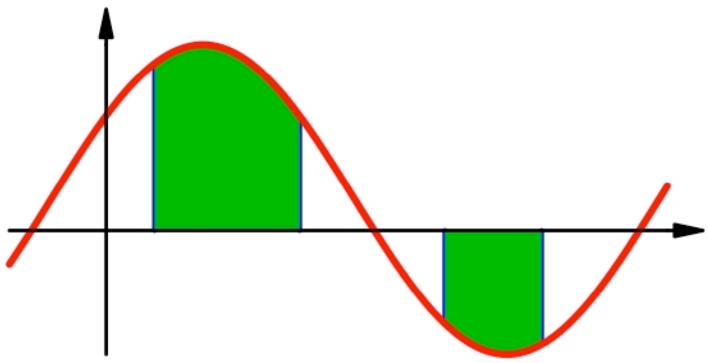
Hans Walser

Mathematik 1 für Naturwissenschaften



Modul 108

Integration

Lernumgebung

UNI
BASEL

Inhalt

Modul 108 für die Lehrveranstaltung *Mathematik 1 für Naturwissenschaften*

Winter 2003/04 Erstausgabe
Winter 2004/05 Erweiterung. Teilweise Angabe von Lösungswegen
Winter 2005/06 Fehlerkorrekturen. Erweiterung. Geändertes Layout
Winter 2006/07 Formel-Editor revidiert (MathType). Ergänzungen
Herbst 2007 Geändertes Layout
Herbst 2008 Erweiterung
Herbst 2010 Grafische Überarbeitung
Herbst 2012 Erweiterung
Herbst 2013 Erweiterung

last modified: 27. November 2012

Hans Walser
Mathematisches Institut, Rheinsprung 21, 4051 Basel
www.math.unibas.ch/~walser

1 Unbestimmte Integrale

a) $\int x^7 \mathrm{d}x =$ b) $\int x^7 \mathrm{d}t =$ c) $\int x^7 t^7 \mathrm{d}x =$ d) $\int x^7 t^7 \mathrm{d}s =$

Ergebnis

a) $\int x^7 \mathrm{d}x = \frac{1}{8} x^8 + C$ b) $\int x^7 \mathrm{d}t = x^7 t + C$

c) $\int x^7 t^7 \mathrm{d}x = \frac{1}{8} x^8 t^7 + C$ d) $\int x^7 t^7 \mathrm{d}s = x^7 t^7 s + C$

2 Simple Übungsaufgabe

a) Schumi fährt zuerst 10 Minuten mit 180 km/h, dann 10 Minuten mit 160 km/h und schließlich 10 Minuten mit 230 km/h. Wie groß ist seine Durchschnittsgeschwindigkeit?

b) Schumi fährt die ersten 30 km mit 180 km/h, die zweiten 30 km mit 160 km/h und die letzten 30 km mit 230 km/h. Wie groß ist seine Durchschnittsgeschwindigkeit?

c) Was hat das mit Integration zu tun?

Ergebnis

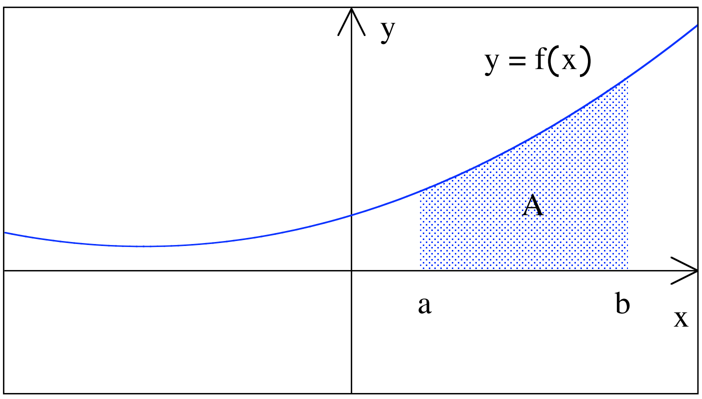
a) 192 km/h

b) 185.72 km/h

c) —

3 Spiegelfechterei

Es sei $A = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.



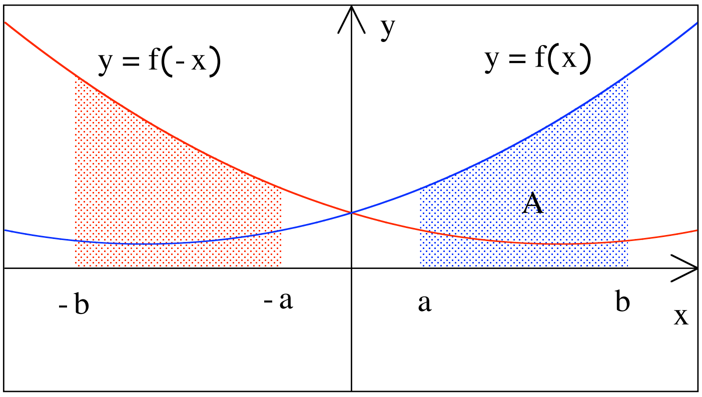
Das Integral *A*

Wie können die folgenden Integrale durch A angegeben werden:

a) $-\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x = ?$ b) $\int_a^b f(-x)\,\mathrm{d}x = ?$ c) $\int_{-b}^{-a} f(-x)\,\mathrm{d}x = ?$

d) $\int_{-a}^{-b} f(-x)\,\mathrm{d}x = ?$ e) $\int_a^b f(x)(-\mathrm{d}x) = ?$ f) $\int_{-a}^{-b} f(-x)(-\mathrm{d}x) = ?$

Ergebnis



Figur zum Ansehen

a) $-\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x = A$ b) $\int_a^b f(-x)\,\mathrm{d}x =$ geht nicht c) $\int_{-b}^{-a} f(-x)\,\mathrm{d}x = A$

d) $\int_{-a}^{-b} f(-x)\,\mathrm{d}x = -A$ e) $\int_a^b f(x)(-\mathrm{d}x) = -A$ f) $\int_{-a}^{-b} f(-x)(-\mathrm{d}x) = A$

4 Was stimmt denn nun?

Verbessern Sie, wo nötig:

a) $\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \cos(t)\,\mathrm{d}t \overset{?}{=} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t)\,\mathrm{d}t$ b) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \cos(t)\,\mathrm{d}t \overset{?}{=} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t)\,\mathrm{d}t$ c) $\int_0^{-\frac{\pi}{2}} \cos(t)\,\mathrm{d}t \overset{?}{=} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t)\,\mathrm{d}t$

d) $\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \sin(t)\,\mathrm{d}t \overset{?}{=} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t)\,\mathrm{d}t$ e) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \sin(t)\,\mathrm{d}t \overset{?}{=} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t)\,\mathrm{d}t$ f) $\int_0^{-\frac{\pi}{2}} \sin(t)\,\mathrm{d}t \overset{?}{=} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t)\,\mathrm{d}t$

Ergebnis

a) $\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \cos(t)\,\mathrm{d}t = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t)\,\mathrm{d}t$ b) o. K. c) $\int_0^{-\frac{\pi}{2}} \cos(t)\,\mathrm{d}t = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t)\,\mathrm{d}t$

d) $\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \sin(t)\mathrm{d}t = -\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin(t)\mathrm{d}t$ e) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \sin(t)\mathrm{d}t = -\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin(t)\mathrm{d}t$ f) o. K.

5 Beträge

Skizzieren Sie eine Situation, in der folgendes richtig ist: $\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right| < \int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x$

Ergebnis

Offene Aufgabe

6 Integrale mit Beträgen

a) $\int_0^{2\pi} |\sin(t)|\mathrm{d}t =$ b) $\left|\int_0^{2\pi} \sin(t)\mathrm{d}t\right| =$

c) $\int_{2\pi}^{0} |\sin(t)|\mathrm{d}t =$ d) $\left|\int_{2\pi}^{0} |\sin(t)|\mathrm{d}t\right| =$

Ergebnis

a) 4 b) 0 c) -4 d) 4

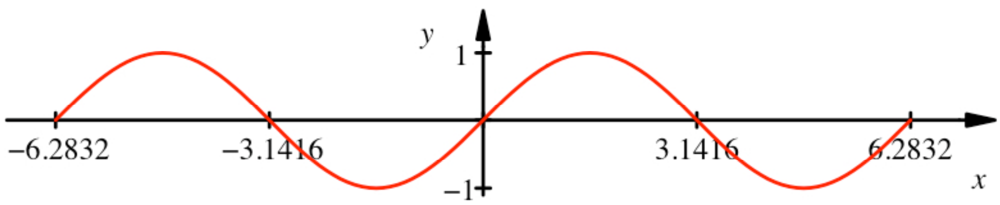
7 Variationen zum Sinus

Skizzieren Sie die folgenden Funktionen für $x \in [-2\pi, 2\pi]$. Geben Sie das Integral über dieses Intervall an. Ist die jeweilige Funktion gerade oder ungerade?

a) $a(x) = \sin(x)$ b) $b(x) = |\sin(x)|$ c) $c(x) = \sin(|x|)$ d) $d(x) = |\sin(|x|)|$

Bearbeitung

a) $a(x) = \sin(x)$

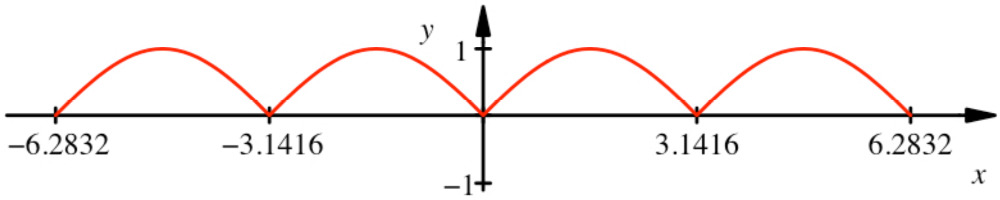


$a(x) = \sin(x)$

Ungerade Funktion.

$$\int_{-2\pi}^{2\pi} \sin(x)\,\mathrm{d}x = 0$$

b) $b(x) = |\sin(x)|$

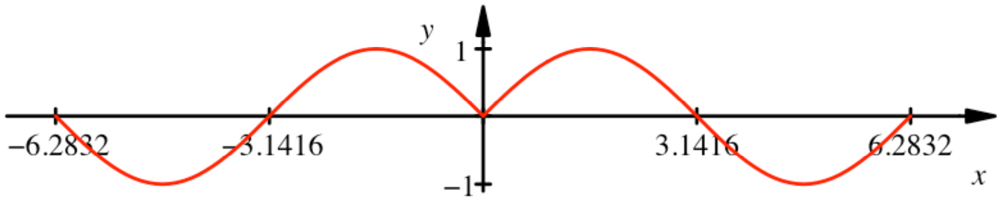


$b(x) = |\sin(x)|$

Gerade Funktion.

$$\int_{-2\pi}^{2\pi} |\sin(x)|\,\mathrm{d}x = 8$$

c) $c(x) = \sin(|x|)$

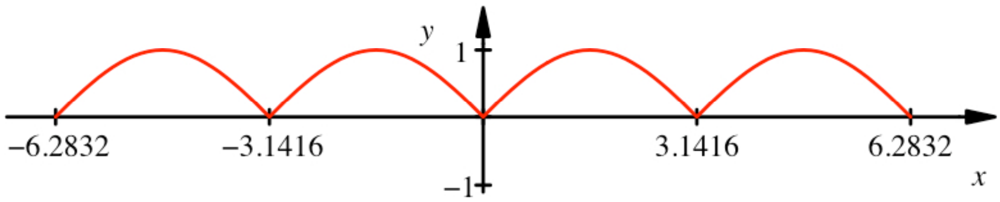


$c(x) = \sin(|x|)$

Gerade Funktion.

$$\int_{-2\pi}^{2\pi} \sin(|x|)\,\mathrm{d}x = 0$$

d) $d(x) = |\sin(|x|)|$



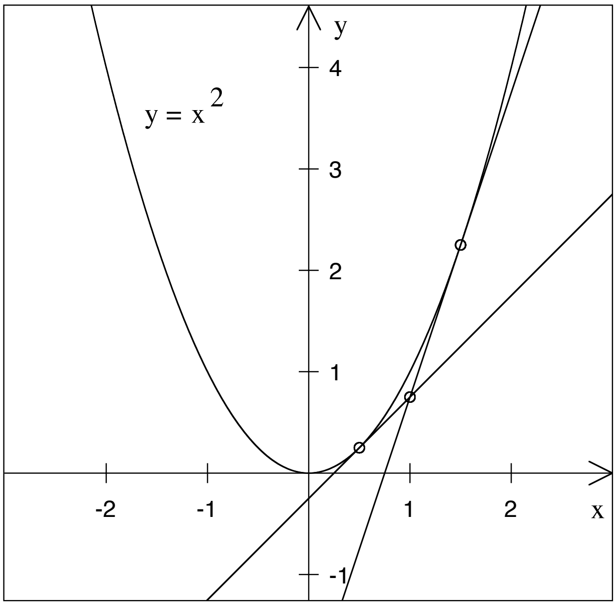
$d(x) = |\sin(|x|)|$

Gerade Funktion.

$$\int_{-2\pi}^{2\pi} \left|\sin\left(|x|\right)\right| \mathrm{d}x = 8$$

8 Eine Aufgabe mit steigendem Schwierigkeitsgrad, die aber immer einfacher wird.

a) Es sei $y = f(x) = x^2$, $p_a(x)$ die Tangente an den Graphen von f an der Stelle a und $p_b(x)$ die Tangente an den Graphen von f an der Stelle b. Wie groß ist der Flächeninhalt des durch die Graphen von f, p_a und p_b berandeten Dreieckes?



Parabel mit Tangenten

b) Es sei $y = f(x) = x^3$, $p_a(x)$ die Taylor-Approximation vom Grad 2 von f an der Stelle a und $p_b(x)$ die Taylor-Approximation vom Grad 2 von f an der Stelle b. Wie groß ist der Flächeninhalt des durch die Graphen von f, p_a und p_b berandeten Dreieckes?

c) Es sei $y = f(x) = x^4$, $p_a(x)$ die Taylor-Approximation vom Grad 3 von f an der Stelle a und $p_b(x)$ die Taylor-Approximation vom Grad 3 von f an der Stelle b. Wie groß ist der Flächeninhalt des durch die Graphen von f, p_a und p_b berandeten Dreieckes?

d) Es sei $y = f(x) = x^n$, $p_a(x)$ die Taylor-Approximation vom Grad $n-1$ von f an der Stelle a und $p_b(x)$ die Taylor-Approximation vom Grad $n-1$ von f an der Stelle b. Wie groß ist der Flächeninhalt des durch die Graphen von f, p_a und p_b berandeten Dreieckes?

Ergebnis

a) $\frac{1}{12}(b-a)^3$

b) keine Lösung

c) $\frac{1}{80}(b-a)^5$

d) Falls n ungerade, keine Lösung. Falls n gerade: $\frac{1}{2^n(n+1)}(b-a)^{n+1}$

Lösungsweg

a) Tangente an den Graphen von f an der Stelle a: $p_a(x) = a^2 + 2a(x-a) = 2ax - a^2$

Analog: $p_b(x) = 2bx - b^2$

Schnittpunkt: $2ax - a^2 = 2bx - b^2 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{a+b}{2}$

Dreiecksfläche:

$$\int_a^b x^2 \mathrm{d}x - \left[\int_a^{\frac{a+b}{2}} \left(2ax - a^2\right) \mathrm{d}x + \int_{\frac{a+b}{2}}^b \left(2bx - b^2\right) \mathrm{d}x \right] = \tfrac{1}{12}\left(b^3 - 3ab^2 + 3a^2b - a^3\right) = \tfrac{1}{12}(b-a)^3$$

Bemerkung: Die Rechnungen werden einfacher mit folgender Umformung:

$$p_a(x) = 2ax - a^2 = \underbrace{x^2 - x^2}_{=0} + 2ax - a^2 = x^2 - (x-a)^2$$

$$p_b(x) = x^2 - (x-b)^2$$

Schnittpunkt: $x^2 - (x-a)^2 = x^2 - (x-b)^2 \quad \Rightarrow \quad (x-a) = \pm(x-b)$.

Die Plus-Variante liefert: $(x-a) = (x-b)$ (Widerspruch).

Die Minus-Variante liefert: $(x-a) = -(x-b) \quad \Rightarrow \quad x = \frac{a+b}{2}$

Dreiecksfläche:

$$\int_a^b x^2 \mathrm{d}x - \left[\int_a^{\frac{a+b}{2}} \left(x^2 - (x-a)^2\right) \mathrm{d}x + \int_{\frac{a+b}{2}}^b \left(x^2 - (x-b)^2\right) \mathrm{d}x \right]$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ x^2 \text{ fällt weg}}}{=} \int_a^{\frac{a+b}{2}} (x-a)^2 \,\mathrm{d}x + \int_{\frac{a+b}{2}}^b (x-b)^2 \,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{12}(b-a)^3$$

b) $p_a(x) = a^3 + 3a^2(x-a) + 3a(x-a)^3$; $p_b(x) = b^3 + 3b^2(x-b) + 3b(x-b)^3$

Schnittpunkt: $a^3+3a^2(x-a)+3a(x-a)^3 = b^3+3b^2(x-b)+3b(x-b)^3$. Führt auf die quadratische Gleichung: $3x^2-3x(a+b)+\left(a^2+ab+b^2\right)=0$. Diese hat die Diskriminante: $D=-3\underbrace{(a+b)^2}_{<0}<0$. Es gibt also keine reelle Lösung.

c) Überspringen wir, nachher als Sonderfall von d) behandeln.

d)

$$\begin{aligned}
f(x)&=x^n &&\Rightarrow\quad f(a)=a^n\\
f'(x)&=nx^{n-1} &&\Rightarrow\quad f'(a)=na^{n-1}\\
f''(x)&=(n-1)nx^{n-2} &&\Rightarrow\quad f''(a)=(n-1)na^{n-2}\\
&\vdots\\
f^{(k)}(x)&=(n-(k-1))\cdots(n-1)nx^{n-k}=\tfrac{n!}{(n-k)!}x^{n-k} &&\Rightarrow\quad f^{(k)}(a)=\tfrac{n!}{(n-k)!}a^{n-k}
\end{aligned}$$

Damit wird

$$\begin{aligned}
p_a(x)&=\sum_{k=0}^{n-1}\tfrac{1}{k!}f^{(k)}(a)(x-a)^k\\
&=\sum_{k=0}^{n-1}\tfrac{1}{k!}\tfrac{n!}{(n-k)!}a^{n-k}(x-a)^k\\
&=\sum_{k=0}^{n-1}\tbinom{n}{k}a^{n-k}(x-a)^k\\
&=\underbrace{\sum_{k=0}^{n}\tbinom{n}{k}a^{n-k}(x-a)^k}_{=(a-(x-a))^n=x^n}-\underbrace{\tbinom{n}{n}a^{n-n}(x-a)^n}_{=(x-a)^n}\\
&=x^n-(x-a)^n
\end{aligned}$$

analog: $p_b(x)=x^n-(x-b)^n$

Schnittpunkt: $x^n-(x-a)^n=x^n-(x-b)^n \quad\Rightarrow\quad (x-a)^n=(x-b)^n$

Fallunterscheidung:

n ungerade: $(x-a)=(x-b)$, keine Lösung.

n gerade: $(x-a)=\pm(x-b)$, die Plus-Variante liefert: $(x-a)=(x-b)$ (Widerspruch). Die Minus-Variante liefert: $(x-a)=-(x-b) \quad\Rightarrow\quad x=\frac{a+b}{2}$

Dreiecksfläche:

$$\text{Dreiecksfläche } = \int_a^b x^n \mathrm{d}x - \left[\int_a^{\frac{a+b}{2}} \left(x^n - (x-a)^n \right) \mathrm{d}x + \int_{\frac{a+b}{2}}^b \left(x^n - (x-b)^n \right) \mathrm{d}x \right]$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ x^n \text{ fällt weg}}}{=} \int_a^{\frac{a+b}{2}} (x-a)^n \, \mathrm{d}x + \int_{\frac{a+b}{2}}^b (x-b)^n \, \mathrm{d}x$$

$$= \tfrac{1}{n+1} \left[(x-a)^{n+1} \Big|_a^{\frac{a+b}{2}} + (x-b)^{n+1} \Big|_{\frac{a+b}{2}}^b \right]$$

$$= \tfrac{1}{n+1} \left[\left(\tfrac{b-a}{2} \right)^{n+1} - 0 + 0 - \left(\tfrac{a-b}{2} \right)^{n+1} \right]$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ n+1 \text{ ist} \\ \text{ungerade}}}{=} \tfrac{1}{n+1} \left[\left(\tfrac{b-a}{2} \right)^{n+1} + \left(\tfrac{b-a}{2} \right)^{n+1} \right]$$

$$= \tfrac{1}{n+1} \tfrac{1}{2^n} (b-a)^{n+1}$$

Für $n = 4$ (Fall c)) folgt: Dreiecksfläche $= \frac{1}{80} (b-a)^5$

9 Uneigentliches Integral

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, x \in \left]-1,1\right[$$

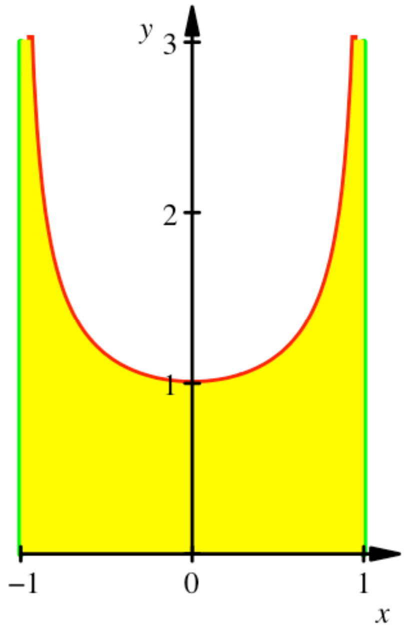
a) Skizze des Funktionsgrafen

b) Uneigentliches Integral:

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, \mathrm{d}x$$

Bearbeitung

a) Skizze des Funktionsgrafen:



Wie groß ist das gelbe Flächenstück?

b) Uneigentliches Integral:

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = 2\int_{0}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = 2\lim_{r\to 1}\int_{0}^{r} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = 2\lim_{r\to 1}\left[\arcsin(x)\right]_0^r$$

$$= 2\lim_{r\to 1}\arcsin(r) = 2\tfrac{\pi}{2} = \pi$$

10 Uneigentliches Integral

Gesucht ist das Integral:

$$I = \int_{-1}^{1} \tfrac{1}{1-x^2}\,\mathrm{d}x = ?$$

Bearbeitung

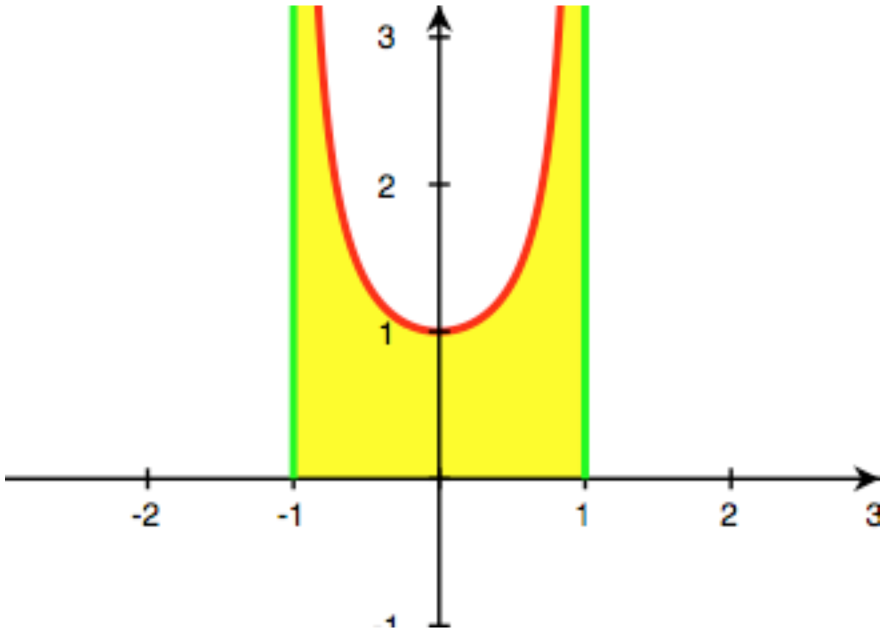
Formelsammlung: Für die Funktion $\operatorname{artanh}(x)$, welche die Umkehrfunktion von $\tanh(x)$ ist, gilt die Ableitungsformel:

$$\operatorname{artanh}'(x) = \tfrac{1}{1-x^2}$$

Damit erhalten wir:

$$\frac{I}{2} = \int_0^1 \frac{1}{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \lim_{r \to 1} \int_0^r \frac{1}{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \lim_{r \to 1} \left[\operatorname{artanh}(x)\right]_0^r = \lim_{r \to 1} \operatorname{artanh}(r) = \infty$$

Das Integral divergiert.



Das Integral divergiert

11 Uneigentliches Integral

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}, x \in \mathbb{R}$$

a) Skizze des Funktionsgrafen

b) Integral:

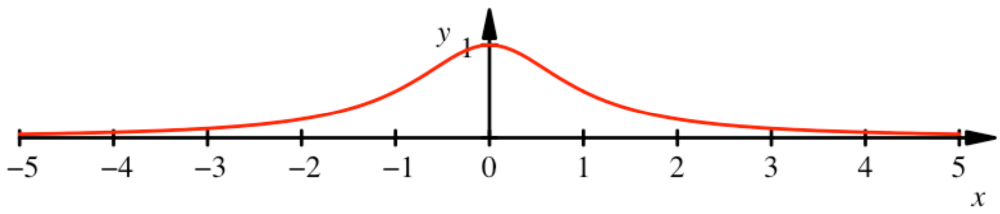
$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$$

c) Uneigentliches Integral:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$$

Bearbeitung

a) Skizze des Funktionsgrafen



Funktionsgraf

b) Integral:

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \left[\arctan(x)\right]_{-1}^{1} = \frac{\pi}{4} - \frac{-\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$$

c) Uneigentliches Integral:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \lim_{r\to\infty} \left[\arctan(x)\right]_{-r}^{r} = 2 \lim_{r\to\infty} \arctan(r) = \pi$$

12 Uneigentliche Integrale

a) $\int_{7}^{\infty} \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$

b) $\int_{7}^{\infty} \mathrm{e}^{x}\,\mathrm{d}x$

Ergebnis

a) $\mathrm{e}^{-7} \approx 0.000912$

b) Integral existiert nicht

13 Uneigentliches Integral

Gemäß Formelsammlung ist $\int \tan(x)\,\mathrm{d}x = -\ln(|\cos(x)|) + C$.

a) Verifikation durch Ableitung

b) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \tan(x)\,\mathrm{d}x = ?$

Bearbeitung

a) Zu zeigen ist: $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(-\ln\left(\left|\cos(x)\right|\right)+C\right)=\tan(x)$. Nun gilt für die Logarithmusfunktion (vgl. Modul 103): $\left(\ln\left(|x|\right)\right)'=\frac{1}{x}$. Man beachte, dass wir links Betragsstriche haben, rechts nicht. Damit erhalten wir:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(-\ln\left(\left|\cos(x)\right|\right)+C\right)=-\frac{1}{\cos(x)}\left(-\sin(x)\right)=\tan(x)$$

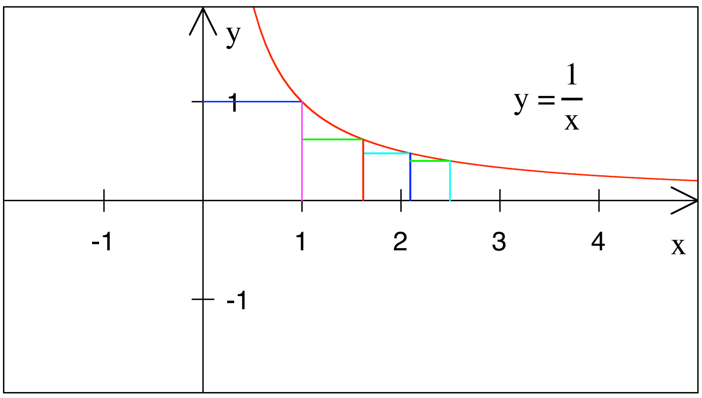
b) Es ist:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\tan(x)\mathrm{d}x=\lim_{r\to\frac{\pi}{2}}\int_0^r\tan(x)\mathrm{d}x=\lim_{r\to\frac{\pi}{2}}\left(-\ln\left(\left|\cos(x)\right|\right)\right)_0^r$$

$$=\lim_{r\to\frac{\pi}{2}}\left(-\ln\left(\left|\cos(r)\right|\right)\right)-\left(\underbrace{-\ln\left(\underbrace{\left|\cos(0)\right|}_{1}\right)}_{0}\right)=\lim_{r\to\frac{\pi}{2}}\left(-\ln\left(\left|\cos(r)\right|\right)\right)$$

Für $r\to\frac{\pi}{2}$ gilt der Reihe nach: $\left|\cos(r)\right|\to 0$, $\ln\left(\left|\cos(x)\right|\right)\to-\infty$ und schließlich $-\ln\left(\left|\cos(x)\right|\right)\to\infty$. Das uneigentliche Integral existiert also nicht.

14 Abschätzung



Abschätzung

Unter der Hyperbel $y=\frac{1}{x}$ wird ausgehend vom Einheitsquadrat eine unendliche Folge von Quadraten eingezeichnet (in der Figur sind die ersten vier Quadrate eingezeichnet). Was kann über die Summe der Flächen aller dieser Quadrate gesagt werden?

Ergebnis:

Die Reihe ist divergent. Werden alle Quadrate um eine Einheit nach rechts verschoben, sieht man, dass ihre Summe größer ist als $\int_1^{\infty}\frac{1}{x}\mathrm{d}x=\infty$.

15 Gleiche Integrale

Es sei

$$\int_a^b \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \int_b^c \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$$

mit $0 < a < b < c$. Wie hängt b von a und c ab?

Bearbeitung

$$\int_a^b \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \int_b^c \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$$

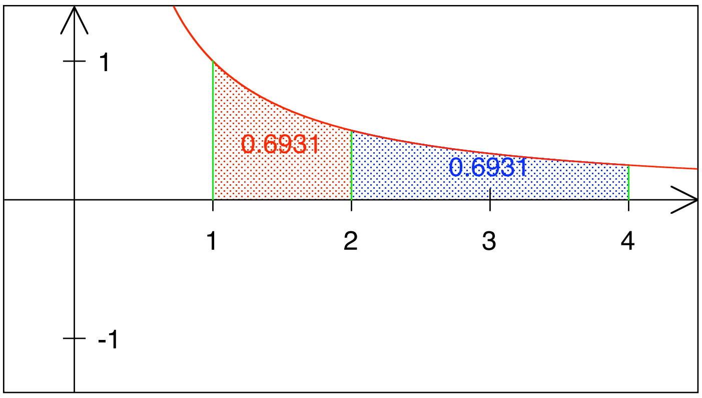
$$\ln(b) - \ln(a) = \ln(c) - \ln(b)$$

$$2\ln(b) = \ln(a) + \ln(a)$$

$$b^2 = ac$$

$$b = \sqrt{ac}$$

b ist das geometrische Mittel von a und c.



$$\int_1^2 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \int_2^4 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$$

16 Mehrere Lösungswege

Es sei $f(t) = \mathrm{e}^{kt}$. Es gibt mehrere Lösungswege, um

$$\lim_{k\to 0}\left(\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right)$$

zu berechnen.

Erster Lösungsweg

Wir berechnen zunächst das Integral:

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b \mathrm{e}^{kt}\,\mathrm{d}t = \tfrac{1}{k}\mathrm{e}^{kt}\Big|_a^b = \frac{\mathrm{e}^{kb}-\mathrm{e}^{ka}}{k}$$

Beim Grenzübergang $k \to 0$ gehen Zähler und Nenner gegen Null, wir müssen also die Regel von Bernoulli – de l'Hôpital anwenden.

$$\lim_{k\to 0}\left(\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right) = \lim_{k\to 0}\left(\frac{\mathrm{e}^{kb}-\mathrm{e}^{ka}}{k}\right) = \lim_{k\to 0}\left(\frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}k}\left(\mathrm{e}^{kb}-\mathrm{e}^{ka}\right)}{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}k}(k)}\right) = \lim_{k\to 0}\left(\frac{b\mathrm{e}^{kb}-a\mathrm{e}^{ka}}{1}\right) = b-a$$

Zweiter Lösungsweg

Wir vertauschen Limes und Integral:

$$\lim_{k\to 0}\left(\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right) = \int_a^b \lim_{k\to 0}\left(f(t)\right)\mathrm{d}t$$

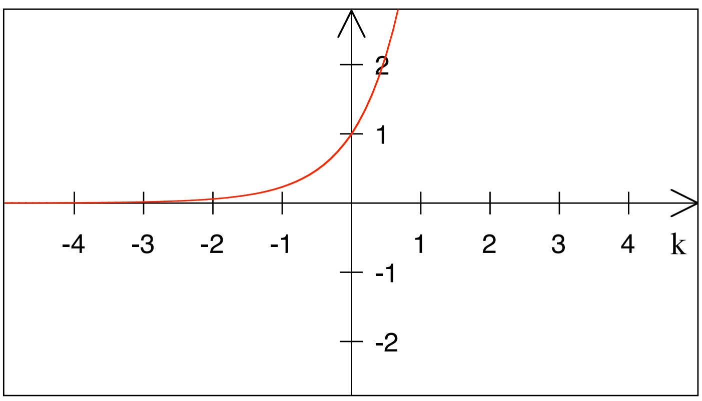
Nun ist:

$$\lim_{k\to 0}\left(f(t)\right) = \lim_{k\to 0}\left(\mathrm{e}^{kt}\right) = 1$$

Damit erhalten wir:

$$\lim_{k\to 0}\left(\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right) = \int_a^b \lim_{k\to 0}\left(f(t)\right)\mathrm{d}t = \int_a^b 1\,\mathrm{d}t = b-a$$

Die Figur zeigt den Graphen der Funktion $g(k) = \int_1^2 \mathrm{e}^{kt}\,\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{e}^{2k}-\mathrm{e}^{k}}{k}$.



$g(k) = \frac{\mathrm{e}^{2k}-\mathrm{e}^{k}}{k}$

17 Maximales Integral

Wie groß kann

$$\int_a^b \sin(x)\,\mathrm{d}x$$

maximal werden?

Bearbeitung

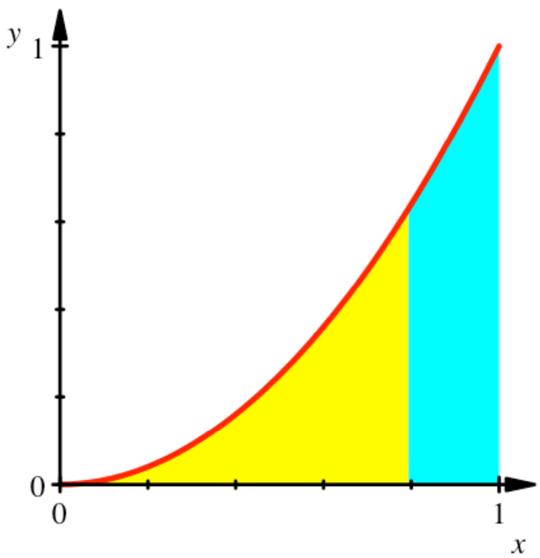
Gesucht ist das Maximum von:

$$\phi(a,b) = \int_a^b \sin(x)\,\mathrm{d}x = -\cos(b) + \cos(a) = \cos(a) - \cos(b)$$

Es muss also $\cos(a)$ maximal und $\cos(b)$ minimal werden. Dies ist der Fall für $a = 2m\pi, m \in \mathbb{Z}$ mit $\cos(a) = 1$ und $b = (2n+1)\pi, n \in \mathbb{Z}$ mit $\cos(b) = -1$. Das Integral hat dann den Wert 2.

18 Gleiche Flächenanteile

Die beiden Flächenanteile unter dem Funktionsgrafen von $y = f(x) = x^2$ sind gleich groß. Wo ist die Grenze?



Gleich große Flächen

Bearbeitung

Wir suchen x_0 so, dass

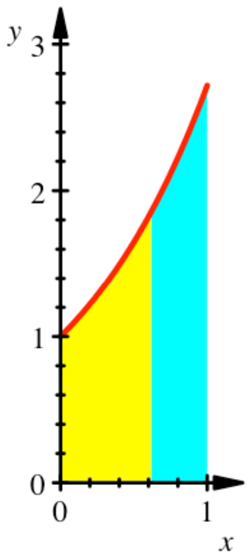
$$\int_0^{x_0} x^2 \mathrm{d}x = \int_{x_0}^{1} x^2 \mathrm{d}x$$

Also:

$$\begin{aligned} \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{x_0} &= \left[\frac{x^3}{3}\right]_{x_0}^{1} \\ \frac{x_0^3}{3} &= \frac{1}{3} - \frac{x_0^3}{3} \\ x_0 &= \sqrt[3]{\frac{1}{2}} \approx 0.7937 \end{aligned}$$

19 Gleiche Flächenanteile

Die beiden Flächenanteile unter dem Funktionsgrafen von $y = f(x) = \mathrm{e}^x$ sind gleich groß. Wo ist die Grenze?



Gleich große Flächen

Bearbeitung

Wir suchen x_0 so, dass

$$\int_0^{x_0} \mathrm{e}^x \mathrm{d}x = \int_{x_0}^{1} \mathrm{e}^x \mathrm{d}x$$

Also:

$$\begin{aligned}\left[\mathrm{e}^{x}\right]_{0}^{x_0} &= \left[\mathrm{e}^{x}\right]_{x_0}^{1}\\ \mathrm{e}^{x_0}-\mathrm{e}^{0} &= \mathrm{e}^{1}-\mathrm{e}^{x_0}\\ 2\mathrm{e}^{x_0} &= \mathrm{e}+1\\ x_0 &= \ln\left(\tfrac{\mathrm{e}+1}{2}\right)\approx 0.6201\end{aligned}$$

20 Taylorreihe und Integral

Von einer Funktion $\Phi(x)$ wissen wir folgendes:

(I) $\Phi(0)=0$

(II) Die Ableitung $\Phi'(x)$ hat die Taylor-Reihe:

$$\Phi'(x)=1-x+x^2-x^3+x^4-x^5\pm\cdots$$

Wie lautet die Funktion $\Phi(x)$?

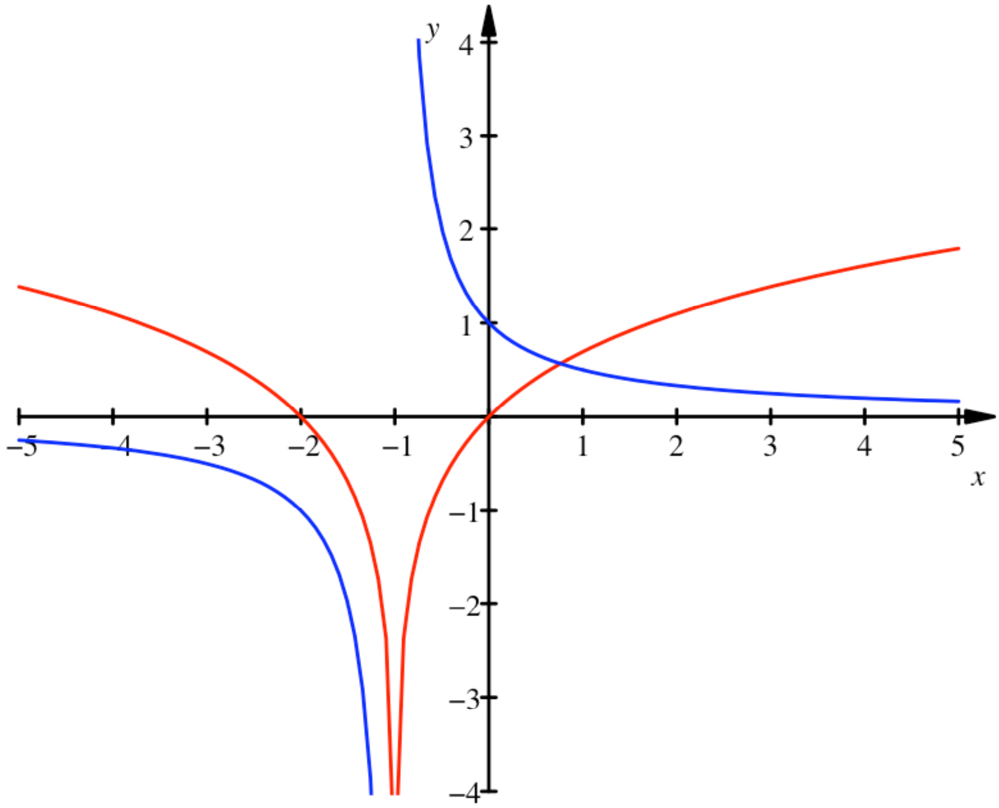
Bearbeitung

$$\begin{aligned}\Phi'(x)&=1-x+x^2-x^3+x^4-x^5\pm\cdots=\tfrac{1}{1-(-x)}=\tfrac{1}{1+x}\\ \Phi(x)&=\int\tfrac{\mathrm{d}x}{1+x}=\ln\left(|x+1|\right)+C\end{aligned}$$

Wegen $\Phi(0)=0$ folgt $C=0$ und damit:

$$\Phi(x)=\ln\left(|x+1|\right)$$

Die Abbildung zeigt rot die Funktion $\Phi(x)$ und blau die Ableitung $\Phi'(x)$. Beide haben einen Pol bei -1.



Funktion und Ableitung