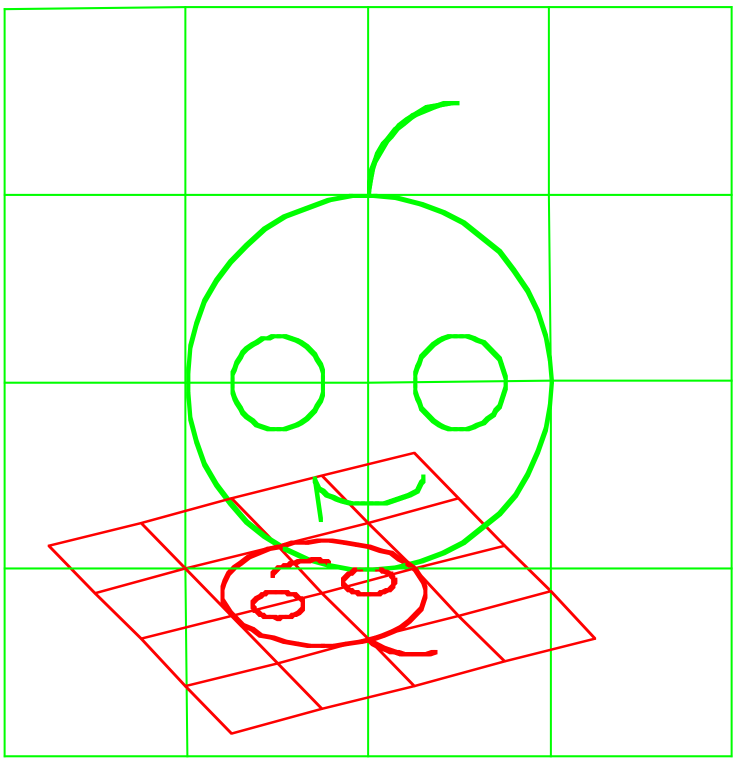
Hans Walser

Mathematik 1 für Naturwissenschaften



Modul 107

Fixpunkte

Lernumgebung Teil 2

UNI BASEL

Inhalt

Modul 107 für die Lehrveranstaltung *Mathematik 1 für Naturwissenschaften*

Winter 2003/04	Erstausgabe
Winter 2004/05	Erweiterung
Winter 2005/06	Geändertes Layout
Winter 2006/07	Ergänzungen. Formel Editor revidiert (MathType)
Herbst 2007	Geändertes Layout. Erweiterungen
Herbst 2008	Erweiterungen
Herbst 2009	Fehlerkorrektur. Erweiterung
Herbst 2010	Erweiterung. Unterteilung in zwei Teile
Herbst 2013	Erweiterung und Straffung

last modified: 10. Oktober 2013

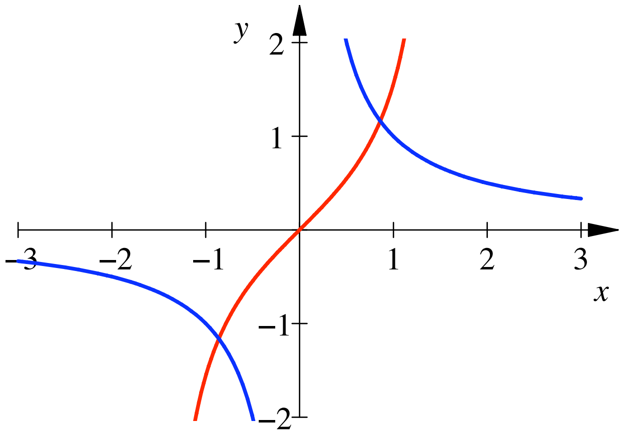
Hans Walser
Mathematisches Institut, Rheinsprung 21, 4051 Basel
www.walser-h-m.ch/hans/

Etliche Aufgaben verdanke ich Anregungen von H. Beusch, Mülheim (D).

1 Verschiedene Lösungswege

Gesucht sind (approximative) Lösungen der Gleichung:

$$\tan(x) = \tfrac{1}{x}, \quad x \in \left(-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}\right).$$



Die beiden Funktionsgrafen

Erster Lösungsweg

Wir suchen die Nullstellen von $f(x) = \tan(x) - \frac{1}{x}$ nach Newton. Es ist dann

$$f(x) = \tan(x) - \tfrac{1}{x}$$
$$f'(x) = 1 + \tan^2(x) + \tfrac{1}{x^2}$$
$$x_{n+1} = x_n - \frac{\tan(x_n) - \frac{1}{x_n}}{1 + \tan^2(x_n) + \frac{1}{x_n^2}}$$

Mit dem Startwert $x_0 = 1$ ergibt sich (Excel):

n	x[n]
0	1
1	0.8740469203
2	0.8604001630
3	0.8603335904
4	0.8603335890
5	0.8603335890

Offenbar ist $x \approx 0.8603335890$ eine Lösung. Aus Symmetriegründen ist dann auch $x \approx -0.8603335890$ eine Lösung.

Zweiter Lösungsweg

Wir formen die Gleichung $\tan(x) = \frac{1}{x}$ um zu $x = \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$ und verwenden das Fixpunktverfahren. Mit dem Startwert $x_0 = 1$ ergibt sich (Excel):

n	x[n]
0	1.000000000
1	0.785398163
2	0.905022577
3	0.835213241
4	0.874949622
5	0.851994860
6	0.865145283
7	0.857575093
8	0.861920936
9	0.859422127
10	0.860857601
11	0.860032541
12	0.860506614
13	0.860234168
14	0.860390725
15	0.860300757
16	0.860352457
17	0.860322747
18	0.860339820
19	0.860330009
20	0.860335647
21	0.860332407
22	0.860334268
23	0.860333199
24	0.860333813
25	0.860333460
26	0.860333663
27	0.860333546
28	0.860333613
29	0.860333575
30	0.860333597
31	0.860333584
32	0.860333592
33	0.860333587
34	0.860333590
35	0.860333589
36	0.860333589

2 Verschiedene Lösungswege

Formen Sie die Gleichung $\mathrm{e}^x = 5x$ so um, dass das Fixpunktverfahren anwendbar wird.

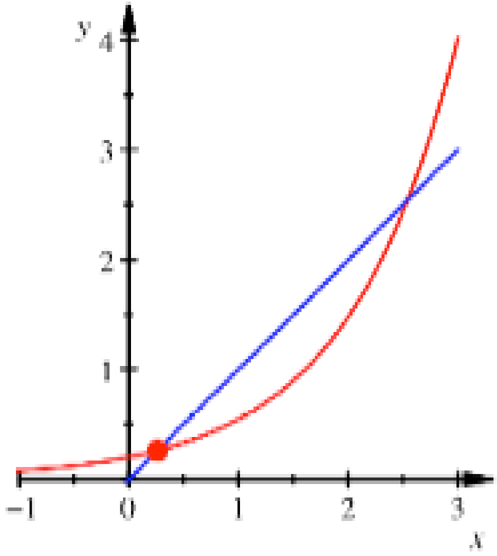
Bearbeitung

Erster Lösungsweg

$$\frac{1}{5}\mathrm{e}^x = x$$

Excel

n	x[n]
0	1.0000000000
1	0.5436563657
2	0.3444585391
3	0.2822451179
4	0.2652207464
5	0.2607437470
6	0.2595790067
7	0.2592768405
8	0.2591985077
9	0.2591782047
10	0.2591729427
11	0.2591715789
12	0.2591712255
13	0.2591711339
14	0.2591711101
15	0.2591711040
16	0.2591711024
17	0.2591711020
18	0.2591711019
19	0.2591711018
20	0.2591711018



Grafik

Wir erhalten die kleinere der beiden Lösungen

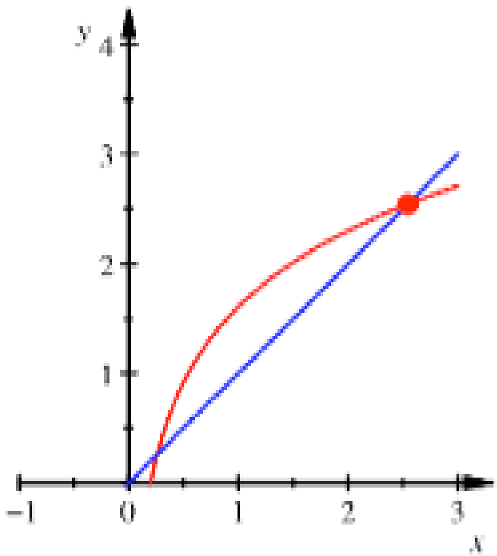
Zweiter Lösungsweg

$$e^x = 5x$$
$$x = \ln(5x)$$

Excel

n	x[n]
0	1.0000000000
1	1.6094379124
2	2.0853229078
3	2.3443616275
4	2.4614510502
5	2.5101889463
6	2.5297959401
7	2.5375765559
8	2.5406474261
9	2.5418568532
10	2.5423327709
11	2.5425199857
12	2.5425936220
13	2.5426225835
14	2.5426339740
15	2.5426384538
16	2.5426402157
17	2.5426409086
18	2.5426411811
19	2.5426412883
20	2.5426413304
21	2.5426413470
22	2.5426413535

23	2.5426413561
24	2.5426413571
25	2.5426413575
26	2.5426413577
27	2.5426413577
28	2.5426413578
29	2.5426413578



Grafik

Wir erhalten die größere der beiden Lösungen.

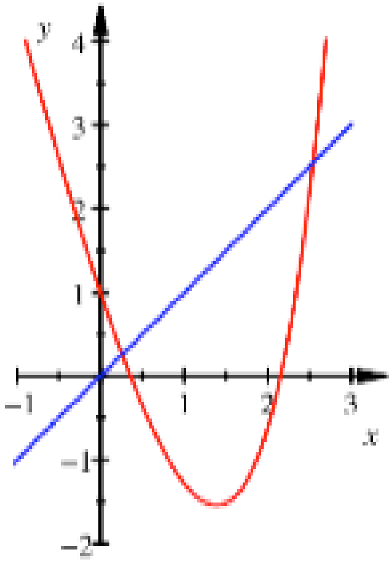
Dritter Lösungsweg

$$e^x = 5x$$

$$x = e^x - 4x$$

Exzel

n	x[n]
0	1.0000000000
1	-1.2817181715
2	5.4044326810
3	200.7722878827



Labile Fixpunkte

Bei diesem Lösungsweg sind leider beide Fixpunkt labil. Wir erhalten keine Lösung.

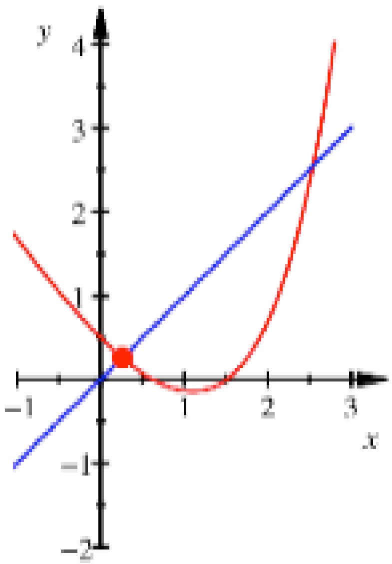
Vierter Lösungsweg

$$e^x = 5x$$
$$2x = e^x - 3x$$
$$x = \tfrac{1}{2}\left(e^x - 3x\right)$$

Excel

n	x[n]
0	1.0000000000
1	-0.1408590858
2	0.6455944801
3	-0.0148315014
4	0.5148862239
5	0.0643947105
6	0.4366645741
7	0.1187715918
8	0.3848989500
9	0.1573844872
10	0.3491460436
⋮	⋮
135	0.2591711016
136	0.2591711020
137	0.2591711017
138	0.2591711019
139	0.2591711017
140	0.2591711019
141	0.2591711018
142	0.2591711019

143	0.2591711018
144	0.2591711019
145	0.2591711018
146	0.2591711018



Grafik

Wir erhalten die kleinere der beiden Lösungen, allerdings fürchterlich langsam.

Fünfter Lösungsweg

$$e^x = 5x$$

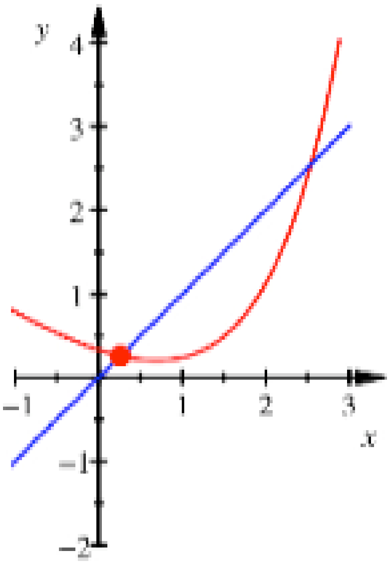
$$3x = e^x - 2x$$

$$x = \tfrac{1}{3}\left(e^x - 2x\right)$$

Excel

n	x[n]
0	1.0000000000
1	0.2394272762
2	0.2638889106
3	0.2580685768
4	0.2594301432
5	0.2591103155
6	0.2591853701
7	0.2591677529
8	0.2591718879
9	0.2591709173
10	0.2591711451
11	0.2591710917
12	0.2591711042
13	0.2591711013
14	0.2591711020

15	0.2591711018
16	0.2591711018



Grafik

Wir erhalten ziemlich rassig die kleinere der beiden Lösungen.

Sechster Lösungsweg

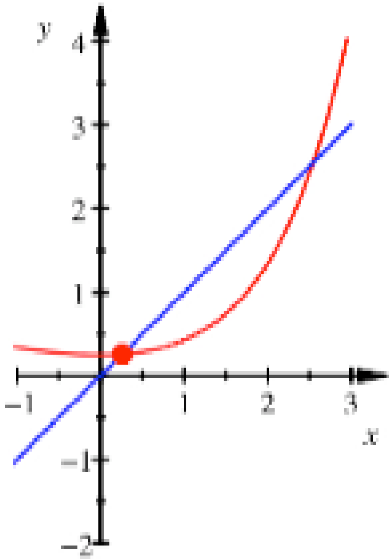
$$e^x = 5x$$

$$4x = e^x - x$$

$$x = \tfrac{1}{4}\left(e^x - x\right)$$

Excel

n	x[n]
0	1.0000000000
1	0.4295704571
2	0.2767567225
3	0.2605221910
4	0.2592713294
5	0.2591785167
6	0.2591716503
7	0.2591711424
8	0.2591711048
9	0.2591711020
10	0.2591711018
11	0.2591711018



Grafik

Wir erhalten noch schneller die kleinere der beiden Lösungen.

3 Zusammensetzung von quadratischen Funktionen

Es sei $f(x) = x^2 - 2$. Ferner sei $g = f \circ f$, $h = f \circ f \circ f$, $i = f \circ f \circ f \circ f$

Mit CAS ergibt sich:

```
> restart:
f:=x^2-2;
g:=(x^2-2)^2-2:
g:=expand(g);
h:=((x^2-2)^2-2)^2-2:
h:=expand(h);
i:=(((x^2-2)^2-2)^2-2)^2-2:
i:=expand(i);
```

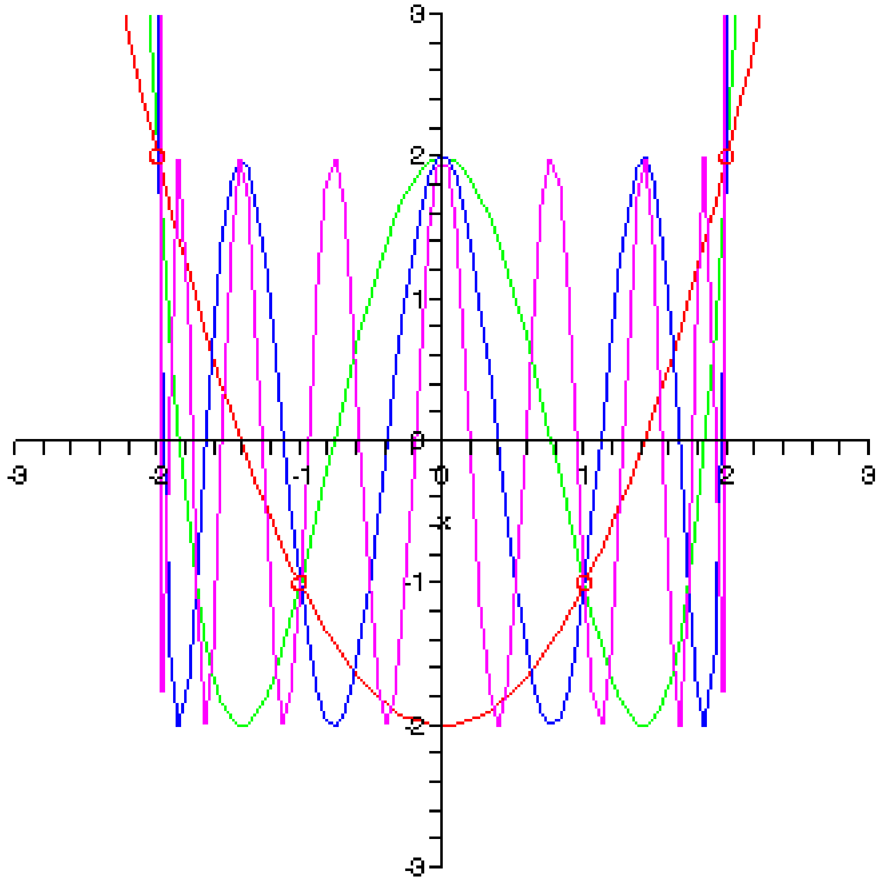
$$f := x^2 - 2$$

$$g := x^4 - 4x^2 + 2$$

$$h := x^8 - 8x^6 + 20x^4 - 16x^2 + 2$$

$$i := 2 - 64x^2 + 336x^4 + 660x^8 - 672x^6 + x^{16} - 16x^{14} + 104x^{12} - 352x^{10}$$

Die vier Funktionsgraphen:



Die vier Graphen

Auffallend sind gemeinsame Schnittpunkte aller vier Graphen. Warum ist das so?

Bearbeitung

Diese Schnittpunkte haben die Koordinaten: $(-2,2)$, $(-1,-1)$, $(1,-1)$, $(2,2)$.

Es ist sogar so, dass auch die Graphen aller weiterer Funktionen durch diese vier Punkte gehen. Beweis der Schnittpunkteigenschaft: Die Werte 2 und -1 sind die Lösungen der Gleichung $f(x)=x$. Aus Symmetriegründen gilt dann $f(\pm 2)=2$ und $f(\pm 1)=-1$.

Damit gilt aber auch für alle Iterationen diese Eigenschaft.

4 Zusammensetzung von quadratischen Funktionen

Es sei $f(x) = x^2 - 1$. Ferner sei $g = f \circ f$, $h = f \circ f \circ f$, $i = f \circ f \circ f \circ f$

Aus $f(x) = x^2 - 1$ ergibt sich:

$$f(x) = x^2 - 1$$

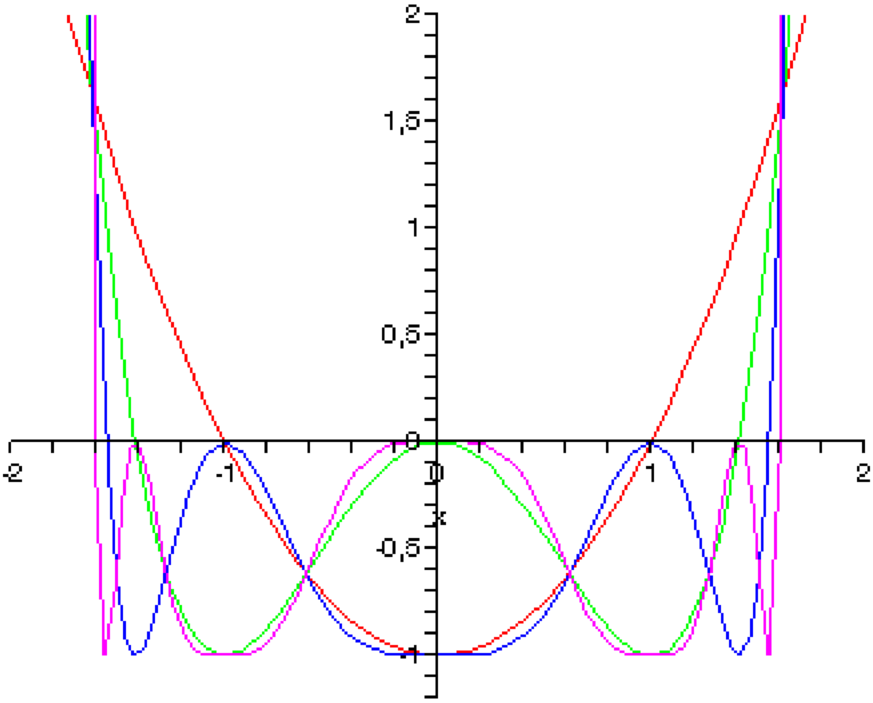
$$g(x) = f \circ f = \left(x^2 - 1\right)^2 - 1 = x^4 - 2x^2 + 1 - 1 = x^4 - 2x^2$$

$$h(x) = f \circ f \circ f = \left(\left(x^2 - 1\right)^2 - 1\right)^2 - 1 = x^8 - 4x^6 + 4x^4 - 1$$

$$i(x) = f \circ f \circ f \circ f = \left(\left(\left(x^2 - 1\right)^2 - 1\right)^2 - 1\right)^2 - 1$$

$$= x^{16} - 8x^{14} + 24x^{12} + 14x^8 - 32x^{10} + 8x^6 - 8x^4$$

Die Figur zeigt die Funktionsgraphen.



Funktionsgraphen

Auffallend sind gemeinsame Schnittpunkte aller vier Graphen. Warum ist das so?

Bearbeitung

Diese Schnittpunkte haben die Koordinaten: $(-\tau,\tau)$, $(-\rho,-\rho)$, $(\rho,-\rho)$, (τ,τ), wobei $\tau = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.618$ und $\rho = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \approx 0.618$ (goldener Schnitt)

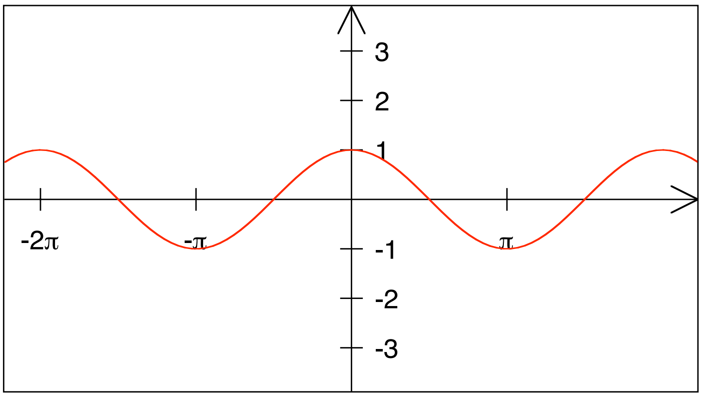
Es ist sogar so, dass auch die Graphen aller weiterer Funktionen durch diese vier Punkte gehen.

Beweis: Die Werte τ und $-\rho$ sind die Lösungen der Gleichung $f(x)=x$. Aus Symmetriegründen gilt dann $f(\pm\tau)=\tau$ und $f(\pm\rho)=-\rho$.

Damit gilt aber auch für alle Iterationen diese Eigenschaft.

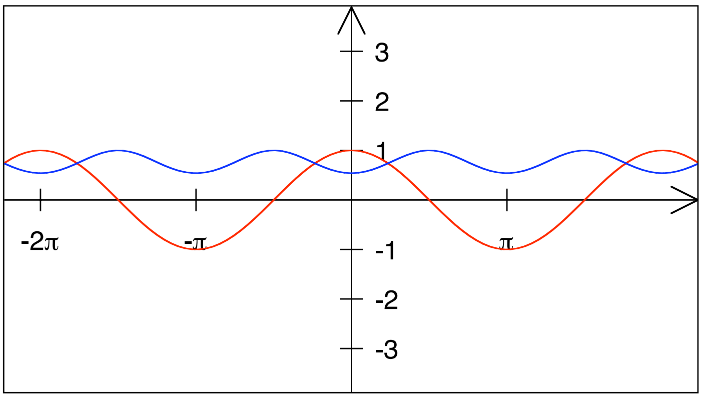
5 Verkettung von Kosinusfunktionen

Wir beginnen mit dem Graphen von $f^{[1]} = \cos$.



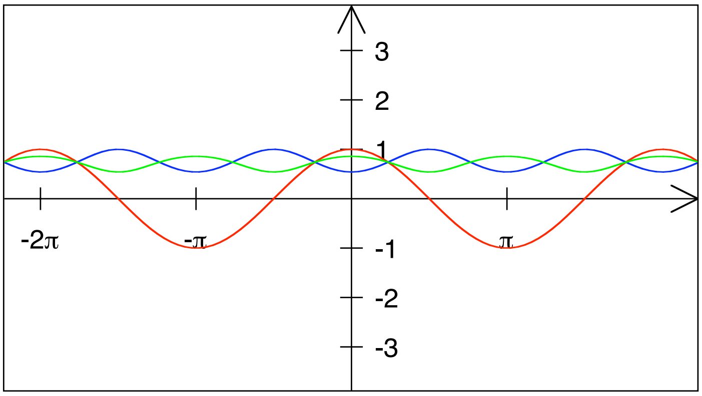
$f^{[1]} = \cos$

Dazu zeichnen wir auch noch den Graphen von $f^{[2]} = \cos \circ \cos$.



$f^{[1]} = \cos$ **und** $f^{[2]} = \cos \circ \cos$

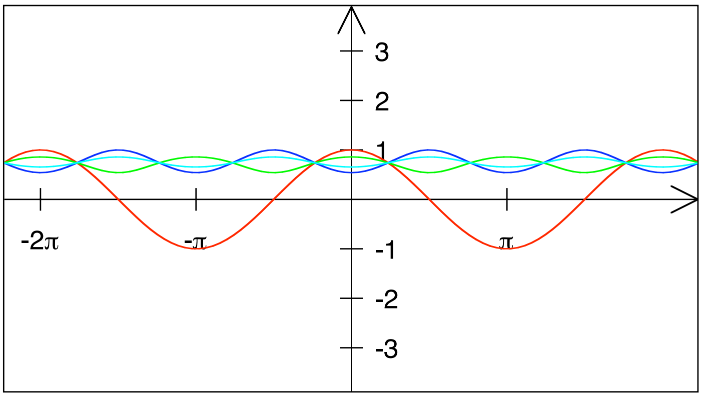
Dazu zeichnen wir auch noch den Graphen von $f^{[3]} = \cos \circ \cos \circ \cos$.



$f^{[1]} = \cos$, $f^{[2]} = \cos \circ \cos$ **und** $f^{[3]} = \cos \circ \cos \circ \cos$

Die drei Kurven scheiden sich offenbar in mehreren Punkten.

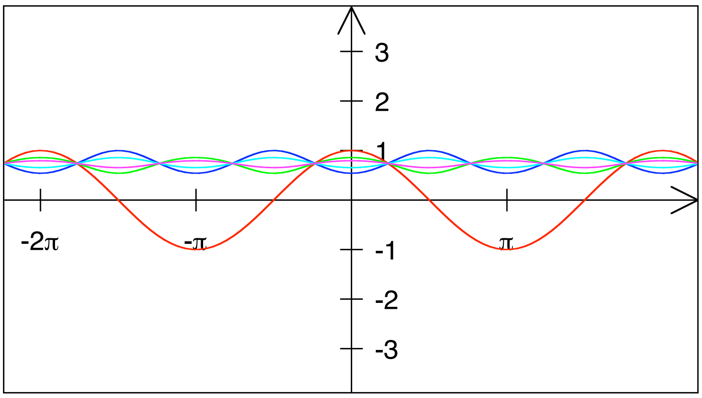
Dazu zeichnen wir auch noch den Graphen von $f^{[4]} = \cos \circ \cos \circ \cos \circ \cos$.



$f^{[1]} = \cos$, $f^{[2]} = \cos \circ \cos$, $f^{[3]} = \cos \circ \cos \circ \cos$, $f^{[4]} = \cos \circ \cos \circ \cos \circ \cos$

Auch die vierte Kurve geht durch diese Schnittpunkte.

Dazu zeichnen wir auch noch den Graphen von $f^{[5]} = \cos \circ \cos \circ \cos \circ \cos \circ \cos$.



$f^{[1]} = \cos$, ... , $f^{[5]} = \cos \circ \cos \circ \cos \circ \cos \circ \cos$

Nun wird es langsam langweilig.

Warum verlaufen alle Graphen durch diese Schnittpunkte?

Bearbeitung

Es sei x_0 die Lösung der Gleichung $x = \cos(x)$. Diese Gleichung muss mit dem Fixpunktverfahren oder dem Verfahren von Newton gelöst werden. Es ist $x_0 \approx 0.7390851332$. Daraus ergibt sich

$$\cos(\pm x_0 + 2k\pi) = x_0, k \in \mathbb{Z}$$

Damit ist aber auch $f^{[n]}(\pm x_0 + 2k\pi) = x_0, k \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}$.

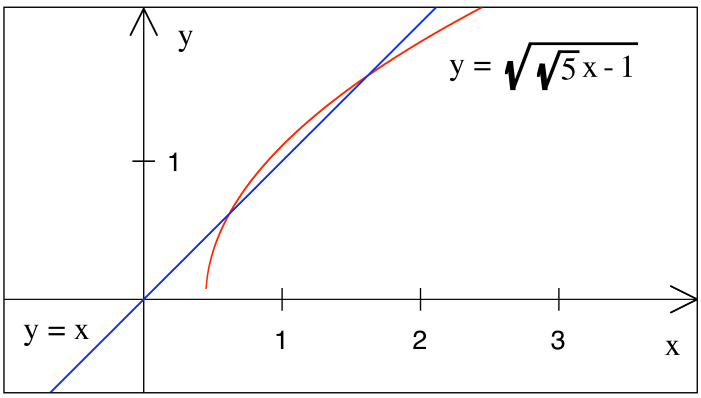
6 Stabilität?

Gesucht ist der Schnittpunkt der Geraden $y = x$ mit dem Funktionsgraphen von $y = f(x) = \sqrt{\sqrt{5}\,x - 1}$.

a) Lösen Sie die Aufgabe exakt.

b) Untersuchen Sie die Fixpunkte auf Stabilität.

Ergebnis



$y = f(x) = \sqrt{\sqrt{5}\,x - 1}$

a) Quadratische Gleichung. $x^* = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \approx 0.618033988$, $x^{**} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.618033988$

b) $x^* = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \approx 0.618033988$ labil, $x^{**} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.618033988$ stabil

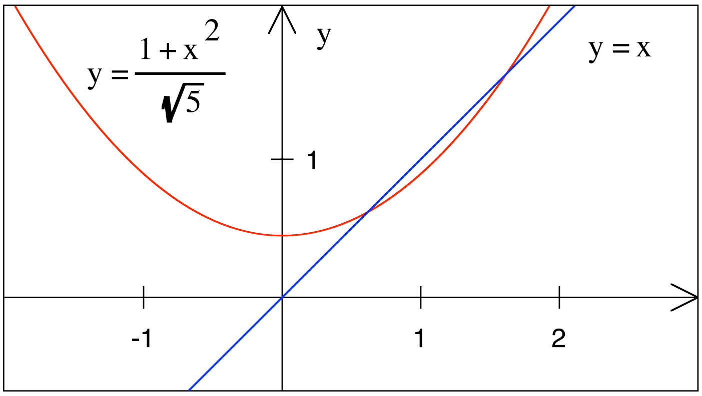
7 Stabilität?

Gesucht ist der Schnittpunkt der Geraden $y = x$ mit dem Funktionsgraphen von $y = f(x) = \frac{1+x^2}{\sqrt{5}}$.

a) Lösen Sie die Aufgabe exakt.

b) Untersuchen Sie die Fixpunkte auf Stabilität.

Ergebnis



$y=f(x)=\frac{1+x^2}{\sqrt{5}}$

a) Quadratische Gleichung. $x^{*}=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\approx 0.618033988$, $x^{**}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}\approx 1.618033988$

b) $x^{*}=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\approx 0.618033988$ stabil, $x^{**}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}\approx 1.618033988$ labil

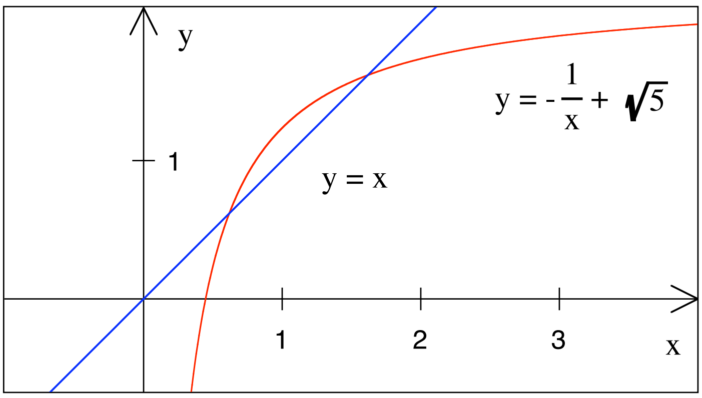
8 Stabilität?

Gesucht ist der Schnittpunkt der Geraden $y=x$ mit dem Funktionsgraphen von $y=f(x)=-\frac{1}{x}+\sqrt{5}$.

a) Lösen Sie die Aufgabe exakt.

b) Untersuchen Sie die Fixpunkte auf Stabilität.

Ergebnis



$y=f(x)=-\frac{1}{x}+\sqrt{5}$

a) Quadratische Gleichung. $x^{*}=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\approx 0.618033988$, $x^{**}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}\approx 1.618033988$

b) $x^{*}=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\approx 0.618033988$ labil, $x^{**}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}\approx 1.618033988$ stabil

9 Stabilität?

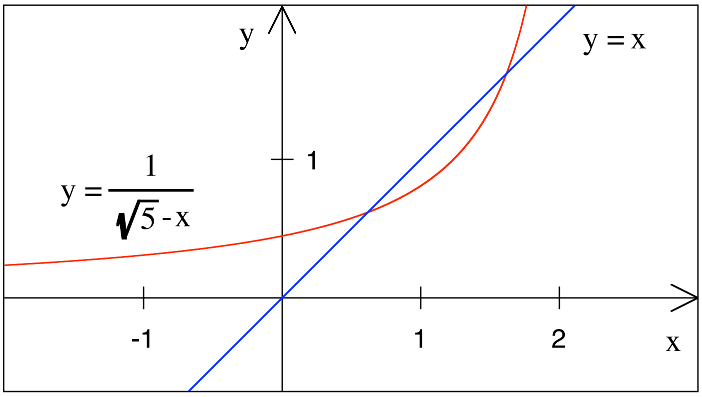
Gesucht ist der Schnittpunkt der Geraden $y = x$ mit dem Funktionsgraphen von

$y = f(x) = \frac{1}{\sqrt{5} - x}$.

a) Lösen Sie die Aufgabe exakt.

b) Untersuchen Sie die Fixpunkte auf Stabilität.

Ergebnis



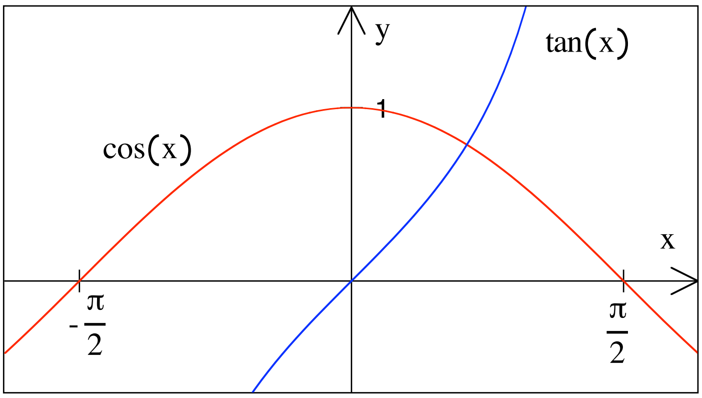
$y = f(x) = \frac{1}{\sqrt{5} - x}$

a) Quadratische Gleichung. $x^* = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \approx 0.618033988$, $x^{**} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.618033988$

b) $x^* = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \approx 0.618033988$ stabil, $x^{**} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.618033988$ labil

10 Verschiedene Lösungswege

Die Gleichung $\cos(x) = \tan(x)$ lässt sich auf verschiedene Weisen lösen.



$\cos(x) = \tan(x)$

Erster Lösungsweg

Newton-Approximation: $x_{n+1} = x_n - \frac{\cos(x_n)-\tan(x_n)}{-\sin(x_n)-1-(\tan(x_n))^2}$

n	$x_{n+1} = x_n - \frac{\cos(x_n)-\tan(x_n)}{-\sin(x_n)-1-(\tan(x_n))^2}$
0	1
1	0.76163397
2	0.67320682
3	0.66627564
4	0.66623943
5	0.66623943

Zweiter Lösungsweg

$\cos(x) = \tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = \frac{\sqrt{1-(\cos(x))^2}}{\cos(x)}$. Ergibt biquadratische Gleichung für $\cos(x)$:

$$\cos(x) = \tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = \frac{\sqrt{1-(\cos(x))^2}}{\cos(x)}$$

$$(\cos(x))^2 = \sqrt{1-(\cos(x))^2}$$

$$(\cos(x))^4 = 1-(\cos(x))^2$$

$$(\cos(x))^4 + (\cos(x))^2 - 1 = 0$$

Damit ergibt sich:

$$(\cos(x))^2 = \frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$$

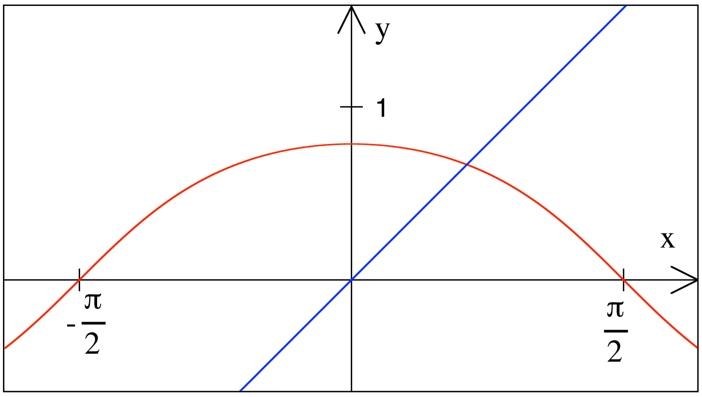
$$\cos(x) = \pm\sqrt{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}$$ Minuszeichen vor $\sqrt{5}$ geht nicht.

$$x = \arccos\left(\pm\sqrt{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}\right) \approx 0.666239432493$$

Dritter Lösungsweg

Dem Fixpunktverfahren nachempfunden:

Aus $\tan(x) = \cos(x)$ folgt $x = \arctan(\cos(x))$.



$x = \arctan(\cos(x))$

Nun können wir das Fixpunktverfahren anwenden mit der Rekursion:

$$x_{n+1} = \arctan(\cos(x_n))$$

Tabelle:

n	$x_{n+1} = \arctan(\cos(x_n))$
0	1.0000000000
1	0.4953672892
2	0.7215388429
3	0.6440066130
4	0.6745559120
5	0.6630380283
6	0.6674585979
7	0.6657732210
8	0.6664174317
9	0.6661714315
10	0.6662654049
11	0.6662295117
12	0.6662432219
13	0.6662379851
14	0.6662399854
15	0.6662392213
16	0.6662395132
17	0.6662394017

18	0.6662394443
19	0.6662394280
20	0.6662394342
21	0.6662394318
22	0.6662394327
23	0.6662394324
24	0.6662394325
25	0.6662394325

11 Algebra Made Difficult

Problem: Löse $x = \frac{1}{2}x + 7$ für x.

Bearbeitung

Natürlich ist $x = 14$. Es geht aber auch mit der Fixpunktmethode: Wir setzen $f(x) = \frac{1}{2}x + 7$ und lösen die Gleichung $x = f(x)$. Mit dem Startwert $x_0 = 1$ erhalten wir:

n	x_n
0	1
1	7.5
2	10.75
3	12.375
4	13.1875
5	13.59375
6	13.796875
7	13.8984375
8	13.94921875
9	13.97460938
10	13.98730469
11	13.99365234
12	13.99682617
13	13.99841309
14	13.99920654
15	13.99960327
16	13.99980164
17	13.99990082
18	13.99995041
19	13.9999752
20	13.9999876
21	13.9999938
22	13.9999969
23	13.99999845
24	13.99999923
25	13.99999961
26	13.99999981
27	13.9999999

28	13.99999995
29	13.99999998
30	13.99999999
31	13.99999999
32	14
33	14

12 Algebra Made Difficult

Problem: Löse $x = 3x + 7$ für x.

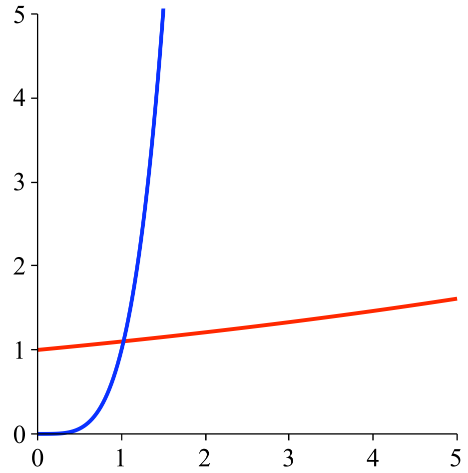
Bearbeitung

Natürlich ist $x = -\frac{7}{2}$. Das Fixpunktverfahren mit $f(x) = 3x + 7$ funktioniert nicht, da die Steigung zu groß ist. Wir müssen mit der Umkehrfunktion $f^{[-1]}(x) = \frac{1}{3}x - \frac{7}{3}$ arbeiten. Wir lösen die Gleichung $x = f^{[-1]}(x)$. Mit dem Startwert $x_0 = 1$ erhalten wir:

n	x_n
0	1
1	-2
2	-3
3	-3.333333333
4	-3.444444444
5	-3.481481481
6	-3.49382716
7	-3.497942387
8	-3.499314129
9	-3.499771376
10	-3.499923792
11	-3.499974597
12	-3.499991532
13	-3.499997177
14	-3.499999059
15	-3.499999686
16	-3.499999895
17	-3.499999965
18	-3.499999988
19	-3.499999996
20	-3.499999999
21	-3.5
22	-3.5

13 Funktionswachstum

Wir vergleichen die Exponentialfunktion $e(x) = 1.1^x$ (rot) mit der Potenzfunktion $p(x) = x^4$ (blau).

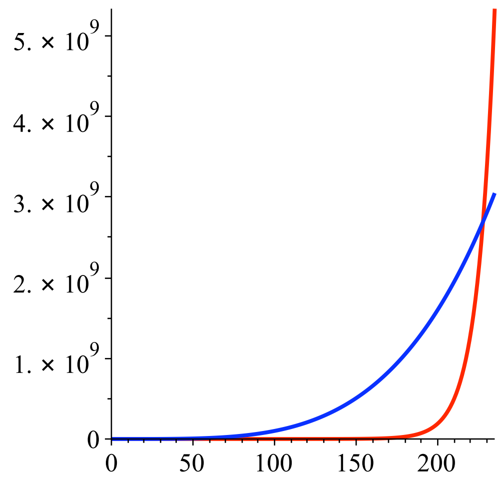


Exponentialfunktion und Potenzfunktion

Eigentlich sollte die Exponentialfunktion stärker wachsen als die Potenzfunktion. Bei welchem x-Wert überholt die Exponentialfunktion die Potenzfunktion?

Bearbeitung

Ein ausführlicher Plot zeigt, wo die Exponentialfunktion die Potenzfunktion überholt. Das ist ungefähr bei $x = 230$ der Fall.



Die Exponentialfunktion überholt die Potenzfunktion

Um das x des Überholungspunktes genau zu bestimmen, müssen wir die Gleichung

$$1.1^x = x^4$$

lösen. Wir können das nur numerisch tun.

Methode von Newton-Raphson

Wir suchen die Nullstellen von

$$f(x) = 1.1^x - x^4 .$$

Also:

$$f(x) = 1.1^x - x^4$$
$$f'(x) = \ln(1.1)1.1^x - 4x^3$$
$$x_{n+1} = x_n - \frac{1.1^{x_n} - x_n^4}{\ln(1.1)1.1^{x_n} - 4x_n^3}$$

Mit Excel erhalten wir:

n	x_n	x_n
0	1	300
1	1.025672894	289.5358848
2	1.024718382	279.1092072
3	1.024717014	268.7689307
4	1.024717014	258.6253986
5	1.024717014	248.9198578
6	1.024717014	240.1482965
7	1.024717014	233.1957583
8	1.024717014	229.1264441
9	1.024717014	227.918655
10	1.024717014	227.8289265
11	1.024717014	227.8284654
12	1.024717014	227.8284654

Wir erhalten je nach Startwert die x-Koordinaten des einen oder des anderen Schnittpunktes.

Fixpunktmethode

Wir formen die Gleichung um:

$$1.1^x = x^4$$
$$x \ln(1.1) = 4 \ln(x)$$
$$x = \frac{4}{\ln(1.1)} \ln(x)$$

Nun arbeiten wir mit der Rekursion:

$$x_{n+1} = \frac{4}{\ln(1.1)} \ln(x_n)$$

Excel liefert:

n	x_n
0	2
1	29.09016359
2	141.4497424
3	207.8243683
4	223.9715989
5	227.1119104

6	227.696261
7	227.804105
8	227.8239778
9	227.8276388
10	227.8283131
11	227.8284374
12	227.8284603
13	227.8284645
14	227.8284653
15	227.8284654

Der Startwert $x_0 = 1$ ist wegen $\ln(1) = 0$ nicht brauchbar.