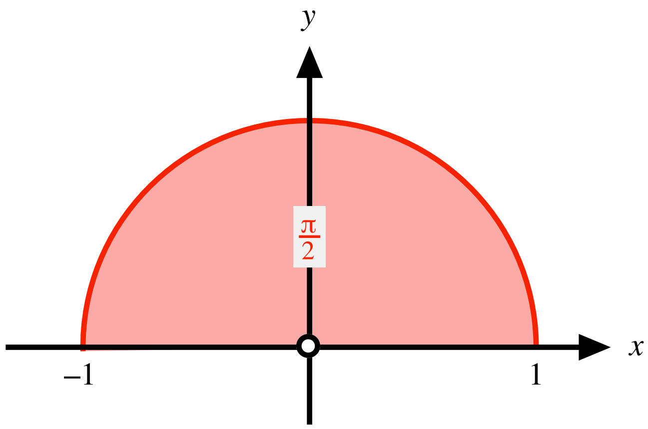
Hans Walser

Mathematik 1 für Naturwissenschaften



Modul 109

Integrationstechniken

Lernumgebung

UNI
BASEL

Modul 109 für die Lehrveranstaltung *Mathematik 1 für Naturwissenschaften*

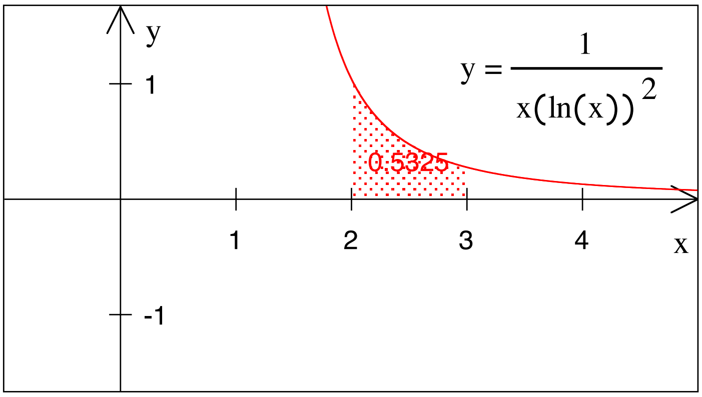
Winter 2003/04	Erstausgabe
Winter 2004/05	Erweiterung. Teilweise Angabe von Lösungswegen
Winter 2005/06	Geändertes Layout
Winter 2006/07	Erweiterung. MathType. Neue Kapiteleinteilung
Herbst 2007	Erweiterungen. Kürzungen. Fehlerkorrekturen
Herbst 2008	Ergänzungen
Herbst 2009	Ergänzungen
Herbst 2010	Ergänzungen
Herbst 2012	Fehlerkorrekturen und Ergänzungen

last modified: 15. Mai 2012

Hans Walser
Mathematisches Institut, Rheinsprung 21, 4051 Basel
www.math.unibas.ch/~walser

Inhalt

1 Integration durch Substitution



Numerisches Ergebnis

Gesucht ist das exakte Ergebnis: $\int\limits_2^3 \frac{1}{x(\ln(x))^2}\,\mathrm{d}x$

Bearbeitung

Substitution:

$$u(x) = \ln(x)$$
$$\mathrm{d}u = \tfrac{1}{x}\,\mathrm{d}x$$

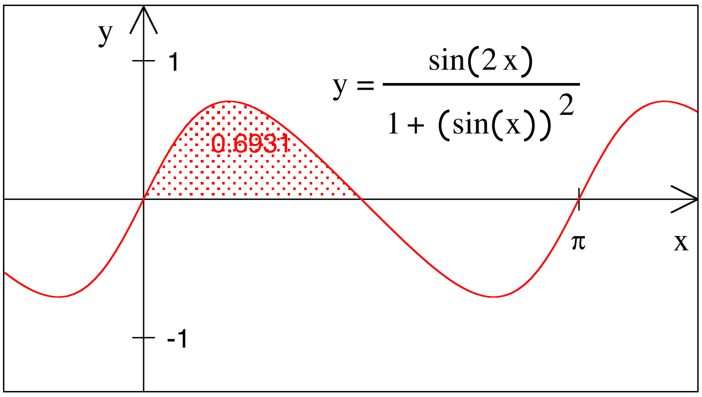
Transformation der Grenzen:

x	$u(x) = \ln(x)$
3	$\ln(3)$
2	$\ln(2)$

Damit erhalten wir:

$$\int\limits_2^3 \frac{1}{x(\ln(x))^2}\,\mathrm{d}x = \int\limits_{\ln(2)}^{\ln(3)} \frac{1}{u^2}\,\mathrm{d}u = -\tfrac{1}{u}\Big|_{\ln(2)}^{\ln(3)} = -\tfrac{1}{\ln(3)} + \tfrac{1}{\ln(2)} \approx 0.5324$$

2 Integration durch Substitution



Numerisches Ergebnis

Gesucht ist das exakte Ergebnis: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2x)}{1+(\sin(x))^2} dx$

Bearbeitung

Wir verwenden die Substitution:

$$u(x) = (\sin(x))^2 \quad \Rightarrow \quad du = 2\sin(x)\cos(x)dx = \sin(2x)dx$$

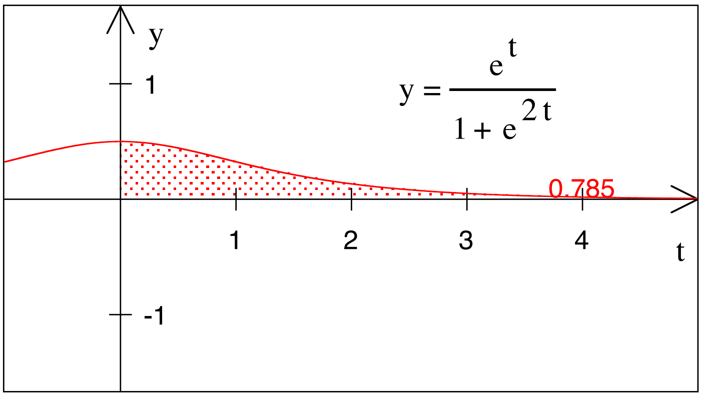
Für die Integrationsgrenzen bedeutet dies:

x	$(\sin(x))^2$
$\frac{\pi}{2}$	1
0	0

Damit erhalten wir:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2x)}{1+(\sin(x))^2} dx = \int_0^1 \frac{1}{1+u} du = \ln(1+u)\Big|_0^1 = \ln(2) - \underbrace{\ln(1)}_{0} = \ln(2)$$

3 Integration durch Substitution



Numerisches Ergebnis

Gesucht ist das exakte Ergebnis: $\int\limits_0^\infty \frac{e^t}{1+e^{2t}}\,dt$

Bearbeitung

Wir verwenden die Substitution:

$$u(t) = e^t \quad \Rightarrow \quad du = e^t dt$$

Für die Grenzen bedeutet dies:

t	e^t
∞	∞
0	1

Damit erhalten wir:

$$\int\limits_0^\infty \frac{e^t}{1+e^{2t}}\,dt = \int\limits_0^\infty \frac{e^t}{1+\left(e^t\right)^2}\,dt = \int\limits_1^\infty \frac{1}{1+u^2}\,du = \arctan(u)\Big|_1^\infty = \tfrac{\pi}{2} - \tfrac{\pi}{4} = \tfrac{\pi}{4}$$

4 Integration durch Substitution

$$\int\limits_{-\infty}^\infty \frac{1}{r^2+x^2}\,dx =$$

Bearbeitung

Fallunterscheidung

Erster Fall: $r < 0$

$$\int\limits_{-\infty}^\infty \frac{1}{r^2+x^2}\,dx = \frac{1}{r^2}\int\limits_{-\infty}^\infty \frac{1}{1+\left(\frac{x}{r}\right)^2}\,dx$$

Wir machen die Substitution:

$$u(x) = \tfrac{x}{r} \quad \Rightarrow \quad r\mathrm{d}u = \mathrm{d}x$$

Wegen $r < 0$ ändern die Grenzen das Vorzeichen. Wir erhalten:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \tfrac{1}{r^2+x^2}\,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{r^2}\int_{-\infty}^{\infty} \tfrac{1}{1+\left(\frac{x}{r}\right)^2}\,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{r}\int_{\infty}^{-\infty} \tfrac{1}{1+u^2}\,\mathrm{d}u = -\tfrac{1}{r}\int_{-\infty}^{\infty} \tfrac{1}{1+u^2}\,\mathrm{d}u = -\tfrac{1}{r}\arctan(u)\Big|_{-\infty}^{\infty} = -\tfrac{\pi}{r}$$

Zweiter Fall: $r = 0$

Wir erhalten das einfachere Integral:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \tfrac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = 2\int_{0}^{\infty} \tfrac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = -\tfrac{2}{x}\Big|_{0}^{\infty} = \infty$$

Die untere Grenze 0 ist die heiße Grenze.

Dritter Fall: $r > 0$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \tfrac{1}{r^2+x^2}\,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{r^2}\int_{-\infty}^{\infty} \tfrac{1}{1+\left(\frac{x}{r}\right)^2}\,\mathrm{d}x$$

Wir machen die Substitution:

$$u(x) = \tfrac{x}{r} \quad \Rightarrow \quad r\mathrm{d}u = \mathrm{d}x$$

Die Grenzen bleiben unendlich, bei gleichen Vorzeichen. Wir erhalten:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \tfrac{1}{r^2+x^2}\,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{r^2}\int_{-\infty}^{\infty} \tfrac{1}{1+\left(\frac{x}{r}\right)^2}\,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{r}\int_{-\infty}^{\infty} \tfrac{1}{1+u^2}\,\mathrm{d}u = \tfrac{1}{r}\arctan(u)\Big|_{-\infty}^{\infty} = \tfrac{\pi}{r}$$

5 Integration durch Substitution

$$\int_{-\infty}^{\infty} \tfrac{1}{\sqrt{r^2+x^2}}\,\mathrm{d}x =$$

Bearbeitung

$$\int_{-\infty}^{\infty} \tfrac{1}{\sqrt{r^2+x^2}}\,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{r}\int_{-\infty}^{\infty} \tfrac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{x}{r}\right)^2}}\,\mathrm{d}x$$

Wir machen die Substitution:

$$u(x) = \tfrac{x}{r} \quad \Rightarrow \quad r\mathrm{d}u = \mathrm{d}x$$

Die Grenzen bleiben unendlich. Wir erhalten:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{r^2+x^2}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{r}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{x}{r}\right)^2}}\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{1+u^2}}\,\mathrm{d}u = \operatorname{ar\,sinh}(u)\Big|_{-\infty}^{\infty} = \infty$$

6 Integration durch Substitution

$$\int_{-r}^{r} \frac{1}{\sqrt{r^2-x^2}}\,\mathrm{d}x =$$

Bearbeitung

$$\int_{-r}^{r} \frac{1}{\sqrt{r^2-x^2}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{r}\int_{-r}^{r} \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{r}\right)^2}}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{r}\int_{0}^{r} \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{r}\right)^2}}\,\mathrm{d}x$$

Wir machen die Substitution:

$$u(x) = \frac{x}{r} \quad \Rightarrow \quad r\mathrm{d}u = \mathrm{d}x$$

Grenzen:

x	u
0	0
r	1

$$\int_{-r}^{r} \frac{1}{\sqrt{r^2-x^2}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{r}\int_{-r}^{r} \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{r}\right)^2}}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{r}\int_{0}^{r} \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{r}\right)^2}}\,\mathrm{d}x = 2\int_{0}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\,\mathrm{d}u$$

Zweite Substitution:

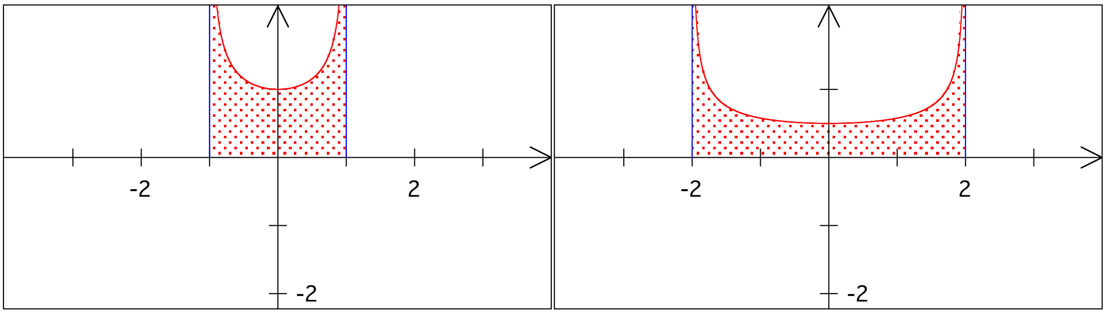
$$u = \sin(\phi), \quad \phi = \arcsin(u)$$
$$\mathrm{d}u = \cos(\phi)\,\mathrm{d}\phi$$

Grenzen:

u	ϕ
0	0
1	$\frac{\pi}{2}$

$$\int_{-r}^{r} \frac{1}{\sqrt{r^2-x^2}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{r}\int_{-r}^{r} \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{r}\right)^2}}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{r}\int_{0}^{r} \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{r}\right)^2}}\,\mathrm{d}x = 2\int_{0}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\,\mathrm{d}u = 2\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(\phi)}{\cos(\phi)}\,\mathrm{d}\phi = \pi$$

Interessant ist, dass r keine Rolle spielt. Im Folgenden zwei Abbildungen für $r = 1$ und $r = 2$:



***r* = 1 und *r* = 2**

CAS (Maple) gibt ein merkwürdiges Resultat:

$$\int_{-r}^{r} \frac{1}{\sqrt{r^2 - x^2}}\, dx = \frac{\pi}{\sqrt{r^2}\sqrt{\frac{1}{r^2}}}$$

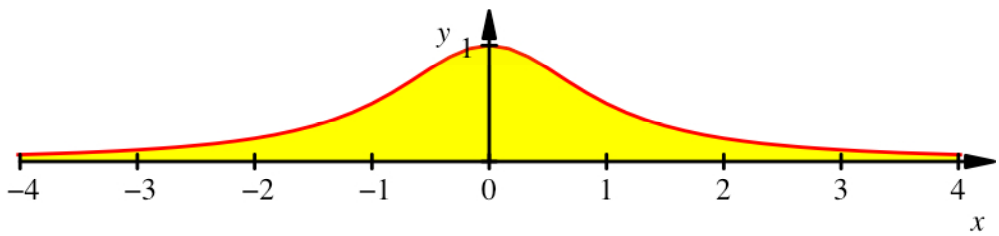
7 Uneigentliches Integral

a) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = ?$

b) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{a^2+x^2}\,\mathrm{d}x = ?$

Bearbeitung

a) Funktionsgraf:



Funktionsgraf

Wir erhalten:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \left[\arctan(x)\right]_{-\infty}^{\infty} = \tfrac{\pi}{2} - \left(-\tfrac{\pi}{2}\right) = \pi$$

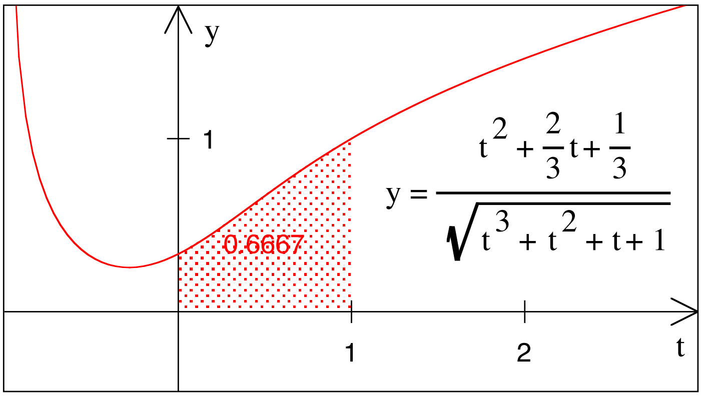
b) Zunächst ist:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{a^2+x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a^2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2}\,\mathrm{d}x$$

Wir arbeiten mit der Substitution: $\frac{x}{a} = t \quad \Rightarrow \quad \mathrm{d}x = a\,\mathrm{d}t$. An den Grenzen ändert sich nichts. Wir erhalten:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{a^2+x^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{a^2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t}_{\pi} = \frac{\pi}{a}$$

8 Substitution



Numerisches Ergebnis

Gesucht ist das exakte Ergebnis: $\int_0^1 \frac{t^2+\frac{2}{3}t+\frac{1}{3}}{\sqrt{t^3+t^2+t+1}}\,\mathrm{d}t$

Bearbeitung

Wir arbeiten mit Substitution:

$$\begin{aligned} u(t) &= t^3 + t^2 + t + 1 \\ \mathrm{d}u &= \left(3t^2 + 2t + 1\right)\mathrm{d}t \\ \tfrac{1}{3}\mathrm{d}u &= \left(t^2 + \tfrac{2}{3}t + \tfrac{1}{3}\right)\mathrm{d}t \end{aligned}$$

Transformation der Grenzen:

t	$u(t) = t^3 + t^2 + t + 1$
1	4
0	1

Damit erhalten wir:

$$\int_0^1 \frac{t^2+\frac{2}{3}t+\frac{1}{3}}{\sqrt{t^3+t^2+t+1}}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{3}\int_1^4 \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{u}} = \frac{2}{3}\sqrt{u}\Big|_1^4 = \frac{2}{3}$$

9 Stägeli uf – Stägeli ab

$$\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_t^T f(s-t)\,\mathrm{d}s = ?$$

Bearbeitung

Es sei F eine Stammfunktion von f. Wir berechnen zunächst das Integral:

$$\int_t^T f(s-t)\,\mathrm{d}s$$

Dazu verwenden wir die Substitution:

$$u(s) = s-t$$
$$\mathrm{d}u = \mathrm{d}s$$

Grenzen:

s	$u = s-t$
T	$T-t$
t	0

Damit erhalten wir:

$$\int_t^T f(s-t)\,\mathrm{d}s = \int_0^{T-t} f(u)\,\mathrm{d}u = F(T-t)-F(0)$$

Nun leiten wir ab:

$$\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_t^T f(s-t)\,\mathrm{d}s = \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big(F(T-t)-F(0)\big) = -f(T-t)$$

10 Stägeli uf – Stägeli ab

$$\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_t^T f(as+bt)\,\mathrm{d}s = ?$$

Bearbeitung

Es sei F eine Stammfunktion von f. Wir berechnen zunächst das Integral:

$$\int_t^T f(as+bt)\,\mathrm{d}s$$

Dazu verwenden wir die Substitution:

$$u(s) = as + bt$$
$$\mathrm{d}u = a\mathrm{d}s$$

Grenzen:

s	$u = as + bt$
T	$aT + bt$
t	$at + bt = (a+b)t$

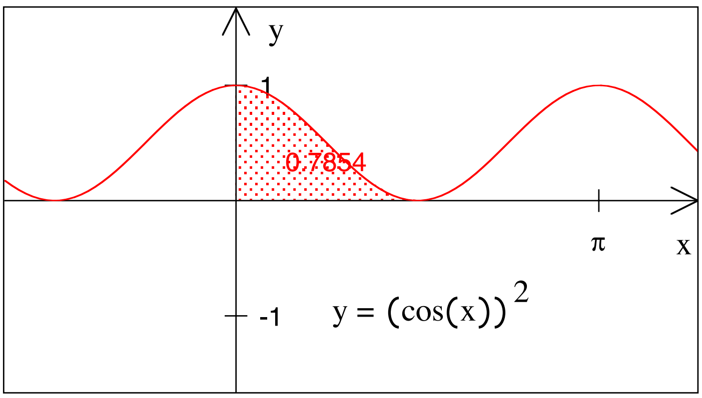
Damit erhalten wir:

$$\int_t^T f(as+bt)\,\mathrm{d}s = \int_{(a+b)t}^{aT+bt} f(u)\,\mathrm{d}u = F(aT+bt) - F((a+b)t)$$

Nun leiten wir ab:

$$\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_t^T f(as+bt)\,\mathrm{d}s = \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big(F(aT+bt) - F((a+b)t)\big) = bf(aT+bt) - (a+b)f((a+b)t)$$

11 Partielle Integration



Numerisches Ergebnis

Gesucht ist das exakte Ergebnis: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos(x))^2\,\mathrm{d}x$

Bearbeitung

Partielle Integration:

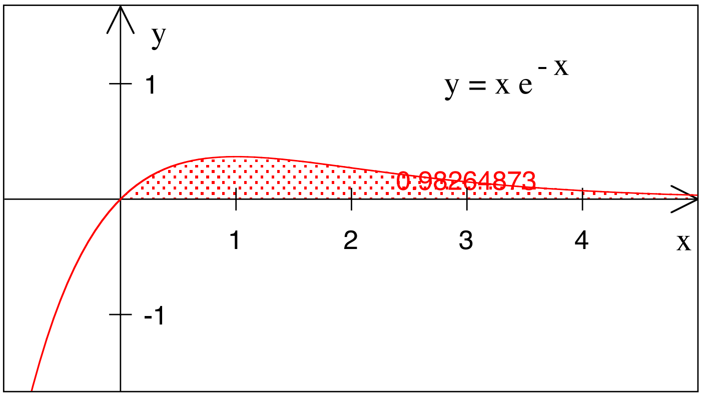
$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos(x))^2\,\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(x)\cos(x)\,\mathrm{d}x=\underbrace{\sin(x)\cos(x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}}_{=0}+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin(x)\sin(x)\,\mathrm{d}x$$

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin(x))^2\,\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}1-(\cos(x))^2\,\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}1\,\mathrm{d}x-I$$

$$2I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}1\,\mathrm{d}x=\tfrac{\pi}{2}$$

$$I=\tfrac{\pi}{4}\approx 0.785398163397$$

12 Partielle Integration



Falsches numerisches Ergebnis. Warum?

Gesucht ist das exakte Ergebnis: $\int_0^{\infty} xe^{-x}\mathrm{d}x$

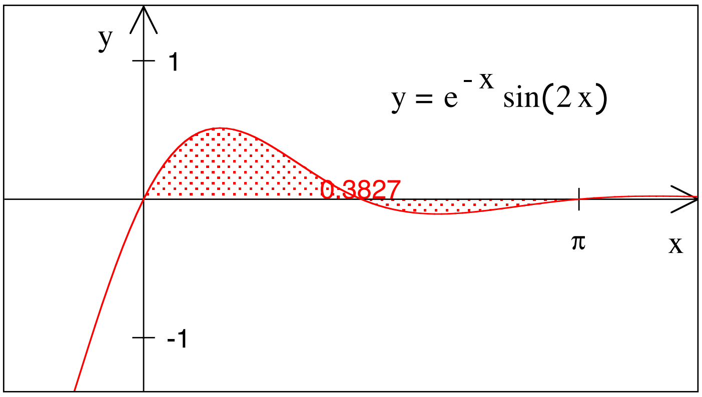
Bearbeitung

Wir arbeiten mit partieller Integration:

$$\int_0^{\infty} xe^{-x}\mathrm{d}x=\underbrace{-xe^{-x}\Big|_0^{\infty}}_{0}+\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x=-\mathrm{e}^{-x}\Big|_0^{\infty}=1$$

Aus technischen Gründen wurde vom Computer nur $\int_0^{6} xe^{-x}\mathrm{d}x$ berechnet.

13 Partielle Integration



Numerisches Ergebnis

Gesucht ist das exakte Ergebnis: $\int_0^\pi e^{-x}\sin(2x)\,dx$

Bearbeitung

Zweimalige partielle Integration:

$$I = \int_0^\pi e^{-x}\sin(2x)\,dx = \underbrace{-e^{-x}\sin(2x)\Big|_0^\pi}_{0} + 2\underbrace{\int_0^\pi e^{-x}\cos(2x)\,dx}_{I_1}$$

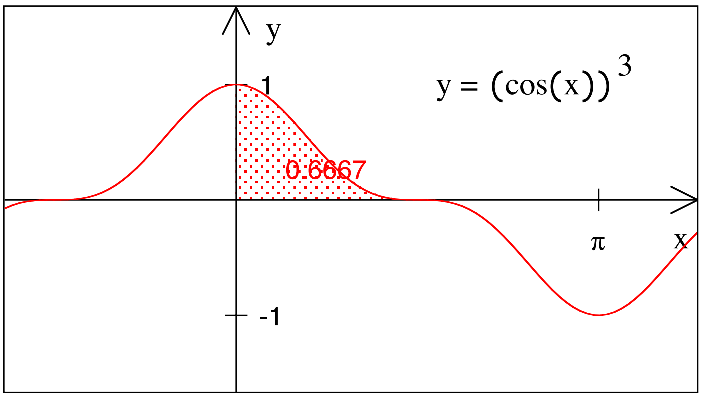
$$I_1 = \int_0^\pi e^{-x}\cos(2x)\,dx = \underbrace{-e^{-x}\cos(2x)\Big|_0^\pi}_{-e^{-\pi}+1} - 2\underbrace{\int_0^\pi e^{-x}\sin(2x)\,dx}_{I}$$

$$I = 2\left(-e^{-\pi}+1-2I\right)$$

$$5I = 2\left(-e^{-\pi}+1\right)$$

$$I = \tfrac{2}{5}\left(-e^{-\pi}+1\right) \approx 0.3827$$

14 Partielle Integration



Numerisches Ergebnis

Gesucht ist das exakte Ergebnis: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3(x)\,\mathrm{d}x$

Erster Lösungsweg

Partielle Integration:

$$
\begin{aligned}
I &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)\cos^2(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \underbrace{\sin(x)\cos^2(x)(x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}}_{=0} - 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)\cos(x)\big(-\sin(\mathrm{x})\big)\,\mathrm{d}x \\
&= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(x)\cos(x)\,\mathrm{d}x = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \big(1-\cos^2(x)\big)\cos(x)\,\mathrm{d}x \\
&= 2\underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)\,\mathrm{d}x}_{=1} - 2\underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3(x)\,\mathrm{d}x}_{=I}
\end{aligned}
$$

Somit: $I = 2 - 2I \quad \Rightarrow \quad I = \frac{2}{3}$

Zweiter Lösungsweg

Wir beginnen gleich wie beim ersten Lösungsweg mit partieller Integration:

$$
\begin{aligned}
I &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)\cos^2(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \underbrace{\sin(x)\cos^2(x)(x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}}_{=0} - 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)\cos(x)\big(-\sin(\mathrm{x})\big)\,\mathrm{d}x = 2\underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(x)\cos(x)\,\mathrm{d}x}_{I_1}
\end{aligned}
$$

Nun verwenden wir nochmals die partielle Integration:

$$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(x)\cos(x)\,\mathrm{d}x = \left[\sin^3(x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)\cos(x)\sin(x)\,\mathrm{d}x$$

$$I_1 = 1 - 2\underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(x)\cos(x)\,\mathrm{d}x}_{I_1}$$

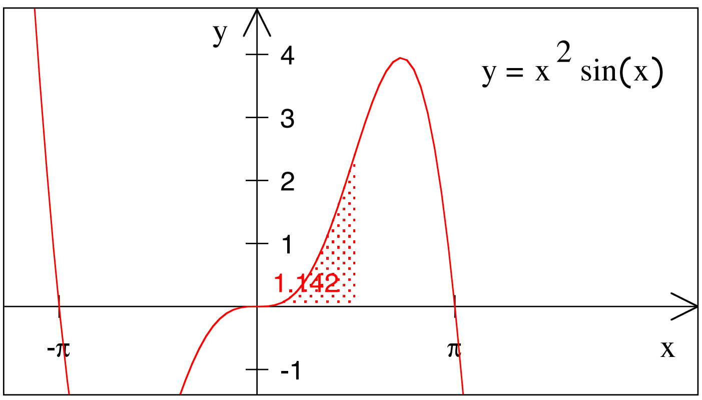
$$3I_1 = 1$$

$$I_1 = \tfrac{1}{3}$$

Damit wird: $I = 2I_1 = \frac{2}{3}$

15 Partielle Integration

Tipp: Zwei Mal partiell integrieren



Numerisches Ergebnis

Gesucht ist das exakte Ergebnis: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin(x)\,\mathrm{d}x =$

Lösungsweg

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin(x)\,\mathrm{d}x = \underbrace{-x^2\cos(x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}}_{=0} + 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos(x)\,\mathrm{d}x = 2\left[\underbrace{x\sin(x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}}_{=\frac{\pi}{2}} - \underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)\,\mathrm{d}x}_{=1}\right] = \pi - 2$$

16 Partielle Integration

Wie groß sind folgende Integrale:

$$\int_0^\infty e^{-t}\,dt, \quad \int_0^\infty t\,e^{-t}\,dt, \quad \int_0^\infty t^2 e^{-t}\,dt, \quad \int_0^\infty t^3 e^{-t}\,dt, \quad \int_0^\infty t^4 e^{-t}\,dt, \quad \ldots, \quad \int_0^\infty t^n e^{-t}\,dt$$

Bearbeitung

Das erste Integral geht einfach so:

$$\int_0^\infty e^{-t}\,dt = -e^{-t}\Big|_0^\infty = \underbrace{\left(-e^{-\infty}\right)}_{0} - \underbrace{\left(-e^{-0}\right)}_{-1} = 1$$

Dann brauchen wir partielle Integration. Wir können aber das Resultat der vorangegangenen Rechnung verwenden.

$$\int_0^\infty t\,e^{-t}\,dt = \underbrace{-t\,e^{-t}\Big|_0^\infty}_{0} - (-1)\underbrace{\int_0^\infty e^{-t}\,dt}_{1} = 1$$

So geht es weiter.

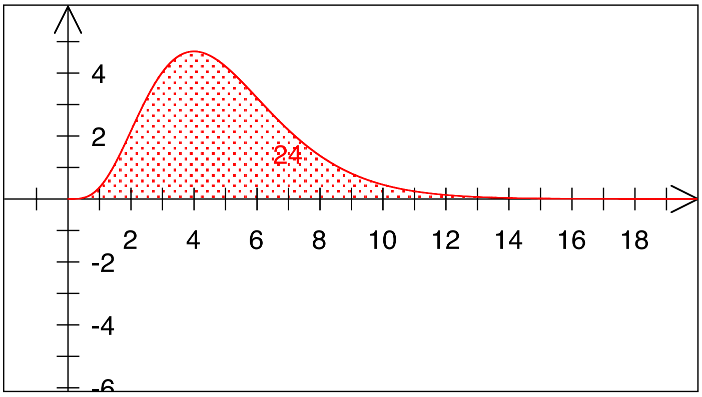
$$\int_0^\infty t^2 e^{-t}\,dt = \underbrace{-t^2\,e^{-t}\Big|_0^\infty}_{0} - (-1)2\underbrace{\int_0^\infty t\,e^{-t}\,dt}_{1} = 2$$

$$\int_0^\infty t^3 e^{-t}\,dt = \underbrace{-t^3\,e^{-t}\Big|_0^\infty}_{0} - (-1)3\underbrace{\int_0^\infty t^2 e^{-t}\,dt}_{2} = 2\cdot 3 = 3!$$

$$\int_0^\infty t^4 e^{-t}\,dt = \underbrace{-t^4\,e^{-t}\Big|_0^\infty}_{0} - (-1)4\underbrace{\int_0^\infty t^3 e^{-t}\,dt}_{2\cdot 3} = 2\cdot 3\cdot 4 = 4!$$

Offenbar ist allgemein:

$$\int_0^\infty t^n e^{-t}\,dt = n!$$



$$\int_0^\infty t^4 \mathrm{e}^{-t} \mathrm{d}t = 4!$$

Für Fans: Beweis mit vollständiger Induktion

(I) Für $n = 0, 1, 2, 3$ und 4 wurde die Aussage oben bewiesen.

(II) Wir machen nun die Induktionsvoraussetzung:

$$\int_0^\infty t^{n-1} \mathrm{e}^{-t} \mathrm{d}t = (n-1)!$$

Damit erhalten wir:

$$\int_0^\infty t^n \mathrm{e}^{-t} \mathrm{d}t = \underbrace{-t^n \mathrm{e}^{-t}\Big|_0^\infty}_{=0} - (-1)n \underbrace{\int_0^\infty t^{n-1} \mathrm{e}^{-t} \mathrm{d}t}_{=(n-1)!} = n!$$

17 Partielle Integration

Gesucht ist das exakte Resultat:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t)\, \mathrm{e}^t \mathrm{d}t =$$

Bearbeitung

Ester Lösungsweg

Zweimaliges partielles Integrieren:

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(t)\,\mathrm{e}^t\mathrm{d}t=\underbrace{\sin(t)\,\mathrm{e}^t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}}_{=\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}}-0}-\underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin(t)\,\mathrm{e}^t\mathrm{d}t}_{=I_1}$$

$$I_1=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin(t)\,\mathrm{e}^t\mathrm{d}t=-\underbrace{\cos(t)\,\mathrm{e}^t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}}_{=0-\mathrm{e}^0}+\underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(t)\,\mathrm{e}^t\mathrm{d}t}_{=I}$$

$$I=\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}}-0-\left(-\left(0-\mathrm{e}^0\right)+I\right)=\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}}-1-I$$

$$2I=\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}}-1$$

$$I=\tfrac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}}-1\right)\approx 1.90523869047$$

Zweiter Lösungsweg

Zweimaliges partielles Integrieren, aber anders herum:

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(t)\,\mathrm{e}^t\mathrm{d}t=\underbrace{\cos(t)\,\mathrm{e}^t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}}_{=-1}+\underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin(t)\,\mathrm{e}^t\mathrm{d}t}_{=I_1}$$

$$I_1=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin(t)\,\mathrm{e}^t\mathrm{d}t=\underbrace{\sin(t)\,\mathrm{e}^t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}}_{=\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}}}-\underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(t)\,\mathrm{e}^t\mathrm{d}t}_{=I}$$

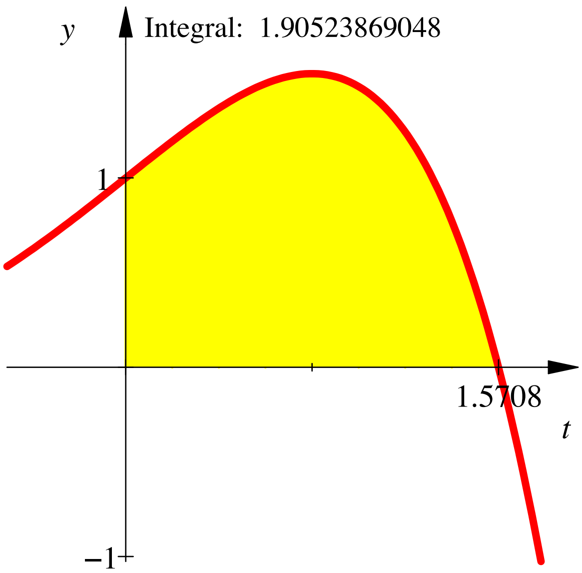
$$2I=\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}}-1$$

$$I=\tfrac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}}-1\right)\approx 1.90523869047$$

Kontrolle MuPAD:

$$\mathrm{Int}\left(\cos(t)\cdot e^t,\ t=0\,..\,\frac{\pi}{2}\right)=\frac{e^{\frac{\pi}{2}}}{2}-\frac{1}{2}$$

1.90523869



Integral

Vermischung der Lösungswege

Wenn wir die beiden Lösungswege vermischen, rechnen wir im Kreis herum. Beispiel:

Wir beginnen nach dem ersten Lösungsweg:

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(t)\,e^t\,dt=\underbrace{\sin(t)\,e^t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}}_{=e^{\frac{\pi}{2}}-0}-\underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin(t)\,e^t\,dt}_{=I_1}$$

Für I_1 rechnen wir nach dem zweiten Lösungsweg weiter:

$$I_1=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin(t)\,e^t\,dt=\underbrace{\sin(t)\,e^t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}}_{=e^{\frac{\pi}{2}}}-\underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(t)\,e^t\,dt}_{=I}$$

Somit erhalten wir:

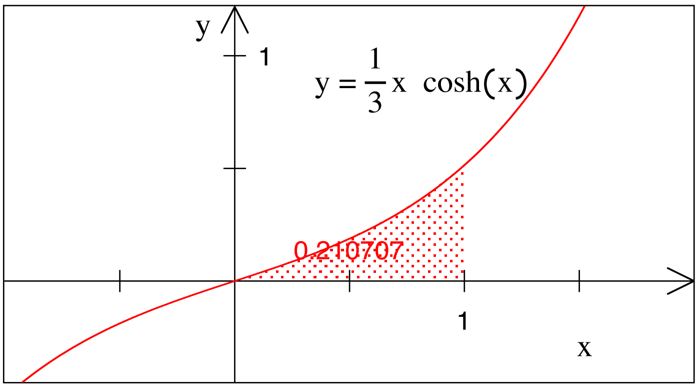
$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(t)\,e^t\,dt=\underbrace{\sin(t)\,e^t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}}_{=e^{\frac{\pi}{2}}-0}-\underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin(t)\,e^t\,dt}_{=I_1}=-\left(\underbrace{\sin(t)\,e^t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}}_{=e^{\frac{\pi}{2}}}-\underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(t)\,e^t\,dt}_{=I}\right)$$

$$I=e^{\frac{\pi}{2}}-e^{\frac{\pi}{2}}+I$$

$$I=I$$

Das ist zwar richtig, hilft aber nicht weiter.

18 Partielle Integration



Numerisches Resultat

$$\int_0^1 \tfrac{1}{3} x \cosh(x)\,\mathrm{d}x =$$

Schreiben Sie die einzelnen Schritte der partiellen Integration auf. Geben Sie das Resultat exakt an und vergleichen Sie mit dem in der Figur angegebenen numerischen Näherungswert.

Zur Erinnerung: Die Funktionen cosh und sinh sind wie folgt definiert: $\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ und $\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$. Ferner ist $\sinh'(x) = \cosh(x)$ und $\cosh'(x) = \sinh(x)$.

Ergebnis

$$\int_0^1 \tfrac{1}{3} x \cosh(x)\,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{3}\left(1 + \sinh(1) - \cosh(1)\right) = \tfrac{1}{3}\left(1 - \tfrac{1}{e}\right) \approx 0.2107068529$$

Ausführliche Bearbeitung

Die Funktionen cosh und sinh geben sowohl abgeleitet wie integriert jeweils die andere Funktion, keine negative Vorzeichen. Damit wird:

$$\int_0^1 \tfrac{1}{3} \overset{\downarrow}{x} \overset{\uparrow}{\cosh(x)}\,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{3} x \sinh(x)\Big|_0^1 - \int_0^1 \tfrac{1}{3} \sinh(x)\,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{3} x \sinh(x)\Big|_0^1 - \tfrac{1}{3}\cosh(x)\Big|_0^1$$

Einsetzen der Grenzen ergibt:

$$\begin{aligned}\int_0^1 \tfrac{1}{3} x \cosh(x)\,\mathrm{d}x &= \tfrac{1}{3} x \sinh(x)\Big|_0^1 - \tfrac{1}{3}\cosh(x)\Big|_0^1 \\ &= \left(\tfrac{1}{3}\sinh(1) - \tfrac{1}{3}\sinh(0)\right) - \left(\tfrac{1}{3}\cosh(1) - \tfrac{1}{3}\cosh(0)\right)\end{aligned}$$

An sich ist die Aufgabe damit gelöst. Wir können aber noch für cosh und sinh die Definitionen $\cosh(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$ und $\sinh(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$ einsetzen und erhalten:

$$\int_0^1 \tfrac{1}{3}x\cosh(x)\mathrm{d}x=\left(\tfrac{1}{3}\sinh(1)-\tfrac{1}{3}\sinh(0)\right)-\left(\tfrac{1}{3}\cosh(1)-\tfrac{1}{3}\cosh(0)\right)$$

$$=\frac{1}{3}\left(\frac{e^1-e^{-1}}{2}-\frac{e^0-e^{-0}}{2}-\frac{e^1+e^{-1}}{2}+\frac{e^0+e^{-0}}{2}\right)=\frac{1}{3}\left(-\underbrace{e^{-1}}_{\frac{1}{e}}+1\right)=\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{e}\right)$$

19 Ohne partielle Integration, dafür mit Pfiff

In der Vorlesung hatten wir mit partieller Integration gefunden:

$$\int \sin^2(t)\mathrm{d}t=\tfrac{1}{2}\left(t-\sin(t)\cos(t)\right)+C$$

Die partielle Integration lässt sich vermeiden, wenn wir im Komplexen arbeiten. Aus den Eulerschen Formeln

$$e^{it}=\cos(t)+i\ \sin(t)$$

$$e^{-it}=\cos(-t)+i\ \sin(-t)=\cos(t)-i\ \sin(t)$$

ergibt sich:

$$\cos(t)=\tfrac{1}{2}\left(e^{it}+e^{-it}\right)\quad \text{und} \qquad \sin(t)=\tfrac{1}{2i}\left(e^{it}-e^{-it}\right)$$

Somit ist:

$$\sin^2(t)=\left(\tfrac{1}{2i}\left(e^{it}-e^{-it}\right)\right)^2=-\tfrac{1}{4}\left(e^{2it}-2+e^{-2it}\right)$$

Damit erhalten wir:

$$\int \sin^2(t)\mathrm{d}t=-\tfrac{1}{4}\int\left(e^{2it}-2+e^{-2it}\right)\mathrm{d}t=-\tfrac{1}{4}\left(\tfrac{1}{2i}e^{2it}-2t+\tfrac{1}{-2i}e^{-2it}\right)+C$$

$$=\tfrac{1}{2}t-\tfrac{1}{4}\underbrace{\tfrac{1}{2i}\left(e^{2it}-e^{-2it}\right)}_{=\sin(2t)=2\sin(t)\cos(t)}=\tfrac{1}{2}t-\tfrac{1}{2}\sin(t)\cos(t)+C$$

20 Mehrere Lösungswege

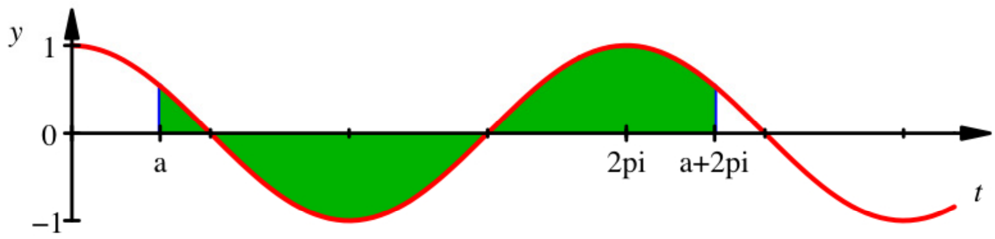
Zeigen Sie mit verschiedenen Überlegungen, dass:

$$\int_a^{a+2\pi}\cos(t)\mathrm{d}t=0$$

Bearbeitung

Grafische Überlegung

Wir können die „Fläche unter der Kurve" zerschneiden und neu so zusammensetzen, dass das Integral offensichtlich Null ergibt.



Das Integral gibt Null

Sture Rechnung

Wir rechnen und verwenden das Additionstheorem für den Sinus.

$$\int_a^{a+2\pi} \cos(t)\mathrm{d}t = \sin(t)\Big|_a^{a+2\pi} = \sin(a+2\pi) - \sin(a)$$

$$= \sin(a)\underbrace{\cos(2\pi)}_{1} + \cos(a)\underbrace{\sin(2\pi)}_{0} - \sin(a) = 0$$

Periodizität

$$\int_a^{a+2\pi} \cos(t)\mathrm{d}t = \sin(t)\Big|_a^{a+2\pi} = \sin(a+2\pi) - \sin(a)$$

Da die Sinusfunktion die Periodenlänge 2π hat, ist $\sin(a+2\pi) = \sin(a)$ und damit die Differenz null.

Substitution

Wir verwenden die Substitution $\tau = t - a$:

$$\mathrm{d}\tau = \mathrm{d}t$$

Substitution der Grenzen:

	t	τ
obere Grenze	$a+2\pi$	2π
untere Grenze	a	0

Damit erhalten wir:

$$\int_a^{a+2\pi} \cos(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} \cos(\tau + a)\,\mathrm{d}\tau$$

Nun verwenden wir das Additionstheorem für den Kosinus:

$$\cos(\tau + a) = \cos(\tau)\cos(a) - \sin(\tau)\sin(a)$$

Damit erhalten wir:

$$\int_a^{a+2\pi} \cos(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} \cos(\tau + a)\,\mathrm{d}\tau = \cos(a)\underbrace{\int_0^{2\pi} \cos(\tau)\,\mathrm{d}\tau}_{0} - \sin(a)\underbrace{\int_0^{2\pi} \sin(\tau)\,\mathrm{d}\tau}_{0} = 0$$

21 Zwei Lösungswege

Das Integral $\int \frac{x-3}{x^2-6x+5}\,\mathrm{d}x$ lässt sich auf zwei Arten berechnen.

Erster Lösungsweg: Substitution

Mit der Substitution

$$\begin{aligned} Mieze(x) &= x^2 - 6x + 5 \\ \mathrm{d}Mieze &= (2x-6)\,\mathrm{d}x = 2(x-3)\,\mathrm{d}x \end{aligned}$$

erhalten wir:

$$\int \frac{x-3}{x^2-6x+5}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \frac{1}{Mieze}\,\mathrm{d}Mieze = \frac{1}{2}\ln\left(|Mieze|\right) + C = \frac{1}{2}\ln\left(\left|x^2 - 6x + 5\right|\right) + C$$

Zweiter Lösungsweg: Partialbruchzerlegung

$$\frac{x-3}{x^2-6x+5} = \frac{x-3}{(x-1)(x-5)} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Ansatz}}}{=} \frac{a}{(x-1)} + \frac{b}{(x-5)} = \frac{a(x-5)+b(x-1)}{(x-1)(x-5)} = \frac{x(a+b)+(-5a-b)}{(x-1)(x-5)}$$

Koeffizientenvergleich ergibt:

$$\begin{aligned} x &= x(a+b) \\ -3 &= (-5a-b) \end{aligned}$$

Daher ist:

$$\left.\begin{aligned} a + b &= 1 \\ -5a - b &= -3 \end{aligned}\right\} \Rightarrow a = \tfrac{1}{2},\, b = \tfrac{1}{2}$$

Wir erhalten:

$$\begin{aligned} \int \frac{x-3}{x^2-6x+5}\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}x}{x-1} + \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}x}{x-5} = \frac{1}{2}\ln\left(|x-1|\right) + \frac{1}{2}\ln\left(|x-5|\right) + C \\ &= \frac{1}{2}\ln\left(|x-1||x-5|\right) + C = \frac{1}{2}\ln\left(\left|x^2 - 6x + 5\right|\right) + C \end{aligned}$$

22 Verifikation

Der Computer liefert $\int_1^2 \mathrm{e}^{2t}\mathrm{d}t = \mathrm{e}^4 - \mathrm{e}^2$. Bestätigen oder widerlegen Sie dieses Ergebnis.

Bearbeitung

a) Erraten und Kontrollieren

Wir erraten das unbestimmte Integral:

$$\int \mathrm{e}^{2t}\mathrm{d}t = \tfrac{1}{2}\mathrm{e}^{2t}$$

Kontrolle durch Ableiten:

$$\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\tfrac{1}{2}\mathrm{e}^{2t}\right) = \tfrac{1}{2}\mathrm{e}^{2t}2 = \mathrm{e}^{2t}$$

Der Faktor 2 ist die innere Ableitung. Somit erhalten wir:

$$\int_1^2 \mathrm{e}^{2t}\mathrm{d}t = \tfrac{1}{2}\mathrm{e}^{2t}\Big|_1^2 = \tfrac{1}{2}\mathrm{e}^4 - \tfrac{1}{2}\mathrm{e}^2$$

Kommentar: Das angebliche Computerresultat ist falsch. Es fehlt der Faktor $\frac{1}{2}$.

b) Substitution

Aus $u = 2t$ ergibt sich:

$$u = 2t \quad \Rightarrow \qquad \mathrm{d}t = \tfrac{1}{2}\mathrm{d}u$$

Grenzen:

t	u
2	4
1	2

Somit erhalten wir:

$$\int_1^2 \mathrm{e}^{2t}\mathrm{d}t = \tfrac{1}{2}\int_2^4 \mathrm{e}^{u}\mathrm{d}u = \tfrac{1}{2}\mathrm{e}^{u}\Big|_2^4 = \tfrac{1}{2}\left(\mathrm{e}^4 - \mathrm{e}^2\right)$$

Kommentar: Das angebliche Computerresultat ist falsch. Es fehlt der Faktor $\frac{1}{2}$.

c) Nochmals Substitution

Aus $u = \mathrm{e}^t$ ergibt sich:

$$u = e^t \quad \Rightarrow \quad \frac{du}{dt} = e^t \quad \Rightarrow \quad du = e^t dt$$

Grenzen:

t	u
2	e^2
1	e^1

Somit erhalten wir:

$$\int_1^2 e^{2t} dt = \int_1^2 \underbrace{e^t}_{u} \underbrace{e^t dt}_{du} = \int_{e^1}^{e^2} u du = \tfrac{1}{2} u^2 \Big|_{e^1}^{e^2} = \tfrac{1}{2}\left(u^4 - u^2\right)$$

Kommentar: Das angebliche Computerresultat ist falsch. Es fehlt der Faktor $\frac{1}{2}$.

d) Partielle Integration

$$I = \int_1^2 e^{2t} dt = \int_1^2 e^t e^t dt = e^t e^t \Big|_1^2 - \underbrace{\int_1^2 e^t e^t dt}_{=I}$$

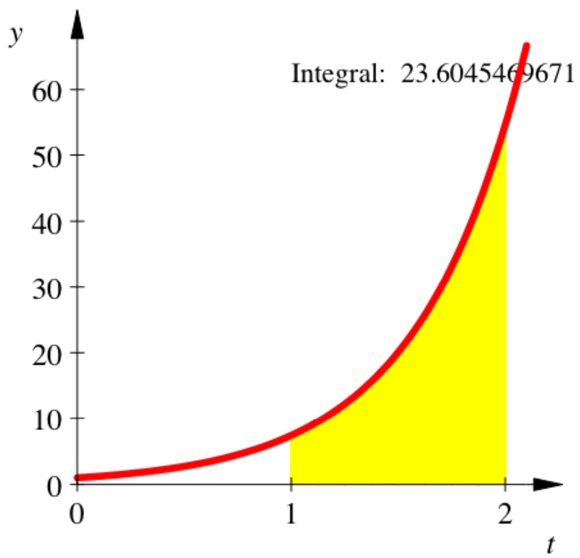
$$2I = e^t e^t \Big|_1^2 = e^{2t} \Big|_1^2 = e^4 - e^2$$

$$I = \tfrac{1}{2}\left(e^4 - e^2\right) \approx 23.604546967107$$

Kommentar: Das angebliche Computerresultat ist falsch. Es fehlt der Faktor $\frac{1}{2}$.

Kontrolle CAS

Int(exp(2*t), t = 1..2) = 1/2*exp(4) - 1/2*exp(2)



Kontrolle

Der Computer kann es also doch.

23 Division (freiwillige Knobelaufgabe)

Jedes Sternchen ist durch eine Ziffer zu ersetzen, so dass sich schließlich eine richtig gelöste Divisionsaufgabe ergibt.

$$
\begin{array}{rccccccc}
 & * & * & * & * & : & * \; * & = & * \; 5 \\
- & & \underline{*} & \underline{*} & & & & & \\
 & & & * & * & & & & \\
 & & - & \underline{*} & \underline{5} & & & & \\
 & & & & 0 & & & &
\end{array}
$$

Ergebnis

$$
\begin{array}{rccccccc}
 & 1 & 0 & 4 & 5 & : & 1 \; 1 & = & 9 \; 5 \\
- & & \underline{9} & \underline{9} & & & & & \\
 & & & 5 & 5 & & & & \\
 & & - & \underline{5} & \underline{5} & & & & \\
 & & & & 0 & & & &
\end{array}
$$

24 Division (freiwillige Knobelaufgabe)

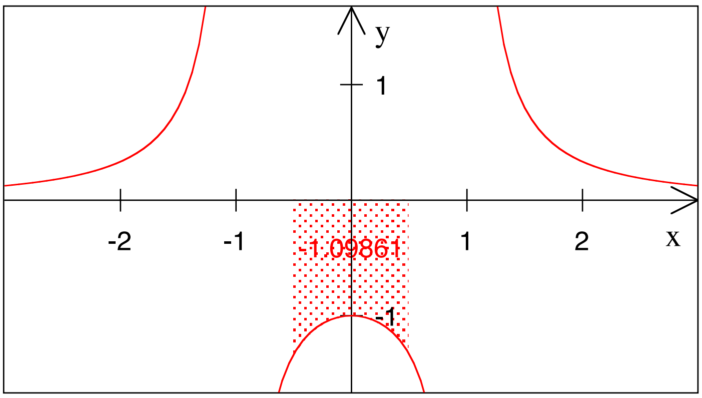
Nur eine einzige Ziffer ist von einer Divisionsaufgabe übrig.

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & * & * & * & * & * & * & * & * \quad : \quad * * * \quad = \quad * * 8 * * \\
- & \underline{*} & \underline{*} & \underline{*} & & & & & \\
 & & & * & * & * & * & & \\
 & & - & & \underline{*} & \underline{*} & \underline{*} & & \\
 & & & & & * & * & * & * \\
 & & & & - & \underline{*} & \underline{*} & \underline{*} & \underline{*} \\
 & & & & & & & & 0
\end{array}$$

Ergebnis

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 3 & 1 & 6 \quad : \quad 1\,2\,4 \quad = \quad 8\,0\,8\,0\,9 \\
- & \underline{9} & \underline{9} & \underline{2} & & & & & \\
 & & & 1 & 0 & 0 & 3 & & \\
 & & - & & \underline{9} & \underline{9} & \underline{2} & & \\
 & & & & & 1 & 1 & 1 & 6 \\
 & & & & - & \underline{1} & \underline{1} & \underline{1} & \underline{6} \\
 & & & & & & & & 0
\end{array}$$

25 Partialbruchzerlegung



$$f(x) = \frac{1}{x^2-1}$$

Gesucht ist das exakte Ergebnis: $\displaystyle\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x^2-1}\,\mathrm{d}x$

Bearbeitung

Wir arbeiten mit Partialbruchzerlegung:

$$\frac{1}{x^2-1} = \frac{1}{x+1}\,\frac{1}{x-1} \underset{\substack{\uparrow\\ \text{Ansatz}}}{=} \frac{a}{x+1} + \frac{b}{x-1} = \frac{a(x-1)+b(x+1)}{(x+1)(x-1)} = \frac{x(a+b)+(-a+b)}{(x+1)(x-1)}$$

Koeffizientenvergleich ergibt:

$$\left.\begin{array}{r} a+b=0 \\ -a+b=1 \end{array}\right\} \Rightarrow a=-\tfrac{1}{2},\, b=\tfrac{1}{2}$$

$$\frac{1}{x^2-1}=\frac{-\frac{1}{2}}{x+1}+\frac{\frac{1}{2}}{x-1}$$

Nun können wir integrieren:

$$\int \frac{1}{x^2-1}\mathrm{d}x=-\tfrac{1}{2}\int \frac{1}{x+1}\mathrm{d}x+\tfrac{1}{2}\int \frac{1}{x-1}\mathrm{d}x=-\tfrac{1}{2}\ln\left(\left|x+1\right|\right)+\tfrac{1}{2}\ln\left(\left|x-1\right|\right)=\tfrac{1}{2}\ln\left(\left|\tfrac{x-1}{x+1}\right|\right)$$

Für das bestimmte Integral ergibt sich:

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x^2-1}\mathrm{d}x \underset{\substack{\uparrow \\ \text{gerader} \\ \text{Integrand}}}{=} 2\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x^2-1}\mathrm{d}x=\ln\left(\left|\tfrac{x-1}{x+1}\right|\right)\Big|_0^{\frac{1}{2}}=\ln\left(\left|\frac{-\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}}\right|\right)-\underbrace{\ln\left(\left|\tfrac{-1}{1}\right|\right)}_{0}=\ln\left(\tfrac{1}{3}\right)=-\ln(3)$$

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x^2-1}\mathrm{d}x=-\ln(3)\approx -1.098612289$$

26 Partialbruchzerlegung

$$\int \frac{x^2-4x+5}{x^3-12x^2+48x-64}\mathrm{d}x$$

Bearbeitung

Zunächst ist (erweiterte binomische Formel) $x^3-12x^2+48x-64=(x-4)^3$. Wir haben also:

$$I=\int \frac{x^2-4x+5}{x^3-12x^2+48x-64}\mathrm{d}x=\int \frac{x^2-4x+5}{(x-4)^3}\mathrm{d}x$$

Nun machen wir den Ansatz zur Partialbruchzerlegung:

$$\frac{x^2-4x+5}{(x-4)^3}=\frac{a}{(x-4)^3}+\frac{b}{(x-4)^2}+\frac{c}{x-4}$$

Gleichnamig machen liefert:

$$\frac{x^2-4x+5}{(x-4)^3}=\frac{a}{(x-4)^3}+\frac{b(x-4)}{(x-4)^3}+\frac{c(x-4)^2}{(x-4)^3}$$

$$x^2-4x+5=a+bx-4b+cx^2-8cx+16c$$

Koeffizientenvergleich:

$$x^2 - 4x + 5 = cx^2 + x(b - 8c) + a - 4b + 16c$$

Also:

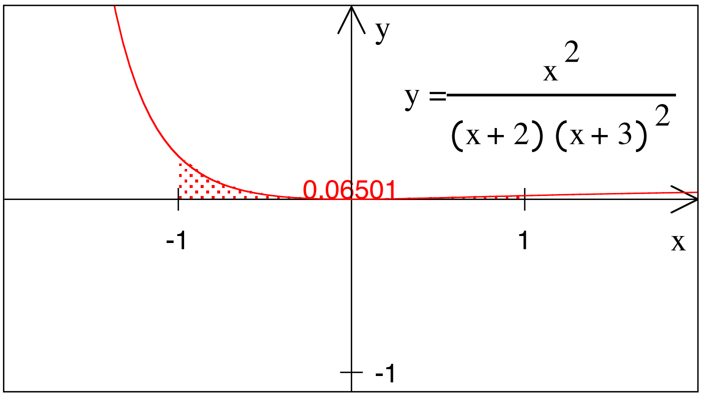
$$\begin{aligned} 1 &= c \\ -4 &= b - 8c \\ 5 &= a - 4b + 16c \end{aligned}$$

Dieses Gleichungssystem hat die Lösungen: $a = 5, b = 4, c = 1$

Somit haben wir:

$$I = \int \frac{5}{(x-4)^3}\,\mathrm{d}x + \int \frac{4}{(x-4)^2}\,\mathrm{d}x + \int \frac{1}{x-4}\,\mathrm{d}x = -\frac{5}{2}\frac{1}{(x-4)^2} - 4\frac{1}{x-4} + \ln(|x-4|) + C$$

27 Partialbruchzerlegung



Numerisches Ergebnis

Gesucht ist das exakte Ergebnis: $\int_{-1}^{1} \frac{x^2}{(x+2)(x+3)^2}\,\mathrm{d}x$

Tipp: Verwenden Sie den Ansatz:

$$\frac{x^2}{(x+2)(x+3)^2} = \frac{a}{x+2} + \frac{b}{x+3} + \frac{c}{(x+3)^2}$$

Bearbeitung

Wir verwenden den Ansatz:

$$\frac{x^2}{(x+2)(x+3)^2} = \frac{a}{x+2} + \frac{b}{x+3} + \frac{c}{(x+3)^2}$$

Damit erhalten wir:

$$\frac{x^2}{(x+2)(x+3)^2} = \frac{a}{x+2}\frac{(x+3)^2}{(x+3)^2} + \frac{b}{x+3}\frac{(x+2)(x+3)}{(x+2)(x+3)} + \frac{c}{(x+3)^2}\frac{x+2}{x+2}$$

$$\frac{x^2}{(x+2)(x+3)^2} = \frac{a\left(x^2+6x+9\right)+b\left(x^2+5x+6\right)+c(x+2)}{(x+2)(x+3)^2}$$

$$x^2 = x^2(a+b) + x(6a+5b+c) + (9a+6b+2c)$$

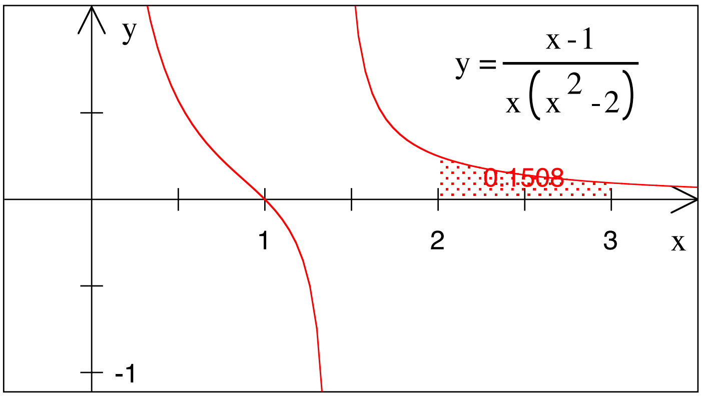
Koeffizientenvergleich ergibt:

$$\begin{aligned} 1 &= a+b \\ 0 &= 6a+5b+c \\ 0 &= 9a+6b+2c \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich $a = 4, b = -3, c = -9$, und wir haben:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{1} \frac{x^2}{(x+2)(x+3)^2}\,\mathrm{d}x &= \int_{-1}^{1} \frac{4}{x+2}\,\mathrm{d}x + \int_{-1}^{1} \frac{-3}{x+3}\,\mathrm{d}x + \int_{-1}^{1} \frac{-9}{(x+3)^2}\,\mathrm{d}x \\ &= 4\ln\left(|x+2|\right)\Big|_{-1}^{1} - 3\ln\left(|x+3|\right)\Big|_{-1}^{1} + 9\frac{1}{x+3}\Big|_{-1}^{1} \\ &= \ln(81) + \ln\left(\tfrac{1}{8}\right) - \tfrac{9}{4} \approx 0.06500761297 \end{aligned}$$

28 Partialbruchzerlegung



Numerisches Ergebnis

Gesucht ist das exakte Ergebnis: $\displaystyle\int_{2}^{3} \frac{x-1}{x\left(x^2-2\right)}\,\mathrm{d}x$

Lösungsweg

Partialbruchzerlegung des Integranden:

$$\frac{x-1}{x\left(x^2-2\right)} = \frac{x-1}{x\left(x+\sqrt{2}\right)\left(x-\sqrt{2}\right)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{\left(x+\sqrt{2}\right)} + \frac{c}{\left(x-\sqrt{2}\right)} = \frac{a\left(x+\sqrt{2}\right)\left(x-\sqrt{2}\right)+bx\left(x-\sqrt{2}\right)+cx\left(x+\sqrt{2}\right)}{x\left(x+\sqrt{2}\right)\left(x-\sqrt{2}\right)}$$

Vergleich der Zähler:

$$\begin{aligned} x-1 &= a\left(x+\sqrt{2}\right)\left(x-\sqrt{2}\right)+bx\left(x-\sqrt{2}\right)+cx\left(x+\sqrt{2}\right) \\ &= x^2(a+b+c)+x\left(-b\sqrt{2}+c\sqrt{2}\right)-2a \end{aligned}$$

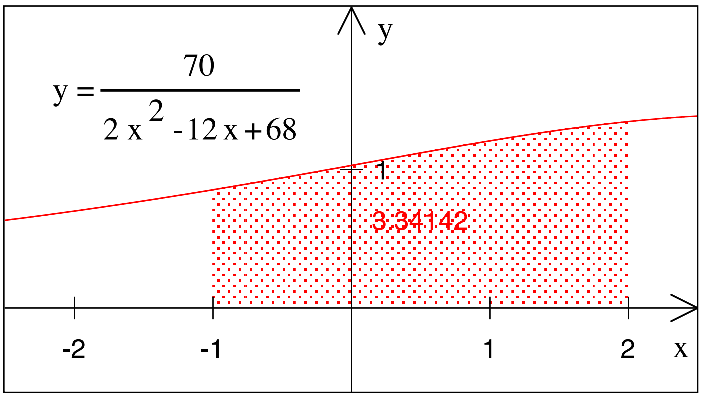
Also mit Koeffizientenvergleich:

$$\begin{aligned} (a+b+c) &= 0 \\ \left(-b\sqrt{2}+c\sqrt{2}\right) &= 1 \\ -2a &= -1 \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich: $a=\frac{1}{2}, b=-\frac{1}{4}\left(\sqrt{2}+1\right), c=\frac{1}{4}\left(\sqrt{2}-1\right)$ und daher:

$$\begin{aligned} \int_2^3 \frac{x-1}{x\left(x^2-2\right)}dx &= \int_2^3 \frac{\frac{1}{2}}{x}dx + \int_2^3 \frac{-\frac{1}{4}\left(\sqrt{2}+1\right)}{x+\sqrt{2}}dx + \int_2^3 \frac{\frac{1}{4}\left(\sqrt{2}-1\right)}{x-\sqrt{2}}dx \\ &= \frac{1}{4}\left[2\ln\left(\frac{3}{2}\right)-\left(\sqrt{2}+1\right)\ln\left(\frac{3+\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}\right)+\left(\sqrt{2}-1\right)\ln\left(\frac{3-\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}\right)\right] \\ &\approx 0.1508170406 \end{aligned}$$

29 Integral



Numerisches Ergebnis

Gesucht ist das exakte Ergebnis:

$$\int_{-1}^{2} \frac{70}{2x^2-12x+68}dx$$

Lösungsweg

Zunächst ist: $\int_{-1}^{2} \frac{70}{2x^2-12x+68}dx = 35\int_{-1}^{2} \frac{1}{x^2-6x+34}dx$

Bearbeitung des Nenners:

$$x^2-6x+34 = \left(x^2-6x+9\right)+25 = (x-3)^2+25 = 25\left(\left(\frac{x-3}{5}\right)^2+1\right)$$

Wir machen nun die Substitution:

$$u = \tfrac{x-3}{5} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{d}u = \tfrac{\mathrm{d}x}{5} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{d}x = 5\mathrm{d}u$$

Für die Integrationsgrenzen bedeutet dies:

x	u
2	$-\tfrac{1}{5}$
-1	$-\tfrac{4}{5}$

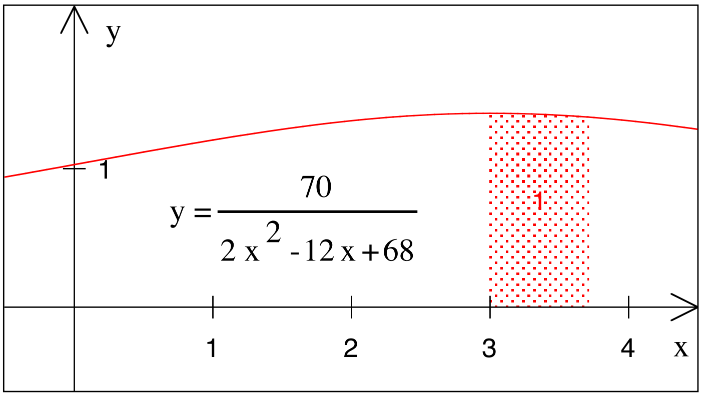
Somit erhalten wir:

$$35\int_{-1}^{2} \frac{1}{x^2-6x+34}\,\mathrm{d}x = \frac{35}{25}\int_{-1}^{2} \frac{1}{\left(\frac{x-3}{5}\right)^2+1}\,\mathrm{d}x = 7\int_{-\frac{4}{5}}^{-\frac{1}{5}} \frac{1}{u^2+1}\,\mathrm{d}u = 7\left(\arctan\left(-\tfrac{1}{5}\right) - \arctan\left(-\tfrac{4}{5}\right)\right)$$

Somit ist:

$$\int_{-1}^{2} \frac{70}{2x^2-12x+68}\,\mathrm{d}x = 7\left(\arctan\left(\tfrac{4}{5}\right) - \arctan\left(\tfrac{1}{5}\right)\right) \approx 3.34142$$

30 Integrationsgrenze gesucht



Obergrenze gesucht

Gesucht ist b so, dass:

$$\int_{3}^{b} \frac{70}{2x^2-12x+68}\,\mathrm{d}x = 1$$

Lösungsweg

Zunächst ist: $\displaystyle\int_{3}^{b} \frac{70}{2x^2-12x+68}\,\mathrm{d}x = 35\int_{3}^{b} \frac{1}{x^2-6x+34}\,\mathrm{d}x$

Bearbeitung des Nenners:

$$x^2 - 6x + 34 = \left(x^2-6x+9\right) + 25 = (x-3)^2 + 25 = 25\left(\left(\tfrac{x-3}{5}\right)^2+1\right)$$

Wir machen nun die Substitution:

$$u = \tfrac{x-3}{5} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{d}u = \tfrac{\mathrm{d}x}{5} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{d}x = 5\mathrm{d}u$$

Für die Integrationsgrenzen bedeutet dies:

x	u
b	$\frac{b-3}{5}$
3	0

Somit erhalten wir:

$$35\int_3^b \frac{1}{x^2-6x+34}\,\mathrm{d}x = \frac{35}{25}\int_3^b \frac{1}{\left(\frac{x-3}{25}\right)^2+1}\,\mathrm{d}x = 7\int_0^{\frac{b-3}{5}} \frac{1}{u^2+1}\,\mathrm{d}u = 7\left(\arctan\left(\tfrac{b-3}{5}\right) - \underbrace{\arctan(0)}_{=0}\right)$$

Dieses Integral soll den Wert 1 haben, also:

$$\begin{aligned} 7\arctan\left(\tfrac{b-3}{5}\right) &= 1 \\ \arctan\left(\tfrac{b-3}{5}\right) &= \tfrac{1}{7} \\ \tfrac{b-3}{5} &= \tan\left(\tfrac{1}{7}\right) \\ b &= 5\tan\left(\tfrac{1}{7}\right) + 3 \approx 3.7192 \end{aligned}$$

31 Viele Wege führen nach Rom

Es gibt verschiedene Lösungswege, das bestimmte Integral

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(x)\sin(x)\mathrm{d}x$$

zu berechnen. Suchen Sie so viele Lösungswege wie möglich.

Ergebnis

Im Folgenden einige Lösungswege. Es gibt sicher noch weitere.

Erster Lösungsweg

Der Integrand ist eine ungerade Funktion, das Integrationsintervall symmetrisch zu Null. Das Integral ist daher Null.

Zweiter Lösungsweg

Partielle Integration:

$$I = \int \cos(x)\sin(x)\mathrm{d}x = \sin(x)\sin(x) - \underbrace{\int \sin(x)\cos(x)\mathrm{d}x}_{=I}$$

$$\int \cos(x)\sin(x)\mathrm{d}x = \tfrac{1}{2}\sin^2(x) + C$$

Dann Grenzen einsetzen.

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(x)\sin(x)\mathrm{d}x = \left[\tfrac{1}{2}\sin^2(x)\right]_{-\pi}^{\pi} = 0$$

Dritter Lösungsweg

Additionstheorem: $\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$. Daher $\int \cos(x)\sin(x)\mathrm{d}x = \tfrac{1}{2}\int \sin(2x)\mathrm{d}x$.

Dann Substitution: $t = 2x \quad \Rightarrow \quad \mathrm{d}x = \tfrac{1}{2}\mathrm{d}t$

Grenzen:

x	$t = 2x$
π	2π
$-\pi$	-2π

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(x)\sin(x)\mathrm{d}x = \tfrac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \sin(2x)\mathrm{d}x = \tfrac{1}{4}\int_{-2\pi}^{2\pi} \sin(t)\mathrm{d}t = 0$$

Vierter Lösungsweg

Substitution: $t = \sin(x) \quad \Rightarrow \quad \mathrm{d}t = \cos(x)\mathrm{d}x$

Grenzen:

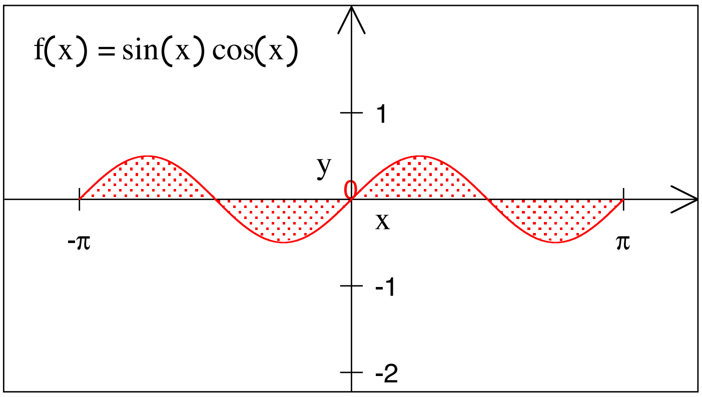
x	$t = \sin(x)$
π	0
$-\pi$	0

Also:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(x)\sin(x)\mathrm{d}x = \int_{0}^{0} t\,\mathrm{d}t = 0$$

Fünfter Lösungsweg

Wir bemühen einen Computer



Numerisches Ergebnis

32 Variation der Lösungswege

$$\int_0^{\frac{3}{2}\pi} \sin(x)\cos(x)\mathrm{d}x$$

a) Skizze des Integranden (Tipp: Nullstellen)

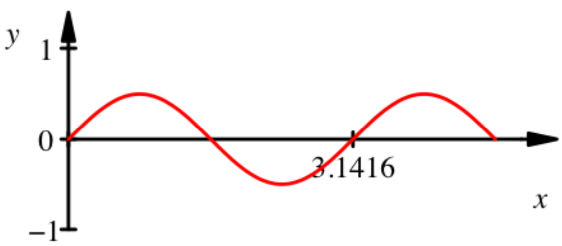
b) Berechnung mit Substitution

c) Berechnung mit Partieller Integration

d) Berechnung mit dem Additionstheorem $\sin(2\alpha) = 2\sin(\alpha)\cos(\alpha)$

Bearbeitung

a) $kizze des Integranden



Integrand

b) Substitution

$$\phi(x) = \sin(x) \quad \Rightarrow \quad \mathrm{d}\phi = \cos(x)\,\mathrm{d}x$$

Grenzen:

x	$\phi(x)=\sin(x)$
0	0
$\frac{3}{2}\pi$	-1

Integral:

$$\int_0^{\frac{3}{2}\pi} \sin(x)\cos(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{-1} \phi\,\mathrm{d}\phi = \left[\frac{\phi^2}{2}\right]_0^{-1} = \frac{1}{2}$$

c) Partielle Integration:

$$I = \int_0^{\frac{3}{2}\pi} \sin(x)\cos(x)\,\mathrm{d}x = \underbrace{\left[\sin^2(x)\right]_0^{\frac{3}{2}\pi}}_{1} - \underbrace{\int_0^{\frac{3}{2}\pi} \cos(x)\sin(x)\,\mathrm{d}x}_{I}$$

$$2I = 1$$

$$I = \frac{1}{2}$$

d) Additionstheorem:

$$\int_0^{\frac{3}{2}\pi} \sin(x)\cos(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{3}{2}\pi} \sin(2x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\left[-\cos(2x)\right]_0^{\frac{3}{2}\pi} = \frac{1}{2}$$