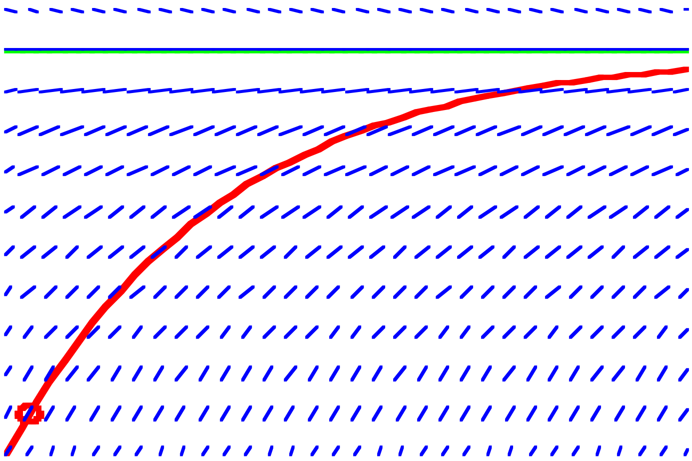
Hans Walser

Mathematik 1 für Naturwissenschaften



Modul 110

Differenzialgleichungen 1, Wachstum

Lernumgebung

UNI
BASEL

Inhalt

Modul 110 für die Lehrveranstaltung: *Mathematik 1 für Naturwissenschaften*

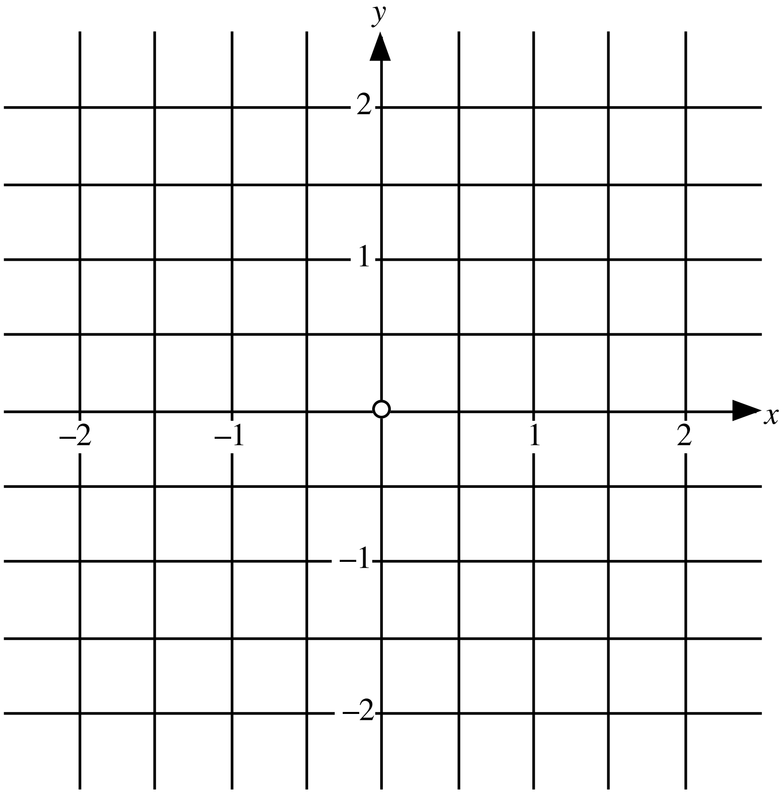
Winter 2003/04 Erstausgabe
Winter 2004/05 Ergänzungen. Geändertes Layout
Winter 2006/07 MathType. Erweiterungen
Herbst 2007 Geändertes Layout
Herbst 2008 Geändertes Layout
Herbst 2013 Straffung

last modified: 23. September 2013

Hans Walser
Mathematisches Institut, Rheinsprung 21, 4051 Basel
www.walser-h-m.ch/hans

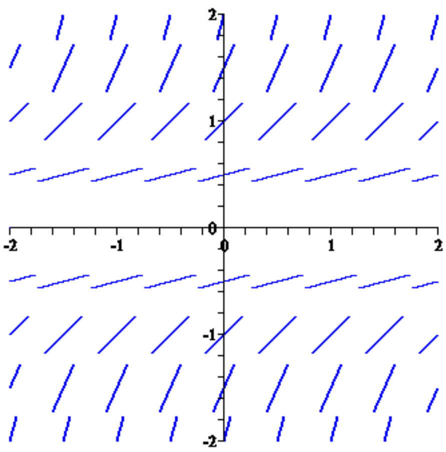
1 Richtungsfeld

Skizzieren Sie das Richtungsfeld für $y' = y^2$. Erraten (oder berechnen) Sie eine passende Lösungskurve und prüfen Sie, ob sie die Differenzialgleichung erfüllt.



Koordinatensystem

Bearbeitung



Richtungsfeld

Wir arbeiten mit Separation der Variablen:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = y^2$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{y^2} = \mathrm{d}x$$

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{y^2} = \int \mathrm{d}x$$

$$-y^{-1} = x + C$$

$$y(x) = \tfrac{-1}{x+C}$$

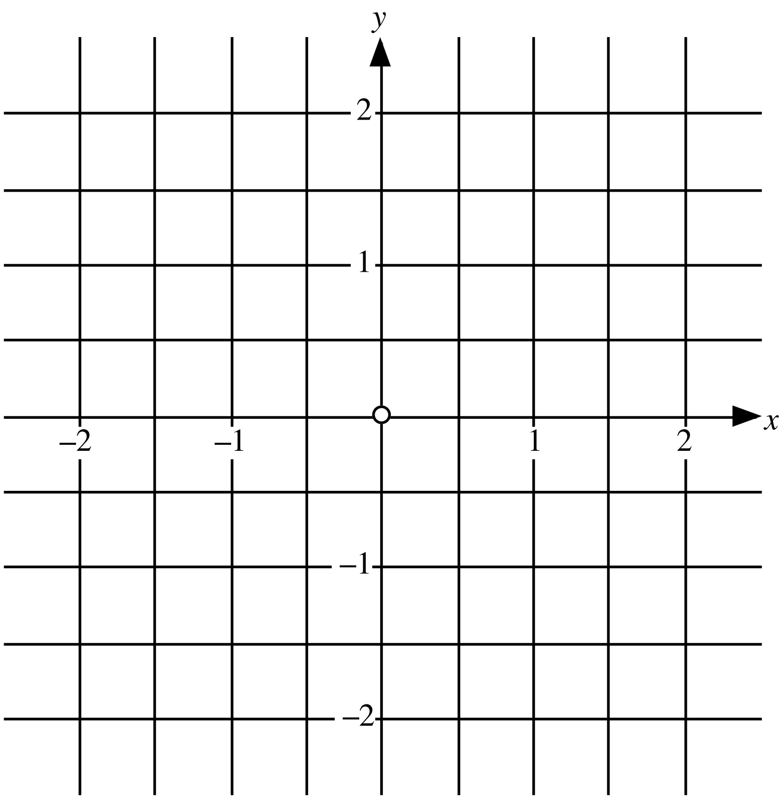
Kontrolle:

$$y(x) = \tfrac{-1}{x+C}$$

$$y'(x) = \tfrac{+1}{(x+C)^2} = \left(y(x)\right)^2$$

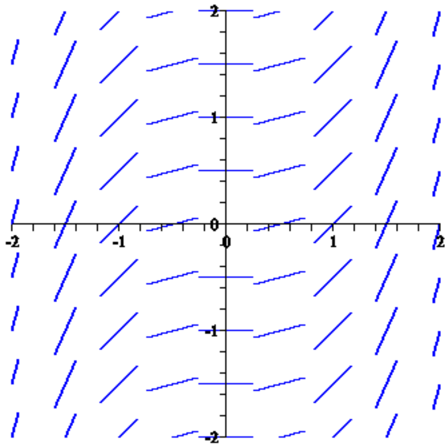
2 Richtungsfeld

Skizzieren Sie das Richtungsfeld für $y' = x^2$. Erraten (oder berechnen) Sie eine passende Lösungskurve und prüfen Sie, ob sie die Differenzialgleichung erfüllt.



Koordinatensystem

Ergebnis

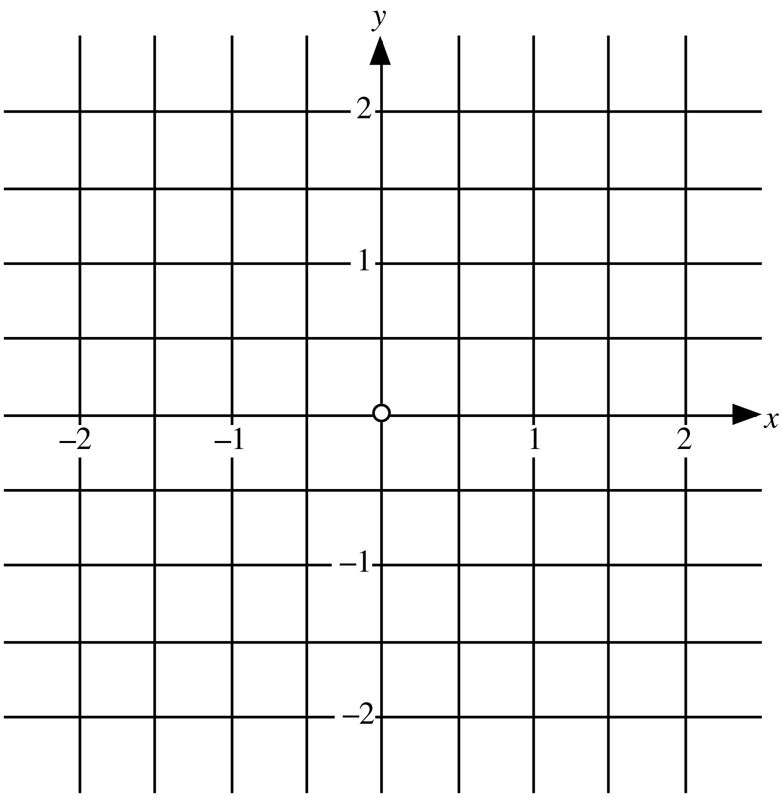


Richtungsfeld

$y(x) = \frac{1}{3}x^3 + C$ (simples Integrationsproblem)

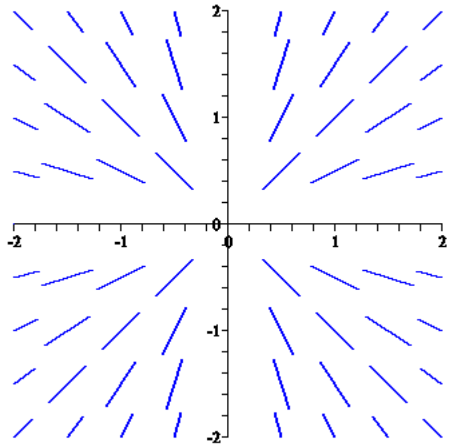
3 Richtungsfeld

Skizzieren Sie das Richtungsfeld für $y' = \frac{y}{x}$. Erraten Sie eine passende Lösungskurve und prüfen Sie, ob sie die Differenzialgleichung erfüllt.



Koordinatensystem

Ergebnis

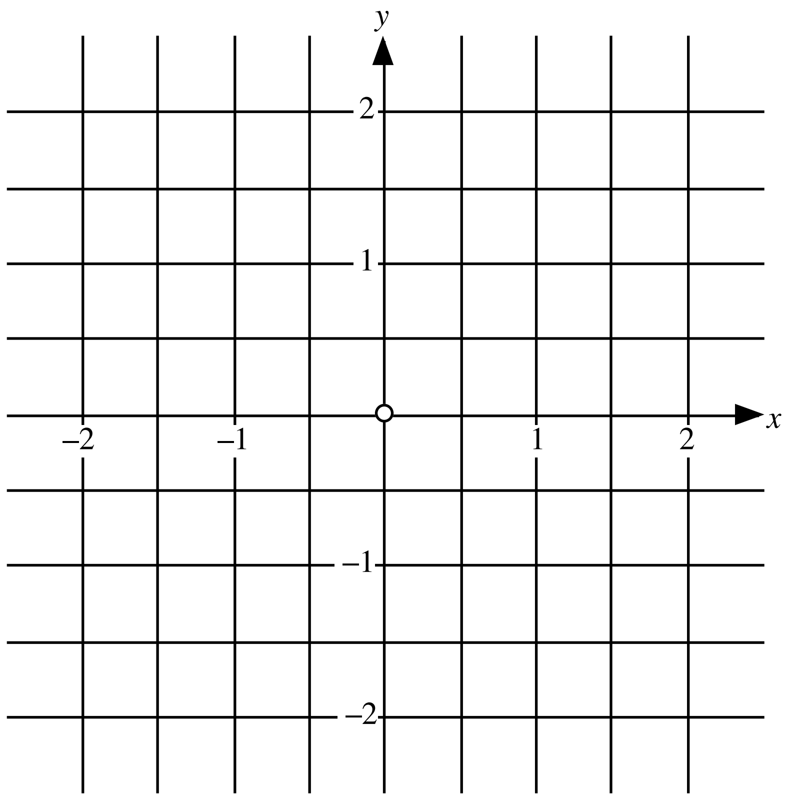


Richtungsfeld

$y = ax$

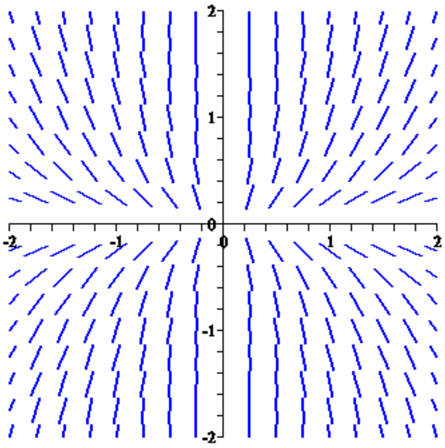
4 Richtungsfeld

Skizzieren Sie das Richtungsfeld für $y' = 3\frac{y}{x}$. Erraten Sie eine passende Lösungskurve und prüfen Sie, ob sie die Differenzialgleichung erfüllt.



Koordinatensystem

Ergebnis



Richtungsfeld

$y = ax^3$

5 Der kleine Unterschied

a) $y' = 3x\sqrt{y} \quad ; \quad y(2) = 1$

b) $(y')^2 = 9x^2 y \quad ; \quad y(2) = 1$

Worin besteht der Unterschied?

Ergebnis

Vorzeichenproblem

a) Die Differenzialgleichung $y' = 3x\sqrt{y}$ führt mit Separation der Variablen auf $\sqrt{y} = \frac{3}{4}x^2 + C$. Der Term rechts muss also positiv sein. Die Anfangsbedingung $y(2) = 1$ führt für C auf die einzige Lösung $C = -2$.

b) Aus $(y')^2 = 9x^2 y$ folgt $y' = \pm 3x\sqrt{y}$ und $\sqrt{y} = \pm\frac{3}{4}x^2 + C$. Die Anfangsbedingung $y(2) = 1$ führt auf die beiden Lösungen $\sqrt{y} = \frac{3}{4}x^2 - 2$ und $\sqrt{y} = -\frac{3}{4}x^2 + 4$

6 Separation der Variablen

$y' = 3y^{\frac{2}{3}}, \quad y(0) = 0$

Bearbeitung

Wir arbeiten mit Separation der Variablen.

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= 3y^{\frac{2}{3}} \\
y^{-\frac{2}{3}}\,\mathrm{d}y &= 3\,\mathrm{d}x \\
\int y^{-\frac{2}{3}}\,\mathrm{d}y &= 3\int 1\,\mathrm{d}x \\
\frac{1}{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}} &= 3(x+C) \\
y^{\frac{1}{3}} &= x+C \\
y &= (x+C)^3
\end{aligned}$$

Aus der Randbedingung $y(0)=0$ ergibt sich $y=x^3$.

Bemerkung

Bei unserem Vorgehen ist die triviale Lösung $y=0$ verloren gegangen.

7 Separation der Variablen

$y' = 3xy^2 \quad ; \quad y(1) = 4$

Ergebnis

$y = f(x) = \frac{4}{7-6x^2}$

8 Separation der Variablen

a) $y' = y\cos(x) \quad ; \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = \mathrm{e}^3$

b) $y' = y^2x^2 \quad ; \quad y(1) = 1$

c) $y' = \left(\frac{x}{y}\right)^b \quad ; \quad y(1) = 1$

d) $y' = \left(\frac{x}{y}\right)^b \quad ; \quad y(1) = 2$

Ergebnis

a) $y = f(x) = \mathrm{e}^{2+\sin(x)}$

b) $y = f(x) = \frac{3}{4-x^3}$

c) $y = f(x) = x$ Wow!

d) $y = f(x) = \sqrt[b+1]{x^{b+1} + 2^{b+1} - 1}$

9 Separation der Variablen

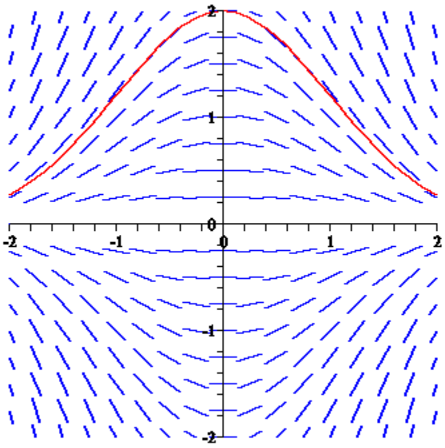
$y' = -xy$; $y(0) = 2$

a) Richtungsfeld mit Skizze der Lösungskurve

b) Lösung mit Anfangsbedingung

Ergebnis

a)



Richtungsfeld mit Lösungskurve

b) $y = f(x) = 2e^{-\frac{x^2}{2}}$.

Bemerkung: Für $y' = -xy$; $y(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ erhalten wir $y = f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$; dies ist die Funktion der so genannten *Normalverteilung*, die in der Wahrscheinlichkeits-rechnung und der Statistik eine wichtige Rolle spielt.

10 Separation der Variablen

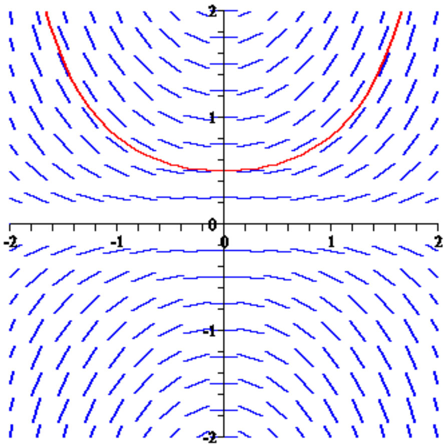
$y' = xy$; $y(0) = 0.5$

a) Richtungsfeld mit Skizze der Lösungskurve

b) Lösung mit Anfangsbedingung

Ergebnis

a)



Richtungsfeld mit Lösungskurve

b) $y = f(x) = 0.5\mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}}$

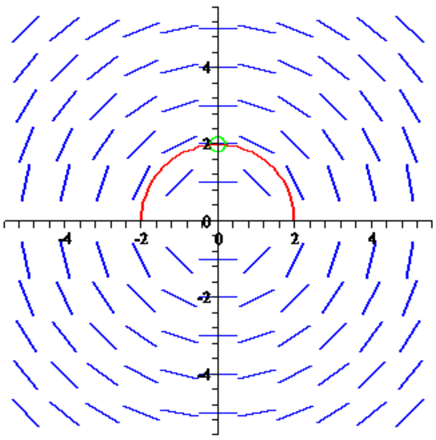
11 Separation der Variablen

$y' = \frac{-x}{y} \quad ; \quad y(0) = 2$

a) Richtungsfeld mit Skizze der Lösungskurve

b) Lösung mit Anfangsbedingung

Ergebnis



Richtungsfeld mit Lösungskurve

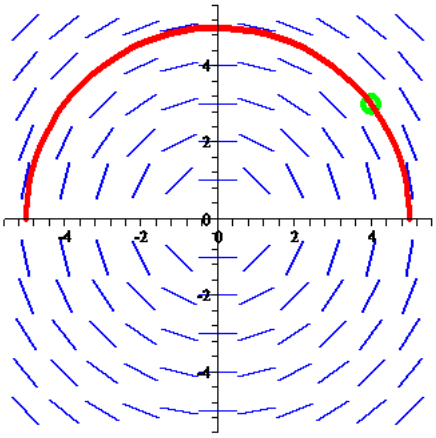
$y = \sqrt{-x^2 + 4}$

12 Separation der Variablen

Gesucht sind das Richtungsfeld zur Differenzialgleichung $y' = -\frac{x}{y}$ sowie die Lösungskurve durch den Punkt $(4,3)$.

Ergebnis

Richtungsfeld



Richtungsfeld mit Lösungskurve

Lösungskurve: $y = f(x) = \sqrt{25 - x^2}$ (oberer Halbkreis)

Lösungsweg

Separation der Variablen:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{x}{y}$$

$$y\,\mathrm{d}y = -x\,\mathrm{d}x$$

$$\int y\,\mathrm{d}y = -\int x\,\mathrm{d}x$$

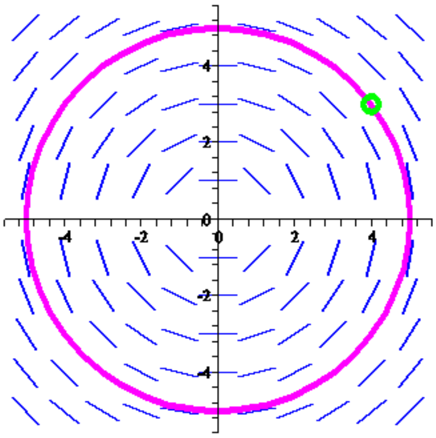
$$\frac{y^2}{2} = -\frac{x^2}{2} + C_1$$

$$x^2 + y^2 = C_2$$

Die Kurve muss durch den Punkt $(4,3)$ gehen. Daraus ergibt sich $C_2 = 25$.

Bemerkung

Die Gleichung $x^2 + y^2 = 25$ beschreibt einen Kreis mit Radius 5.



Kreis

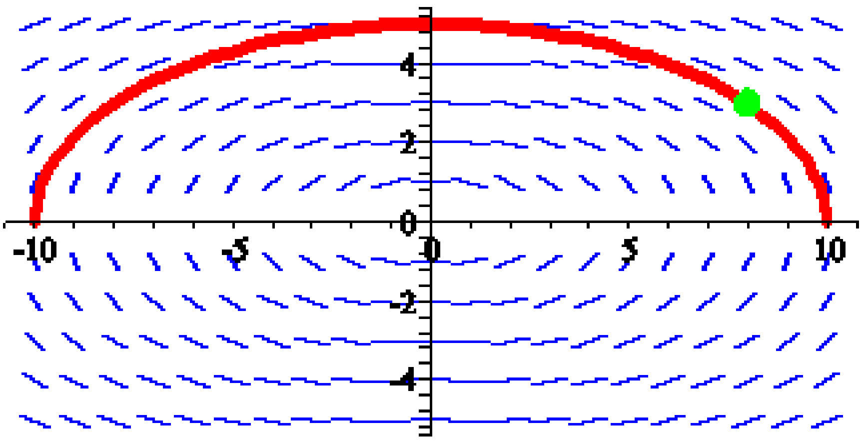
Dieser Kreis passt auch ins Richtungsfeld, ist aber keine Lösung unseres Problems, da ein Kreis nicht durch eine (eindeutige) Funktion $y = f(x)$ beschrieben werden kann.

13 Separation der Variablen

Gesucht sind das Richtungsfeld zur Differenzialgleichung $y' = -\frac{x}{4y}$ sowie die Lösungskurve durch den Punkt $(8,3)$.

Ergebnis

Richtungsfeld



Richtungsfeld mit Lösungskurve

Lösungskurve: $y = \sqrt{25 - \frac{x^2}{4}}$ (obere Halbellipse)

Lösungsweg

Separation der Variablen:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{x}{4y}$$

$$y\,\mathrm{d}y = -\tfrac{x}{4}\mathrm{d}x$$

$$\int y\,\mathrm{d}y = -\int \tfrac{x}{4}\mathrm{d}x$$

$$\frac{y^2}{2} = -\frac{x^2}{8} + C_1$$

$$\frac{x^2}{4} + y^2 = C_2$$

Die Kurve muss durch den Punkt $(8,3)$ gehen. Daraus ergibt sich $C_2 = 25$.

14 Separation der Variablen

Es sei $f'(x) = \frac{f(x)}{x}$. Gesucht ist die Funktion $f(x)$ unter der Randbedingung $f(7) = -3$.

Lösungsweg

$$f'(x) = \frac{f(x)}{x}$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{y}{x}$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{y} = \frac{\mathrm{d}x}{x}$$

$$\ln(|y|) = \ln(|x|) + C$$

$$|y| = \mathrm{e}^{\ln(|x|)+C} = \mathrm{e}^{\ln(|x|)}\underbrace{\mathrm{e}^{C}}_{a} = a|x|$$

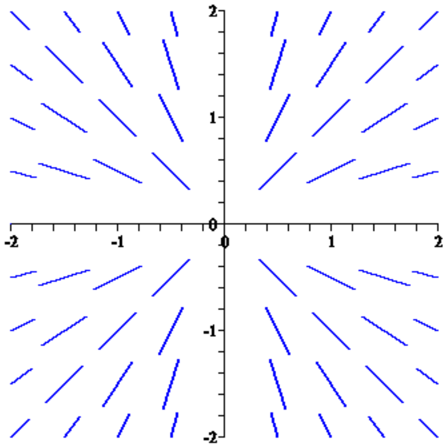
$$y = bx$$

$$\text{Randbedingung} \quad \Rightarrow \quad b = -\tfrac{3}{7}$$

$$y = f(x) = -\tfrac{3}{7}x$$

Bemerkung

Die Differenzialgleichung $f'(x) = \frac{f(x)}{x}$ kann einfacher in der Form $y' = \frac{y}{x}$ geschrieben werden. Die Steigung ist also jeweils die Steigung der Ursprungsgeraden durch den betreffenden Punkt im Richtungsfeld.



Richtungsfeld

Die Lösungskurven sind offensichtlich Geraden durch den Ursprung.

15 Logistisches Wachstum

Es sei $N(t)$ eine Wachstumsfunktion, von der wir annehmen, dass sie der logistischen Differentialgleichung

$$N'(t) = a\,N(t)\left(1 - \frac{N(t)}{K}\right)$$

genügt. Sie hat also (siehe Vorlesung) die allgemeine Form:

$$N(t) = \frac{K}{\left(\frac{K}{N_0} - 1\right)e^{-at} + 1}$$

Nun seien drei Werte bekannt, nämlich: $N(10) = 1000$, $N(20) = 1500$, $N(30) = 2000$. Gesucht sind: N_0, K, a. Wie groß ist $N(40)$? Wie groß ist $N(100)$?

Ergebnis

$N_0 = 600$, $K = 3000$, $a = \frac{\ln(2)}{10} \approx 0.069315$

Lösungsweg

Die Aufgabe ist etwas happig.

Einsetzen von $N(10) = 1000$, $N(20) = 1500$, $N(30) = 2000$ ergibt zunächst:

$$1000 = \frac{K}{\left(\frac{K}{N_0} - 1\right)e^{-10a} + 1}$$

$$1500 = \frac{K}{\left(\frac{K}{N_0} - 1\right)e^{-20a} + 1}$$

$$2000 = \frac{K}{\left(\frac{K}{N_0} - 1\right)e^{-30a} + 1}$$

Das sind drei Gleichungen für die drei Unbekannten N_0, K, a; allerdings ist das Gleichungssystem nicht linear.

Wir formen etwas um, um die Nenner wegzubringen:

$$1000\left(\left(\tfrac{K}{N_0}-1\right)e^{-10a}+1\right)=K$$
$$1500\left(\left(\tfrac{K}{N_0}-1\right)e^{-20a}+1\right)=K$$
$$2000\left(\left(\tfrac{K}{N_0}-1\right)e^{-30a}+1\right)=K$$

Und weiter:

$$1000\left(\left(K-N_0\right)e^{-10a}+N_0\right)=KN_0$$
$$1500\left(\left(K-N_0\right)e^{-20a}+N_0\right)=KN_0$$
$$2000\left(\left(K-N_0\right)e^{-30a}+N_0\right)=KN_0$$

Da die rechten Seiten alle gleich sind, müssen es auch die linken sein. Es ist also:

$$1000\left(\left(K-N_0\right)e^{-10a}+N_0\right)=1500\left(\left(K-N_0\right)e^{-20a}+N_0\right)$$
$$2000\left(\left(K-N_0\right)e^{-30a}+N_0\right)=1500\left(\left(K-N_0\right)e^{-20a}+N_0\right)$$

Daraus ergibt sich

$$1000\left(K-N_0\right)e^{-10a}+1000N_0=1500\left(K-N_0\right)e^{-20a}+1500N_0$$
$$2000\left(K-N_0\right)e^{-30a}+2000N_0=1500\left(K-N_0\right)e^{-20a}+1500N_0$$

und durch addieren:

$$1000\left(K-N_0\right)e^{-10a}+2000\left(K-N_0\right)e^{-30a}+3000N_0=3000\left(K-N_0\right)e^{-20a}+3000N_0$$

oder vereinfacht:

$$\begin{aligned}1000\left(K-N_0\right)e^{-10a}+2000\left(K-N_0\right)e^{-30a}&=3000\left(K-N_0\right)e^{-20a}\\ e^{-10a}+2e^{-30a}&=3e^{-20a} \qquad \| \cdot e^{30a}\\ e^{20a}+2&=3e^{10a}\\ e^{20a}-3e^{10a}+2&=0\end{aligned}$$

Mit der Substitution $x=e^{10a}$ erhalten wir die quadratische Gleichung

$$x^2-3x+2=0$$

mit den beiden Lösungen $x_1=1$ und $x_2=2$.

Aus $x_1=1=e^{10a}$ ergibt sich $a=0$. Das bringt es nicht.

Aus $x_2 = 2 = e^{10a}$ ergibt sich:

$$10a = \ln(2)$$
$$a = \frac{\ln(2)}{10} \approx 0.069315$$

Damit ist a gefunden. Aus $e^{10a} = 2$ folgt: $e^{-10a} = \frac{1}{2}$, $e^{-20a} = \frac{1}{4}$

Wir können dies in die obige Gleichung

$$1000(K - N_0)e^{-10a} + 1000N_0 = 1500(K - N_0)e^{-20a} + 1500N_0$$

einsetzen und erhalten:

$$1000(K - N_0)\tfrac{1}{2} + 1000N_0 = 1500(K - N_0)\tfrac{1}{4} + 1500N_0$$
$$500K - 500N_0 + 1000N_0 = 375K - 375N_0 + 1500N_0$$
$$125K = 625N_0$$
$$K = 5N_0$$

Dies setzen wir, zusammen mit $e^{-10a} = \frac{1}{2}$ in die allererste Gleichung

$$1000 = \frac{K}{\left(\frac{K}{N_0} - 1\right)e^{-10a} + 1}$$

ein. Dies ergibt:

$$1000 = \frac{5N_0}{\left(\frac{5N_0}{N_0} - 1\right)\frac{1}{2} + 1}$$
$$1000 = \frac{5N_0}{(5-1)\frac{1}{2} + 1}$$
$$200 = \frac{N_0}{3}$$
$$N_0 = 600$$

Somit ist auch N_0 gefunden. Wegen $K = 5N_0$ ist $K = 3000$. Für die Funktion

$$N(t) = \frac{K}{\left(\frac{K}{N_0} - 1\right)e^{-at} + 1}$$

erhalten wir:

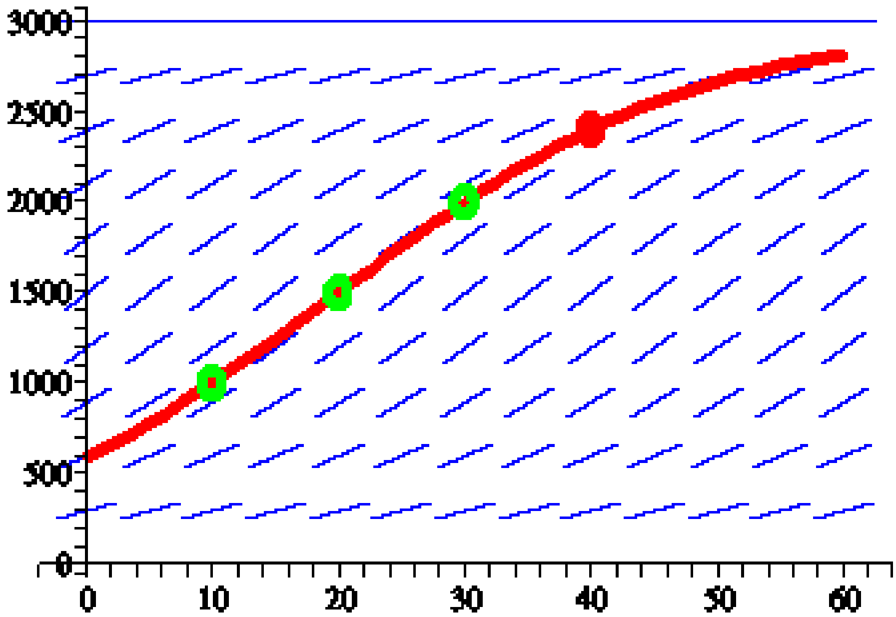
$$N(t) = \frac{3000}{\left(\frac{3000}{600} - 1\right)e^{-\left(\frac{\ln(2)}{10}\right)t} + 1} = \frac{3000}{4\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{10}} + 1}$$

Damit ist:

$$N(40)=\frac{3000}{4\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{40}{10}}+1}=2400$$

$$N(100)=\frac{3000}{4\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{100}{10}}+1}\approx 2988$$

Der letzte Wert ist schon nahe an der Kapazitätsgrenze.



Richtungsfeld, Anfangsbedingungen, Lösungskurve, Lösung für *t* = 40

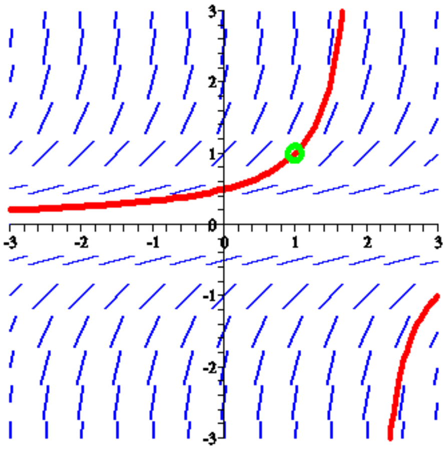
16 Richtungsfelder

Skizze Richtungsfeld, Lösung der Differenzialgleichung mit Anfangsbedingung

a) $y'=y^2,\quad y(1)=1$ b) $y'=y^2+1,\quad y(0)=0$ c) $y'=y^2-1,\quad y(0)=0$

Ergebnis

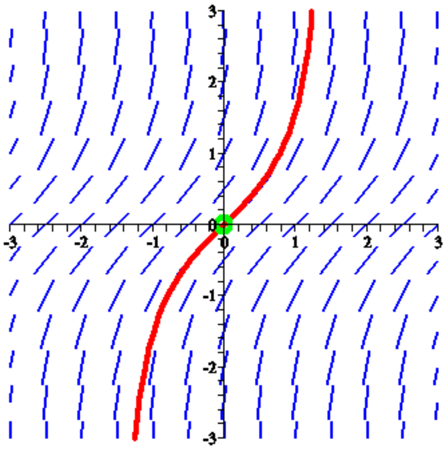
a)



Richtungsfeld und Lösungskurve

$y = f(x) = \frac{-1}{x-2}$

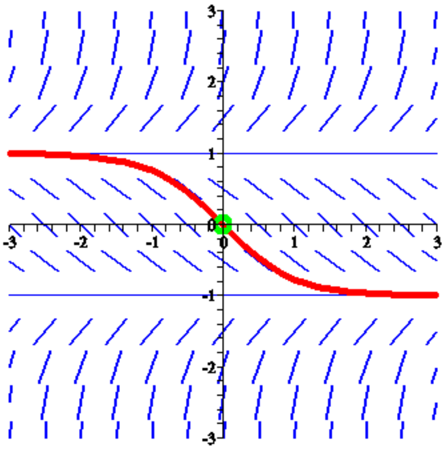
b)



Richtungsfeld und Lösungskurve

$y = f(x) = \tan(x)$

c)



Richtungsfeld und Lösungskurve

$y = f(x) = \frac{e^{-x}-e^{x}}{e^{-x}+e^{x}} = -\tanh(x)$

Lösungsweg

a) Separation der Variablen ergibt:

$$\int \frac{dy}{y^2} = \int dx$$

$$\frac{-1}{y} = x + C_1$$

$$y = \frac{1}{C_2 - x}$$

Die Anfangsbedingung $y(1) = 1$ ergibt $C_2 = 2$, also $y = f(x) = \frac{-1}{x-2}$.

b) Separation der Variablen ergibt:

$$\int \frac{dy}{y^2+1} = \int dx$$

$$\arctan(y) = x + C$$

$$y = \tan(x + C)$$

Die Anfangsbedingung $y(0) = 0$ ergibt $C = 0$, also $y = f(x) = \tan(x)$.

c) Separation der Variablen ergibt:

$$\int \frac{dy}{y^2-1} = \int dx$$

Das Integral links kann mit Partialbruchzerlegung angegangen werden.

$$\frac{1}{y^2-1} = \frac{a}{y+1} + \frac{b}{y-1} = \frac{a(y-1)+b(y+1)}{y^2-1} = \frac{y(a+b)+(-a+b)}{y^2-1}$$

Durch Koeffizientenvergleich folgt:

$$\begin{aligned} a+b&=0\\ -a+b&=1 \end{aligned}$$

Also: $a=-\frac{1}{2}$ und $b=\frac{1}{2}$. Damit wird:

$$\int\frac{\mathrm{d}y}{y^2-1}=-\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}y}{y+1}+\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}y}{y-1}=-\frac{1}{2}\ln\left(\left|y+1\right|\right)+\frac{1}{2}\ln\left(\left|y-1\right|\right)+C_1=\ln\left(\sqrt{\left|\frac{y-1}{y+1}\right|}\right)+C_1$$

Somit erhalten wir:

$$\ln\left(\sqrt{\left|\frac{y-1}{y+1}\right|}\right)=x+C_2$$

$$\sqrt{\left|\frac{y-1}{y+1}\right|}=\mathrm{e}^{x+C_2}$$

$$\left|\frac{y-1}{y+1}\right|=\mathrm{e}^{2\left(x+C_2\right)}$$

$$\frac{y-1}{y+1}=C_3\mathrm{e}^{2x}$$

Nach y aufgelöst ergibt:

$$y=\frac{1+C_3\mathrm{e}^{2x}}{1-C_3\mathrm{e}^{2x}}$$

Die Anfangsbedingung $y(0)=0$ ergibt $C_3=-1$, also:

$$y=\frac{1-\mathrm{e}^{2x}}{1+\mathrm{e}^{2x}}=\frac{1-\mathrm{e}^{2x}}{1+\mathrm{e}^{2x}}\,\frac{\mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^{-x}}=\frac{\mathrm{e}^{-x}-\mathrm{e}^{x}}{\mathrm{e}^{-x}+\mathrm{e}^{x}}=-\frac{\mathrm{e}^{x}-\mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^{x}+\mathrm{e}^{-x}}=-\tanh(x)$$

17 Licht anschalten

Am ersten Januar 2002 trat eine Empfehlung in Kraft, immer mit Licht zu fahren. Die Autofahrer kamen dieser Empfehlung jedoch nicht sofort nach. Es sei $b(t)$ der Anteil derjenigen Autofahrer, welche die Empfehlung zur Zeit t befolgten. Wir können annehmen, dass die Anzahl der mit Licht fahrenden Autofahrer mit einer Geschwindigkeit wächst, welche proportional zum noch vorhandenen Anteil der Lichtmuffel ist. Formulieren und lösen Sie die entsprechende Differenzialgleichung für $b(t)$.

Ergebnis

$b(t)=1-\left(1-b_0\right)\mathrm{e}^{-kt}$