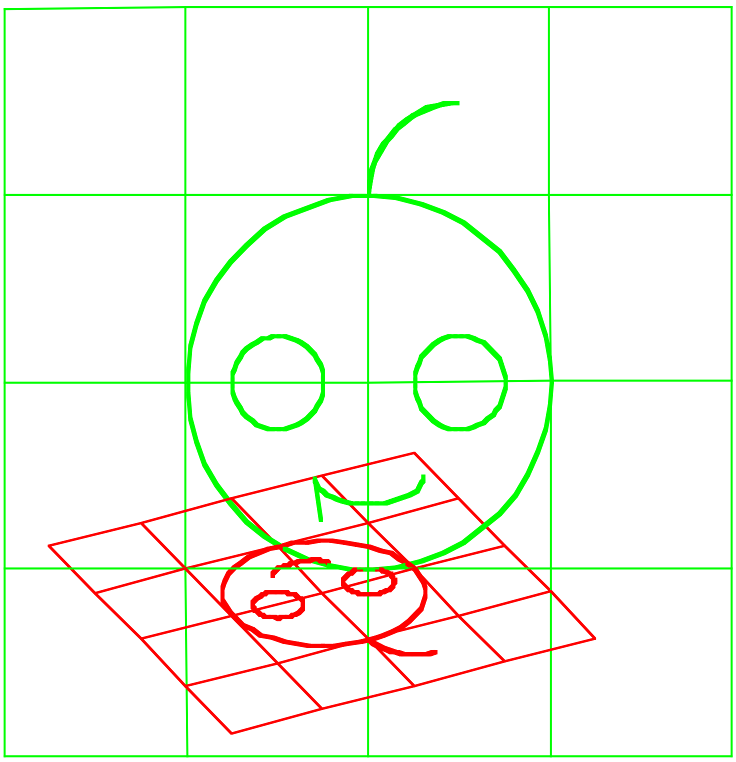
Hans Walser

Mathematik 1 für Naturwissenschaften



Modul 107

Fixpunkte

UNI BASEL

Inhalt

Modul 107 für die Lehrveranstaltung *Mathematik 1 für Naturwissenschaften*

Winter 2002/03 Probeausgabe
Winter 2003/04 Überarbeitung
Winter 2004/05 Kleine Ergänzung. Fehlerkorrekturen. Geändertes Layout
Winter 2005/06 Fehlerkorrekturen
Winter 2006/07 Kleine Ergänzung. Formel-Editor revidiert (MathType)
Herbst 2007 Kleine Ergänzung. Kürzung
Herbst 2008 Geändertes Layout
Herbst 2013 Kürzung

last modified: 23. September 2013

Hans Walser
Mathematisches Institut, Rheinsprung 21, 4051 Basel
www.walser-h-m.ch/hans

1 Fixpunkte

1.1 Worum es geht

Unter einem Fixpunkt ξ einer Funktion oder einer Abbildung versteht man einen Punkt (bei Funktionen eine Zahl), der sich nicht ändert, wo also der Input gleich dem Output ist:

$$f(\underset{\substack{\uparrow\\ \text{Input}}}{x}) = \underset{\substack{\uparrow\\ \text{Output}}}{x}$$

Mit dem Fixpunktverfahren werden Gleichungen von der Form $f(x) = x$ bearbeitet.

Beispiel: $\cos(x) = x$

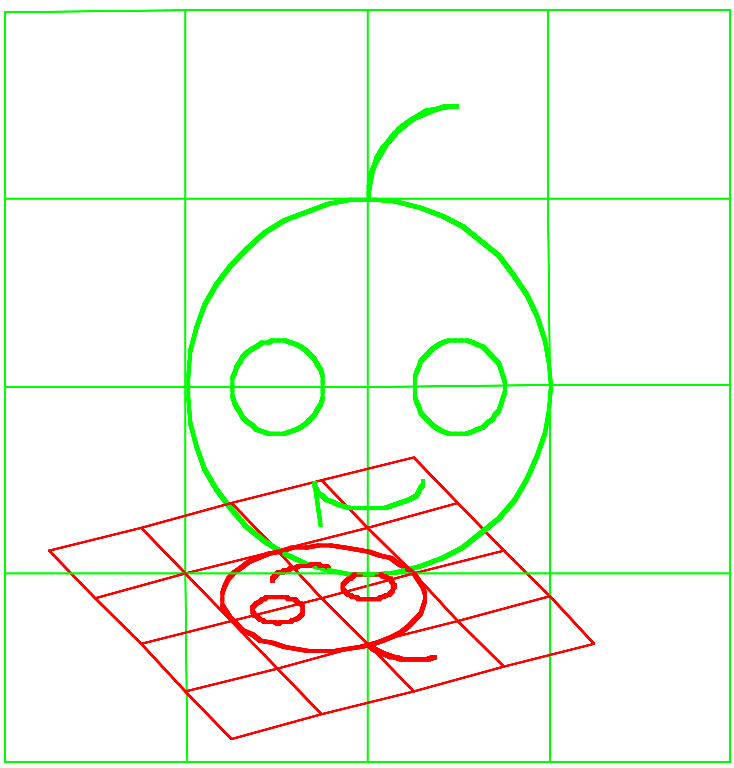
Dieses Beispiel hatten wir schon mit Hilfe des Newton-Verfahrens bearbeitet. Wir werden nun einen neuen Lösungsweg kennenlernen.

1.2 Geometrische Beispiele von Fixpunkten

1.2.1 Stadtplan

Der *Standort* auf einem Stadtplan ist ein Fixpunkt: Der Punkt in Wirklichkeit und der Bildpunkt auf dem Plan stimmen überein.

1.2.2 Urbild und Bild



Welcher Punkt stimmt in den beiden Bildern überein?

1.2.3 Beispiele aus der Schulgeometrie

1.2.3.1 Translation

Das ist jetzt gerade ein schlechtes Beispiel, denn eine Translation hat keinen Fixpunkt.

1.2.3.2 Drehung

Fixpunkt:

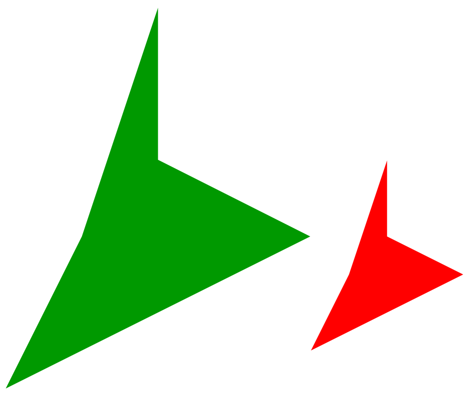
1.2.3.3 Geradenspiegelung

Fixpunkte:

1.2.3.4 Zentrische Streckung (Zoom)

Fixpunkt: Streckzentrum

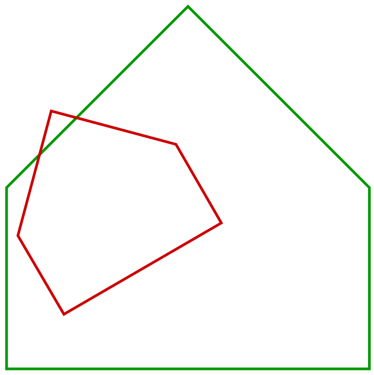
Wie finden wir das Streckzentrum?



Wo ist das Streckzentrum?

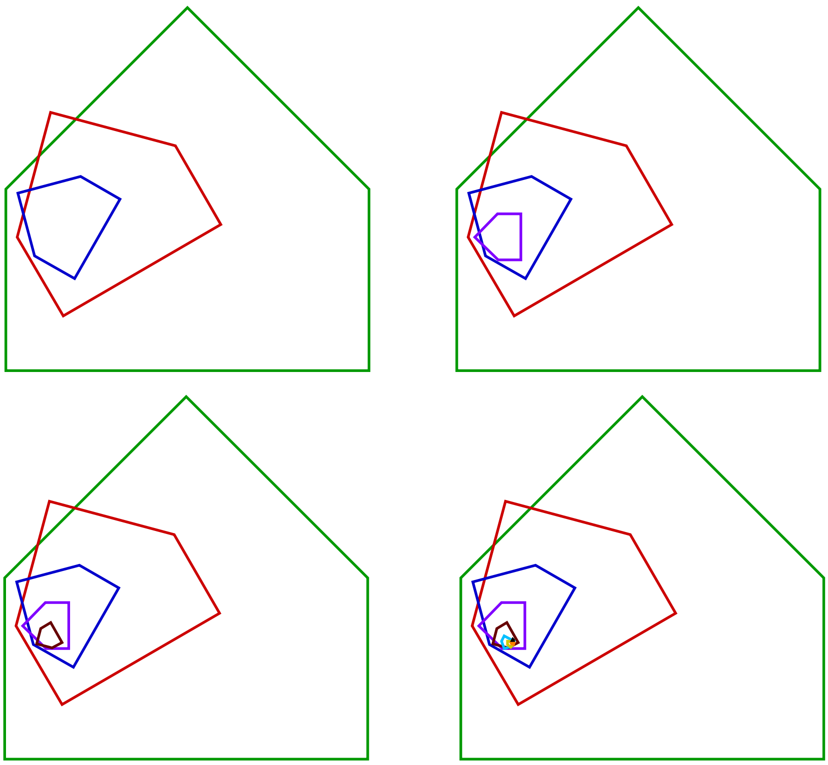
1.2.3.5 Drehstreckung

Der Fixpunkt ist das Drehstreckzentrum. Es ist aber gar nicht so einfach, diesen Fixpunkt zu finden. Eine Hilfe ist die Iteration (Wiederholung) der Abbildung. Als Beispiel sei der Fixpunkt in der folgenden Situation gesucht:



Gesucht ist der Fixpunkt

Ein approximativer Lösungsweg durch Iteration wird durch folgende Figurensequenz angedeutet:



Iterative Bestimmung des Fixpunktes

2 Fixpunktsatz

Bei einer *kontrahierenden* Abbildung sind die Bildstrecken *kürzer* als die Urbildstrecken.

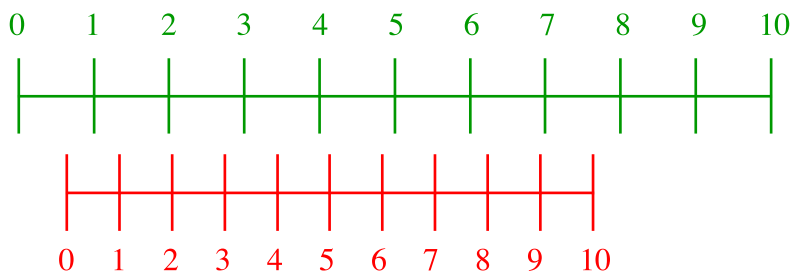
> Fixpunktsatz:
>
> Jede kontrahierende Abbildung hat genau einen Fixpunkt.

Präziser: Jede kontrahierende Abbildung f mit $f(D) \subset D$ hat genau einen Fixpunkt. Das Bild des Definitionsbereiches D muss ganz in D liegen; ein Basler Stadtplan hat in Zürich keinen “Standort”.

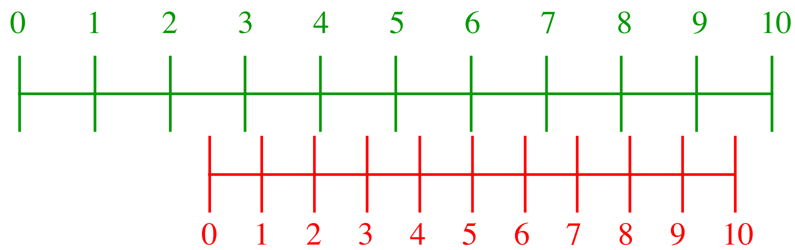
Die Frage der Existenz des Fixpunktes ist intuitiv klar, aber heikel zum Beweisen.

Die Frage der Eindeutigkeit ist einfach: Gäbe es zwei verschiedene Fixpunkte, wäre deren Verbindungsstrecke nach der Abbildung nicht kürzer geworden. Dies widerspräche der Voraussetzung einer kontrahierenden Abbildung.

2.1 Illustration mit Skalen.

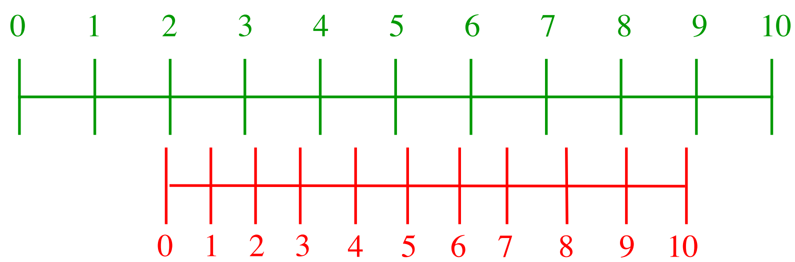


Wo ist der Fixpunkt?



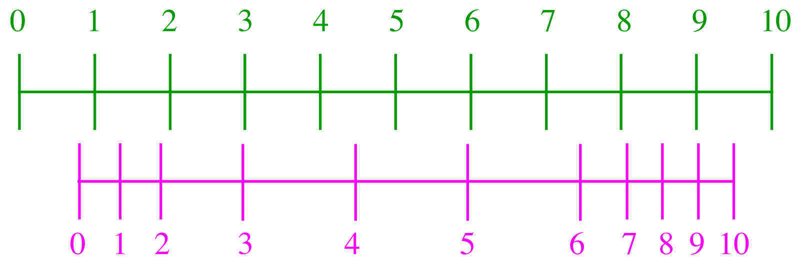
Wo ist der Fixpunkt?

Im nächsten Beispiel ist die kleine Skala unregelmäßig verkleinert, aber doch verkleinert.



Wo ist der Fixpunkt?

Im nächsten Beispiel ist die “kleine” Skala nicht durch eine kontrahierende Abbildung aus der ursprünglichen Skala hervorgegangen. Das merken wir, es hat nun zwei Fixpunkte.



Zwei Fixpunkte, aber wo?

3 Beispiele

3.1 Kosinus

Wir untersuchen die Gleichung:

$$\cos(x) = x$$

3.1.1 Aktivität am Taschenrechner

- Wir brauchen einen Taschenrechner mit UPN (umgekehrte polnische Notation), bei welchem man zuerst die Zahl und dann die Funktion (zum Beispiel $\boxed{\cos}$) eintippen muss.
- Bogenmaß (Radian) einstellen.
- Irgend eine Zahl eingeben.
- Fortlaufend auf $\boxed{\cos}$ -Taste drücken.

Was geschieht. Was bedeutet das?

Nach 57 Schritten stabilisiert sich die Zahl im Rahmen der angezeigten Genauigkeit.

Das heißt aber, dass dann cos(Zahl) = Zahl gilt, wir haben eine Lösung der Gleichung $\cos(x) = x$.

n	x[n]	n	x[n]
0	1.0000000000	31	0.7390838470
1	0.5403023059	32	0.7390859996
2	0.8575532158	33	0.7390845496
3	0.6542897905	34	0.7390855264
4	0.7934803587	35	0.7390848684
5	0.7013687736	36	0.7390853116
6	0.7639596829	37	0.7390850131
7	0.7221024250	38	0.7390852142
8	0.7504177618	39	0.7390850787
9	0.7314040424	40	0.7390851699
10	0.7442373549	41	0.7390851085
11	0.7356047404	42	0.7390851499
12	0.7414250866	43	0.7390851220
13	0.7375068905	44	0.7390851408
14	0.7401473356	45	0.7390851281
15	0.7383692041	46	0.7390851366
16	0.7395672022	47	0.7390851309
17	0.7387603199	48	0.7390851348
18	0.7393038924	49	0.7390851322
19	0.7389377567	50	0.7390851339
20	0.7391843998	51	0.7390851327
21	0.7390182624	52	0.7390851335
22	0.7391301765	53	0.7390851330
23	0.7390547907	54	0.7390851334
24	0.7391055719	55	0.7390851331
25	0.7390713653	56	0.7390851333
26	0.7390944074	57	0.7390851332
27	0.7390788860	58	0.7390851332
28	0.7390893414	59	0.7390851332
29	0.7390822985	60	0.7390851332
30	0.7390870427	61	0.7390851332

Fixpunktverfahren

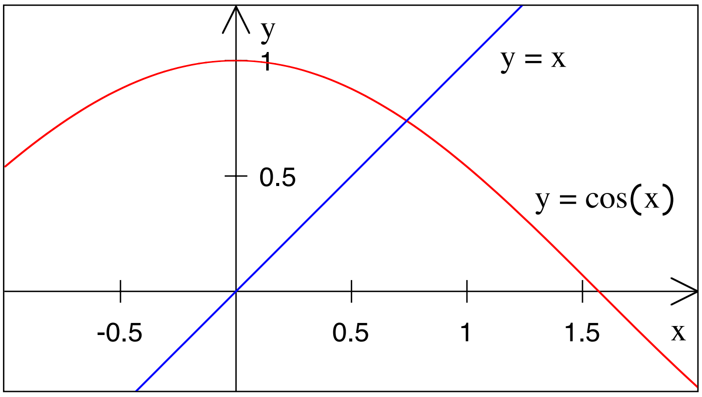
Wir können diese Zahlenfolge durch den Startwert $x_0 = 1$ und die Rekursionsformel

$$x_{n+1} = \cos(x_n)$$

festlegen.

3.1.2 Geometrischer Sachverhalt

Die Lösung von $\cos(x) = x$ kann als x-Koordinate des Schnittpunktes der Graphen von $y = \cos(x)$ und $y = x$ gesehen werden.

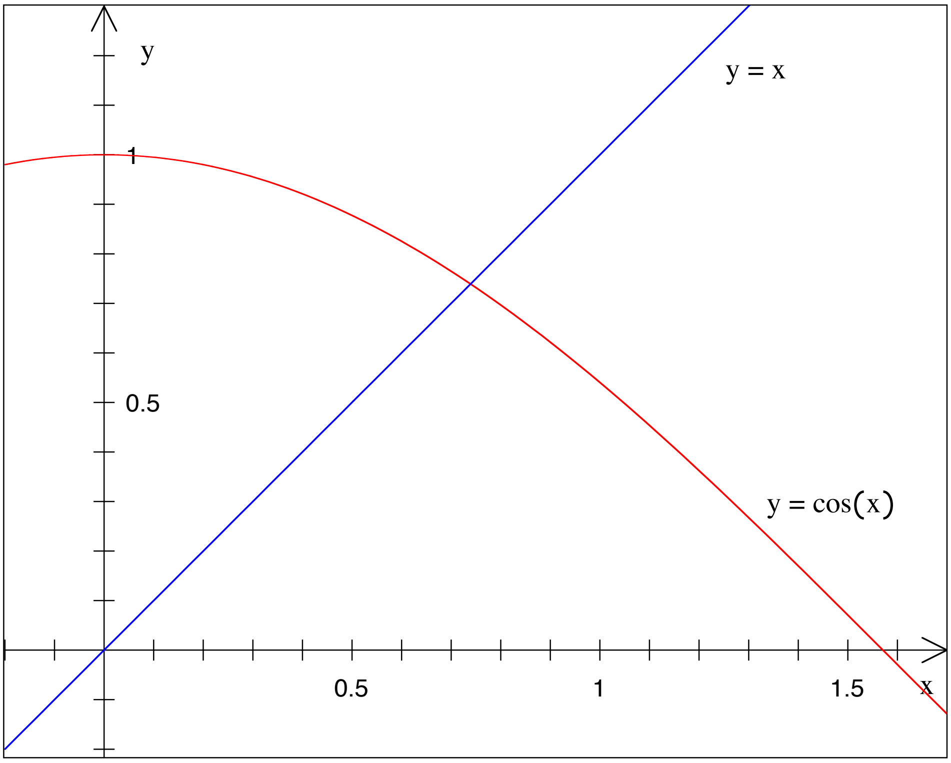


Gesucht ist der Schnittpunkt

Wir können nun unsere Folge mit dem Startwert $x_0 = 1$ und der Rekursionsformel

$$x_{n+1} = \cos(x_n)$$

graphisch mitverfolgen.



$x_{n+1} = \cos(x_n)$

Es entsteht eine (eckige) Spirale um den Fixpunkt.

3.1.3 Zwischenbemerkung

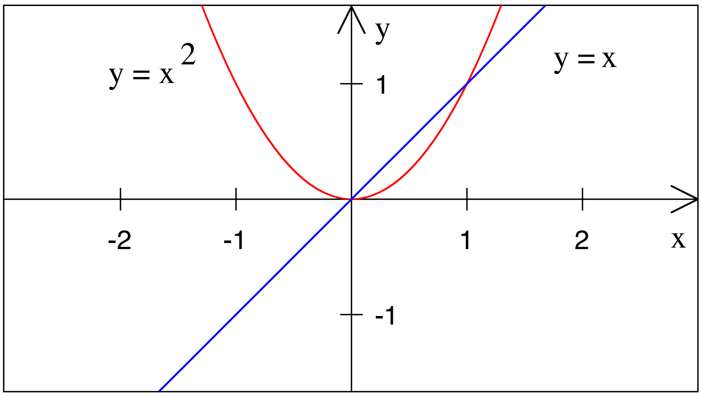
Wir haben die Gleichung $\cos(x) = x$ bereits mit dem NEWTON-Verfahren gelöst; dazu brauchten wir nur 4 Schritte statt deren 57 wie bei unserem Fixpunktverfahren. Dafür wird die Ableitung der Funktion f benötigt, was beim Fixpunktverfahren wegfällt.

n	x[n]
0	1.0000000000
1	0.7503638678
2	0.7391128909
3	0.7390851334
4	0.7390851332
5	0.7390851332
6	0.7390851332

Tabelle des Newton-Verfahrens

3.2 Quadratfunktion

Wir bearbeiten die Gleichung $x^2 = x$, welche die beiden Lösungen $x = 0$ und $x = 1$ hat. Geometrisch sieht das so aus:



$f(x) = x^2$

3.2.1 Aktivität am Taschenrechner

- Wir brauchen einen Taschenrechner mit UPN (umgekehrte polnische Notation), bei welchem man zuerst die Zahl und dann die Funktion (zum Beispiel $\boxed{x^2}$) eintippen muss.
- Irgend eine Zahl eingeben.
- Fortlaufend auf $\boxed{x^2}$-Taste drücken.

Wir beginnen also mit einem frei gewählten Startwert x_0 und rechnen nach der Rekursion: $x_{n+1} = x_n^2$. Dabei stellen wir fest, dass drei Fälle zu unterscheiden sind:

1) Mit einem Startwert x_0 mit $|x_0| < 1$ ist $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n) = 0$.

Schritt n	x_n	
0	0.9	(Startwert)
1	0.81	
2	0.6561	
3	0.43046721	
4	0.1853020189	
5	0.03433683821	
6	0.001179018458	

Der Fixpunkt 0 heißt *stabiler* Fixpunkt. Bei einer leichten Abweichung von einem stabilen Fixpunkt kommen wir automatisch wieder auf diesen Fixpunkt zurück.

2) Ist der Startwert exakt $x_0 = 1$, erhalten wir die konstante Folge $x_n = 1$ und damit $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n) = 1$.

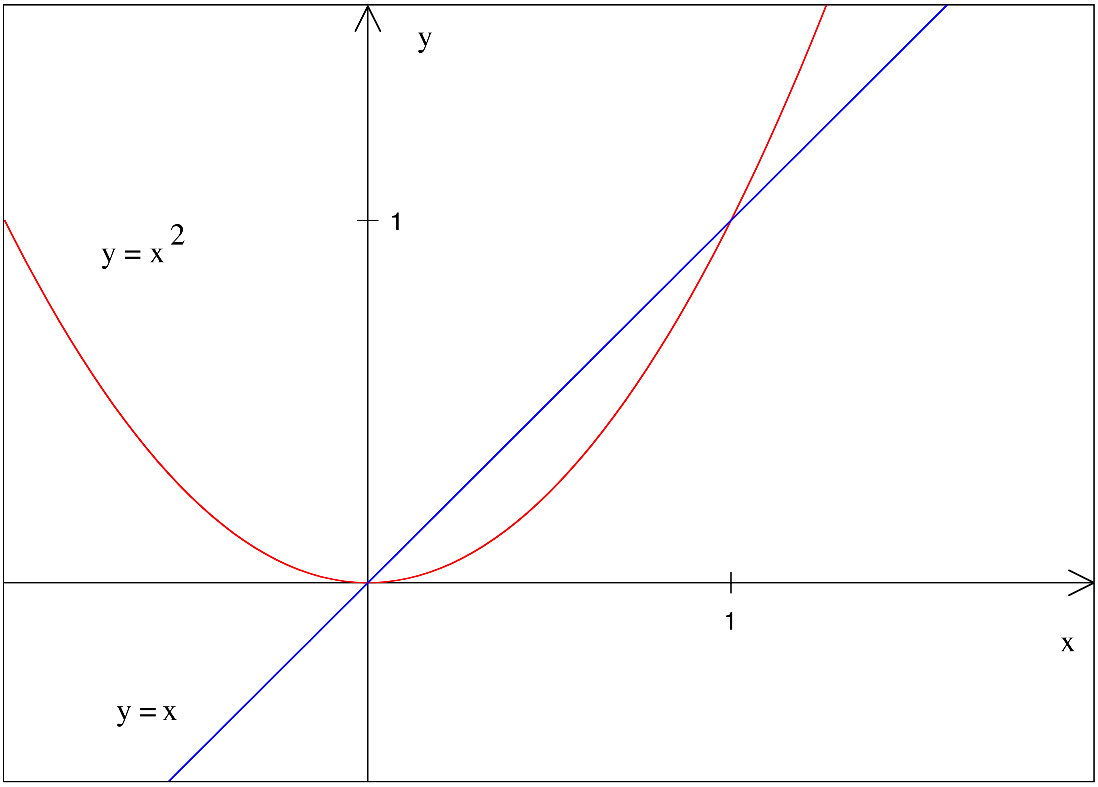
Schritt n	x_n	
0	1	(Startwert)
1	1	
2	1	
3	1	
4	1	

3) Mit einem Startwert x_0 mit $|x_0| > 1$ divergiert die Folge x_n .

Schritt n	x_n	
0	1.1	(Startwert)
1	1.21	
2	1.4641	
3	2.14358881	
4	4.594972986	
5	21.11377674	
6	445.7915682	
7	198730.1223	

Der Fixpunkt 1 heißt *labiler* Fixpunkt. Bei einer leichten Abweichung von einem labilen Fixpunkt kommen wir nicht wieder auf diesen Fixpunkt zurück.

3.2.2 Graphisches Vorgehen



Stabiler Fixpunkt $x = 0$ und labiler Fixpunkt $x = 1$

3.3 Vorgehen allgemein

1. Gleichung umformen in die Form: dadamdadam $= x$

2. Linken Teil als Funktion auffassen: $f(x) = x$

3. Startwert x_0 wählen

4. Rekursion: $x_{n+1} = f(x_n)$

5. Stabiler Fixpunkt: $\lim_{x \to \infty} (x_n)$

6. Vorsicht: Labile Fixpunkte gehen verloren

3.4 Beispiel: Kubische Gleichung

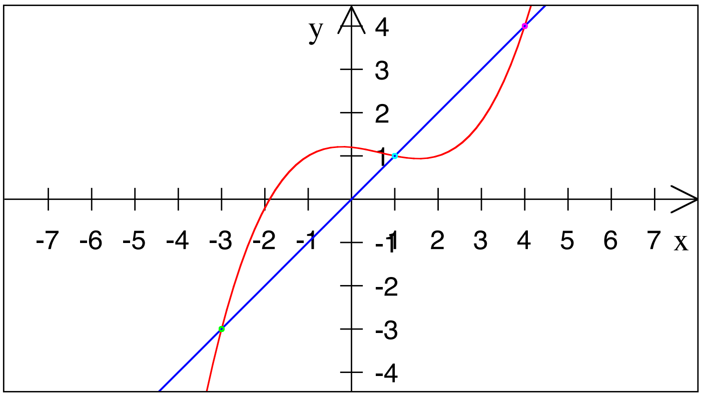
Wir bearbeiten die Gleichung:

$$\tfrac{1}{10}x^3 - \tfrac{1}{5}x^2 - \tfrac{11}{10}x + \tfrac{6}{5} = 0$$

Durch die Umformung:

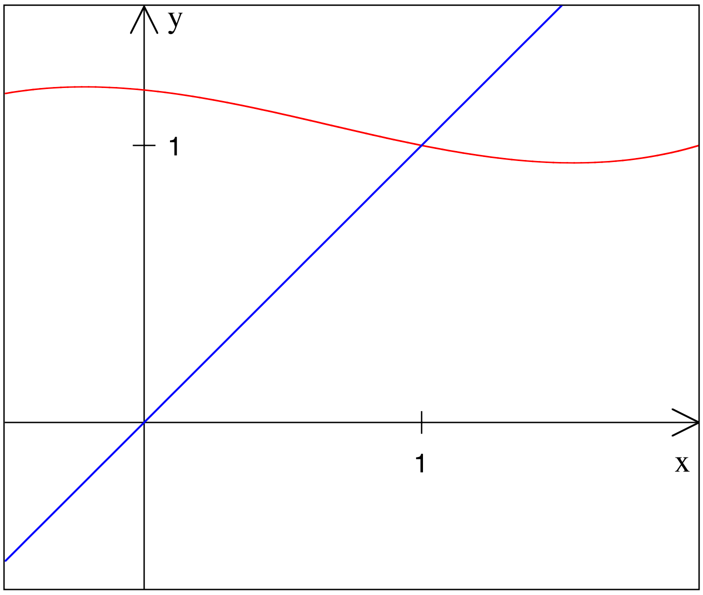
$$\underbrace{\tfrac{1}{10}x^3 - \tfrac{1}{5}x^2 - \tfrac{1}{10}x + \tfrac{6}{5}}_{f(x)} = x$$

bringen wir sie auf die für unser Verfahren benötigte Form $f(x) = x$. Graphisch sieht das so aus:

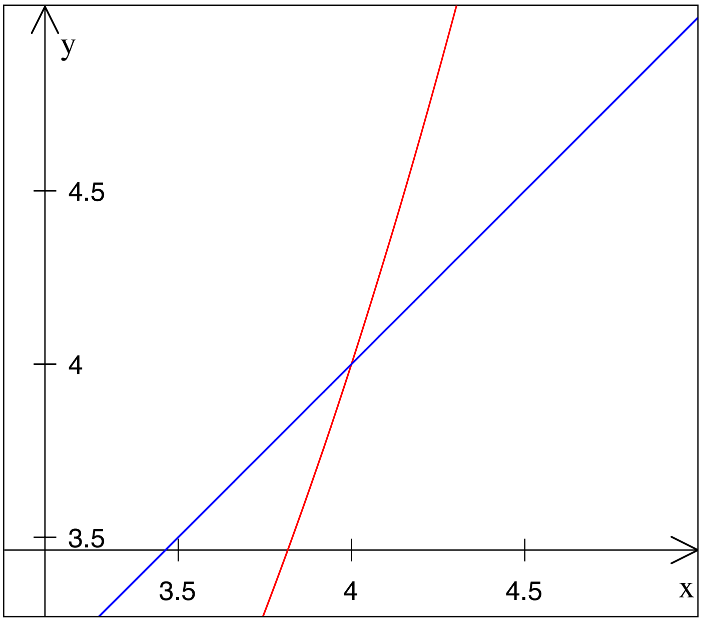


Labile Fixpunkte? Stabile Fixpunkte?

Die Fixpunkte sind offensichtlich bei $-3, 1, 4$. Welches sind labile, welches stabile Fixpunkte? Dazu zoomen wir den Graphen in der Umgebung je eines Fixpunktes.



Fixpunkt *x* = 1 stabil



Fixpunkt $x = 4$ labil

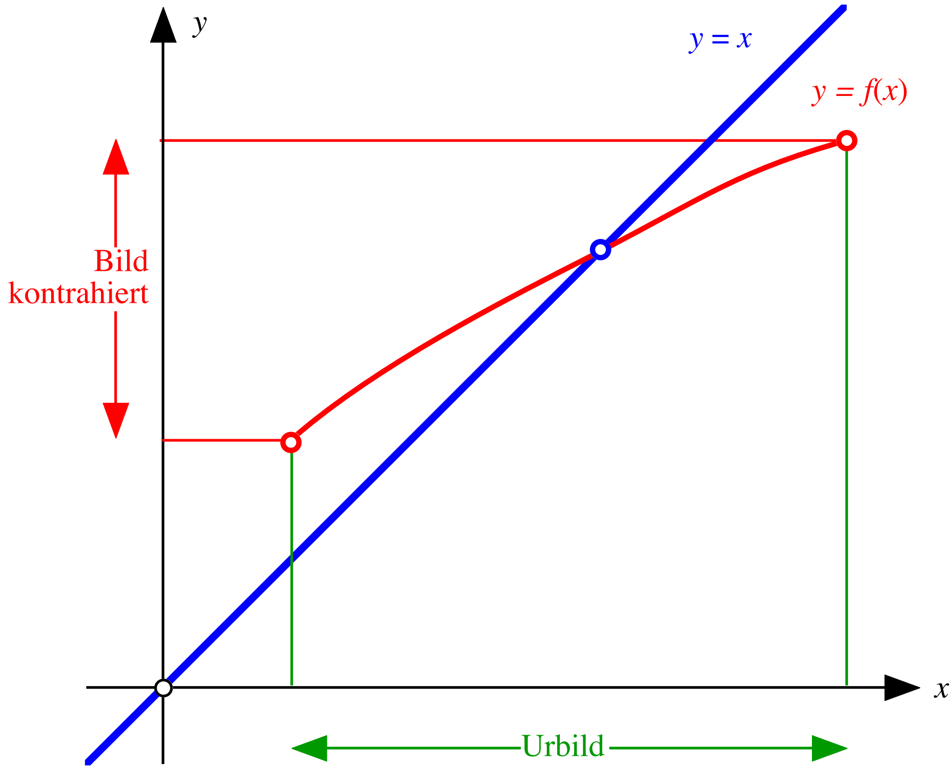
Die Frage der Stabilität hat offenbar mit der Steigung im Fixpunkt zu tun.

4 Stabiler Fixpunkt

Ein Fixpunkt ist stabil, wenn die Steigung klein ist, das heißt $-1 < f'(x) < 1$. Dabei sind zwei Fälle zu unterscheiden.

4.1 Kleine positive Steigung

Es sei $0 < f'(x) < 1$ in einer Umgebung des Fixpunktes. Dann haben wir folgende Situation:

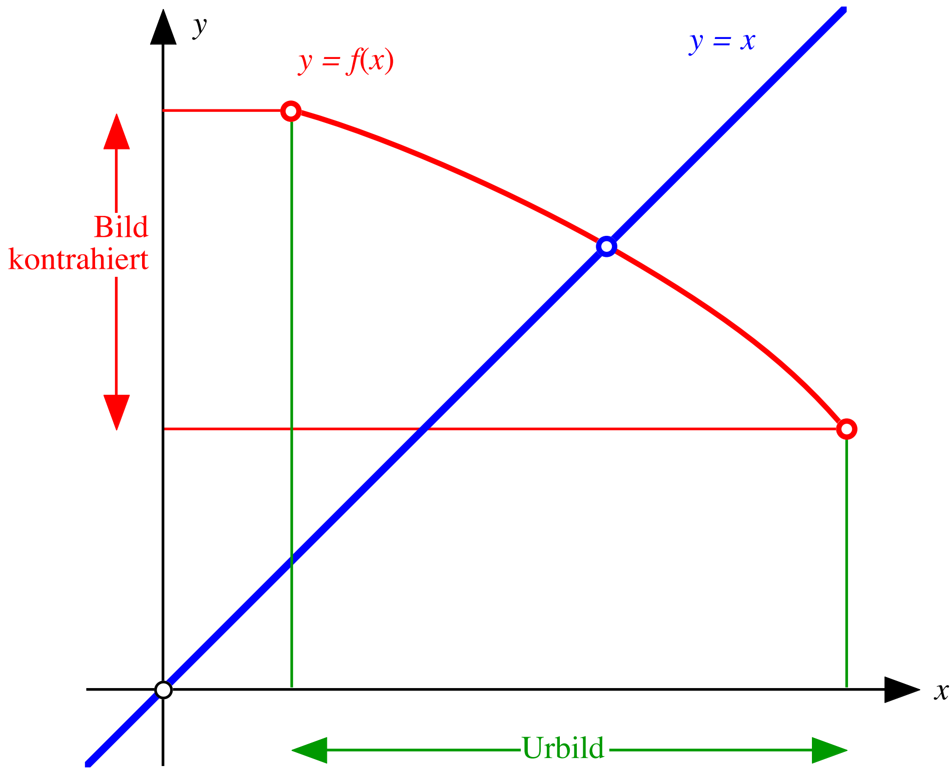


Positive kleine Steigung ergibt eine Treppe

Die Anwendung des Fixpunktverfahrens ergibt eine Treppe.

4.2 Kleine negative Steigung

Es sei nun $-1 < f'(x) < 0$ in einer Umgebung des Fixpunktes. Dann haben wir folgende Situation:



Negative kleine Steigung ergibt eine Spirale

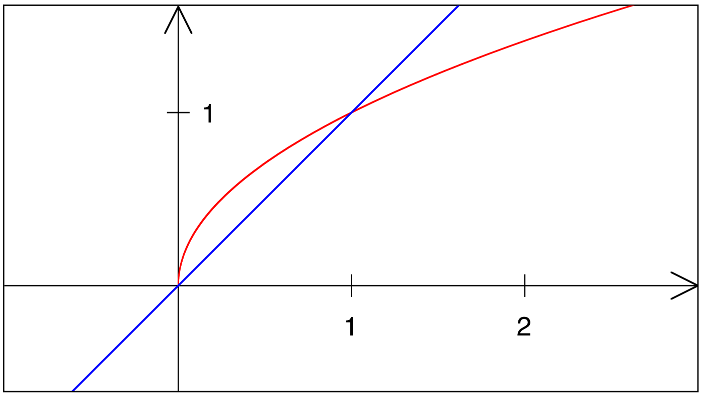
Die Anwendung des Fixpunktverfahrens ergibt eine Spirale.

4.3 Funktion und Umkehrfunktion

Bei der Bearbeitung von $x^2 = x$ haben wir gesehen, dass es einen labilen ($x = 1$) und einen stabilen ($x = 0$) Fixpunkt gibt. Wenn wir die Sache aber umformen

$$x^2 = x$$
$$x = \sqrt{x}$$

sieht die Sache gerade umgekehrt aus. Nun ist $x = 1$ ein stabiler Fixpunkt, dafür $x = 0$ ein labiler Fixpunkt.



$x = \sqrt{x}$

Wir sind von der Quadratfunktion zur Wurzelfunktion übergegangen. Diese Funktionen sind Umkehrfunktionen voneinander, das heißt ihre Graphen sind spiegelbildlich. Dort, wo die eine Funktion steil ist, also eine Steigung hat, welche betragsmäßig > 1 ist, ist die Umkehrfunktion flach, hat also betragsmäßig eine Steigung < 1. Damit werden die labilen und die stabilen Fixpunkte vertauscht.

Dies gilt allgemein beim Übergang zur Umkehrfunktion. Leider ist es nicht immer einfach, in der Umgebung eines Fixpunktes die Funktion zu invertieren.

5 NEWTON-Verfahren und Fixpunktverfahren

Wir haben folgendes festgestellt:

NEWTON-Verfahren	**Fixpunktverfahren**
schnell	langsam
braucht Funktion und Ableitung	braucht nur Funktion
Probleme mit $f'(x) = 0$	—
—	labile Fixpunkte
—	bei labilen Fixpunkten können wir allenfalls mit der Umkehrfunktion arbeiten

6 Zusammenfassung

6.1 Fixpunkt, Fixpunktsatz

Fixpunkt: $f(x) = x$

Fixpunktsatz: Jede kontrahierende Abbildung hat genau einen Fixpunkt.

Beispiel: Stadtplan „Ihr Standort“

Geometrie: Schnittpunkt des Funktionsgraphen mit der Geraden $y = x$

Stabiler Fixpunkt: $\left|f'\left(x_0\right)\right| < 1$, „flache Kurve“. Treppe oder Spirale

Labiler Fixpunkt: $\left|f'\left(x_0\right)\right| > 1$, „steile Kurve“

6.2 Vorgehen

1. Gleichung umformen in die Form: dadamdadam $= x$

2. Linken Teil als Funktion auffassen: $f\left(x\right) = x$

3. Startwert x_0 wählen

4. Rekursion: $x_{n+1} = f\left(x_n\right)$

5. Stabiler Fixpunkt: $\lim\limits_{x \to \infty} \left(x_n\right)$

6. Vorsicht: Labile Fixpunkte gehen verloren