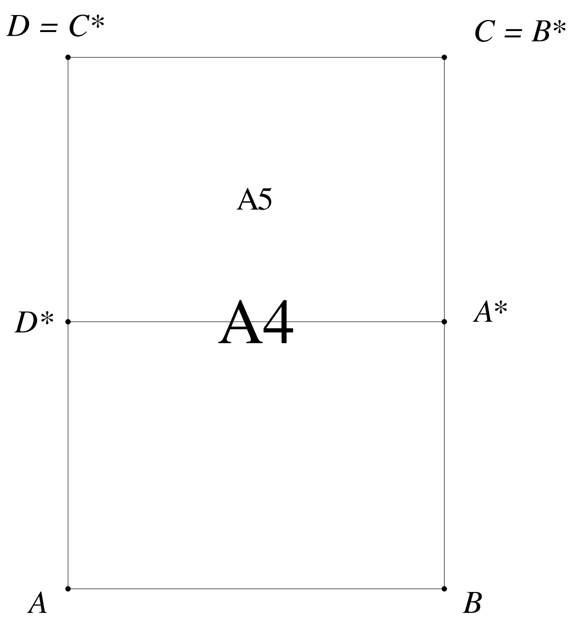
Wird ein A4-Blatt halbiert, entstehen zwei A5-Blätter. Wo ist der Fixpunkt der kontrahierenden Abbildung, welche das Rechteck $ABCD$ auf das Rechteck $A^*B^*C^*D^*$ abbildet? (Ganzes A4-Blatt auf obere Hälfte). Suchen Sie zwei (oder mehr) verschiedene Lösungswege.



A4 → A5

Ergebnis

Disposition gemäß Figur:

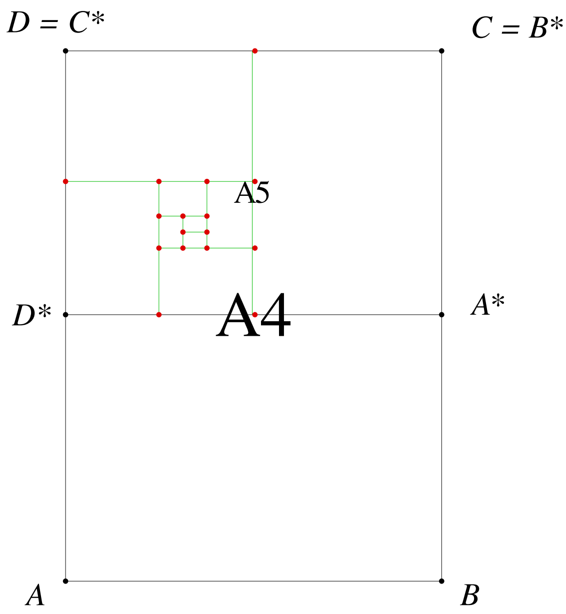


Disposition

Der Drehwinkel ist $\frac{\pi}{2}$, der Streckfaktor $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (Schrumpfung).

Erster Lösungsweg

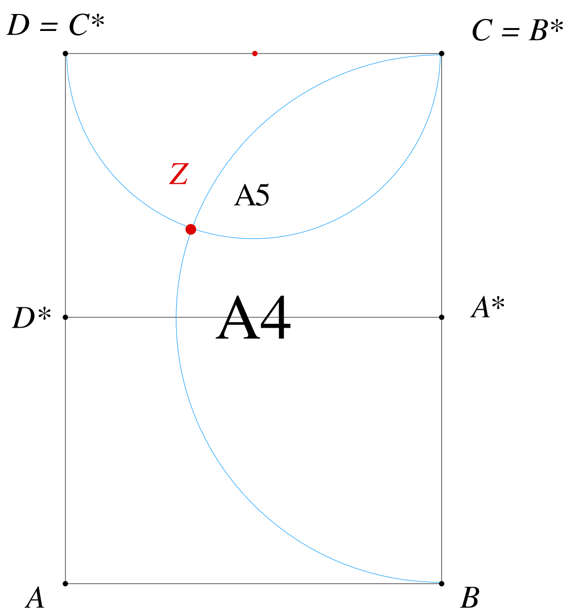
Einschachteln (approximative Lösung)



Einschachteln

Zweiter Lösungsweg

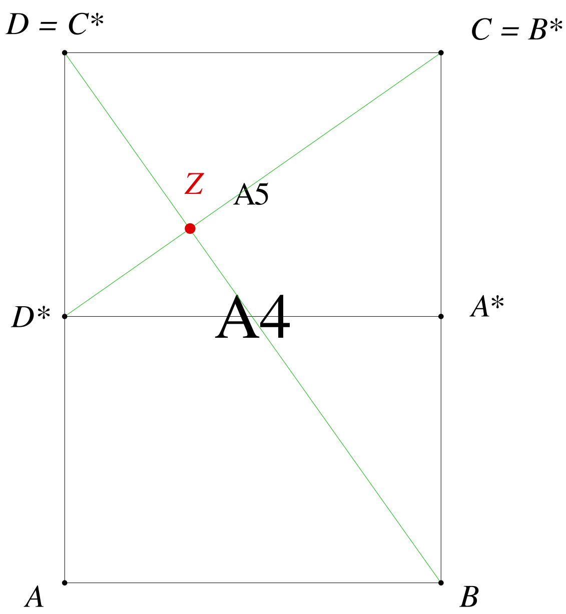
Ortsbogen zu $\frac{\pi}{2}$, d.h. Thaleskreise, über $\overline{BB^*}$ und $\overline{CC^*}$



Thaleskreise

Dritter Lösungsweg

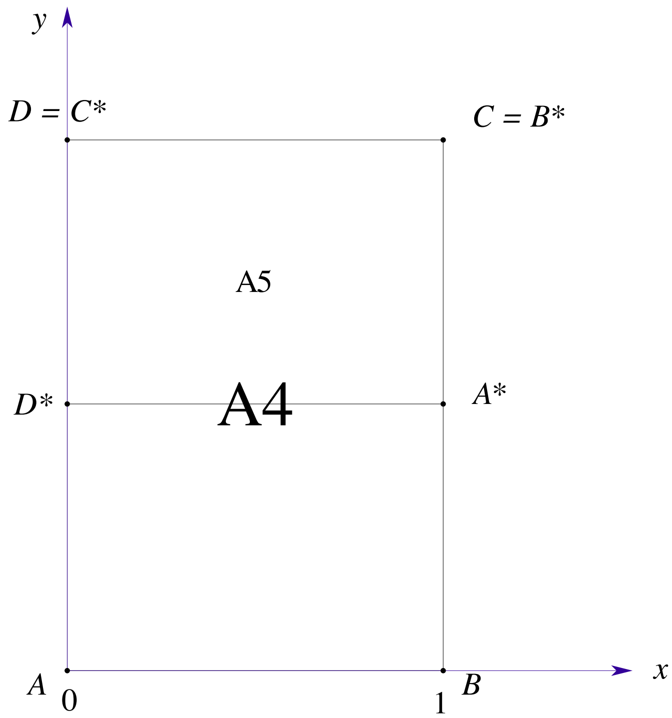
Diagonalen und Nachdenken



Diagonalen

Vierter Lösungsweg

Komplexe Ebene und Fixpunkt berechnen.



Komplexe Zahlen

Ansatz: $w = az + b$

Aus $A = 0 \mapsto A^* = 1 + \mathrm{i}\frac{\sqrt{2}}{2}$ und $B = 1 \mapsto B^* = 1 + \mathrm{i}\sqrt{2}$ folgt:

$$1 + \mathrm{i}\frac{\sqrt{2}}{2} = b$$

$$1 + \mathrm{i}\sqrt{2} = a + b \Rightarrow a = \mathrm{i}\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Und weiter $w = az + b = \mathrm{i}\frac{\sqrt{2}}{2}z + 1 + \mathrm{i}\frac{\sqrt{2}}{2}$ mit dem Fixpunkt $z = \frac{b}{1-a} = \frac{1}{3} + \mathrm{i}\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

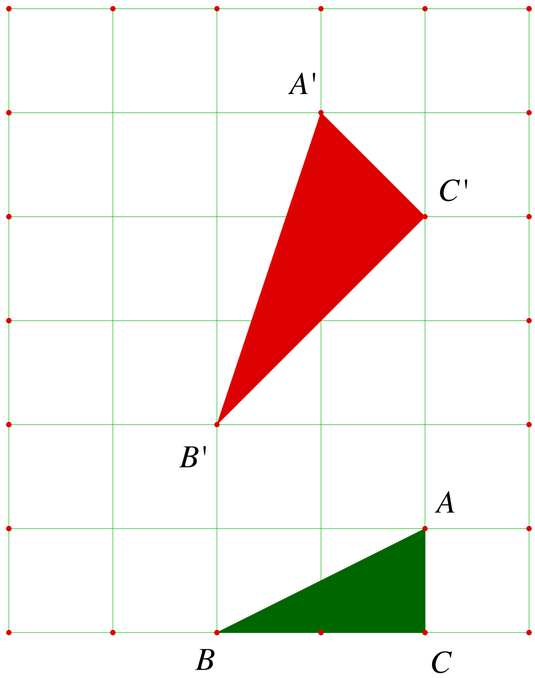
Fünfter Lösungsweg

Wer findet einen fünften Lösungsweg?

4 Drehstreckung

Gesucht ist das Zentrum Z der Drehstreckung, welche das Dreieck ABC auf das Dreieck $A'B'C'$ abbildet. Wie groß sind Drehwinkel und Streckfaktor?

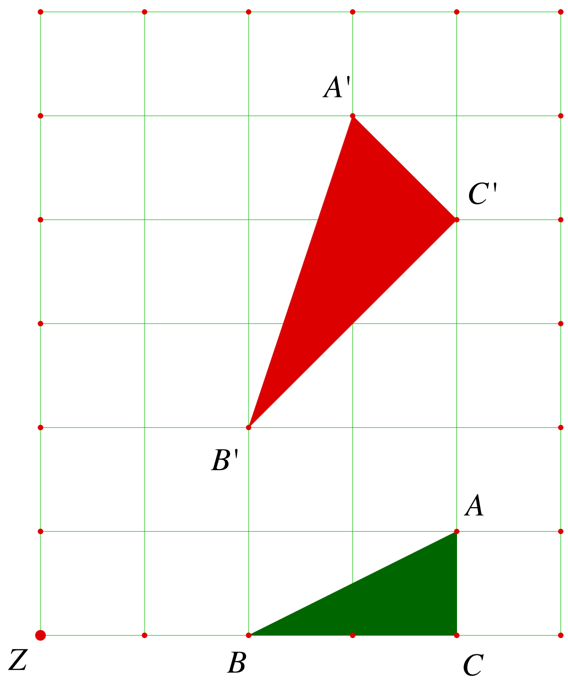
Versuchen Sie es mit verschiedenen Lösungswegen.



Drehstreckung?

Erster Lösungsweg

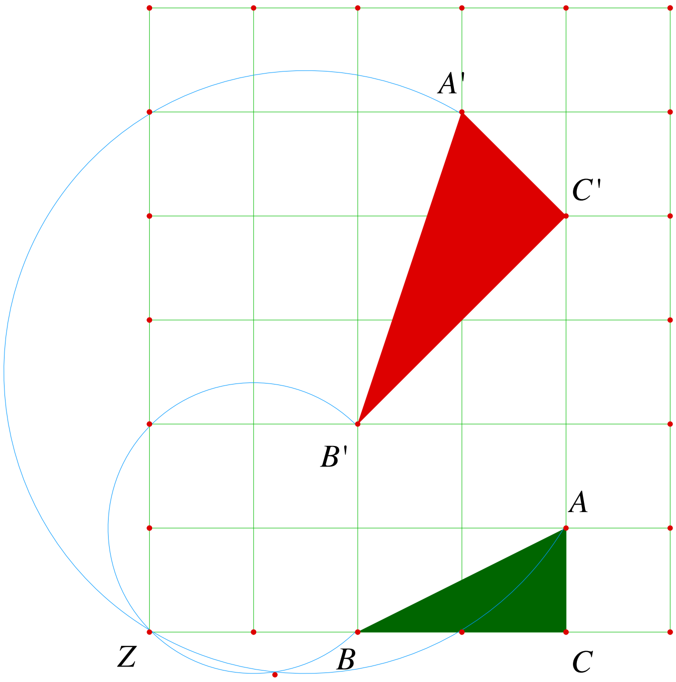
„Wir sehen es“: Steckzentrum Z gemäß Figur, Drehwinkel 45°, Streckfaktor $\sqrt{2}$.



Die Lösung ist sichtbar

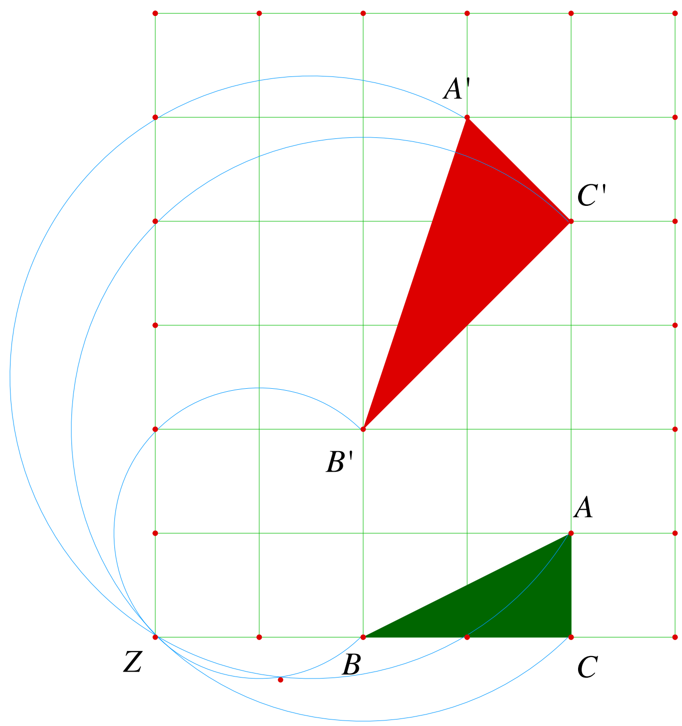
Zweiter Lösungsweg

Verwendung von Ortsbogen. Der Drehwinkel ist offensichtlich 45°. Wir zeichnen die Ortsbogen zu diesem Winkel über den Strecken $\overline{AA'}$ und $\overline{BB'}$. Im Schnittpunkt liegt Z.



Ortsbogen

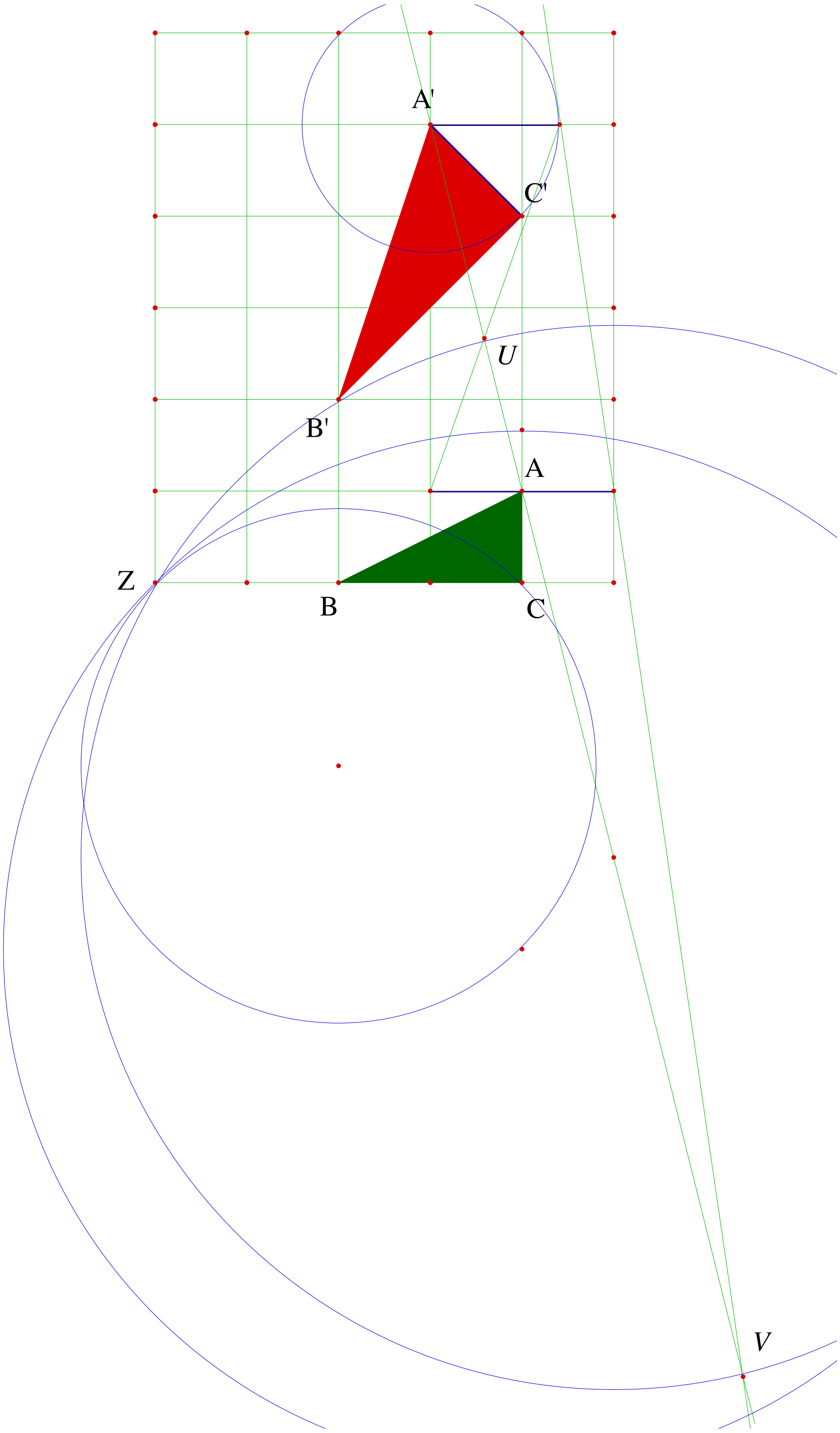
Es gibt jetzt allerdings zwei Schnittpunkte. Zu Kontrollzwecken daher auch noch der Ortsbogen über $\overline{CC'}$.



Vertrauen ist gut. Kontrolle ist besser

Dritter Lösungsweg

Verwendung von apollonischen Verhältniskreisen zum Verhältnis $1:\sqrt{2}$ über den Strecken $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$ und $\overline{CC'}$. Im Schnittpunkt liegt Z.



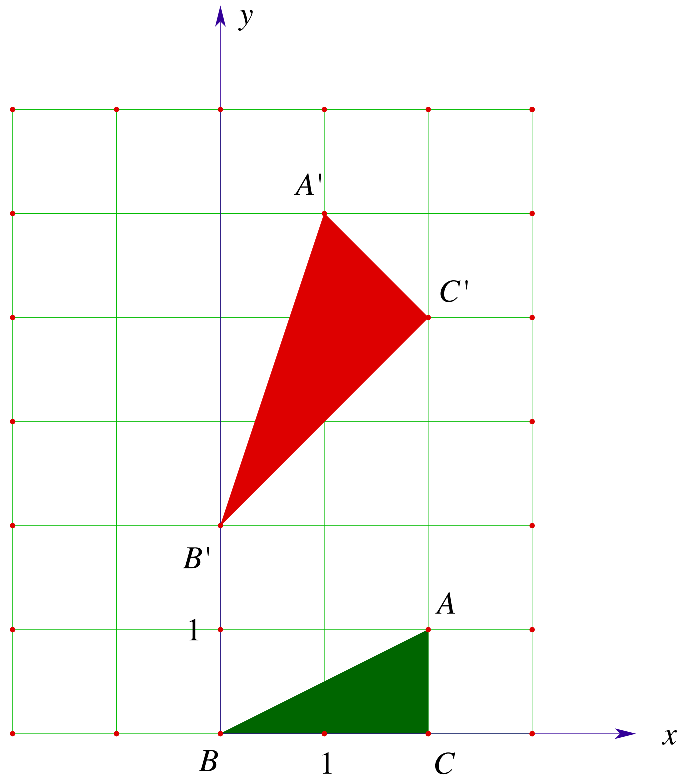
Verhältniskreis des Apollonius

Vierter Lösungsweg

Kombination von Ortsbogen und Apolloniuskreis

Fünfter Lösungsweg

Verwendung von komplexen Zahlen. Wir wählen zum Beispiel die komplexe Zahlenebene gemäß Figur:



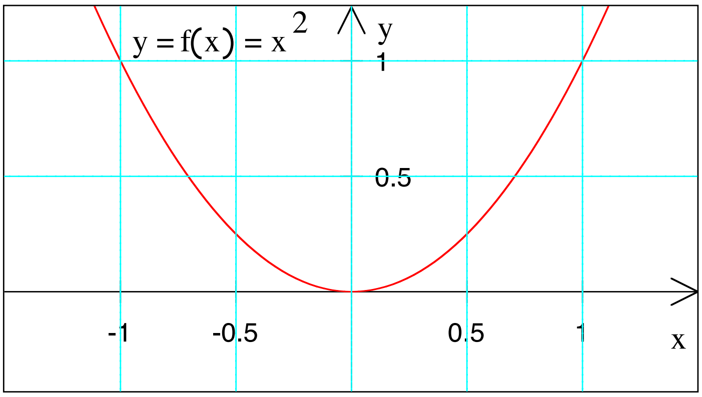
Komplexe Zahlenebene

Die Drehstreckung wird durch eine lineare Funktion im Komplexen beschrieben, also durch $w = az + b$. Wegen

$$A(2+\mathrm{i}) \mapsto A'(1+5\mathrm{i})$$
$$B(0) \mapsto B'(2\mathrm{i})$$

folgt $a = 1 + \mathrm{i}$, $b = 2\mathrm{i}$. Damit ist der Drehwinkel $\arg(a) = \arg(1+\mathrm{i}) = 45°$ und der Streckfaktor $|a| = |1+\mathrm{i}| = \sqrt{2}$. Für das Streckzentrum folgt aus der Fixpunktbedingung $z = az + b$ der Wert $z = -2$.

5 Kontrahierende Funktion?



$f(x) = x^2$

a) Zeigen Sie: In $D = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ ist die Funktion $f(x) = x^2$ kontrahierend. Zu zeigen ist also: Für $x_1, x_2 \in D$ ist $\left|f(x_2) - f(x_1)\right| < \left|x_2 - x_1\right|$. Tipp: Mittelwertsatz

b) Zeigen Sie (ein Gegenbeispiel genügt), dass in $D = \mathbb{R}$ die Funktion $f(x) = x^2$ *nicht* kontrahierend ist.

Ergebnis

a) –

b) Zum Beispiel $x_1 = 1, x_2 = 2$

6 Spiel mit Taschenrechner

Voraussetzung: Taschenrechner mit UPN (umgekehrte polnische Notation, man muss zuerst die Zahl eingeben und dann die Funktionstaste drücken).

a) Geben Sie irgend eine Zahl ein und drücken fortlaufend auf die x^2-Taste. Was geschieht?

b) Geben Sie irgend eine Zahl ein und drücken fortlaufend auf die x^3-Taste. Was geschieht?

c) Geben Sie irgend eine Zahl ein und drücken fortlaufend auf die $\sqrt{}$-Taste. Was geschieht?

Bearbeitung

a) Eingabe x mit $|x| < 1$: Zahlen gehen gegen Null

Eingabe $x = 1$: Dauernd 1 (labiler Fixpunkt)

Eingabe $x = -1$: Ab dem zweiten Schritt immer 1 (labiler Fixpunkt)

Eingabe x mit $|x| > 1$: Zahlen gehen gegen ∞

b) Eingabe x mit $|x| < 1$: Zahlen konvergieren gegen Null

Eingabe $x = 1$: Dauernd 1 (labiler Fixpunkt)

Eingabe $x = -1$: Dauernd -1 (labiler Fixpunkt)

Eingabe x mit $x > 1$: Zahlen gehen gegen ∞

Eingabe x mit $x < -1$: Zahlen gehen gegen $-\infty$

c) Eingabe negativ: geht nicht

Eingabe $x = 0$: Dauernd 0, (labiler Fixpunkt)

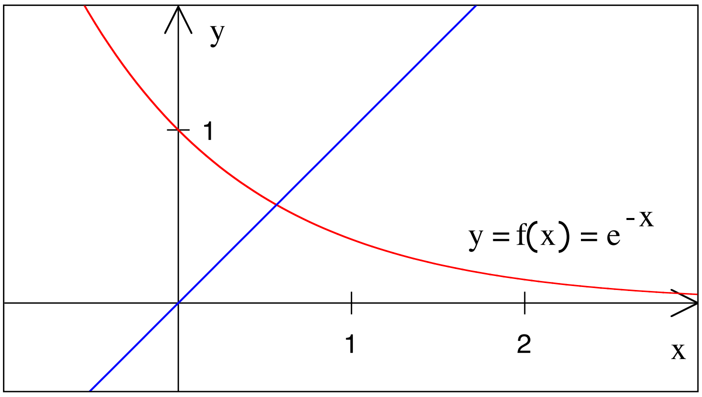
Eingabe x mit $0 < x < 1$: Zahlen konvergieren gegen 1

Eingabe $x = 1$: Stabil bei 1

Eingabe x mit $x > 1$: Zahlen konvergieren gegen 1

7 Fixpunktmethode

Bestimmen Sie die Lösung der Gleichung $e^{-x} = x$ nach dem Fixpunktverfahren (Geeigneten Startwert aus der Figur ablesen, dann 10 Schritte weit rechnen. Speicherfunktion im Taschenrechner verwenden.).



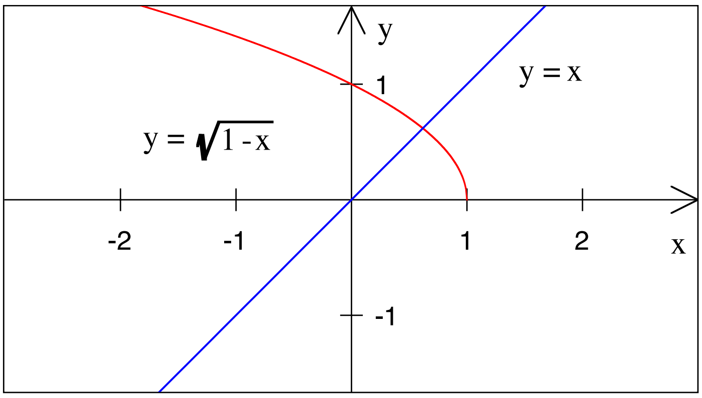
$e^{-x} = x$

Ergebnis

$x = 0.5671432904$

8 Fixpunktmethode

Gesucht ist der Schnittpunkt der Geraden $y = x$ mit dem Funktionsgraphen von $y = f(x) = \sqrt{1-x}$.



$y = f(x) = \sqrt{1-x}$

a) Lösen Sie die Aufgabe exakt.

b) Lösen Sie die Aufgabe approximativ mit dem Fixpunktverfahren unter Verwendung des Startwertes $x_0 = 0.5$. Es sind die Werte x_1 , x_2 und x_3 anzugeben.

c) Nach wie vielen Schritten ist bei der Fixpunktmethode die Abweichung vom exakten Wert kleiner als 0.001?

Ergebnis

a) Quadratische Gleichung. $x = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \approx 0.618033988$ (Goldener Schnitt)

b) $x_1 = \sqrt{1-0.5} \approx 0.7071067812$,

$x_2 = \sqrt{1-\sqrt{1-0.5}} \approx 0.5411961002$,

$x_3 = \sqrt{1-\sqrt{1-\sqrt{1-0.5}}} \approx 0.6773506476$

c) Nach 12 Schritten:

n	x_n	Abweichung
0	0.500000	-0.118034
1	0.707107	0.089073
2	0.541196	-0.076838
3	0.677351	0.059317
4	0.568022	-0.050012
5	0.657250	0.039216
6	0.585448	-0.032585
7	0.643857	0.025823
8	0.596777	-0.021257
9	0.634998	0.016964
10	0.604154	-0.013880
11	0.629163	0.011129
12	0.608964	-0.009070
13	0.625329	0.007295
14	0.612104	-0.005930
15	0.622813	0.004779
16	0.614155	-0.003878
17	0.621164	0.003130
18	0.615497	-0.002537
19	0.620083	0.002049
20	0.616374	-0.001660

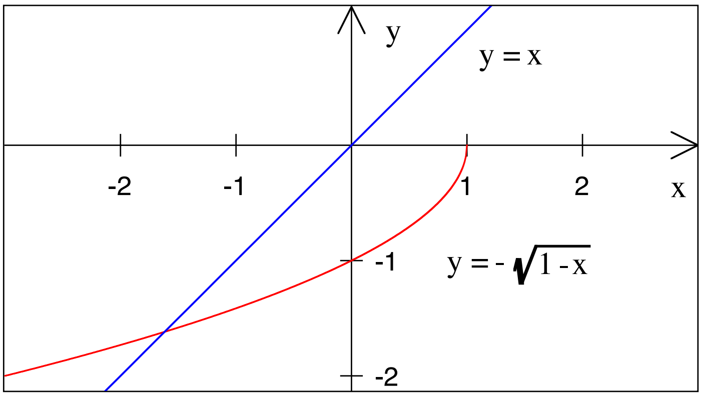
9 Fixpunktmethode

Gesucht ist der Schnittpunkt der Geraden $y = x$ mit dem Funktionsgraphen von $y = f(x) = -\sqrt{1-x}$.

a) Lösen Sie die Aufgabe exakt.

b) Lösen Sie die Aufgabe approximativ mit dem Fixpunktverfahren unter Verwendung des Startwertes $x_0 = -2$. Es sind die Werte x_1 , x_2 und x_3 anzugeben.

Ergebnis



$y = f(x) = -\sqrt{1-x}$

a) Quadratische Gleichung. $x = \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \approx -1.618033988$

b) $x_1 = -\sqrt{1+2} \approx -1.732050808$,

$x_2 = -\sqrt{1+\sqrt{1+2}} \approx -1.65289165$,

$x_3 = -\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+2}}} \approx -1.628769981$

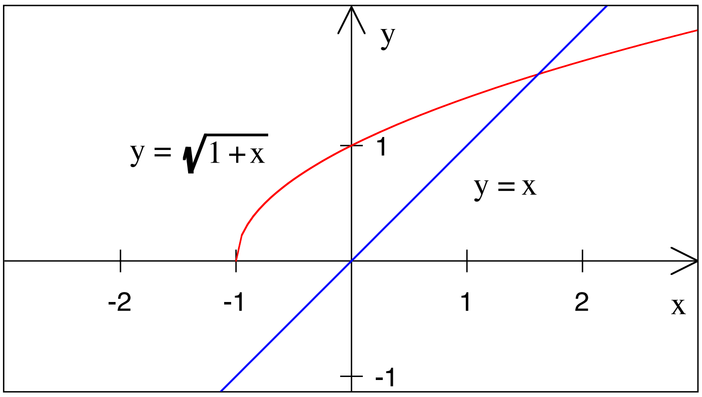
10 Fixpunktmethode

Gesucht ist der Schnittpunkt der Geraden $y = x$ mit dem Funktionsgraphen von $y = f(x) = \sqrt{1+x}$.

a) Lösen Sie die Aufgabe exakt.

b) Lösen Sie die Aufgabe approximativ mit dem Fixpunktverfahren unter Verwendung des Startwertes $x_0 = 2$. Es sind die Werte x_1 , x_2 und x_3 anzugeben.

Ergebnis



$y = f(x) = \sqrt{1+x}$

a) Quadratische Gleichung. $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.618033988$ (Goldener Schnitt)

b) $x_1 = \sqrt{1+2} \approx 1.732050808$,

$x_2 = \sqrt{1+\sqrt{1+2}} \approx 1.65289165$,

$x_3 = \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+2}}} \approx 1.628769981$

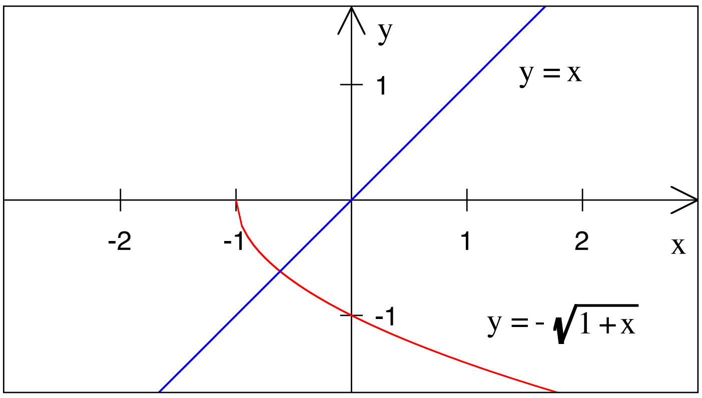
11 Fixpunktmethode

Gesucht ist der Schnittpunkt der Geraden $y = x$ mit dem Funktionsgraphen von $y = f(x) = -\sqrt{1+x}$.

a) Lösen Sie die Aufgabe exakt.

b) Lösen Sie die Aufgabe approximativ mit dem Fixpunktverfahren unter Verwendung des Startwertes $x_0 = -0.5$. Es sind die Werte x_1, x_2 und x_3 anzugeben.

Ergebnis



$y = f(x) = -\sqrt{1+x}$

a) Quadratische Gleichung. $x = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \approx -0.618033988$

b) $x_1 = -\sqrt{1-0.5} \approx -0.7071067812$,

$x_2 = -\sqrt{1-\sqrt{1-0.5}} \approx -0.5411961001$,

$x_3 = -\sqrt{1-\sqrt{1-\sqrt{1-0.5}}} \approx -0.67735064771$

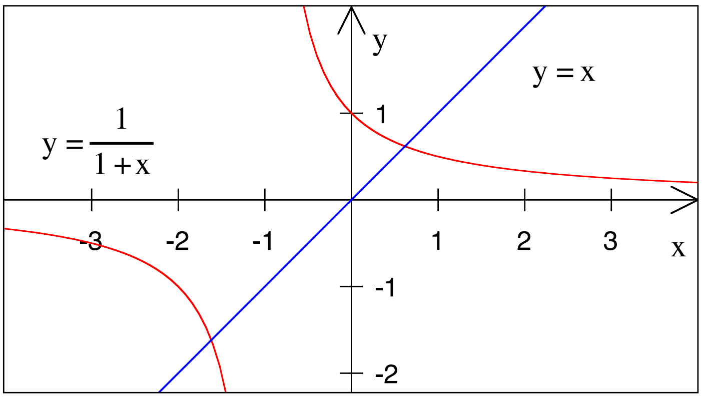
12 Fixpunktmethode

Gesucht ist der Schnittpunkt der Geraden $y = x$ mit dem Funktionsgraphen von $y = f(x) = \frac{1}{1+x}$.

a) Lösen Sie die Aufgabe exakt.

b) Lösen Sie die Aufgabe approximativ mit dem Fixpunktverfahren unter Verwendung des Startwertes $x_0 = 1$. Es sind die Werte x_1, x_2 und x_3 anzugeben.

Ergebnis



$y = f(x) = \frac{1}{1+x}$

a) Quadratische Gleichung. $x^* = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \approx 0.618033988$,

$x^{**} = \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \approx -1.618033988$

b) $x_1 = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$,

$x_2 = \frac{1}{1+\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}$,

$x_3 = \frac{1}{1+\frac{2}{3}} = \frac{3}{5}$.

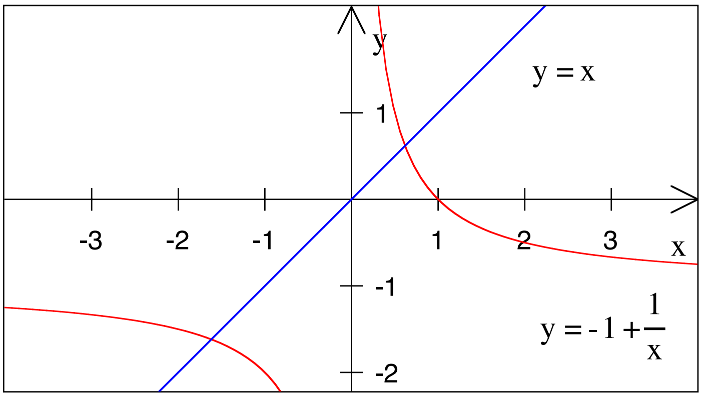
13 Fixpunktmethode

Gesucht ist der Schnittpunkt der Geraden $y = x$ mit dem Funktionsgraphen von $y = f(x) = -1 + \frac{1}{x}$.

a) Lösen Sie die Aufgabe exakt.

b) Lösen Sie die Aufgabe approximativ mit dem Fixpunktverfahren unter Verwendung des Startwertes $x_0 = \frac{1}{2}$. Es sind die Werte x_1, x_2 und x_3 anzugeben.

Ergebnis



$y = f(x) = -1 + \frac{1}{x}$

a) Quadratische Gleichung. $x^* = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \approx 0.618033988$,

$x^{**} = \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \approx -1.618033988$

b) $x_1 = -1 + \frac{1}{\frac{1}{2}} = 1$,

$x_2 = -1 + \frac{1}{1} = 0$,

$x_3 = -1 + \frac{1}{0}$; geht nicht, Division durch Null!

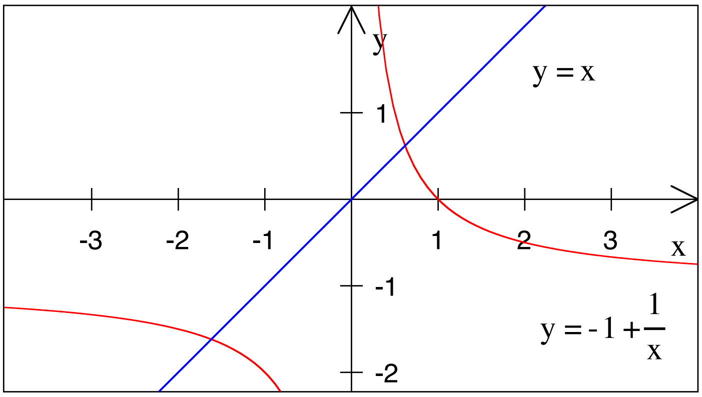
14 Fixpunktmethode

Gesucht ist der Schnittpunkt der Geraden $y = x$ mit dem Funktionsgraphen von $y = f(x) = -1 + \frac{1}{x}$.

a) Lösen Sie die Aufgabe exakt.

b) Lösen Sie die Aufgabe approximativ mit dem Fixpunktverfahren unter Verwendung des Startwertes $x_0 = -\frac{1}{2}$. Es sind die Werte x_1 , x_2 und x_3 anzugeben.

Ergebnis



$y = f(x) = -1 + \frac{1}{x}$

a) Quadratische Gleichung. $x^* = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \approx 0.618033988$,

$x^{**} = \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \approx -1.618033988$

b) $x_1 = -1 + \frac{1}{-\frac{1}{2}} = -3$,

$x_2 = -1 + \frac{1}{-3} = -\frac{4}{3}$,

$x_3 = -1 + \frac{1}{-\frac{4}{3}} = -\frac{7}{4}$.

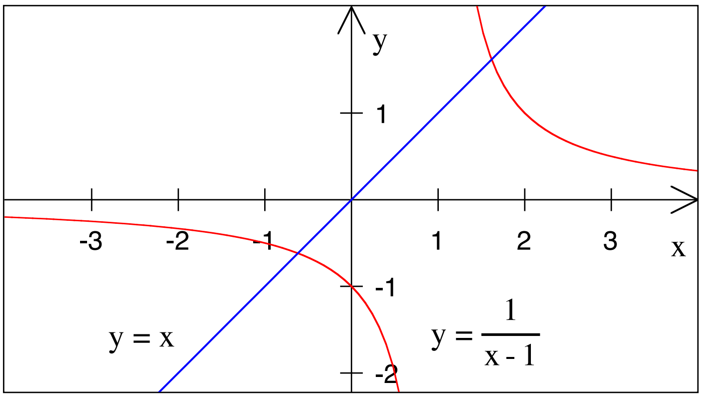
15 Fixpunktmethode

Gesucht ist der Schnittpunkt der Geraden $y = x$ mit dem Funktionsgraphen von $y = f(x) = \frac{1}{x-1}$.

a) Lösen Sie die Aufgabe exakt.

b) Lösen Sie die Aufgabe approximativ mit dem Fixpunktverfahren unter Verwendung des Startwertes $x_0 = -2$. Es sind die Werte x_1, x_2 und x_3 anzugeben.

Ergebnis



$y = f(x) = \frac{1}{x-1}$

a) Quadratische Gleichung. $x^* = \frac{+1-\sqrt{5}}{2} \approx -0.618033988$, $x^{**} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.618033988$

b) $x_1 = \frac{1}{-2-1} = -\frac{1}{3}$,

$x_2 = \frac{1}{-\frac{1}{3}-1} = -\frac{3}{4}$,

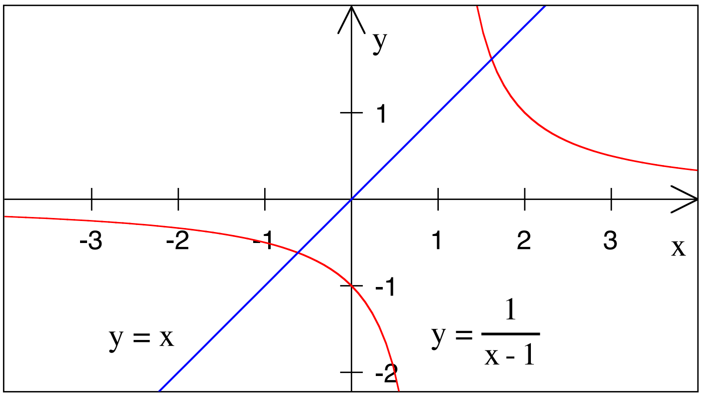
$x_3 = \frac{1}{-\frac{3}{4}-1} = -\frac{4}{7}$.

16 Fixpunktmethode

Gesucht ist der Schnittpunkt der Geraden $y = x$ mit dem Funktionsgraphen von $y = f(x) = \frac{1}{x-1}$.

a) Lösen Sie die Aufgabe exakt.
b) Lösen Sie die Aufgabe approximativ mit dem Fixpunktverfahren unter Verwendung des Startwertes $x_0 = 2$. Es sind die Werte x_1, x_2 und x_3 anzugeben.

Ergebnis



$y = f(x) = \frac{1}{x-1}$

a) Quadratische Gleichung. $x^* = \frac{+1-\sqrt{5}}{2} \approx -0.618033988$, $x^{**} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.618033988$

b) $x_1 = \frac{1}{2-1} = 1$,

$x_2 = \frac{1}{1-1} = \frac{1}{0}$, geht nicht mehr weiter, Division durch Null

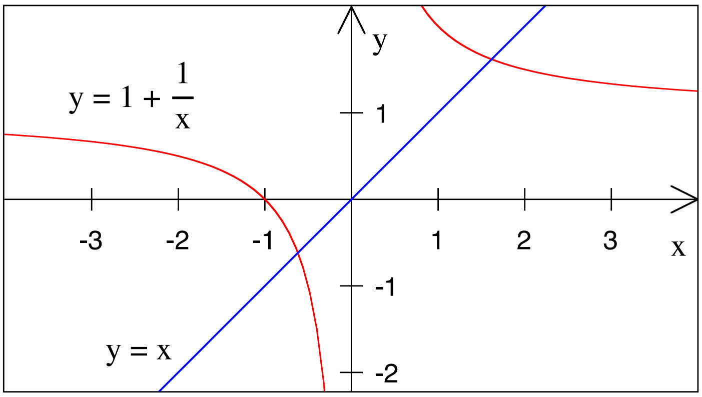
x_3 geht nicht.

17 Fixpunktmethode

Gesucht ist der Schnittpunkt der Geraden $y = x$ mit dem Funktionsgraphen von $y = f(x) = 1 + \frac{1}{x}$.

a) Lösen Sie die Aufgabe exakt.
b) Lösen Sie die Aufgabe approximativ mit dem Fixpunktverfahren unter Verwendung des Startwertes $x_0 = -\frac{1}{2}$. Es sind die Werte x_1, x_2 und x_3 anzugeben.

Ergebnis



$$y = f(x) = 1 + \frac{1}{x}$$

a) Quadratische Gleichung. $x^* = \frac{+1-\sqrt{5}}{2} \approx -0.618033988$, $x^{**} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.618033988$

b) $x_1 = 1 + \frac{1}{-\frac{1}{2}} = -1$,

$x_2 = 1 + \frac{1}{-1} = 0$,

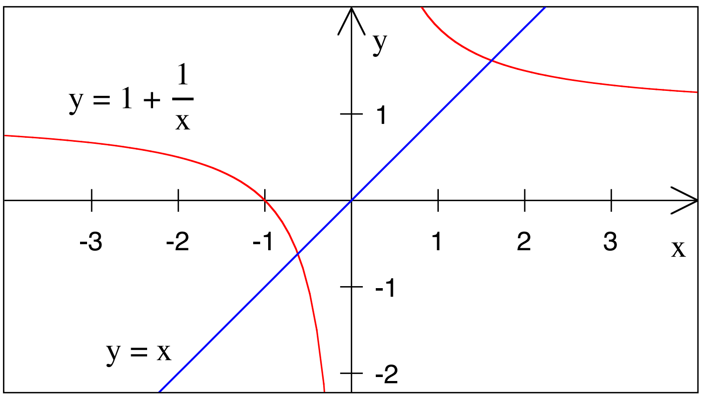
$x_3 = 1 + \frac{1}{0}$, geht nicht mehr weiter, Division durch Null

18 Fixpunktmethode

Gesucht ist der Schnittpunkt der Geraden $y = x$ mit dem Funktionsgraphen von $y = f(x) = 1 + \frac{1}{x}$.

a) Lösen Sie die Aufgabe exakt.
b) Lösen Sie die Aufgabe approximativ mit dem Fixpunktverfahren unter Verwendung des Startwertes $x_0 = \frac{1}{2}$. Es sind die Werte x_1 , x_2 und x_3 anzugeben.

Ergebnis



$$y = f(x) = 1 + \frac{1}{x}$$

a) Quadratische Gleichung. $x^* = \frac{+1-\sqrt{5}}{2} \approx -0.618033988$, $x^{**} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.618033988$

b) $x_1 = 1 + \frac{1}{\frac{1}{2}} = 3$,

$x_2 = 1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$,

$x_3 = 1 + \frac{1}{\frac{4}{3}} = \frac{7}{4}$,