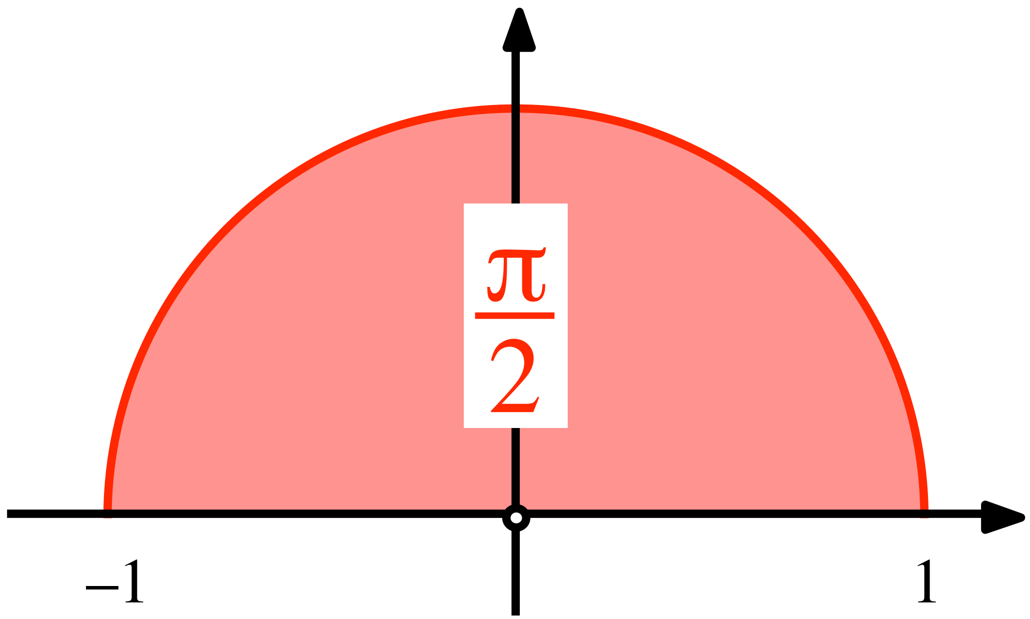


Modul 109 Integrationstechniken

Integrationstechniken

- Partielle Integration
- Integration durch Substitution
- Partialbruchzerlegung

$$\int \left(\sin(x)\right)^2 \, \mathrm{d}x = ?$$

Partielle Integration

Produktregel

$$(uv)' = u'v + uv'$$

Produktregel

$$(uv)' = u'v + uv'$$

$$u'v = (uv)' - uv'$$

Produktregel

$$(uv)' = u'v + uv'$$

$$u'v = (uv)' - uv'$$

$$\int u'v \, \mathrm{d}x = \int (uv)' \, \mathrm{d}x - \int uv' \, \mathrm{d}x$$

Produktregel

$$(uv)' = u'v + uv'$$

$$u'v = (uv)' - uv'$$

$$\int u'v \, \mathrm{d}x = \underbrace{\int (uv)' \, \mathrm{d}x}_{=uv} - \int uv' \, \mathrm{d}x$$

Produktregel

$$(uv)' = u'v + uv'$$

$$u'v = (uv)' - uv'$$

$$\int u'v \, \mathrm{d}x = \underbrace{\int (uv)' \, \mathrm{d}x}_{=uv} - \int uv' \, \mathrm{d}x$$

$$\int u'v \, \mathrm{d}x = uv - \int uv' \, \mathrm{d}x$$

$$\int_a^b u'v \, \mathrm{d}x = uv\Big|_a^b - \int_a^b uv' \, \mathrm{d}x$$

Produktregel

$$(uv)' = u'v + uv'$$

$$u'v = (uv)' - uv'$$

$$\int u'v \, \mathrm{d}x = \underbrace{\int (uv)' \, \mathrm{d}x}_{=uv} - \int uv' \, \mathrm{d}x$$

$$\int u'v \, \mathrm{d}x = uv - \int uv' \, \mathrm{d}x$$

$$\int_a^b u'v \, \mathrm{d}x = uv \Big|_a^b - \int_a^b uv' \, \mathrm{d}x$$

Teufel durch Beelzebub ausgetrieben?

Beispiel $\int x\mathrm{e}^{x}\,\mathrm{d}x = ?$

Beispiel $$\int x\mathrm{e}^{x}\,\mathrm{d}x = ?$$

$$\int u'v\,\mathrm{d}x = uv - \int uv'\,\mathrm{d}x$$

Beispiel $\int x\mathrm{e}^{x}\,\mathrm{d}x = ?$

$$\int u'v\,\mathrm{d}x = uv - \int uv'\,\mathrm{d}x$$

Motivation :

$v' = x' = 1$

$$\int x\mathrm{e}^{x}\,\mathrm{d}x$$

Beispiel $\quad \int x e^{x} \, \mathrm{d}x = ?$

$$\int u' v \, \mathrm{d}x = uv - \int u v' \, \mathrm{d}x$$

Motivation :

$v' = x' = 1$

$$\int x e^{x} \, \mathrm{d}x$$

Beispiel $\int x\mathrm{e}^{x}\,\mathrm{d}x = ?$

$$\int u'v\,\mathrm{d}x = uv - \int uv'\,\mathrm{d}x$$

Motivation :

$v' = x' = 1$

$$\int x\mathrm{e}^{x}\,\mathrm{d}x = x\mathrm{e}^{x} - \int \mathrm{e}^{x}\cdot 1\,\mathrm{d}x$$

Beispiel $\quad \int x\mathrm{e}^{x}\,\mathrm{d}x = ?$

$$\int u'v\,\mathrm{d}x = uv - \int uv'\,\mathrm{d}x$$

Motivation :

$v' = x' = 1$

$$\int x\mathrm{e}^{x}\,\mathrm{d}x = x\mathrm{e}^{x} - \underbrace{\int \mathrm{e}^{x}\cdot 1\,\mathrm{d}x}_{\mathrm{e}^{x}+C_1}$$

Beispiel $\int x e^x \, dx = ?$

Motivation :

$v' = x' = 1$

$$\int u'v \, dx = uv - \int uv' \, dx$$

$$\int x e^x \, dx = x e^x - \underbrace{\int e^x \cdot 1 \, dx}_{e^x + C_1}$$

$$\int x e^x \, dx = x e^x - e^x + C$$

$$\int x\mathrm{e}^{x}\,\mathrm{d}x = x\mathrm{e}^{x} - \mathrm{e}^{x} + C$$

Kontrolle durch Ableiten :

$$\left(x\mathrm{e}^{x} - \mathrm{e}^{x} + C\right)'$$

$$\int x\mathrm{e}^{x}\,\mathrm{d}x = x\mathrm{e}^{x} - \mathrm{e}^{x} + C$$

Kontrolle durch Ableiten :

$$\left(x\mathrm{e}^{x} - \mathrm{e}^{x} + C\right)' = 1\cdot\mathrm{e}^{x} + x\mathrm{e}^{x} - \mathrm{e}^{x} + 0$$

$$\int x\mathrm{e}^{x}\,\mathrm{d}x = \underbrace{x\mathrm{e}^{x} - \mathrm{e}^{x} + C}$$

Kontrolle durch Ableiten :

$$\left(x\mathrm{e}^{x} - \mathrm{e}^{x} + C\right)' = 1\cdot\mathrm{e}^{x} + x\mathrm{e}^{x} - \mathrm{e}^{x} + 0 = x\mathrm{e}^{x} \qquad \text{O.K.}$$

Kurzschreibweise:

$$\int \overset{\uparrow}{u'}\,\overset{\downarrow}{v}\,\mathrm{d}x = \underbrace{uv}_{\substack{\text{beide}\\ \text{"oben"}}} - \int uv'\,\mathrm{d}x$$

$$\int \overset{\downarrow}{x}\,\overset{\uparrow}{\overbrace{\mathrm{e}^x}}\,\mathrm{d}x = x\mathrm{e}^x - \int \mathrm{e}^x \cdot 1\,\mathrm{d}x$$

$\uparrow$ "muss integriert werden"

$\downarrow$ "muss abgeleitet werden"

$$\int \left(\sin(x)\right)^2 \, \mathrm{d}x = ?$$

Produkt von zwei Funktionen?

$$\int (\sin(x))^2 \, dx = ?$$

Produkt von zwei Funktionen?

$$\int \sin(x)\sin(x) \, dx$$

$$\int \left(\sin(x)\right)^2 \,\mathrm{d}x = ?$$

$$\uparrow \qquad \downarrow$$

$$\int \overbrace{\sin(x)}\overbrace{\sin(x)}\,\mathrm{d}x$$

$$\int \left(\sin(x)\right)^2 \, \mathrm{d}x = ?$$

$$\int \overbrace{\sin(x)}^{\uparrow} \overbrace{\sin(x)}^{\downarrow} \, \mathrm{d}x = -\cos(x)\sin(x) - \int \left(-\cos(x)\right)\cos(x) \, \mathrm{d}x$$

$$\int \left(\sin(x)\right)^2 \, \mathrm{d}x = ?$$

$$\int \overbrace{\sin(x)}^{\uparrow}\overbrace{\sin(x)}^{\downarrow} \, \mathrm{d}x = -\cos(x)\sin(x) - \int \left(-\cos(x)\right)\cos(x) \, \mathrm{d}x$$

$$\int \left(\sin(x)\right)^2 \, \mathrm{d}x = -\cos(x)\sin(x) + \int \left(\cos(x)\right)^2 \, \mathrm{d}x$$

$$\int \left(\sin(x)\right)^2 \,\mathrm{d}x = -\cos(x)\sin(x) + \int \left(\cos(x)\right)^2 \,\mathrm{d}x$$

Wo die Not groß ist, ist Rettung nahe.

$$\int \left(\sin(x)\right)^2 \, \mathrm{d}x = -\cos(x)\sin(x) + \int \underbrace{\left(\cos(x)\right)^2}_{1-\left(\sin(x)\right)^2} \, \mathrm{d}x$$

Wo die Not groß ist, ist Rettung nahe.

$$\int \left(\sin(x)\right)^2 \, \mathrm{d}x = -\cos(x)\sin(x) + \int \underbrace{\left(\cos(x)\right)^2}_{1-\left(\sin(x)\right)^2} \, \mathrm{d}x$$

$$\int \left(\sin(x)\right)^2 \, \mathrm{d}x = -\cos(x)\sin(x) + \int 1 \, \mathrm{d}x - \int \left(\sin(x)\right)^2 \, \mathrm{d}x$$

$$\int \left(\sin(x)\right)^2 \, \mathrm{d}x = -\cos(x)\sin(x) + \int \underbrace{\left(\cos(x)\right)^2}_{1-\left(\sin(x)\right)^2} \, \mathrm{d}x$$

$$\int \left(\sin(x)\right)^2 \, \mathrm{d}x = -\cos(x)\sin(x) + \underbrace{\int 1 \, \mathrm{d}x}_{x+C_1} - \int \left(\sin(x)\right)^2 \, \mathrm{d}x$$

$$\int \left(\sin(x)\right)^2 \, \mathrm{d}x = -\cos(x)\sin(x) + \int \underbrace{\left(\cos(x)\right)^2}_{1-\left(\sin(x)\right)^2} \, \mathrm{d}x$$

$$\underline{\int \left(\sin(x)\right)^2 \, \mathrm{d}x} = -\cos(x)\sin(x) + \underbrace{\int 1 \, \mathrm{d}x}_{x+C_1} - \underline{\int \left(\sin(x)\right)^2 \, \mathrm{d}x}$$

$$\int \left(\sin(x)\right)^2 \, \mathrm{d}x = -\cos(x)\sin(x) + \int \underbrace{\left(\cos(x)\right)^2}_{1-\left(\sin(x)\right)^2} \, \mathrm{d}x$$

$$\int \left(\sin(x)\right)^2 \, \mathrm{d}x = -\cos(x)\sin(x) + \underbrace{\int 1 \, \mathrm{d}x}_{x+C_1} - \underbrace{\int \left(\sin(x)\right)^2 \, \mathrm{d}x}_{\text{nach links verfrachten}}$$

$$\int \left(\sin(x)\right)^2 \, \mathrm{d}x = -\cos(x)\sin(x) + \int \underbrace{\left(\cos(x)\right)^2}_{1-\left(\sin(x)\right)^2} \, \mathrm{d}x$$

$$\int \left(\sin(x)\right)^2 \, \mathrm{d}x = -\cos(x)\sin(x) + \underbrace{\int 1 \, \mathrm{d}x}_{x+C_1} - \underbrace{\int \left(\sin(x)\right)^2 \, \mathrm{d}x}_{\text{nach links verfrachten}}$$

$$2\int \left(\sin(x)\right)^2 \, \mathrm{d}x = -\cos(x)\sin(x) + x + C_1$$

$$\int \left(\sin(x)\right)^2 \,\mathrm{d}x = -\cos(x)\sin(x) + \int \underbrace{\left(\cos(x)\right)^2}_{1-\left(\sin(x)\right)^2} \,\mathrm{d}x$$

$$\int \left(\sin(x)\right)^2 \,\mathrm{d}x = -\cos(x)\sin(x) + \underbrace{\int 1 \,\mathrm{d}x}_{x+C_1} - \underbrace{\int \left(\sin(x)\right)^2 \,\mathrm{d}x}_{\text{nach links verfrachten}}$$

$$2\int \left(\sin(x)\right)^2 \,\mathrm{d}x = -\cos(x)\sin(x) + x + C_1$$

$$\int \left(\sin(x)\right)^2 \,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\cos(x)\sin(x) + \frac{1}{2}x + C$$

$$\int \left(\sin(x)\right)^2 \, \mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\cos(x)\sin(x) + \frac{1}{2}x + C$$

Kontrolle durch Ableiten:

$$\int \left(\sin(x)\right)^2 \, \mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\cos(x)\sin(x) + \frac{1}{2}x + C$$

Kontrolle durch Ableiten:

$$\left(-\frac{1}{2}\cos(x)\sin(x) + \frac{1}{2}x + C\right)' =$$

$$\int \left(\sin(x)\right)^2 \, \mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\cos(x)\sin(x) + \frac{1}{2}x + C$$

Kontrolle durch Ableiten:

$$\left(-\frac{1}{2}\cos(x)\sin(x) + \frac{1}{2}x + C\right)' = -\frac{1}{2}\left(-\sin(x)\right)\sin(x) - \frac{1}{2}\cos(x)\cos(x) + \frac{1}{2}$$

$$\int \left(\sin(x)\right)^2 \, \mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\cos(x)\sin(x) + \frac{1}{2}x + C$$

Kontrolle durch Ableiten:

$$\left(-\frac{1}{2}\cos(x)\sin(x) + \frac{1}{2}x + C\right)' = -\frac{1}{2}\left(-\sin(x)\right)\sin(x) - \frac{1}{2}\cos(x)\cos(x) + \frac{1}{2}$$

$$= +\frac{1}{2}\left(\sin(x)\right)^2 - \frac{1}{2}\underbrace{\left(\cos(x)\right)^2}_{1-\left(\sin(x)\right)^2} + \frac{1}{2}$$

$$\int \left(\sin(x)\right)^2 \, \mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\cos(x)\sin(x) + \frac{1}{2}x + C$$

Kontrolle durch Ableiten:

$$\left(-\frac{1}{2}\cos(x)\sin(x) + \frac{1}{2}x + C\right)' = -\frac{1}{2}\left(-\sin(x)\right)\sin(x) - \frac{1}{2}\cos(x)\cos(x) + \frac{1}{2}$$

$$= +\frac{1}{2}\left(\sin(x)\right)^2 - \frac{1}{2}\underbrace{\left(\cos(x)\right)^2}_{1-\left(\sin(x)\right)^2} + \frac{1}{2}$$

$$= +\frac{1}{2}\left(\sin(x)\right)^2 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(\sin(x)\right)^2 + \frac{1}{2}$$

$$\int \left(\sin(x)\right)^2 \, \mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\cos(x)\sin(x) + \frac{1}{2}x + C$$

Kontrolle durch Ableiten:

$$\left(-\frac{1}{2}\cos(x)\sin(x) + \frac{1}{2}x + C\right)' = -\frac{1}{2}\left(-\sin(x)\right)\sin(x) - \frac{1}{2}\cos(x)\cos(x) + \frac{1}{2}$$

$$= +\frac{1}{2}\left(\sin(x)\right)^2 - \frac{1}{2}\underbrace{\left(\cos(x)\right)^2}_{1-\left(\sin(x)\right)^2} + \frac{1}{2}$$

$$= +\frac{1}{2}\left(\sin(x)\right)^2 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(\sin(x)\right)^2 + \frac{1}{2} = \left(\sin(x)\right)^2 \quad \text{O.K.}$$

Beispiel: $\int \ln(x)\,\mathrm{d}x = ?$

Produkt von zwei Funktionen?

Beispiel: $\int \ln(x)\,\mathrm{d}x = ?$

Produkt von zwei Funktionen?

$$\int 1 \cdot \ln(x)\,\mathrm{d}x$$

Der Trick mit der Eins:
Künstlich eine Funktion
hinein mogeln

Beispiel: $\int \ln(x)\,\mathrm{d}x = ?$

$$\int \overset{\uparrow}{1} \cdot \overbrace{\ln(x)}^{\downarrow} \,\mathrm{d}x$$

Der Trick mit der Eins:
Künstlich eine Funktion
hinein mogeln

Beispiel: $\int \ln(x)\,\mathrm{d}x = ?$

$$\int \overset{\uparrow}{1} \cdot \overset{\downarrow}{\overbrace{\ln(x)}}\,\mathrm{d}x = x\ln(x) - \underbrace{\int x\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x}_{\int 1\,\mathrm{d}x = x + C_1}$$

Der Trick mit der Eins:
Künstlich eine Funktion
hinein mogeln

Beispiel: $\int \ln(x)\,\mathrm{d}x = ?$

$$\int \underset{\uparrow}{1} \cdot \overbrace{\ln(x)}^{\downarrow}\,\mathrm{d}x = x\ln(x) - \underbrace{\int x\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x}_{\int 1\,\mathrm{d}x = x + C_1}$$

$$\boxed{\int \ln(x)\,\mathrm{d}x = x\ln(x) - x + C}$$

$$\int \ln(x)\,\mathrm{d}x = x\ln(x) - x + C$$

Kontrolle durch Ableiten

$$\left(x\ln(x) - x + C\right)' = 1\cdot\ln(x) + x\frac{1}{x} - 1 + 0 = \ln(x) \quad \text{O.K.}$$

Substitution

substituieren = ersetzen

Die Schweizer bevorzugen traditionelle Guetzli.
Beim Teig wird immer häufiger zu Fertigprodukten gegriffen.

Substitution ?

Substitution

substituieren = ersetzen

$$\int 2t\cos\left(t^2\right)\,\mathrm{d}t = ?$$

Substitution

substituieren = ersetzen

$$\int 2t\cos\left(t^2\right)\,\mathrm{d}t = ?$$

$$2t = \left(t^2\right)'$$

Substitution

substituieren = ersetzen

$$\int 2t\cos\left(t^2\right)\,\mathrm{d}t = ?$$

$$2t = \left(t^2\right)'$$

Substitution:

$$\varphi = t^2$$

$$\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} = 2t \quad \Rightarrow \quad \mathrm{d}\varphi = 2t\,\mathrm{d}t$$

Substitution

substituieren = ersetzen

$$\int 2t\cos\left(t^2\right)\,\mathrm{d}t = \,?$$

$$2t = \left(t^2\right)'$$

Substitution:

$$\varphi = t^2$$

$$\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} = 2t \quad \Rightarrow \quad \mathrm{d}\varphi = 2t\,\mathrm{d}t$$

$$\int 2t\cos\left(t^2\right)\,\mathrm{d}t = \int \cos(\varphi)\,\mathrm{d}\varphi$$

Substitution

substituieren = ersetzen

$$\int 2t\cos\left(t^2\right)\,\mathrm{d}t = ?$$

$$2t = \left(t^2\right)'$$

Substitution:

$$\varphi = t^2$$

$$\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} = 2t \quad \Rightarrow \quad \mathrm{d}\varphi = 2t\,\mathrm{d}t$$

$$\int 2t\cos\left(t^2\right)\,\mathrm{d}t = \int \cos(\varphi)\,\mathrm{d}\varphi$$

$$= \sin(\varphi) + C$$

Substitution

substituieren = ersetzen

$$\int 2t\cos\left(t^2\right)\,\mathrm{d}t = ?$$

$$2t = \left(t^2\right)'$$

Substitution:

$$\varphi = t^2$$

$$\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} = 2t \quad \Rightarrow \quad \mathrm{d}\varphi = 2t\,\mathrm{d}t$$

$$\int 2t\cos\left(t^2\right)\,\mathrm{d}t = \int \cos(\varphi)\,\mathrm{d}\varphi$$

$$= \sin(\varphi) + C$$

$$= \sin\left(t^2\right) + C$$

$$\int 2t\cos\left(t^2\right)\,\mathrm{d}t = \sin\left(t^2\right) + C$$

$$\int 2t\cos\left(t^2\right)\,\mathrm{d}t = \sin\left(t^2\right) + C$$

Kontrolle :

$$\left(\sin\left(t^2\right) + C\right)' = \cos\left(t^2\right)\cdot 2t \qquad \text{O.K.}$$

Innere Ableitung

Bestimmtes Integral $\int_2^3 2t \cos\left(t^2\right) \mathrm{d}t = ?$

Bestimmtes Integral $\int_2^3 2t\cos\left(t^2\right)\,\mathrm{d}t = ?$

Erster Lösungsweg

$$\int 2t\cos\left(t^2\right)\,\mathrm{d}t = \sin\left(t^2\right) + C \quad \text{wie gehabt}$$

Bestimmtes Integral $\int_2^3 2t\cos\left(t^2\right)\,\mathrm{d}t = ?$

Erster Lösungsweg

$$\int 2t\cos\left(t^2\right)\,\mathrm{d}t = \sin\left(t^2\right) + C \quad \text{wie gehabt}$$

Grenzen einsetzen:

$$\int_2^3 2t\cos\left(t^2\right)\,\mathrm{d}t = \sin\left(t^2\right)\Big|_2^3 = \sin(9) - \sin(4)$$

Bestimmtes Integral $$\int_{2}^{3} 2t\cos\left(t^{2}\right)\,\mathrm{d}t = ?$$

Bestimmtes Integral $\int_2^3 2t\cos\left(t^2\right)\,\mathrm{d}t = ?$

Zweiter Lösungsweg: Grenzen ebenfalls substituieren

$\varphi = t^2 \quad \Rightarrow$

t	$\varphi = t^2$
3	9
2	4

Bestimmtes Integral $\int_{2}^{3} 2t\cos\left(t^2\right)\,\mathrm{d}t = ?$

Zweiter Lösungsweg: Grenzen ebenfalls substituieren

$\varphi = t^2 \quad \Rightarrow$

t	$\varphi = t^2$
3	9
2	4

$$\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} = 2t \quad \Rightarrow \quad \mathrm{d}\varphi = 2t\ \mathrm{d}t$$

Bestimmtes Integral $\int_2^3 2t\cos\left(t^2\right)\,\mathrm{d}t = ?$

Zweiter Lösungsweg: Grenzen ebenfalls substituieren

$\varphi = t^2 \quad \Rightarrow$

t	$\varphi = t^2$
3	9
2	4

$$\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} = 2t \quad \Rightarrow \quad \mathrm{d}\varphi = 2t\ \mathrm{d}t$$

$$I = \int_2^3 2t\cos\left(t^2\right)\mathrm{d}t$$

Bestimmtes Integral $\int_2^3 2t\cos\left(t^2\right)\,\mathrm{d}t = ?$

Zweiter Lösungsweg: Grenzen ebenfalls substituieren

$\varphi = t^2 \quad \Rightarrow$

t	$\varphi = t^2$
3	9
2	4

$$\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} = 2t \quad \Rightarrow \quad \mathrm{d}\varphi = 2t\ \mathrm{d}t$$

$$I = \int_2^3 2t\cos\left(t^2\right)\mathrm{d}t \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Substitution} \\ \text{einsetzen}}}{=} \int_4^9 \cos(\varphi)\,\mathrm{d}\varphi$$

Bestimmtes Integral $\int_2^3 2t\cos\left(t^2\right)\,\mathrm{d}t = ?$

Zweiter Lösungsweg: Grenzen ebenfalls substituieren

$\varphi = t^2 \quad \Rightarrow$

t	$\varphi = t^2$
3	9
2	4

$$\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} = 2t \quad \Rightarrow \quad \mathrm{d}\varphi = 2t\;\mathrm{d}t$$

$$I = \int_2^3 2t\cos\left(t^2\right)\mathrm{d}t \underset{\substack{\uparrow\\ \text{Substitution}\\ \text{einsetzen}}}{=} \int_4^9 \cos(\varphi)\,\mathrm{d}\varphi = \sin(\varphi)\Big|_4^9 = \sin(9) - \sin(4)$$

Mit Umkehrfunktion

$$I = \int \sqrt{1 - x^2}\ \mathrm{d}x$$

Mit Umkehrfunktion

$$I = \int \sqrt{1 - x^2}\; \mathrm{d}x$$

Substitution:

$$x = \cos(\varphi)$$

Mit Umkehrfunktion

$$I = \int \sqrt{1 - x^2}\, \mathrm{d}x$$

Substitution:

$$x = \cos(\varphi) \qquad \Rightarrow \qquad \sqrt{1 - x^2} = \sin(\varphi)$$

Mit Umkehrfunktion

$$I = \int \sqrt{1 - x^2}\ \mathrm{d}x$$

Substitution:

$$x = \cos(\varphi) \qquad \Rightarrow \qquad \sqrt{1 - x^2} = \sin(\varphi)$$

$$\mathrm{d}x = -\sin(\varphi)\,\mathrm{d}\varphi$$

Mit Umkehrfunktion

$$I = \int \sqrt{1-x^2}\, \mathrm{d}x$$

Substitution:

$$x = \cos(\varphi) \qquad \Rightarrow \qquad \sqrt{1-x^2} = \sin(\varphi)$$

$$\mathrm{d}x = -\sin(\varphi)\, \mathrm{d}\varphi$$

$$I = \int \sqrt{1-x^2}\, \mathrm{d}x = -\int \left(\sin(\varphi)\right)^2 \mathrm{d}\varphi$$

Mit Umkehrfunktion

$$I = \int \sqrt{1 - x^2}\ \mathrm{d}x$$

Substitution:

$$x = \cos(\varphi) \qquad \Rightarrow \qquad \sqrt{1 - x^2} = \sin(\varphi)$$

$$\mathrm{d}x = -\sin(\varphi)\,\mathrm{d}\varphi$$

$$I = \int \sqrt{1 - x^2}\ \mathrm{d}x = -\int \left(\sin(\varphi)\right)^2\ \mathrm{d}\varphi$$

Schon gehabt:

$$I = -\int \left(\sin(\varphi)\right)^2\ \mathrm{d}\varphi = \tfrac{1}{2}\cos(\varphi)\sin(\varphi) - \tfrac{1}{2}\varphi + C$$

$$I = \int \sqrt{1 - x^2}\ \mathrm{d}x \qquad \text{Substitution: } x = \cos(\varphi)$$

$$I = \frac{1}{2}\cos(\varphi)\sin(\varphi) - \frac{1}{2}\varphi + C$$

Substitution rückgängig machen

$$I = \frac{1}{2}\cos(\varphi)\sin(\varphi) - \frac{1}{2} \qquad \varphi \qquad + C$$

$$I = \int \sqrt{1-x^2}\, \mathrm{d}x \qquad \text{Substitution: } x = \cos(\varphi)$$

$$I = \frac{1}{2}\cos(\varphi)\sin(\varphi) - \frac{1}{2}\varphi + C$$

Substitution rückgängig machen

$$I = \frac{1}{2}\underbrace{\cos(\varphi)}_{x}\sin(\varphi) - \frac{1}{2} \qquad \varphi \qquad + C$$

$$I = \int \sqrt{1-x^2}\ \mathrm{d}x \qquad \text{Substitution: } x = \cos(\varphi)$$

$$I = \frac{1}{2}\cos(\varphi)\sin(\varphi) - \frac{1}{2}\varphi + C$$

Substitution rückgängig machen

$$I = \frac{1}{2}\underbrace{\cos(\varphi)}_{x}\underbrace{\sin(\varphi)}_{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{2} \qquad \varphi \qquad + C$$

$$I = \int \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x \qquad \text{Substitution: } x = \cos(\varphi)$$

$$I = \tfrac{1}{2}\cos(\varphi)\sin(\varphi) - \tfrac{1}{2}\varphi + C$$

Substitution rückgängig machen

$$I = \tfrac{1}{2}\underbrace{\cos(\varphi)}_{x}\underbrace{\sin(\varphi)}_{\sqrt{1-x^2}} - \tfrac{1}{2}\underset{\substack{\uparrow \\ \arccos(x)}}{\varphi} + C$$

Umkehrfunktion

$$I = \int \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x \qquad \text{Substitution: } x = \cos(\varphi)$$

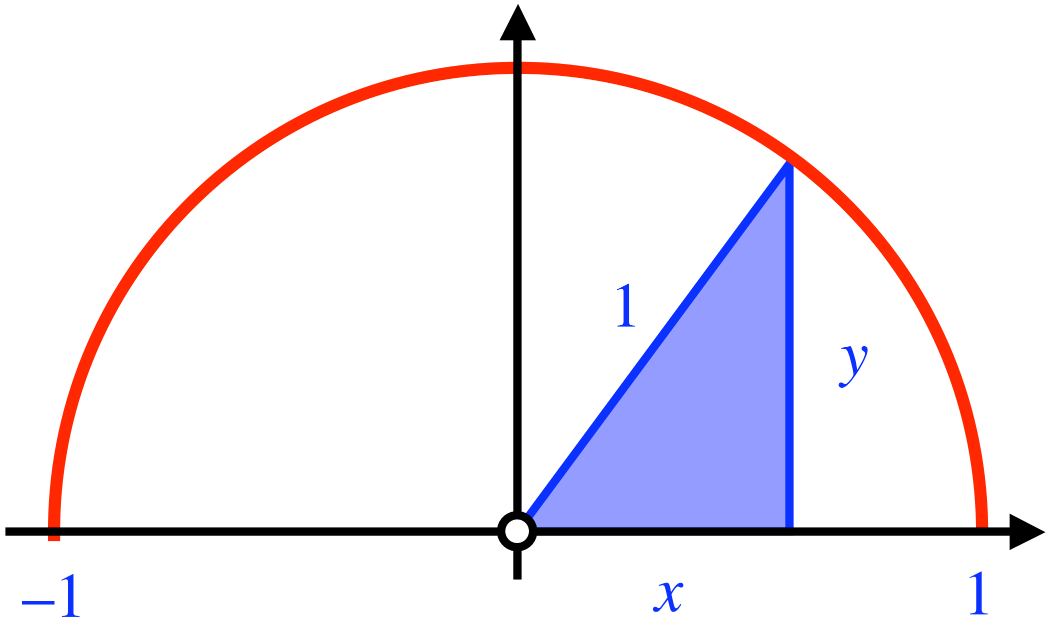
$$I = \frac{1}{2}\cos(\varphi)\sin(\varphi) - \frac{1}{2}\varphi + C$$

Substitution rückgängig machen

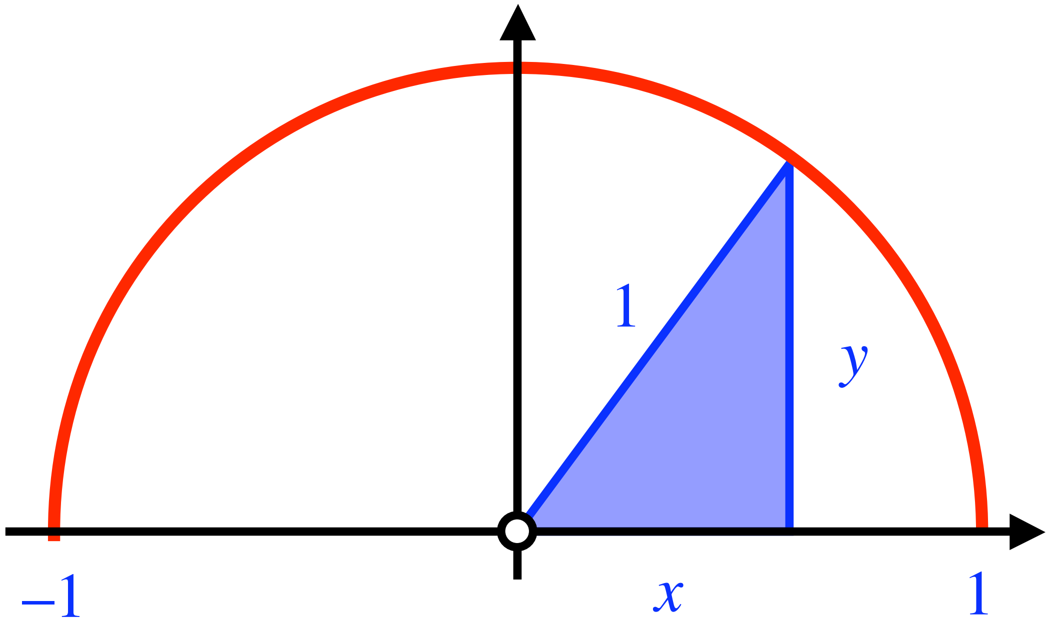
$$I = \frac{1}{2}\underbrace{\cos(\varphi)}_{x}\underbrace{\sin(\varphi)}_{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{2}\underset{\substack{\uparrow \\ \arccos(x)}}{\varphi} + C$$

$$\int \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2} - \frac{1}{2}\arccos(x) + C$$

Berechnung der Kreisfläche

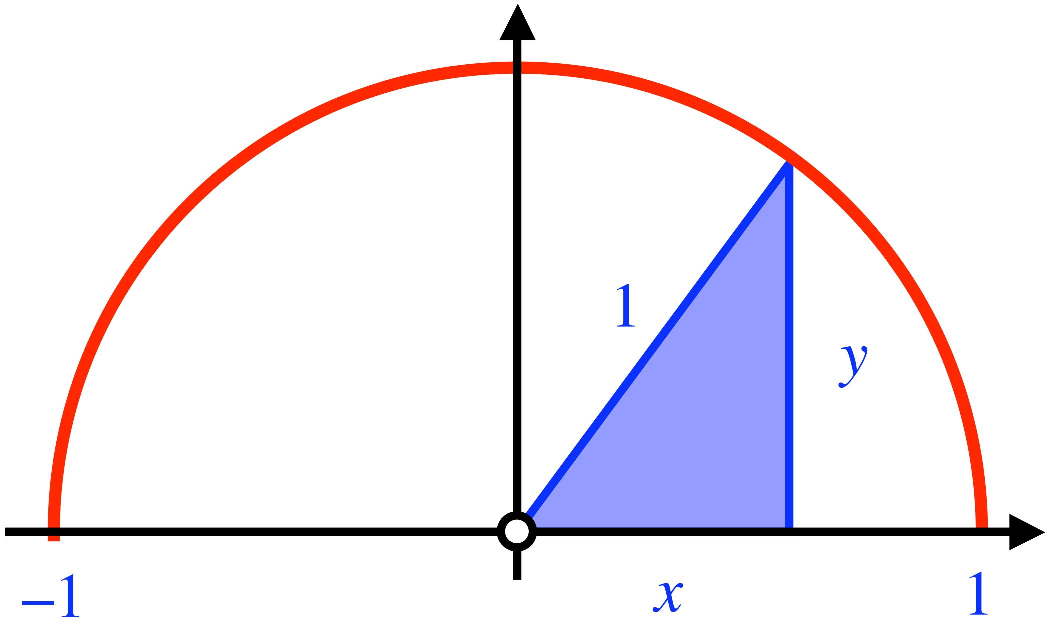


Berechnung der Kreisfläche



$y = \sqrt{1 - x^2}$

Berechnung der Kreisfläche



$$y = \sqrt{1 - x^2}$$

$$\text{Halbe Kreisfläche } = \int_{-1}^{1} \sqrt{1 - x^2}\, \mathrm{d}x$$

$$\text{Halbe Kreisfläche} = \int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$$

Erster Lösungsweg

$$\int \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2} - \frac{1}{2}\arccos(x) + C$$

$$\text{Halbe Kreisfläche} = \int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$$

Erster Lösungsweg

$$\int \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2} - \frac{1}{2}\arccos(x) + C$$

$$\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \left(\frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2} - \frac{1}{2}\arccos(x)\right)\Bigg|_{-1}^{1}$$

$$\text{Halbe Kreisfläche} = \int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$$

Erster Lösungsweg

$$\int \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{2}x\sqrt{1-x^2} - \tfrac{1}{2}\arccos(x) + C$$

$$\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \left(\tfrac{1}{2}x\sqrt{1-x^2} - \tfrac{1}{2}\arccos(x)\right)\Bigg|_{-1}^{1}$$

$$\underset{\substack{\text{Wurzel-}\\ \text{ausdruck}\\ \text{verschwindet}}}{=} \quad -\frac{1}{2}\underbrace{\arccos(1)}_{0} + \frac{1}{2}\underbrace{\arccos(-1)}_{\pi} = \frac{\pi}{2}$$

$$\text{Halbe Kreisfläche} = \int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$$

Erster Lösungsweg

$$\int \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{2}x\sqrt{1-x^2} - \tfrac{1}{2}\arccos(x) + C$$

$$\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \left(\tfrac{1}{2}x\sqrt{1-x^2} - \tfrac{1}{2}\arccos(x)\right)\Bigg|_{-1}^{1}$$

$$= -\tfrac{1}{2}\underbrace{\arccos(1)}_{0} + \tfrac{1}{2}\underbrace{\arccos(-1)}_{\pi} = \frac{\pi}{2}$$

Wurzel-
ausdruck
verschwindet

$$\text{Kreisfläche} = \pi$$

$$\text{Halbe Kreisfläche} = \int_{-1}^{1} \sqrt{1 - x^2}\, \mathrm{d}x$$

Zweiter Lösungsweg

$$x = \cos(\varphi) \quad \Rightarrow$$

x	$\varphi = \arccos(x)$
1	0
-1	π

$$\text{Halbe Kreisfläche} = \int_{-1}^{1} \sqrt{1 - x^2}\, \mathrm{d}x$$

Zweiter Lösungsweg

$$x = \cos(\varphi) \quad \Rightarrow$$

x	$\varphi = \arccos(x)$
1	0
-1	π

$$\mathrm{d}x = -\sin(\varphi)\, \mathrm{d}\varphi$$

$$\text{Halbe Kreisfläche} = \int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\, \mathrm{d}x$$

Zweiter Lösungsweg

$$x = \cos(\varphi) \quad \Rightarrow$$

x	$\varphi = \arccos(x)$
1	0
-1	π

$$\mathrm{d}x = -\sin(\varphi)\, \mathrm{d}\varphi$$

$$I = \int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\, \mathrm{d}x = -\int_{\pi}^{0} (\sin(\varphi))^2\, \mathrm{d}\varphi$$

$$\text{Halbe Kreisfläche} = \int_{-1}^{1} \sqrt{1 - x^2}\, \mathrm{d}x$$

Zweiter Lösungsweg

$$I = \int_{-1}^{1} \sqrt{1 - x^2}\, \mathrm{d}x = -\int_{\pi}^{0} \left(\sin(\varphi)\right)^2\, \mathrm{d}\varphi$$

$$\text{Halbe Kreisfläche } = \int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\, \mathrm{d}x$$

Zweiter Lösungsweg

$$I = \int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\, \mathrm{d}x = -\int_{\pi}^{0} \left(\sin(\varphi)\right)^2 \mathrm{d}\varphi$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{Grenzen} \\ \text{vertauschen}}}{=} \int_{0}^{\pi} \left(\sin(\varphi)\right)^2 \mathrm{d}\varphi$$

$$\text{Halbe Kreisfläche} = \int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$$

Zweiter Lösungsweg

$$I = \int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = -\int_{\pi}^{0} (\sin(\varphi))^2\,\mathrm{d}\varphi$$

$$\underset{\substack{\uparrow\\ \text{Grenzen}\\ \text{vertauschen}}}{=} \int_{0}^{\pi} (\sin(\varphi))^2\,\mathrm{d}\varphi = \left(-\tfrac{1}{2}\cos(\varphi)\sin(\varphi) + \tfrac{1}{2}\varphi\right)\Bigg|_{0}^{\pi} = \tfrac{1}{2}\varphi\Bigg|_{0}^{\pi} = \frac{\pi}{2}$$

$$\text{Kreisfläche} = \pi$$

$$I = \int \frac{e^x - 1}{e^x + 1}\, dx$$

$$I = \int \frac{e^x - 1}{e^x + 1}\, dx$$

Substitution:

$$e^x = t$$

$$x = \ln(t) \quad \text{Umkehrfunktion}$$

$$dx = \frac{1}{t}\, dt$$

$$I = \int \frac{e^x - 1}{e^x + 1}\, dx$$

Substitution:

$$e^x = t$$

$$x = \ln(t) \quad \text{Umkehrfunktion}$$

$$dx = \frac{1}{t}\, dt$$

$$I = \int \frac{e^x - 1}{e^x + 1}\, dx = \int \frac{t-1}{t+1} \cdot \frac{1}{t}\, dt$$

Wie weiter?

$$I = \int \frac{t-1}{t+1} \cdot \frac{1}{t} \, \mathrm{d}t$$

Wie weiter?

$$I = \int \frac{t-1}{t+1} \cdot \frac{1}{t}\, \mathrm{d}t$$

$$\frac{2}{t+1} - \frac{1}{t} = \frac{2t-(t+1)}{(t+1)t} = \frac{t-1}{t+1} \cdot \frac{1}{t}$$

$$I = \int \frac{t-1}{t+1} \cdot \frac{1}{t} \, \mathrm{d}t$$

$$\frac{2}{t+1} - \frac{1}{t} = \frac{2t-(t+1)}{(t+1)t} = \frac{t-1}{t+1} \cdot \frac{1}{t}$$

Wer sieht das schon!

$$I = \int \frac{t-1}{t+1} \cdot \frac{1}{t} \, \mathrm{d}t$$

$$\frac{2}{t+1} - \frac{1}{t} = \frac{2t-(t+1)}{(t+1)t} = \frac{t-1}{t+1} \cdot \frac{1}{t}$$

$$I = \int \frac{t-1}{t+1} \cdot \frac{1}{t} \, \mathrm{d}t$$

$$\frac{2}{t+1} - \frac{1}{t} = \frac{2t-(t+1)}{(t+1)t} = \frac{t-1}{t+1} \cdot \frac{1}{t}$$

$$I = \int \frac{t-1}{t+1} \cdot \frac{1}{t} \, \mathrm{d}t = \int \left(\frac{2}{t+1} - \frac{1}{t} \right) \mathrm{d}t$$

$$I = \int \frac{t-1}{t+1} \cdot \frac{1}{t} \, \mathrm{d}t$$

$$\frac{2}{t+1} - \frac{1}{t} = \frac{2t-(t+1)}{(t+1)t} = \frac{t-1}{t+1} \cdot \frac{1}{t}$$

$$I = \int \frac{t-1}{t+1} \cdot \frac{1}{t} \, \mathrm{d}t = \int \left(\frac{2}{t+1} - \frac{1}{t} \right) \mathrm{d}t$$

$$I = \int \frac{2}{t+1} \, \mathrm{d}t - \int \frac{1}{t} \, \mathrm{d}t$$

$$I = \int \frac{t-1}{t+1} \cdot \frac{1}{t}\, \mathrm{d}t$$

$$\frac{2}{t+1} - \frac{1}{t} = \frac{2t-(t+1)}{(t+1)t} = \frac{t-1}{t+1} \cdot \frac{1}{t}$$

$$I = \int \frac{t-1}{t+1} \cdot \frac{1}{t}\, \mathrm{d}t = \int \left(\frac{2}{t+1} - \frac{1}{t} \right) \mathrm{d}t$$

$$I = \int \frac{2}{t+1}\, \mathrm{d}t - \int \frac{1}{t}\, \mathrm{d}t = 2\ln\left(\left|t+1\right|\right) - \ln\left(\left|t\right|\right) + C$$

$$I = \int \frac{t-1}{t+1} \cdot \frac{1}{t} \, \mathrm{d}t$$

$$\frac{2}{t+1} - \frac{1}{t} = \frac{2t-(t+1)}{(t+1)t} = \frac{t-1}{t+1} \cdot \frac{1}{t}$$

$$I = \int \frac{t-1}{t+1} \cdot \frac{1}{t} \, \mathrm{d}t = \int \left(\frac{2}{t+1} - \frac{1}{t} \right) \mathrm{d}t$$

$$I = \int \frac{2}{t+1} \, \mathrm{d}t - \int \frac{1}{t} \, \mathrm{d}t = 2 \ln\left(|t+1|\right) - \ln\left(|t|\right) + C$$

$$I = 2 \ln\left(\mathrm{e}^{x} + 1\right) - \ln\left(\mathrm{e}^{x}\right) + C = 2 \ln\left(\mathrm{e}^{x} + 1\right) - x + C$$

$$I = \int \frac{t-1}{t+1} \cdot \frac{1}{t} \, \mathrm{d}t$$

$$\frac{2}{t+1} - \frac{1}{t} = \frac{2t-(t+1)}{(t+1)t} = \frac{t-1}{t+1} \cdot \frac{1}{t}$$

$$I = \int \frac{t-1}{t+1} \cdot \frac{1}{t} \, \mathrm{d}t = \int \left(\frac{2}{t+1} - \frac{1}{t} \right) \mathrm{d}t$$

$$I = \int \frac{2}{t+1} \, \mathrm{d}t - \int \frac{1}{t} \, \mathrm{d}t = 2 \ln\left(|t+1| \right) - \ln\left(|t| \right) + C$$

$$I = 2 \ln\left(\mathrm{e}^x + 1 \right) - \ln\left(\mathrm{e}^x \right) + C = 2 \ln\left(\mathrm{e}^x + 1 \right) - x + C$$

$$\int \frac{\mathrm{e}^x - 1}{\mathrm{e}^x + 1} \, \mathrm{d}x = 2 \ln\left(\mathrm{e}^x + 1 \right) - x + C$$

Partialbruchzerlegung

$$\frac{2t-(t+1)}{(t+1)t} = \frac{2}{t+1} - \frac{1}{t}$$

Wie kommen wir auf so etwas?

$$\int \frac{3x^4 - 20x^3 + 6x^2 + 116x - 105}{x^2 - 8x + 15}\,\mathrm{d}x = ?$$

Integrand eine rationale Funktion

$$\int \frac{3x^4 - 20x^3 + 6x^2 + 116x - 105}{x^2 - 8x + 15}\,\mathrm{d}x = ?$$

$$\frac{3x^4 - 20x^3 + 6x^2 + 116x - 105}{x^2 - 8x + 15}$$ Vereinfachen?

CAS

```
> f:=(3*x^4-20*x^3+6*x^2+116*x-105)/(x^2-
8*x+15);
```

$$f := \frac{3\,x^4 - 20\,x^3 + 6\,x^2 + 116\,x - 105}{x^2 - 8\,x + 15}$$

CAS

```
> f:=(3*x^4-20*x^3+6*x^2+116*x-105)/(x^2-
8*x+15);
```

$$f := \frac{3x^4 - 20x^3 + 6x^2 + 116x - 105}{x^2 - 8x + 15}$$

```
> f:=simplify(f);
```

CAS

```
> f:=(3*x^4-20*x^3+6*x^2+116*x-105)/(x^2-
8*x+15);
```

$$f := \frac{3\,x^4 - 20\,x^3 + 6\,x^2 + 116\,x - 105}{x^2 - 8\,x + 15}$$

```
> f:=simplify(f);
```

$$f := 3\,x^2 + 4\,x - 7$$

Lässt sich offenbar „ausdividieren“.

Erinnerung

`3452 : 12 =`

Erinnerung

3452 : 12 =

Erinnerung

```
3452 : 12 = 2
```

Erinnerung

```
 3452 : 12 = 2
-24
```

Erinnerung

```
 3452 : 12 = 2
-24
 10
```

Erinnerung

```
3452 : 12 = 2
-24
 105
```

Erinnerung

```
3452 : 12 = 28
-24
 105
```

Erinnerung

```
 3452 : 12 = 28
-24
 105
 -96
```

Erinnerung

```
3452 : 12 = 28
-24
 105
 -96
   9
```

Erinnerung

```
 3452 : 12 = 28
-24
 105
 -96
   92
```

Erinnerung

```
 •
 3452 : 12 = 287
-24
 105
 -96
   92
```

Erinnerung

```
 3452 : 12 = 287
-24
 105
 -96
   92
  -84
```

Erinnerung

```
3452 : 12 = 287
-24
 105
 -96
   92
  -84
    8
```

Erinnerung

```
3452 : 12 = 287
-24
 105
 -96
   92
  -84
    8
```

Erinnerung

```
 3452 : 12 = 287.
-24
 105
 -96
   92
  -84
    80
```

Erinnerung

```
3452 : 12 = 287.6
-24
 105
 -96
   92
  -84
    80
```

Erinnerung

```
3452 : 12 = 287.6
-24
 105
 -96
   92
  -84
    80
   -72
```

Erinnerung

```
3452 : 12 = 287.6
-24
 105
 -96
   92
  -84
    80
   -72
     8
```

Erinnerung

3452 : 12 = 287.6

-24

105

-96

92

-84

80

-72

80

Erinnerung

```
 3452 : 12 = 287.66
-24
 105
 -96
   92
  -84
    80
   -72
     80
```

Erinnerung

```
3452 : 12 = 287.66
-24
 105
 -96
   92
  -84
    80
   -72
     80
    -72
```

Erinnerung

```
3452 : 12 = 287.66
-24
 105
 -96
   92
  -84
    80
   -72
     80
    -72
      8
```

Erinnerung

```
3452 : 12 = 287.66
-24
 105
 -96
   92
  -84
    80
   -72
     80
    -72
      80
```

Erinnerung

```
 3452 : 12 = 287.666
-24
 105
 -96
   92
  -84
    80
   -72
     80
    -72
      80
```

und so weiter und so fort

Periodischer Dezimalbruch

$$(3x^4-20x^3+6x^2+116x-105):(x^2-8x+15)$$

$$(3x^4-20x^3+6x^2+116x-105):(x^2-8x+15)$$

$$(3x^4-20x^3+6x^2+116x-105):(x^2-8x+15)=3x^2$$

$$(3x^4-20x^3+6x^2+116x-105):(x^2-8x+15)=3x^2$$

$$3x^4-24x^3+45x^2$$

„Zurückrechnen“

$$(3x^4-20x^3+6x^2+116x-105):(x^2-8x+15)=3x^2$$
$$-3x^4+24x^3-45x^2$$

Vorzeichen ändern

$$(3x^4-20x^3+6x^2+116x-105):(x^2-8x+15)=3x^2$$

$$\begin{array}{l} -3x^4+24x^3-45x^2 \\ \hline \qquad 4x^3-39x^2 \end{array}$$

Vorzeichen ändern
und addieren

$$(3x^4 - 20x^3 + 6x^2 + 116x - 105) : (x^2 - 8x + 15) = 3x^2$$

$$-3x^4 + 24x^3 - 45x^2$$

$$4x^3 - 39x^2 + 116x$$

Nächste Stelle herunternehmen

$$(3x^4-20x^3+6x^2+116x-105):(x^2-8x+15)=3x^2+4x$$

$$\underline{-3x^4+24x^3-45x^2}$$

$$4x^3-39x^2+116x$$

$$(3x^4-20x^3+6x^2+116x-105):(x^2-8x+15)=3x^2+4x$$

$$\underline{-3x^4+24x^3-45x^2}$$

$$4x^3-39x^2+116x$$

$$4x^3-32x^2+60x$$

$$(3x^4-20x^3+6x^2+116x-105):(x^2-8x+15)=3x^2+4x$$

$$\underline{-3x^4+24x^3-45x^2}$$

$$4x^3-39x^2+116x$$

$$-4x^3+32x^2-60x$$

$$(3x^4-20x^3+6x^2+116x-105):(x^2-8x+15)=3x^2+4x$$

$$\underline{-3x^4+24x^3-45x^2}$$

$$4x^3-39x^2+116x$$

$$\underline{-4x^3+32x^2-60x}$$

$$-7x^2+56x$$

$$(3x^4 - 20x^3 + 6x^2 + 116x - 105) : (x^2 - 8x + 15) = 3x^2 + 4x$$

$$\underline{-3x^4 + 24x^3 - 45x^2}$$

$$4x^3 - 39x^2 + 116x$$

$$\underline{-4x^3 + 32x^2 - 60x}$$

$$-7x^2 + 56x - 105$$

$$(3x^4-20x^3+6x^2+116x-105):(x^2-8x+15)=3x^2+4x-7$$

$$-3x^4+24x^3-45x^2$$

$$4x^3-39x^2+116x$$

$$-4x^3+32x^2-60x$$

$$-7x^2+56x-105$$

$$(3x^4-20x^3+6x^2+116x-105):(x^2-8x+15)=3x^2+4x-7$$

$$-3x^4+24x^3-45x^2$$

$$4x^3-39x^2+116x$$

$$-4x^3+32x^2-60x$$

$$-7x^2+56x-105$$

$$-7x^2+56x-105$$

$$(3x^4-20x^3+6x^2+116x-105):(x^2-8x+15)=3x^2+4x-7$$

$$-3x^4+24x^3-45x^2$$

$$4x^3-39x^2+116x$$

$$-4x^3+32x^2-60x$$

$$-7x^2+56x-105$$

$$+7x^2-56x+105$$

$$(3x^4-20x^3+6x^2+116x-105):(x^2-8x+15)=3x^2+4x-7$$

$$-3x^4+24x^3-45x^2$$

$$4x^3-39x^2+116x$$

$$-4x^3+32x^2-60x$$

$$-7x^2+56x-105$$

$$+7x^2-56x+105$$

$$0$$

„Es geht auf“

Somit:

$$\int \frac{3x^4-20x^3+6x^2+116x-105}{x^2-8x+15}\,\mathrm{d}x$$

$$= \int \left(3x^2+4x-7\right)\mathrm{d}x$$

$$= x^3+2x^2-7x+C$$

Jetzt kommt dann sicher ein Beispiel,
wo es nicht geht.

Leichte Modifikation des Beispiels

Änderungen

$$\int \frac{3x^4 - 20x^3 + 6x^2 + 120x - 100}{x^2 - 8x + 15}\, \mathrm{d}x = ?$$

```
> f:=(3*x^4-20*x^3+6*x^2+120*x-100)/(x^2-
8*x+15);
```

$$f := \frac{3\,x^4 - 20\,x^3 + 6\,x^2 + 120\,x - 100}{x^2 - 8\,x + 15}$$

```
> f:=(3*x^4-20*x^3+6*x^2+120*x-100)/(x^2-8*x+15);
```

$$f := \frac{3\,x^4 - 20\,x^3 + 6\,x^2 + 120\,x - 100}{x^2 - 8\,x + 15}$$

```
> f:=simplify(f);
```

$$f := \frac{3\,x^4 - 20\,x^3 + 6\,x^2 + 120\,x - 100}{x^2 - 8\,x + 15}$$

```
> f:=(3*x^4-20*x^3+6*x^2+120*x-100)/(x^2-
8*x+15);
```

$$f := \frac{3\,x^4 - 20\,x^3 + 6\,x^2 + 120\,x - 100}{x^2 - 8\,x + 15}$$

```
> f:=(3*x^4-20*x^3+6*x^2+120*x-100)/(x^2-8*x+15);
```

$$f := \frac{3\,x^4 - 20\,x^3 + 6\,x^2 + 120\,x - 100}{x^2 - 8\,x + 15}$$

```
> Int(f, x)=int(f, x)+C;
```

$$\int \frac{3\,x^4 - 20\,x^3 + 6\,x^2 + 120\,x - 100}{x^2 - 8\,x + 15}\,dx = x^3 + 2\,x^2 - 7\,x - \frac{17}{2}\ln(x-3) + \frac{25}{2}\ln(x-5) + C$$

```
> f:=(3*x^4-20*x^3+6*x^2+120*x-100)/(x^2-8*x+15);
```

$$f := \frac{3\,x^4 - 20\,x^3 + 6\,x^2 + 120\,x - 100}{x^2 - 8\,x + 15}$$

```
> Int(f, x)=int(f, x)+C;
```

$$\int \frac{3\,x^4 - 20\,x^3 + 6\,x^2 + 120\,x - 100}{x^2 - 8\,x + 15}\,dx =$$

$$x^3 + 2\,x^2 - 7\,x - \frac{17}{2}\ln(x-3)$$

harmlos

$$+ \frac{25}{2}\ln(x-5) + C$$

> f:=(3*x^4-20*x^3+6*x^2+120*x-100)/(x^2-8*x+15);

$$f := \frac{3x^4 - 20x^3 + 6x^2 + 120x - 100}{x^2 - 8x + 15}$$

> Int(f, x)=int(f, x)+C;

$$\int \frac{3x^4 - 20x^3 + 6x^2 + 120x - 100}{x^2 - 8x + 15}\, dx =$$

$$\underline{x^3 + 2x^2 - 7x} - \underline{\frac{17}{2}\ln(x-3)}$$

harmlos

$$\underline{+ \frac{25}{2}\ln(x-5)} + C$$

Woher kommt das?

$$(3x^4 - 20x^3 + 6x^2 + 120x - 100) : (x^2 - 8x + 15) =$$

$$(3x^4-20x^3+\ 6x^2+120x-100):(x^2-8x+15)=3x^2$$

$$(3x^4-20x^3+\ 6x^2+120x-100):(x^2-8x+15)=3x^2$$

$$3x^4-24x^3+45x^2$$

$$(3x^4-20x^3+\ 6x^2+120x-100):(x^2-8x+15)=3x^2$$

$$-3x^4+24x^3-45x^2$$

$$(3x^4-20x^3+6x^2+120x-100):(x^2-8x+15)=3x^2$$

$$\underline{-3x^4+24x^3-45x^2}$$

$$4x^3-39x^2+120x$$

$$(3x^4-20x^3+6x^2+120x-100):(x^2-8x+15)=3x^2+4x$$

$$-3x^4+24x^3-45x^2$$

$$4x^3-39x^2+120x$$

$$(3x^4-20x^3+6x^2+120x-100):(x^2-8x+15)=3x^2+4x$$

$$\underline{-3x^4+24x^3-45x^2}$$

$$4x^3-39x^2+120x$$

$$4x^3-32x^2+60x$$

$$(3x^4-20x^3+6x^2+120x-100):(x^2-8x+15)=3x^2+4x$$

$$\underline{-3x^4+24x^3-45x^2}$$

$$4x^3-39x^2+120x$$

$$-4x^3+32x^2-60x$$

$$(3x^4-20x^3+6x^2+120x-100):(x^2-8x+15)=3x^2+4x$$

$$\underline{-3x^4+24x^3-45x^2}$$

$$4x^3-39x^2+120x$$

$$\underline{-4x^3+32x^2-60x}$$

$$-7x^2+60x-100$$

$$(3x^4-20x^3+6x^2+120x-100):(x^2-8x+15)=3x^2+4x-7$$

$$\underline{-3x^4+24x^3-45x^2}$$

$$4x^3-39x^2+120x$$

$$\underline{-4x^3+32x^2-60x}$$

$$-7x^2+60x-100$$

$$(3x^4-20x^3+6x^2+120x-100):(x^2-8x+15)=3x^2+4x-7$$

$$\underline{-3x^4+24x^3-45x^2}$$

$$4x^3-39x^2+120x$$

$$\underline{-4x^3+32x^2-60x}$$

$$-7x^2+60x-100$$

$$-7x^2+56x-105$$

$$(3x^4-20x^3+6x^2+120x-100):(x^2-8x+15)=3x^2+4x-7$$

$$\underline{-3x^4+24x^3-45x^2}$$

$$4x^3-39x^2+120x$$

$$\underline{-4x^3+32x^2-60x}$$

$$-7x^2+60x-100$$

$$+7x^2-56x+105$$

$$(3x^4-20x^3+6x^2+120x-100):(x^2-8x+15)=3x^2+4x-7$$

$$\underline{-3x^4+24x^3-45x^2}$$

$$4x^3-39x^2+120x$$

$$\underline{-4x^3+32x^2-60x}$$

$$-7x^2+60x-100$$

$$\underline{+7x^2-56x+105}$$

$$4x+5$$

Es bleibt ein Rest

$$\frac{3x^4-20x^3+6x^2+120x-100}{x^2-8x+15} = 3x^2 + 4x - 7 + \frac{4x+5}{x^2-8x+15}$$

unverdauter
Rest

$$\frac{3x^4-20x^3+6x^2+120x-100}{x^2-8x+15} = 3x^2+4x-7+\frac{4x+5}{x^2-8x+15}$$

unverdauter Rest

$$\int \frac{3x^4-20x^3+6x^2+120x-100}{x^2-8x+15}\,\mathrm{d}x$$

$$= \int 3x^2\,\mathrm{d}x + \int 4x\,\mathrm{d}x - \int 7\,\mathrm{d}x + \int \frac{4x+5}{x^2-8x+15}\,\mathrm{d}x$$

Restproblem

```
> f:=(3*x^4-20*x^3+6*x^2+120*x-100)/(x^2-8*x+15);
```

$$f := \frac{3\,x^4 - 20\,x^3 + 6\,x^2 + 120\,x - 100}{x^2 - 8\,x + 15}$$

```
> Int(f, x)=int(f, x)+C;
```

$$\int \frac{3\,x^4 - 20\,x^3 + 6\,x^2 + 120\,x - 100}{x^2 - 8\,x + 15}\,dx =$$

$$x^3 + 2\,x^2 - 7\,x - \frac{17}{2}\ln(x-3) + \frac{25}{2}\ln(x-5) + C$$

harmlos

Woher kommt das?

Restproblem: $\int \frac{4x+5}{x^2-8x+15}\,\mathrm{d}x = ?$

Restproblem: $\int \frac{4x+5}{x^2-8x+15}\,\mathrm{d}x = ?$

```
> f:=(4*x+5)/(x^2-8*x+15);
```

$$f := \frac{4\,x+5}{x^2-8\,x+15}$$

Restproblem: $\int \frac{4x+5}{x^2-8x+15}\,\mathrm{d}x = ?$

```
> f:=(4*x+5)/(x^2-8*x+15);
```

$$f := \frac{4\,x+5}{x^2-8\,x+15}$$

```
> Int(f, x)=int(f, x)+C;
```

$$\int \frac{4\,x+5}{x^2-8\,x+15}\,dx =$$

$$-\frac{17}{2}\ln(x-3)+\frac{25}{2}\ln(x-5)+C$$

Restproblem: $\int \frac{4x+5}{x^2-8x+15}\,\mathrm{d}x = ?$

```
> f:=(4*x+5)/(x^2-8*x+15);
```

$$f := \frac{4\,x+5}{x^2-8\,x+15}$$

```
> Int(f, x)=int(f, x)+C;
```

$$\int \frac{4\,x+5}{x^2-8\,x+15}\,dx = -\frac{17}{2}\ln(x-3)+\frac{25}{2}\ln(x-5)+C$$

Bemerkung: $(x-3)(x-5) = x^2-8x+15$

Restproblem: $\int \frac{4x+5}{x^2-8x+15}\,\mathrm{d}x = ?$

Restproblem: $\int \frac{4x+5}{x^2-8x+15}\,\mathrm{d}x = ?$

Faktorzerlegung: $x^2 - 8x + 15 = (x-3)(x-5)$

Lösungen der quadratischen Gleichung $x^2 - 8x + 15 = 0$

Restproblem: $\int \frac{4x+5}{x^2-8x+15}\,\mathrm{d}x = ?$

Faktorzerlegung: $x^2 - 8x + 15 = (x-3)(x-5)$

Ansatz: $\frac{4x+5}{x^2-8x+15} = \frac{a}{x-3} + \frac{b}{x-5}$

Partialbrüche

Restproblem: $\int \frac{4x+5}{x^2-8x+15}\,\mathrm{d}x = ?$

Faktorzerlegung: $x^2 - 8x + 15 = (x-3)(x-5)$

Ansatz: $\frac{4x+5}{x^2-8x+15} = \frac{a}{x-3} + \frac{b}{x-5}$

Erweitern: $\frac{4x+5}{x^2-8x+15} = \frac{a(x-5)}{(x-3)(x-5)} + \frac{b(x-3)}{(x-5)(x-3)}$

Restproblem: $\int \frac{4x+5}{x^2-8x+15}\,\mathrm{d}x = ?$

Faktorzerlegung: $x^2 - 8x + 15 = (x-3)(x-5)$

Ansatz: $\frac{4x+5}{x^2-8x+15} = \frac{a}{x-3} + \frac{b}{x-5}$

Erweitern: $\frac{4x+5}{x^2-8x+15} = \frac{a(x-5)}{(x-3)(x-5)} + \frac{b(x-3)}{(x-5)(x-3)}$

Gemeinsamer Nenner: $\frac{4x+5}{x^2-8x+15} = \frac{x(a+b)+(-5a-3b)}{x^2-8x+15}$

Restproblem: $\int \frac{4x+5}{x^2-8x+15}\,\mathrm{d}x = ?$

Gemeinsamer Nenner: $$\frac{4x+5}{x^2-8x+15} = \frac{x(a+b)+(-5a-3b)}{x^2-8x+15}$$

Restproblem: $\int \frac{4x+5}{x^2-8x+15}\,\mathrm{d}x = ?$

Gemeinsamer Nenner: $\frac{4x+5}{x^2-8x+15} = \frac{x(a+b)+(-5a-3b)}{x^2-8x+15}$

Vergleich der Zähler: $4x+5 = x(a+b)+(-5a-3b)$

Restproblem: $\int \frac{4x+5}{x^2-8x+15}\,\mathrm{d}x = ?$

Gemeinsamer Nenner: $\frac{4x+5}{x^2-8x+15} = \frac{x(a+b)+(-5a-3b)}{x^2-8x+15}$

Vergleich der Zähler: $4x+5 = x(a+b)+(-5a-3b)$

Koeffizient von x : $4 = a+b$

Koeffizient von x^0 : $5 = -5a-3b$

Restproblem: $\int \frac{4x+5}{x^2-8x+15}\,\mathrm{d}x = ?$

Gemeinsamer Nenner: $\frac{4x+5}{x^2-8x+15} = \frac{x(a+b)+(-5a-3b)}{x^2-8x+15}$

Vergleich der Zähler: $4x+5 = x(a+b)+(-5a-3b)$

Koeffizient von x : $4 = a+b$

Koeffizient von x^0 : $5 = -5a-3b$

Gleichungssystem: $\left.\begin{aligned} 4 &= a+b \\ 5 &= -5a-3b \end{aligned}\right\}$

Restproblem: $\int \frac{4x+5}{x^2-8x+15}\,\mathrm{d}x = ?$

Gemeinsamer Nenner: $\frac{4x+5}{x^2-8x+15} = \frac{x(a+b)+(-5a-3b)}{x^2-8x+15}$

Vergleich der Zähler: $4x+5 = x(a+b)+(-5a-3b)$

Koeffizient von x: $4 = a+b$

Koeffizient von x^0: $5 = -5a-3b$

Gleichungssystem: $\left.\begin{aligned} 4 &= a+b \\ 5 &= -5a-3b \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad a = -\frac{17}{2}; \quad b = \frac{25}{2}$

Restproblem: $\int \frac{4x+5}{x^2-8x+15}\,\mathrm{d}x = ?$

Ansatz: $\frac{4x+5}{x^2-8x+15} = \frac{a}{x-3} + \frac{b}{x-5}$

Gleichungssystem: $\left.\begin{array}{l} 4 = a + b \\ 5 = -5a - 3b \end{array}\right\} \Rightarrow \quad a = -\frac{17}{2}; \quad b = \frac{25}{2}$

Restproblem: $\int \frac{4x+5}{x^2-8x+15}\,dx = ?$

Ansatz: $\frac{4x+5}{x^2-8x+15} = \frac{a}{x-3} + \frac{b}{x-5}$

Gleichungssystem: $\left.\begin{aligned} 4 &= a+b \\ 5 &= -5a-3b \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad a = -\frac{17}{2}; \quad b = \frac{25}{2}$

Somit: $\frac{4x+5}{x^2-8x+15} = -\frac{17}{2}\frac{1}{x-3} + \frac{25}{2}\frac{1}{x-5}$

Restproblem: $\int \frac{4x+5}{x^2-8x+15}\,\mathrm{d}x = ?$

Ansatz: $\frac{4x+5}{x^2-8x+15} = \frac{a}{x-3} + \frac{b}{x-5}$

Gleichungssystem: $\left.\begin{aligned} 4 &= a+b \\ 5 &= -5a-3b \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad a = -\frac{17}{2}; \quad b = \frac{25}{2}$

Somit: $\frac{4x+5}{x^2-8x+15} = -\frac{17}{2}\frac{1}{x-3} + \frac{25}{2}\frac{1}{x-5}$

$$\int \frac{4x+5}{x^2-8x+15}\,\mathrm{d}x = -\frac{17}{2}\int \frac{1}{x-3}\,\mathrm{d}x + \frac{25}{2}\int \frac{1}{x-5}\,\mathrm{d}x$$

$$\int \frac{4x+5}{x^2-8x+15}\,\mathrm{d}x = -\frac{17}{2}\underbrace{\int \frac{1}{x-3}\,\mathrm{d}x}_{\ln(|x-3|)+C_1} + \frac{25}{2}\underbrace{\int \frac{1}{x-5}\,\mathrm{d}x}_{\ln(|x-5|)+C_2}$$

$$\boxed{\int \frac{4x+5}{x^2-8x+15}\,\mathrm{d}x = -\frac{17}{2}\ln\left(|x-3|\right) + \frac{25}{2}\ln\left(|x-5|\right) + C}$$

$$\int \frac{4x+5}{x^2-8x+15}\,\mathrm{d}x = -\frac{17}{2}\ln\left(\left|x-3\right|\right) + \frac{25}{2}\ln\left(\left|x-5\right|\right) + C$$

```
> f:=(4*x+5)/(x^2-8*x+15);
```

$$f := \frac{4\,x+5}{x^2-8\,x+15}$$

```
> Int(f, x)=int(f, x)+C;
```

$$\int \frac{4\,x+5}{x^2-8\,x+15}\,dx =$$

$$-\frac{17}{2}\ln(x-3) + \frac{25}{2}\ln(x-5) + C$$

Schnellmethode für *a*

$$\frac{4x+5}{(x-3)(x-5)} = \frac{a}{x-3} + \frac{b}{x-5}$$

Schnellmethode für a

$$\frac{4x+5}{(x-3)(x-5)} = \frac{a}{x-3} + \frac{b}{x-5} \qquad \Big\| \quad \cdot (x-3)$$

Schnellmethode für a

$$\frac{4x+5}{(x-3)(x-5)} = \frac{a}{x-3} + \frac{b}{x-5} \qquad \| \quad \cdot (x-3)$$

$$\frac{4x+5}{(x-5)} = a + \frac{b(x-3)}{x-5}$$

Schnellmethode für a

$$\frac{4x+5}{(x-3)(x-5)} = \frac{a}{x-3} + \frac{b}{x-5} \qquad \Big\| \quad \cdot(x-3)$$

$$\frac{4x+5}{(x-5)} = a + \frac{b(x-3)}{x-5} \qquad \Big\| \quad x = 3 \text{ setzen}$$

Schnellmethode für a

$$\frac{4x+5}{(x-3)(x-5)} = \frac{a}{x-3} + \frac{b}{x-5} \qquad \Big\| \quad \cdot (x-3)$$

$$\frac{4x+5}{(x-5)} = a + \frac{b(x-3)}{x-5} \qquad \Big\| \quad x = 3 \text{ setzen}$$

$$\frac{12+5}{-2} = a + \frac{b \cdot 0}{-2}$$

Schnellmethode für a

$$\frac{4x+5}{(x-3)(x-5)} = \frac{a}{x-3} + \frac{b}{x-5} \qquad \Big\| \quad \cdot(x-3)$$

$$\frac{4x+5}{(x-5)} = a + \frac{b(x-3)}{x-5} \qquad \Big\| \quad x = 3 \text{ setzen}$$

$$\frac{12+5}{-2} = a + \frac{b\cdot 0}{-2}$$

$$a = -\frac{17}{2}$$

Schnellmethode für b

$$\frac{4x+5}{(x-3)(x-5)} = \frac{a}{x-3} + \frac{b}{x-5} \qquad \Big\| \quad \cdot (x-5)$$

Schnellmethode für b

$$\frac{4x+5}{(x-3)(x-5)} = \frac{a}{x-3} + \frac{b}{x-5} \qquad \Big\| \quad \cdot(x-5)$$

$$\frac{4x+5}{(x-3)} = \frac{a(x-5)}{x-3} + b \qquad \Big\| \quad x = 5 \text{ setzen}$$

Schnellmethode für b

$$\frac{4x+5}{(x-3)(x-5)} = \frac{a}{x-3} + \frac{b}{x-5} \qquad \Big\| \quad \cdot(x-5)$$

$$\frac{4x+5}{(x-3)} = \frac{a(x-5)}{x-3} + b \qquad \Big\| \quad x = 5 \text{ setzen}$$

$$\frac{20+5}{2} = \frac{a \cdot 0}{2} + b$$

$$b = \frac{25}{2}$$

Geändertes Problem: $$\int \frac{4x+5}{x^2-8x+16}\,\mathrm{d}x = ?$$

$$\int \frac{4x+5}{x^2-8x+16}\,\mathrm{d}x = ?$$

Faktorzerlegung: $x^2 - 8x + 16 = (x-4)(x-4) = (x-4)^2$

Zwei gleiche Linearfaktoren

Ansatz: $$\frac{4x+5}{x^2-8x+16} = \frac{a}{x-4} + \frac{b}{x-4} \quad ?$$

$$\int \frac{4x+5}{x^2-8x+16}\,\mathrm{d}x = ?$$

Faktorzerlegung: $x^2 - 8x + 16 = (x-4)(x-4) = (x-4)^2$

Anderer Ansatz: $\frac{4x+5}{x^2-8x+16} = \frac{a}{(x-4)^2} + \frac{b}{x-4}$

quadratischer Nenner

$$\int \frac{4x+5}{x^2-8x+16}\,\mathrm{d}x = ?$$

Faktorzerlegung: $x^2 - 8x + 16 = (x-4)(x-4) = (x-4)^2$

Anderer Ansatz: $\frac{4x+5}{x^2-8x+16} = \frac{a}{(x-4)^2} + \frac{b}{x-4}$

Gemeinsame Nenner: $\frac{4x+5}{x^2-8x+16} = \frac{a}{(x-4)^2} + \frac{b(x-4)}{(x-4)^2}$

$$\int \frac{4x+5}{x^2-8x+16}\,\mathrm{d}x = ?$$

Faktorzerlegung: $x^2 - 8x + 16 = (x-4)(x-4) = (x-4)^2$

Anderer Ansatz: $\frac{4x+5}{x^2-8x+16} = \frac{a}{(x-4)^2} + \frac{b}{x-4}$

Gemeinsame Nenner: $\frac{4x+5}{x^2-8x+16} = \frac{a}{(x-4)^2} + \frac{b(x-4)}{(x-4)^2}$

Koeffizientenvergleich: $\left.\begin{aligned} 4 &= b \\ 5 &= a - 4b \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad a = 21; \quad b = 4$

$$\int \frac{4x+5}{x^2-8x+16}\,\mathrm{d}x = ?$$

Faktorzerlegung: $x^2 - 8x + 16 = (x-4)(x-4) = (x-4)^2$

Anderer Ansatz: $\dfrac{4x+5}{x^2-8x+16} = \dfrac{a}{(x-4)^2} + \dfrac{b}{x-4}$

Gemeinsame Nenner: $\dfrac{4x+5}{x^2-8x+16} = \dfrac{a}{(x-4)^2} + \dfrac{b(x-4)}{(x-4)^2}$

Koeffizientenvergleich: $\left.\begin{array}{l} 4 = b \\ 5 = a - 4b \end{array}\right\} \Rightarrow \quad a = 21; \quad b = 4$

Somit: $\displaystyle\int \frac{4x+5}{x^2-8x+16}\,\mathrm{d}x = 21\int \frac{1}{(x-4)^2}\,\mathrm{d}x + 4\int \frac{1}{x-4}\,\mathrm{d}x$

$$\int \frac{4x+5}{x^2-8x+16}\,\mathrm{d}x = ?$$

$$\int \frac{4x+5}{x^2-8x+16}\,\mathrm{d}x = 21\int \frac{1}{(x-4)^2}\,\mathrm{d}x + 4\int \frac{1}{x-4}\,\mathrm{d}x$$

$$\int \frac{4x+5}{x^2-8x+16}\,\mathrm{d}x = 21\frac{-1}{x-4} + 4\ln(|x-4|) + C$$

Schnellmethode für a

$$\frac{4x+5}{x^2-8x+16} = \frac{a}{(x-4)^2} + \frac{b}{x-4}$$

Schnellmethode für a

$$\frac{4x+5}{x^2-8x+16} = \frac{a}{(x-4)^2} + \frac{b}{x-4} \qquad \| \quad \cdot (x-4)^2$$

Schnellmethode für a

$$\frac{4x+5}{x^2-8x+16} = \frac{a}{(x-4)^2} + \frac{b}{x-4} \qquad \| \quad \cdot (x-4)^2$$

$$4x+5 = a + b(x-4) \qquad \| \quad x = 4 \text{ setzen}$$

Schnellmethode für a

$$\frac{4x+5}{x^2-8x+16} = \frac{a}{(x-4)^2} + \frac{b}{x-4} \qquad \Big\| \quad \cdot(x-4)^2$$

$$4x+5 = a + b(x-4) \qquad \Big\| \quad x=4 \text{ setzen}$$

$$a = 21$$

Schnellmethode für b

$$\frac{4x+5}{x^2-8x+16}=\frac{a}{(x-4)^2}+\frac{b}{x-4}$$

Was nun?

Schnellmethode für b

$$\frac{4x+5}{x^2-8x+16} = \frac{a}{(x-4)^2} + \frac{b}{x-4}$$

Was nun?

Keine Schnellmethode für b

Koeffizientenvergleich verwenden

Geändertes Problem: $$\int \frac{4x+5}{x^2-8x+18}\,\mathrm{d}x = ?$$

$$\int \frac{4x+5}{x^2-8x+18}\,\mathrm{d}x = ?$$

$$x^2 - 8x + 18 = 0$$

$$(-8)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 18 = 64 - 72 < 0$$

Keine reelle Lösung

Keine Linearfaktoren

$$\int \frac{4x+5}{x^2-8x+18}\,\mathrm{d}x = ?$$

$$\int \frac{4x+5}{x^2-8x+18}\,\mathrm{d}x = \int \frac{4x-16+21}{x^2-8x+18}\,\mathrm{d}x$$

Ziel: Oben die Ableitung
des Nenners hinkriegen.

$$\int \frac{4x+5}{x^2-8x+18}\,\mathrm{d}x = ?$$

$$\int \frac{4x+5}{x^2-8x+18}\,\mathrm{d}x = \int \frac{4x-16+21}{x^2-8x+18}\,\mathrm{d}x$$

$$= \int \frac{2(2x-8)+21}{x^2-8x+18}\,\mathrm{d}x$$

$$\int \frac{4x+5}{x^2-8x+18}\,\mathrm{d}x = ?$$

$$\int \frac{4x+5}{x^2-8x+18}\,\mathrm{d}x = \int \frac{4x-16+21}{x^2-8x+18}\,\mathrm{d}x$$

$$= \int \frac{2(2x-8)+21}{x^2-8x+18}\,\mathrm{d}x$$

$$= 2\underbrace{\int \frac{2x-8}{x^2-8x+18}\,\mathrm{d}x}_{=I_1} + 21\underbrace{\int \frac{1}{x^2-8x+18}\,\mathrm{d}x}_{=I_2}$$

Das erste Integral ist jetzt easy

$$\int \frac{4x+5}{x^2-8x+18}\,\mathrm{d}x = 2\underbrace{\int \frac{2x-8}{x^2-8x+18}\,\mathrm{d}x}_{=I_1} + 21\underbrace{\int \frac{1}{x^2-8x+18}\,\mathrm{d}x}_{=I_2}$$

$$I_1 = \int \frac{2x-8}{x^2-8x+18}\,\mathrm{d}x$$

$$\int \frac{4x+5}{x^2-8x+18}\,\mathrm{d}x = 2\underbrace{\int \frac{2x-8}{x^2-8x+18}\,\mathrm{d}x}_{=I_1} + 21\underbrace{\int \frac{1}{x^2-8x+18}\,\mathrm{d}x}_{=I_2}$$

$$I_1 = \int \frac{2x-8}{x^2-8x+18}\,\mathrm{d}x$$

Substitution: $u = x^2 - 8x + 18, \quad \mathrm{d}u = (2x-8)\,\mathrm{d}x$

$$\int \frac{4x+5}{x^2-8x+18}\,\mathrm{d}x = 2\underbrace{\int \frac{2x-8}{x^2-8x+18}\,\mathrm{d}x}_{=I_1} + 21\underbrace{\int \frac{1}{x^2-8x+18}\,\mathrm{d}x}_{=I_2}$$

$$I_1 = \int \frac{2x-8}{x^2-8x+18}\,\mathrm{d}x$$

Substitution: $u = x^2 - 8x + 18, \quad \mathrm{d}u = (2x-8)\,\mathrm{d}x$

$$I_1 = \int \frac{2x-8}{x^2-8x+18}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}u}{u} = \ln(|u|) + C_1$$

$$\int \frac{4x+5}{x^2-8x+18}\,\mathrm{d}x = 2\underbrace{\int \frac{2x-8}{x^2-8x+18}\,\mathrm{d}x}_{=I_1} + 21\underbrace{\int \frac{1}{x^2-8x+18}\,\mathrm{d}x}_{=I_2}$$

$$I_1 = \int \frac{2x-8}{x^2-8x+18}\,\mathrm{d}x$$

Substitution: $u = x^2 - 8x + 18, \quad \mathrm{d}u = (2x-8)\,\mathrm{d}x$

$$I_1 = \int \frac{2x-8}{x^2-8x+18}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}u}{u} = \ln(|u|) + C_1$$

$$I_1 = \ln\left(\left|x^2 - 8x + 18\right|\right) + C_1$$

$$\int \frac{4x+5}{x^2-8x+18}\,\mathrm{d}x = 2\underbrace{\int \frac{2x-8}{x^2-8x+18}\,\mathrm{d}x}_{=I_1} + 21\underbrace{\int \frac{1}{x^2-8x+18}\,\mathrm{d}x}_{=I_2}$$

$$I_2 = \int \frac{1}{x^2-8x+18}\,\mathrm{d}x$$

$$x^2 - 8x + 18 = \left(x^2 - 8x + 16\right) + 2 = \underbrace{(x-4)^2 + 2}$$

Quadrat plus Zahl

$$\int \frac{4x+5}{x^2-8x+18}\,\mathrm{d}x = 2\underbrace{\int \frac{2x-8}{x^2-8x+18}\,\mathrm{d}x}_{=I_1} + 21\underbrace{\int \frac{1}{x^2-8x+18}\,\mathrm{d}x}_{=I_2}$$

$$I_2 = \int \frac{1}{x^2-8x+18}\,\mathrm{d}x$$

$$x^2 - 8x + 18 = \left(x^2 - 8x + 16\right) + 2 = (x-4)^2 + 2$$

$$I_2 = \int \frac{1}{x^2-8x+18}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{(x-4)^2+2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \frac{1}{\left(\frac{x-4}{\sqrt{2}}\right)^2+1}\,\mathrm{d}x$$

Quadrat plus Eins

$$I_2 = \frac{1}{2}\int \frac{1}{\left(\frac{x-4}{\sqrt{2}}\right)^2 + 1}\,\mathrm{d}x$$

Quadrat plus Eins

Erinnerung: $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\arctan(u) = \frac{1}{u^2+1}$

$$I_2 = \frac{1}{2} \int \frac{1}{\left(\frac{x-4}{\sqrt{2}}\right)^2 + 1} \, \mathrm{d}x$$

Quadrat plus Eins

Erinnerung: $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u} \arctan(u) = \frac{1}{u^2+1}$

$$\int \frac{1}{u^2+1} \, \mathrm{d}u = \arctan(u) + C_2$$

Quadrat plus Eins

$$I_2 = \frac{1}{2}\int \frac{1}{\left(\frac{x-4}{\sqrt{2}}\right)^2 + 1}\,\mathrm{d}x$$

Substitution:

$$u = \frac{x-4}{\sqrt{2}}$$

$$I_2 = \frac{1}{2}\int \frac{1}{\left(\frac{x-4}{\sqrt{2}}\right)^2+1}\,\mathrm{d}x$$

Substitution:

$$u = \frac{x-4}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}x - \frac{4}{\sqrt{2}}$$

$$I_2 = \frac{1}{2}\int \frac{1}{\left(\frac{x-4}{\sqrt{2}}\right)^2 + 1}\,\mathrm{d}x$$

Substitution:

$$u = \frac{x-4}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}x - \frac{4}{\sqrt{2}}$$

$$\mathrm{d}u = \frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{d}x \quad \Rightarrow \quad \mathrm{d}x = \sqrt{2}\,\mathrm{d}u$$

$$I_2 = \frac{1}{2}\int \frac{1}{\left(\frac{x-4}{\sqrt{2}}\right)^2+1}\,\mathrm{d}x$$

Substitution:

$$u = \frac{x-4}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}x - \frac{4}{\sqrt{2}}$$

$$\mathrm{d}u = \frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{d}x \quad \Rightarrow \quad \mathrm{d}x = \sqrt{2}\,\mathrm{d}u$$

$$I_2 = \frac{1}{2}\int \frac{1}{u^2+1}\sqrt{2}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{1}{u^2+1}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan(u) + C_2$$

$$I_2 = \frac{1}{2}\int \frac{1}{\left(\frac{x-4}{\sqrt{2}}\right)^2 + 1}\,\mathrm{d}x$$

Substitution:

$$u = \frac{x-4}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}x - \frac{4}{\sqrt{2}}$$

$$\mathrm{d}u = \frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{d}x \quad \Rightarrow \quad \mathrm{d}x = \sqrt{2}\,\mathrm{d}u$$

$$I_2 = \frac{1}{2}\int \frac{1}{u^2+1}\sqrt{2}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{1}{u^2+1}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan(u) + C_2$$

$$I_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{x-4}{\sqrt{2}}\right) + C_2$$

$$\int \frac{4x+5}{x^2-8x+18}\,\mathrm{d}x = 2I_1 + 21I_2$$

$$= 2\ln\left(\left|x^2 - 8x + 18\right|\right) + \frac{21}{\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{x-4}{\sqrt{2}}\right) + C$$