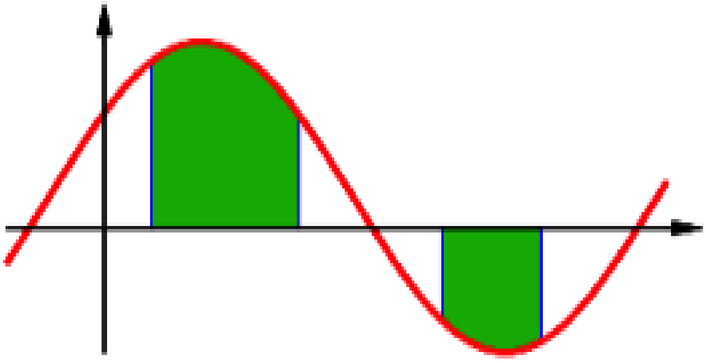
Hans Walser

Mathematik 1 für Naturwissenschaften



Modul 108

Integration

UNI BASEL

Modul 108 für die Lehrveranstaltung *Mathematik 1 für Naturwissenschaften*

Winter 2002/03 Probeausgabe
Winter 2003/04 Überarbeitung
Winter 2004/05 Straffung. Fehlerbereinigung. Geändertes Layout
Winter 2005/06 Fehlerbereinigung
Winter 2006/07 Ergänzungen. Formel-Editor revidiert (MathType)
Herbst 2007 Kleine Ergänzung
Herbst 2008 Geändertes Layout
Herbst 2010 Grafische Überarbeitung. Ergänzungen
Herbst 2013 Straffung

last modified: 23. September 2013

Hans Walser
Mathematisches Institut, Rheinsprung 21, 4051 Basel
www.walser-h-m.ch/hans

Inhalt

1 Stammfunktion

Eine Funktion $F(x)$ heißt *Stammfunktion* von $f(x)$, falls

$$F'(x) = f(x)$$

1.1 Beispiel(e)

Es sei $f(x) = 3x^2$. Dann ist $F(x) = x^3$ eine Stammfunktion von $f(x)$. Es ist allerdings nicht die einzige. Weitere Lösungen sind zum Beispiel: $F(x) = x^3 + 12$, $F(x) = x^3 - \pi$. Die allgemeine Stammfunktion ist $F(x) = x^3 + C$. Dabei ist C eine Konstante.

2 Unbestimmtes Integral

Unbestimmtes Integral von f = Menge aller Stammfunktionen von f.

Schreibweise:

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x$$

Dabei ist $f(x)$ der *Integrand*, $\int \cdots \mathrm{d}x$ das *Integrationssymbol* und x die *Integrationsvariable*.

2.1 Beispiele

$$\int 3x^2 \mathrm{d}x = x^3 + C$$

$$\int 3t^2 \mathrm{d}t = t^3 + C$$

$$\int 3\Theta^2 \mathrm{d}\Theta = \Theta^3 + C$$

$$\int x^s \, \mathrm{d}x = \tfrac{1}{s+1} x^{s+1} + C \quad ; \quad s \neq -1$$

$$\int x^5 \, \mathrm{d}x = \tfrac{1}{6} x^6 + C$$

$$\int \tfrac{1}{x^5} \, \mathrm{d}x = \int x^{-5} \, \mathrm{d}x = \tfrac{1}{-4} x^{-4} + C = -\tfrac{1}{4} \tfrac{1}{x^4} + C$$

$$\int \tfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}} \, \mathrm{d}x = \int x^{-\frac{2}{3}} \, \mathrm{d}x = \tfrac{1}{\frac{1}{3}} x^{\frac{1}{3}} + C = 3\sqrt[3]{x} + C$$

Sonderfall:

$$\int \tfrac{1}{x} \, \mathrm{d}x = \ln(|x|) + C$$

Klassiker:

$$\int \sin(x) \mathrm{d}x = -\cos(x) + C$$

$$\int \cos(x) \mathrm{d}x = \sin(x) + C$$

$$\int \mathrm{e}^x \mathrm{d}x = \mathrm{e}^x + C$$

2.2 Rechenregeln

$$\int \big(f(x) + g(x)\big) \, \mathrm{d}x = \int f(x) \, \mathrm{d}x + \int g(x) \, \mathrm{d}x$$

$$\int \lambda f(x) \, \mathrm{d}x = \lambda \int f(x) \, \mathrm{d}x$$

Beispiel zu den Rechenregeln:

$$\begin{aligned} \int \left(3x^2 - 8x + 7\right) \mathrm{d}x &= \int 3x^2 \, \mathrm{d}x + \int -8x \, \mathrm{d}x + \int 7 \, \mathrm{d}x \\ &= 3\int x^2 \, \mathrm{d}x - 8\int x \, \mathrm{d}x + 7\int \, \mathrm{d}x \\ &= 3\tfrac{x^3}{3} - 8\tfrac{x^2}{2} + 7x + C \\ &= x^3 - 4x^2 + 7x + C \end{aligned}$$

3 Bestimmtes Integral

3.1 Wie viel Wasser fließt den Rhein hinunter?

Die Frage ist unklar gestellt. Präzisierungen:

a) Wie viel Wasser fließt *jetzt* den Rhein hinunter? Dies ist ein Momentanproblem. Die Antwort $f(t)$ bezieht sich auf die Durchflussmenge pro Zeiteinheit, zum Beispiel pro Sekunde.

b) Wie viel Wasser fließt *im Jahr* den Rhein hinunter? Dies ist ein Integralproblem.

$$\sum_{\substack{\text{alle Sekunden} \\ \text{des Jahres}}} f(t_i)\Delta t = \int_{\text{1. Januar}}^{\text{31. Dezember}} f(t)\,\mathrm{d}t$$

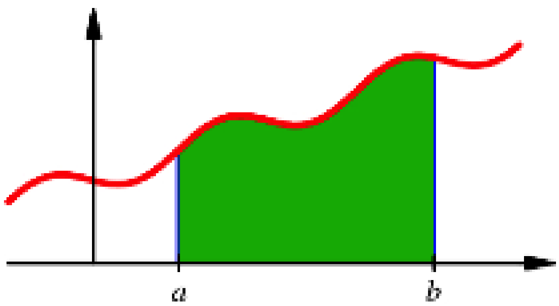
3.2 Wie weit kommen wir?

a) Jetzt? Antwort in Metern pro Sekunde. Momentangeschwindigkeit $v(t)$.

b) Insgesamt? Gefragt ist nach der integralen Wegstrecke s.

$$s = \int_{\substack{a \\ \text{Startzeit}}}^{\substack{\text{Zielzeit} \\ b}} v(t)\,\mathrm{d}t$$

3.3 „Fläche unter der Kurve"

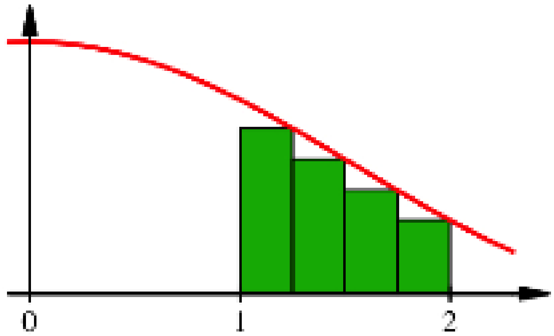


„Fläche unter der Kurve"

Bei dieser Interpretation ist zu beachten, dass diese „Fläche" in der Regel nicht eine geometrische Fläche bedeutet. Sie kann zum Beispiel ein Wasservolumen oder eine Weglänge bedeuten.

3.4 Approximation

Wir approximieren das Integral von $a = 1$ bis $b = 2$ durch eine Folge von Rechtecken.

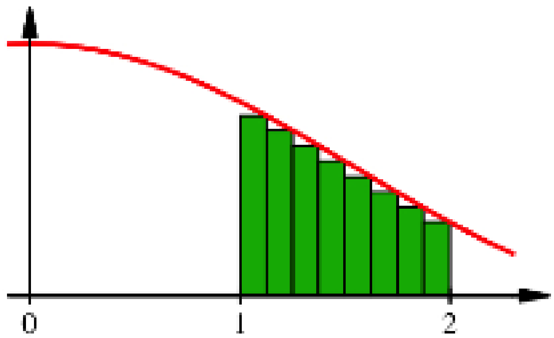


Approximation durch vier Rechtecke

Es ist dann:

$$A \approx f\left(1+\tfrac{1}{4}\right)\cdot\tfrac{1}{4} + f\left(1+\tfrac{2}{4}\right)\cdot\tfrac{1}{4} + f\left(1+\tfrac{3}{4}\right)\cdot\tfrac{1}{4} + f\left(1+\tfrac{4}{4}\right)\cdot\tfrac{1}{4} = \sum_{k=1}^{4} f\left(1+\tfrac{k}{4}\right)\cdot\tfrac{1}{4}$$

Die Approximation wird genauer, wenn wir mit schmaleren Rechtecken (Schrittlänge $\frac{1}{8}$) arbeiten.

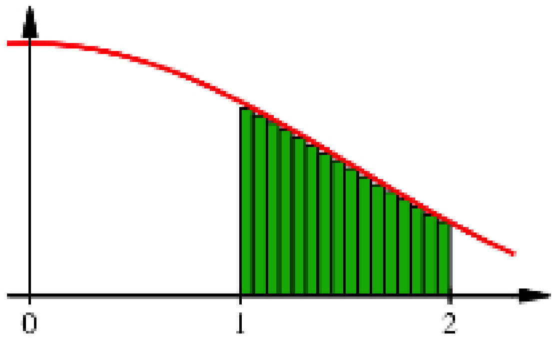


Feinere Approximation

Nun ist:

$$A \approx \sum_{k=1}^{8} f\left(1+\tfrac{k}{8}\right)\cdot\tfrac{1}{8}$$

Noch schmalere Rechtecke, Schrittlänge $\frac{1}{16}$.



Noch feinere Approximation

Nun ist:

$$A \approx \sum_{k=1}^{16} f\left(1+\tfrac{k}{16}\right)\cdot\tfrac{1}{16}$$

Allgemein:

Wir verwenden die Schrittlänge Δx. Im Intervall von a bis b gibt es dann $\frac{b-a}{\Delta x}$ Schritte. Als Approximation für A erhalten wir:

$$A \approx \sum_{k=1}^{\frac{b-a}{\Delta x}} f(a+k\Delta x)\cdot\Delta x$$

Den genauen Wert von A erhalten wir durch einen Grenzprozess:

$$A = \lim_{\Delta x\to 0}\sum_{k=1}^{\frac{b-a}{\Delta x}} f(a+k\Delta x)\cdot\Delta x \overset{\substack{\text{Schreib-}\\ \text{weise}\\ \downarrow}}{=} \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

Diese Schreibweise geht auf LEIBNIZ zurück. Seine Idee war:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

$\int$ wie $\int$umme (mit „unendlich vielen“ Summanden)

dx ein „unendlich kleiner“ Schritt

Gottfried Wilhelm Leibniz, 1646 - 1716

3.5 Sonderfälle

Von Pontius zu Pilatus:

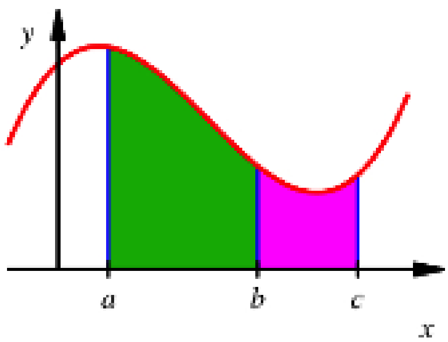
$$\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0$$

Vertauschen der Grenzen:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x$$

3.6 Rechenregeln

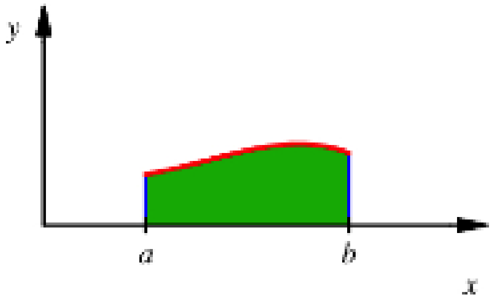
3.6.1 Aneinandersetzen von Integrationsintervallen

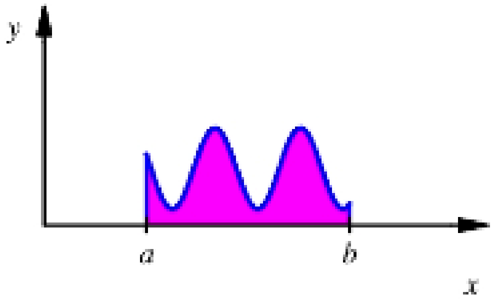


Aneinandersetzen von Integrationsintervallen

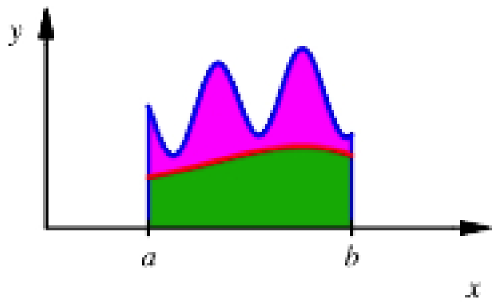
$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x$$

3.6.2 Addition zweier Funktionen





Die Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ einzeln

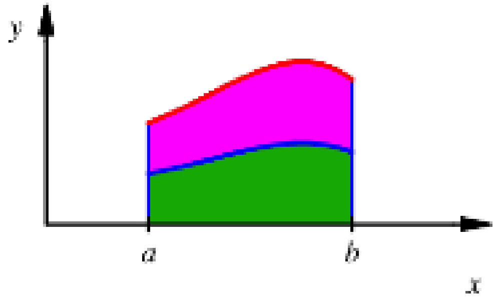


Die Funktion $f(x)+g(x)$

$$\int_a^b \left(f(x)+g(x)\right) \mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\, \mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\, \mathrm{d}x$$

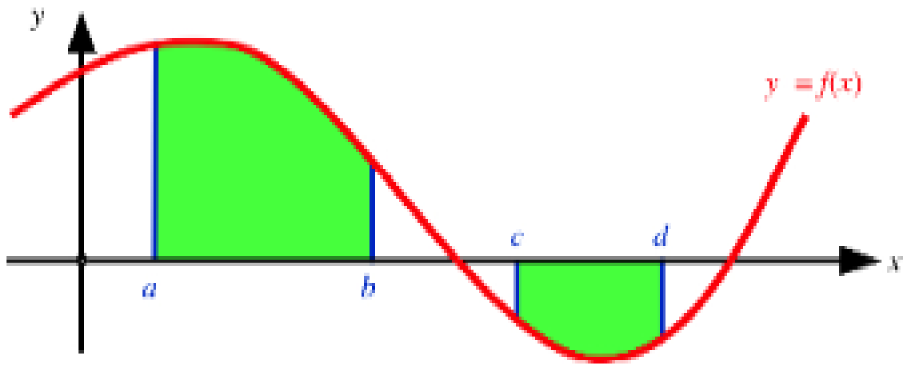
3.6.3 Multiplikation mit einer Zahl

$$\int_a^b \lambda f(x)\,\mathrm{d}x = \lambda \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$



Verdoppelung der Funktion verdoppelt das Integral

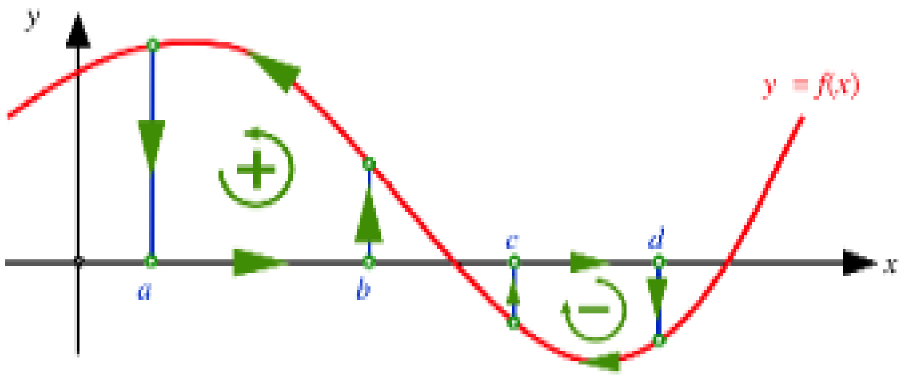
3.6.4 Vorzeichen bei „Tauchern“



„Taucher“

$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ ist positiv, $\int_c^d f(x)\,\mathrm{d}x$ ist negativ

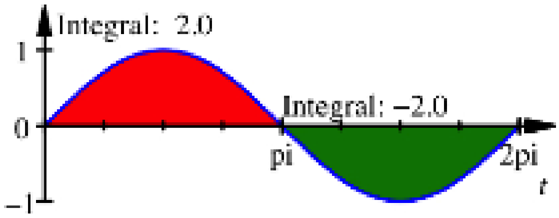
3.6.4.1 Orientierter Flächeninhalt



Orientierter Flächeninhalt

3.6.4.2 Beispiel

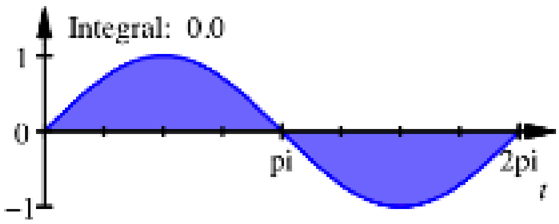
Sinusfunktion: Es ist:



Sinusfunktion

$$\int_0^{\pi} \sin(t)\,dt = +2 \text{ , aber } \int_{\pi}^{2\pi} \sin(t)\,dt = -2$$

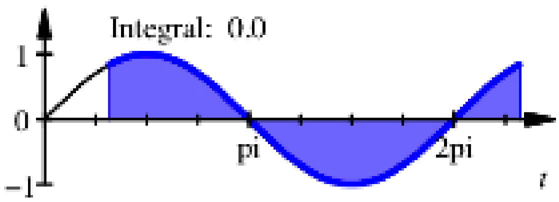
Hingegen ist:



Sinusfunktion

$$\int_0^{2\pi} \sin(t)\,dt = 0$$

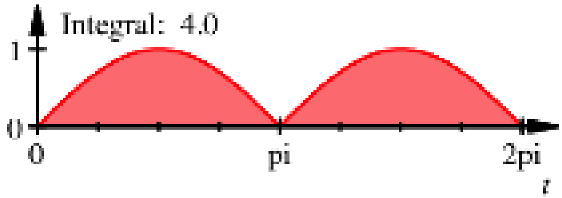
Integral über eine Periodenlänge:



Periodenlänge

$$\int_a^{a+2\pi} \sin(t)\,dt = 0$$

Betrag der Sinusfunktion:

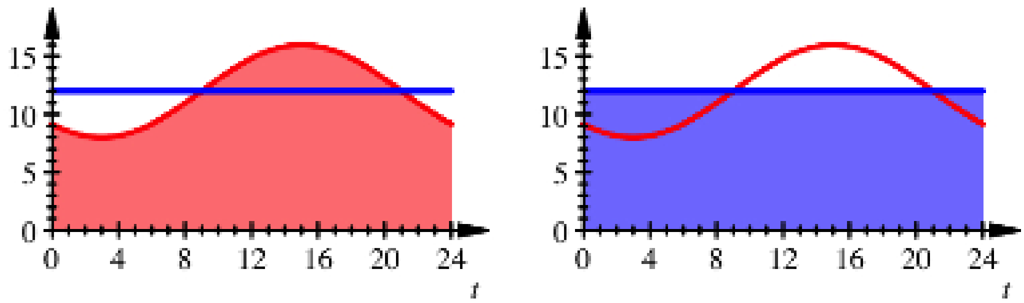


Betrag der Sinusfunktion

$$\int_0^{2\pi} \left|\sin(t)\right| \mathrm{d}t = 4$$

3.7 Wie warm ist es heute?

Was verstehen wir unter der *mittleren Tagestemperatur*?



Echte und mittlere Tagestemperatur

Die mittlere Tagestemperatur ist eine konstante Zahl, die zum selben Integralwert führt wie die echte Tagestemperatur. Wir sprechen dann von einem *Integralmittelwert*.

3.7.1 Integralmittelwert

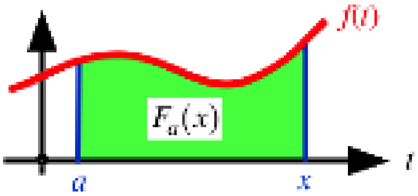
$$\text{Integralmittelwert} = \frac{\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x}{b-a}$$

Analogie zum Durchschnitt

4 Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

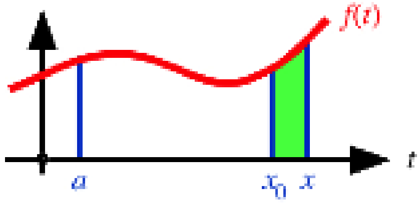
Eine Geschichte in neun Schritten

(1) $F_a(x) = \int\limits_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$



$F_a(x)$

(2) $F_a(x) - F_a(x_0) = \int\limits_{x_0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$



$F_a(x) - F_a(x_0)$

(3) $\frac{F_a(x)-F_a(x_0)}{x-x_0} \approx f(x_0)$

(4) $\lim\limits_{x\to x_0}\left(\frac{F_a(x)-F_a(x_0)}{x-x_0}\right) = f(x_0)$, das heißt: $F_a'(x_0) = f(x_0)$

(5) F_a ist eine (spezielle) Stammfunktion von *f*. Es ist $F_a(a) = 0$.

(6) Beliebige Stammfunktion von *f*: $F(x) = F_a(x) + C$

(7) $\int\limits_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = F_a(b)$

(8) Etwas Rechnung:

$$F(b) - F(a) = \left(F_a(b) + C\right) - \left(\underbrace{F_a(a)}_{=0} + C\right) = F_a(b)$$

(9) $\int\limits_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = F(b) - F(a)$

Resultat:

Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$$

Dabei ist F eine beliebige Stammfunktion von f, das heißt: $F'(x) = f(x)$

Ableiten ist also die Umkehrung des Integrierens.

4.1 Schreibweise

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(x)\Big|_a^b$$

Beispiel:

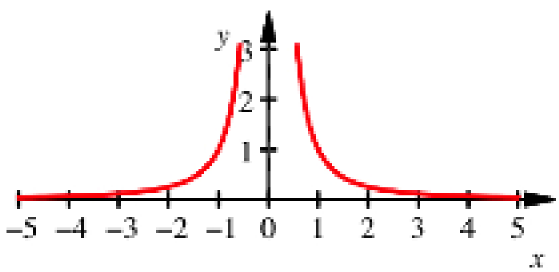
$$\int_1^3 x^2\,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{3}x^3\Big|_1^3 = \tfrac{1}{3}3^3 - \tfrac{1}{3}1^3 = 9 - \tfrac{1}{3} = \tfrac{26}{3}$$

5 Probleme an den Grenzen: uneigentliche Integrale

Problematische Grenzen sind: 0 (wegen „Division durch Null") und $\pm\infty$. Der Trick besteht darin, dass wir die problematische Grenze von der sicheren Seite her anschleichen.

5.1 Beispiel

$f(x) = \frac{1}{x^2}$



Die Funktion $f(x) = \frac{1}{x^2}$

Es ist: $\int \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{x} + C$

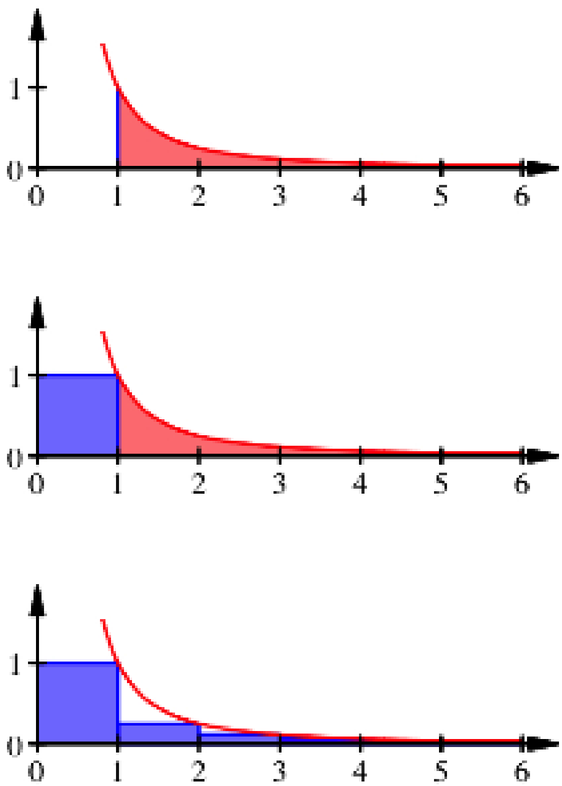
5.1.1 Grenze plus unendlich

Aus: $\int_1^r \frac{1}{x^2}\,dx = -\frac{1}{r} + \frac{1}{1}$

Bestimmen wir: $\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{r\to\infty}\left(\int_1^r \frac{1}{x^2}\,dx\right) = \lim_{r\to\infty}\left(-\frac{1}{r}+1\right) = 1$

5.1.1.1 Anwendung: Abschätzung einer Reihe

Wir schätzen die Reihe $1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\cdots$ nach oben ab. Dazu studieren wir die folgende Figurensequenz:



Abschätzung der Reihe $1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\cdots$

Wir sehen dass: $1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\cdots = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2} < 2$

Bemerkung: EULER hat gezeigt, dass: $1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\cdots = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6} \approx 1.645$

5.1.2 Grenze Null

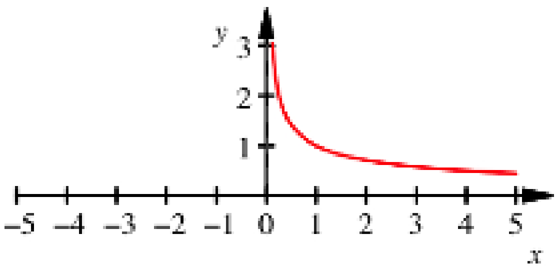
Aus: $$\int_s^1 \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = -\tfrac{1}{1} + \tfrac{1}{s}$$

Versuchen wir: $$\int_0^1 \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = \lim_{s\to 0}\left(\int_s^1 \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x\right) = \lim_{s\to 0}\left(-1+\tfrac{1}{s}\right) \quad \text{divergiert!}$$

Das Integral existiert nicht.

5.2 Beispiel

$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$



Die Funktion $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$

Es ist: $$\int \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = 2\sqrt{x} + C$$

5.2.1 Grenze plus unendlich

Aus: $$\int_1^r \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = 2\sqrt{r} - 2\sqrt{1}$$

Versuchen wir: $$\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \lim_{r\to\infty}\left(\int_1^r \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x\right) = \lim_{r\to\infty}\left(2\sqrt{r}-2\right) \quad \text{divergiert!}$$

Das Integral existiert nicht.

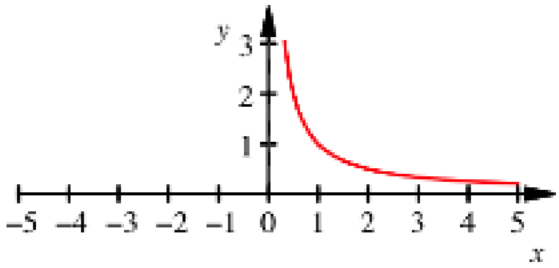
5.2.2 Grenze Null

Aus: $$\int_s^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = 2\sqrt{1} - 2\sqrt{s}$$

Berechnen wir: $$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \lim_{s\to 0}\left(\int_s^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x\right) = \lim_{s\to 0}\left(2-2\sqrt{s}\right) = 2$$

5.3 Beispiel

$f(x) = \frac{1}{x}$



Die Funktion $f(x) = \frac{1}{x}$

Es ist: $\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln(|x|) + C$

5.3.1 Grenze plus unendlich

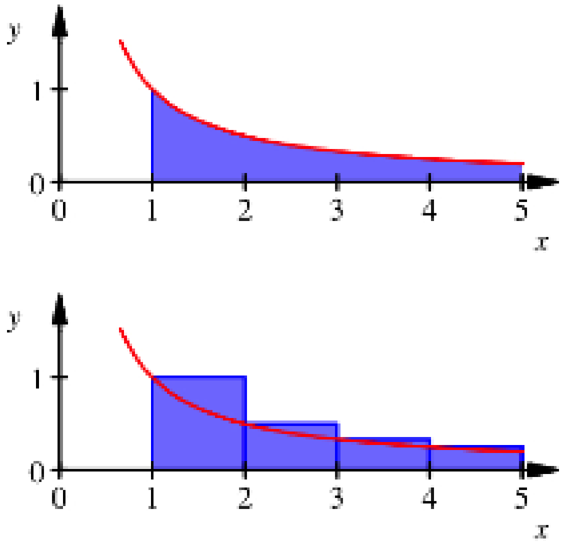
Aus: $\int_1^r \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln(|r|) - \underbrace{\ln(1)}_{=0} = \ln(|r|)$

Versuchen wir: $\int_1^\infty \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \lim_{r\to\infty}\left(\int_1^r \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x\right) = \lim_{r\to\infty}\left(\ln(|r|)\right)$ divergiert!

Das Integral existiert nicht.

5.3.1.1 Anwendung: harmonische Reihe divergiert

Wir zeigen, dass die harmonische Reihe $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots$ divergiert. Dazu die folgende Figurensequenz:



Abschätzung der harmonischen Reihe $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots$

Wir sehen dass: $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}>\infty$. Die Reihe divergiert also.

5.3.2 Grenze Null

Aus: $$\int_s^1 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \underbrace{\ln(1)}_{=0} - \ln(|s|) = -\ln(|s|)$$

Versuchen wir: $$\int_0^1 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \lim_{s\to 0}\left(\int_s^1 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x\right) = \lim_{s\to 0}\left(-\ln(|s|)\right) \quad \text{divergiert!}$$

Das Integral existiert auch nicht.

6 Zusammenfassung

6.1 Begriffe

Eine Funktion $F(x)$ heißt *Stammfunktion* von $f(x)$, falls $F'(x) = f(x)$.

Unbestimmtes Integral von f = Menge aller Stammfunktionen von f.

Schreibweise: $\int f(x)\,\mathrm{d}x$. Dabei ist $f(x)$ der *Integrand*, $\int \cdots \mathrm{d}x$ das *Integrationssymbol* und x die *Integrationsvariable*.

Bestimmtes Integral: $A = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \sum\limits_{k=1}^{\frac{b-a}{\Delta x}} f(a + k\Delta x) \cdot \Delta x = \int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$

Integralmittelwert $= \dfrac{\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x}{b-a}$

Orientierter Flächeninhalt: das „unter der x.Achse" zählt negativ

6.2 Rechenregeln

$\int \big(f(x) + g(x)\big)\,\mathrm{d}x = \int f(x)\,\mathrm{d}x + \int g(x)\,\mathrm{d}x$ $\qquad$ $\int \lambda f(x)\,\mathrm{d}x = \lambda \int f(x)\,\mathrm{d}x$

$\int\limits_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0$ $\qquad$ $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\int\limits_b^a f(x)\,\mathrm{d}x$ $\qquad$ $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_b^c f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_a^c f(x)\,\mathrm{d}x$

$\int\limits_a^b \big(f(x) + g(x)\big)\,\mathrm{d}x = \int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$ $\qquad$ $\int\limits_a^b \lambda f(x)\,\mathrm{d}x = \lambda \int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$

6.3 Hauptsatz

$\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$, F eine beliebige Stammfunktion von f. Ableiten die Umkehrung des Integrierens.

Schreibweise: $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(x)\Big|_a^b$

6.4 Uneigentliche Integrale

„Heiße" Grenzen, zum Beispiel $\pm\infty$, Definitionslücken des Integranden

Trick: von der sicheren Seite her anschleichen.

Anwendung: Abschätzen von Reihen.