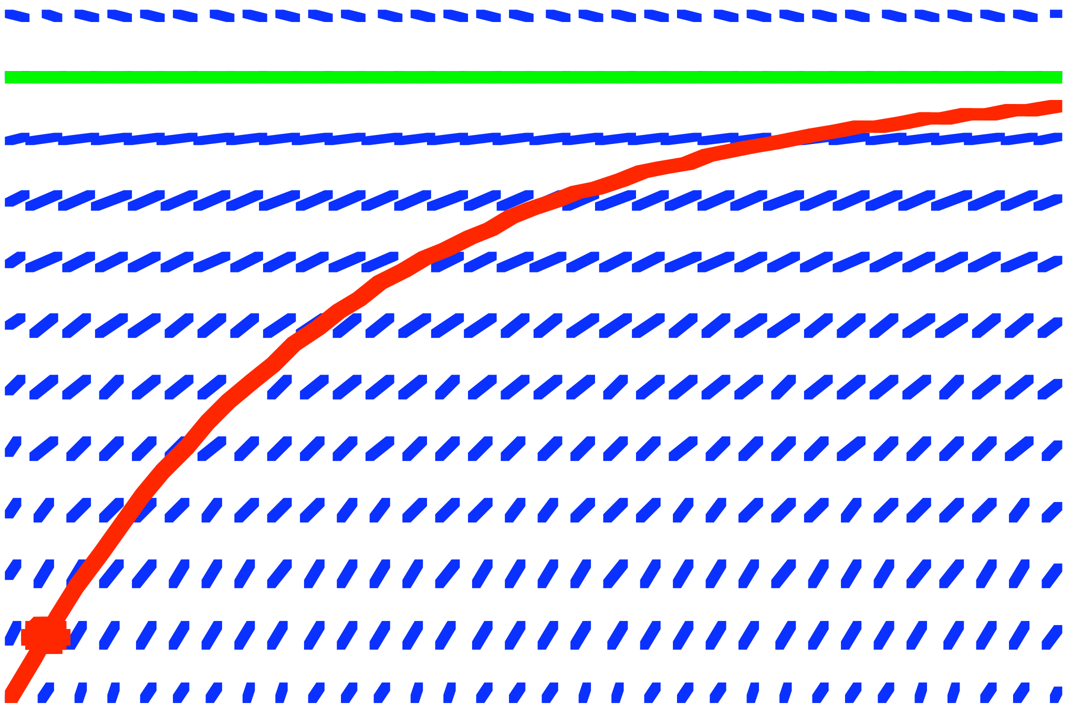


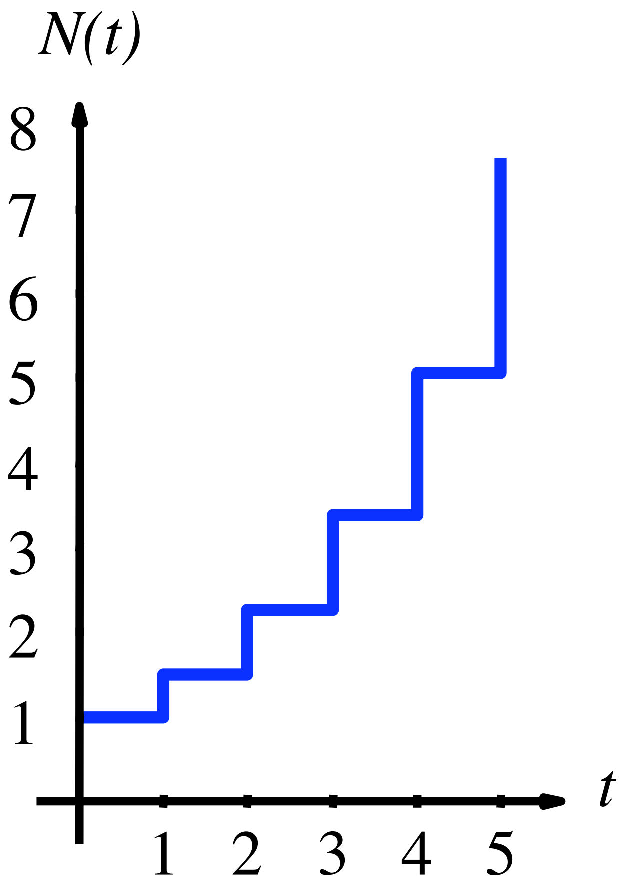
Modul 110 Differenzialgleichungen 1, Wachstum

50% Wachstum pro Jahr

$N(0) = 1$

$\Delta N = 0.5\ N(t)$

$N(t + 1) = 1.5\ N(t)$

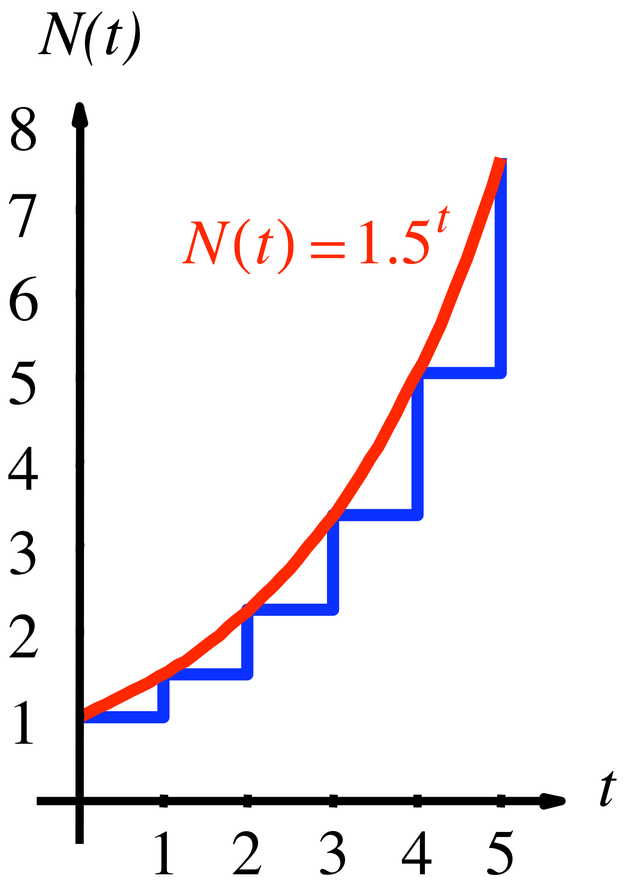


50% Wachstum pro Jahr

$N(0) = 1$

$\Delta N = 0.5\ N(t)$

$N(t + 1) = 1.5\ N(t)$



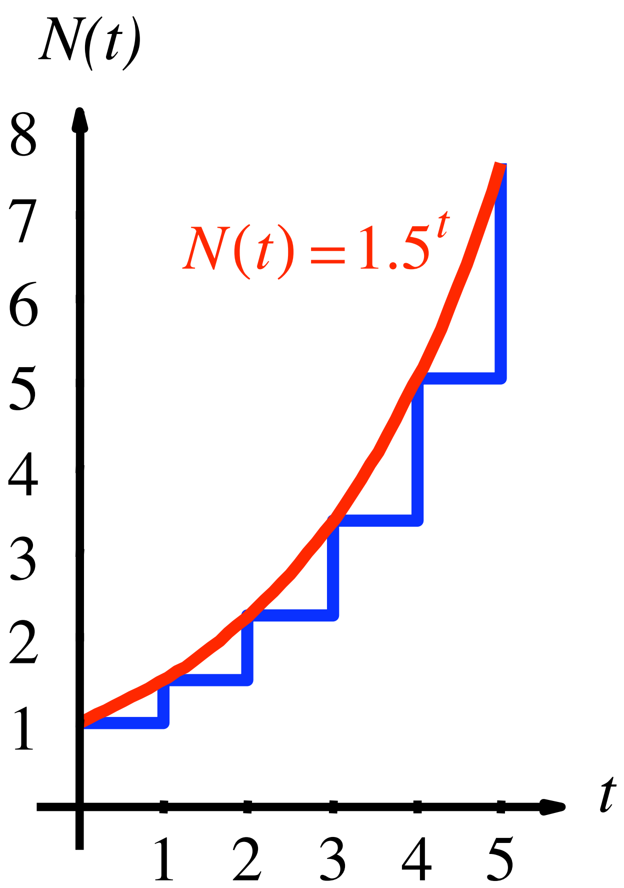
50% Wachstum pro Jahr

$N(0) = 1$

$\Delta N = 0.5\, N(t)$

$N(t + 1) = 1.5\, N(t)$

$$N(t) = 1.5^t$$



50% Wachstum pro Jahr

$N(0) = 1$

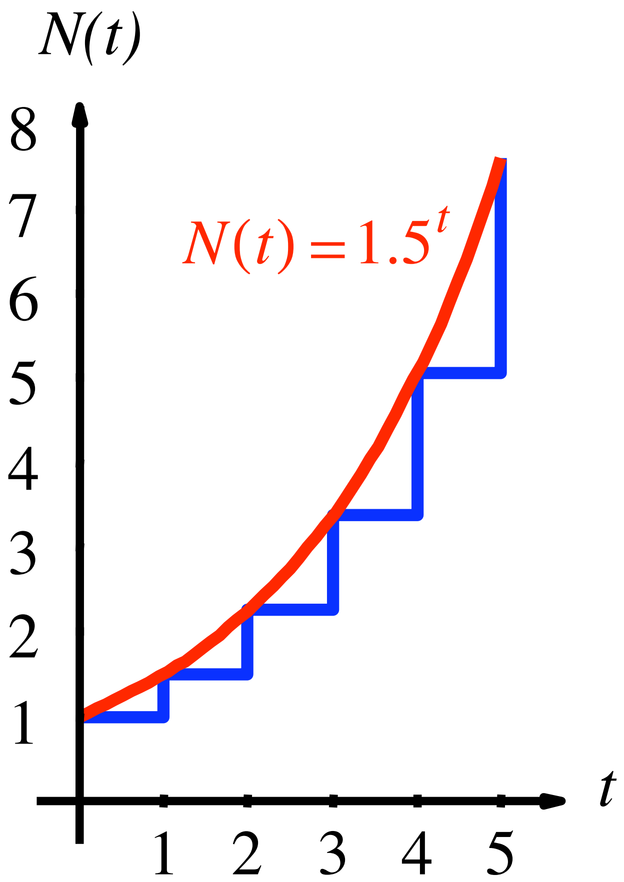
$\Delta N = 0.5\ N(t)$

$N(t+1) = 1.5\ N(t)$

$$N(t) = 1.5^t$$

$$N'(t) = \underset{\substack{\uparrow \\ N(t)}}{1.5^t}\ \ln\underset{\substack{\uparrow \\ 0.4055}}{(1.5)} = 0.4055 \cdot N(t)$$

$$N'(t) = 0.4055 \cdot N(t)$$



Differenzialgleichung

$$N'(t) = 0.4055 \cdot N(t)$$

Exponentialfunktion

$$N(t) = cb^t$$

Exponentialfunktion

$$N(t) = cb^t$$

$$N'(t) = \underbrace{cb^t}_{\uparrow\, N(t)} \underbrace{\ln(b)}_{\uparrow\, a}$$

Exponentialfunktion

$$N(t) = cb^t$$

$$N'(t) = \underbrace{cb^t}_{N(t)} \underbrace{\ln(b)}_{a}$$

$$N'(t) = a \cdot N(t)$$

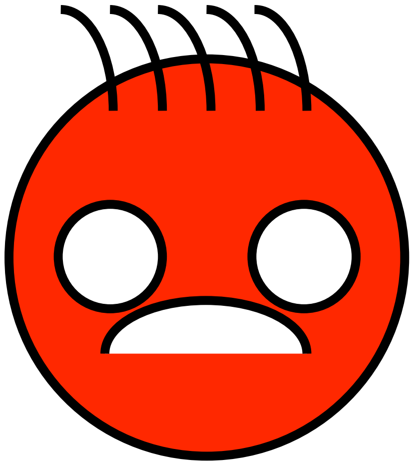
$$y'(t) = ay(t)$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{momentane} \\ \text{Zuwachs-} \\ \text{geschwindigkeit}}}{y'(t)} \quad = \quad \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Proportionalitäts-} \\ \text{faktor}}}{a} \quad \cdot \quad \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Bestand}}}{y(t)}$$

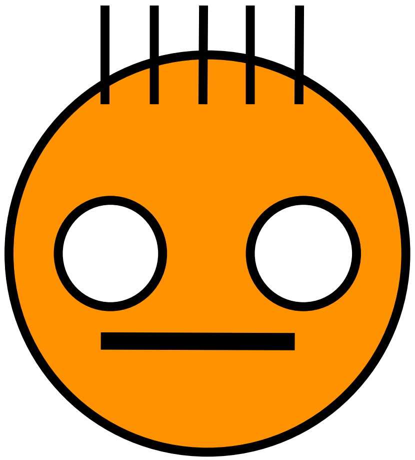
$$y'(t) = ay(t)$$

Differenzialgleichung

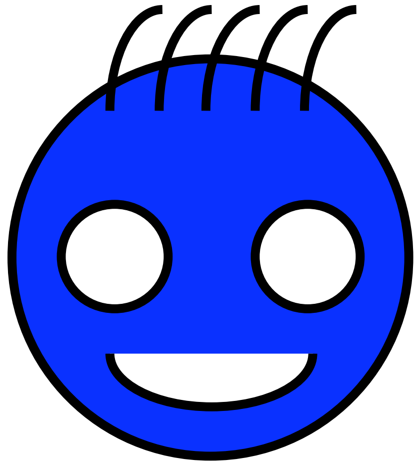
Funktion unbekannt



Ableiten ist
ein Handwerk



Integrieren ist
eine Kunst



Lösen von
Differenzial-
gleichungen
ist Glückssache

Beispiel: $\quad y'(t) = y(t)$

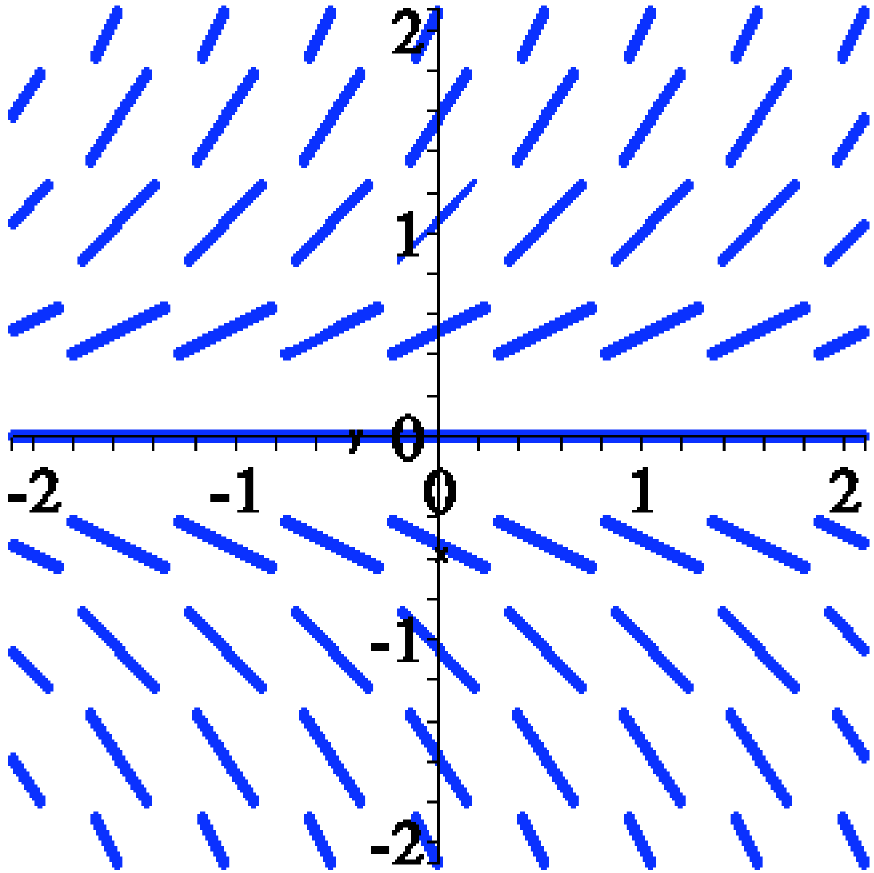
Beispiel: $y'(t) = y(t)$

$y(t) = \mathrm{e}^t$ ist eine Lösung. Einzige Lösung?

Tangentensteigung, Richtungsfeld

$y' = y$

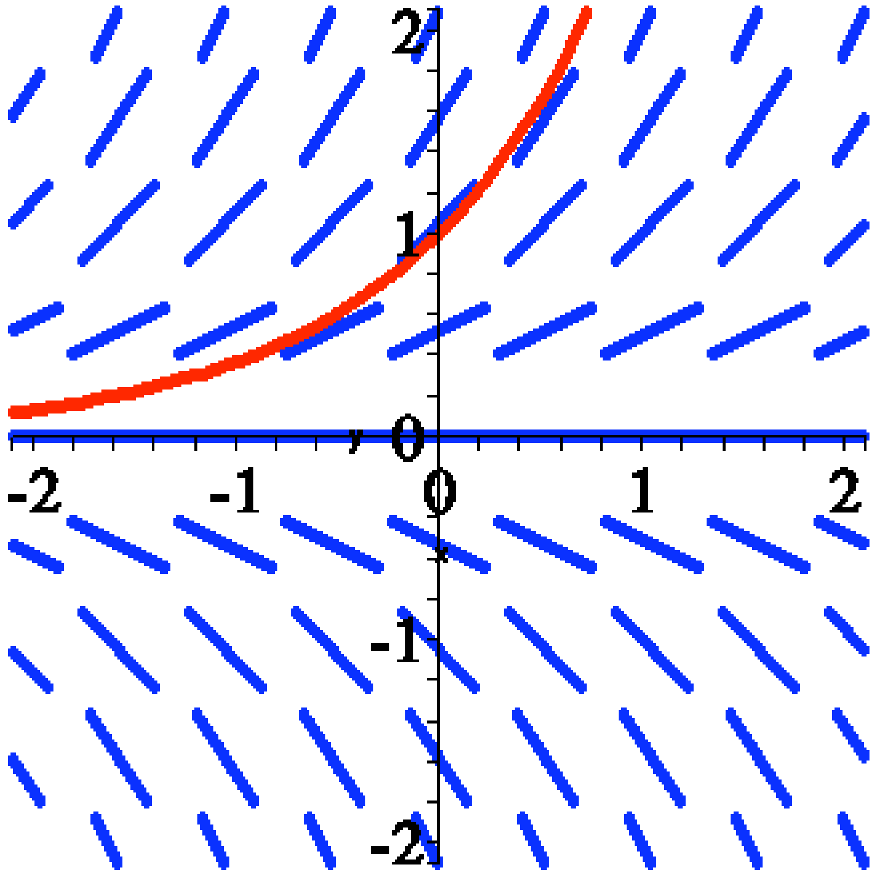
Als Steigung interpretieren



Tangentensteigung, Richtungsfeld

$y' = y$

Als Steigung interpretieren



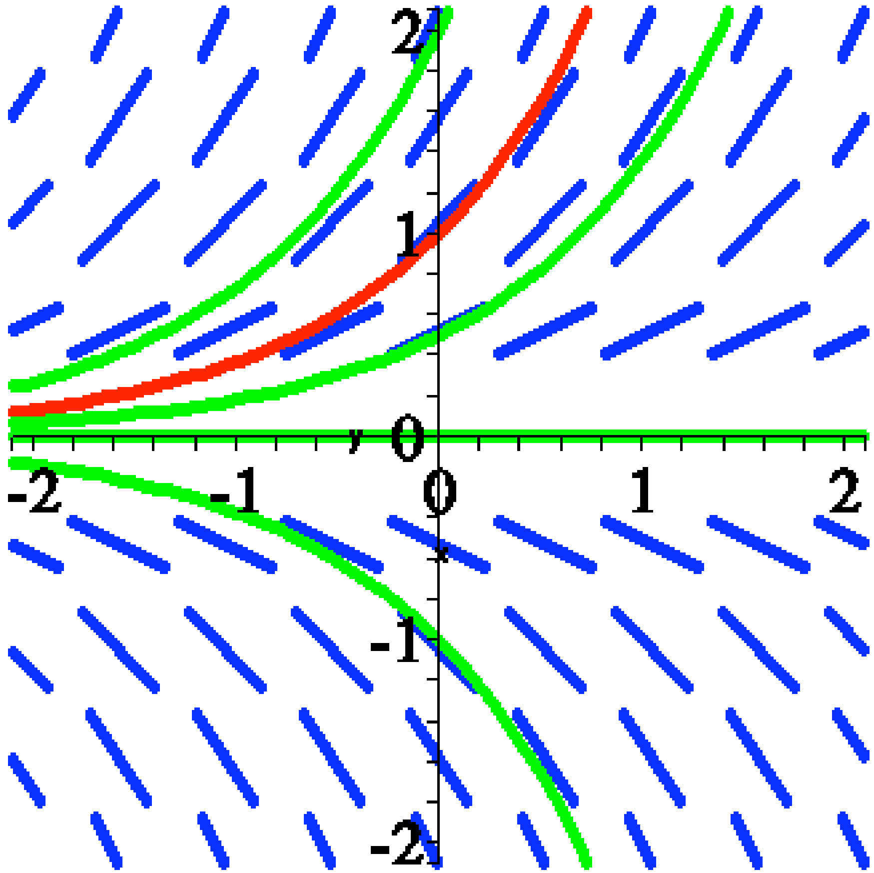
Mit Lösungskurve

$y = \mathrm{e}^t$

Tangentensteigung, Richtungsfeld

$y' = y$

Als Steigung interpretieren



Mit Lösungskurve $y = e^t$

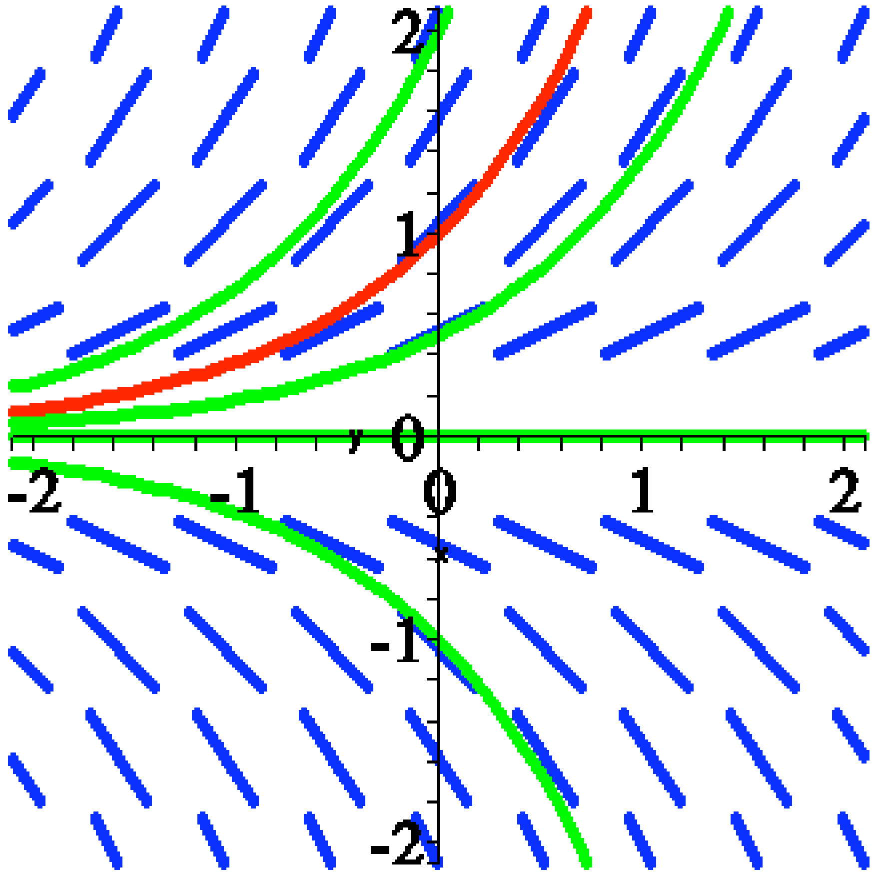
Weitere Lösungskurven

Zusammenhang zwischen den drei "oberen" Lösungskurven?

Tangentensteigung, Richtungsfeld

$y' = y$

Als Steigung interpretieren



Mit Lösungskurve $y = e^t$

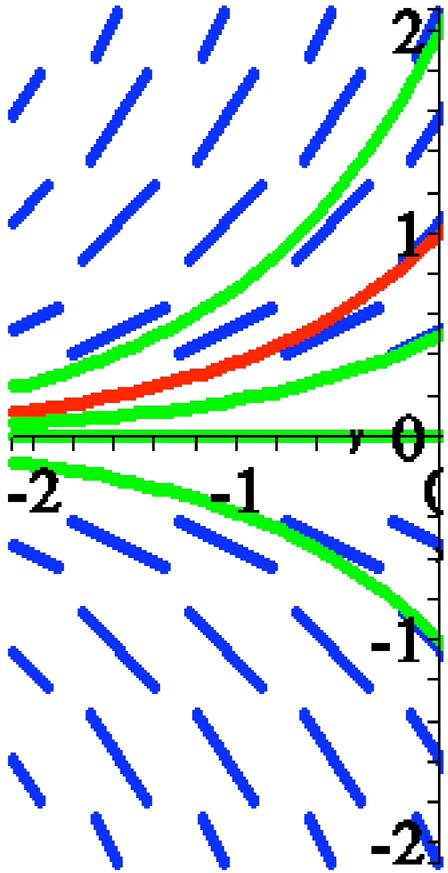
Weitere Lösungskurven

Zusammenhang zwischen den drei "oberen" Lösungskurven?

Tangentensteigung, Richtungsfeld

$y' = y$

Als Steigung interpretieren



Mit Lösungskurve

$y = \mathrm{e}^t$

Weitere Lösungskurven

$$y'(t) = y(t)$$

Allgemeine Lösung:

$$y(t) = A \cdot \mathrm{e}^{t}$$

Konstante,
wird durch
Anfangs-
bedingung
festgelegt

CAS

Differenzialgleichung

```
> diff(y(t),t) = y(t);
```

$$\frac{\partial}{\partial t}\, y(t) = y(t)$$

CAS

Differenzialgleichung

```
> diff(y(t),t) = y(t);
```

$$\frac{\partial}{\partial t}\,y(t)=y(t)$$

Allgemeine Lösung

```
> dsolve(diff(y(t),t) = y(t), y(t));
```

$$y(t)=e^{t}\,\_C1$$

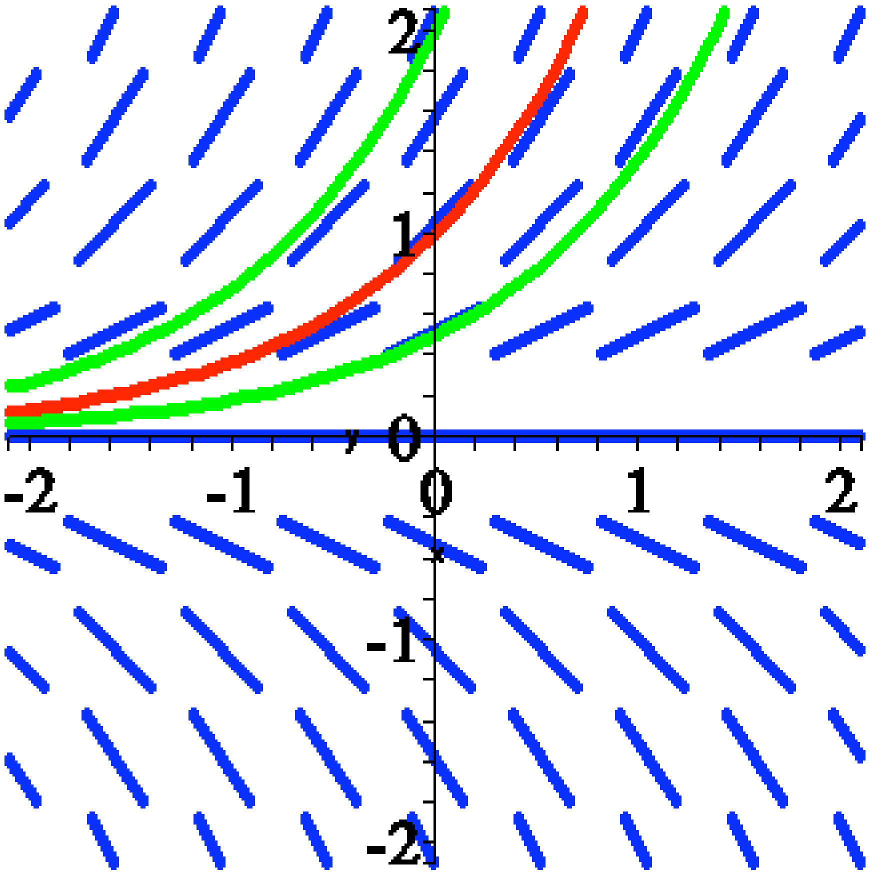
Mal eine Konstante

$y'(t) = y(t)$ Allgemeine Lösung: $y(t) = Ae^t$

$$Ae^t = e^{\ln(A)} \cdot e^t = e^{t+\ln(A)}$$

$$\begin{array}{ccc} Ae^t & = & e^{t+\ln(A)} \\ \uparrow & & \uparrow \end{array}$$

Streckung in y-Richtung mit Faktor A	Verschiebung in x-Richtung um $-\ln(A)$



$$A\mathrm{e}^{t} \quad = \quad \mathrm{e}^{t+\ln(A)}$$

$\uparrow$ Streckung in y-Richtung mit Faktor A

$\uparrow$ Verschiebung in x-Richtung um $-\ln(A)$

Anfangsbedingung (Randbedingung)

$$y'(t) = y(t) \quad \Rightarrow \quad y(t) = A\mathrm{e}^{t}$$

Wie groß ist A?

Anfangsbedingung (Randbedingung)

$$y'(t) = y(t) \quad \Rightarrow \quad y(t) = A\mathrm{e}^{t}$$

Anfangsbedingung (Beispiel): $\quad y(0) = \frac{1}{2}$

Anfangsbedingung (Randbedingung)

$$y'(t) = y(t) \quad \Rightarrow \quad y(t) = Ae^{t}$$

Anfangsbedingung (Beispiel): $\quad y(0) = \frac{1}{2}$

$$y(0) = Ae^{0} = A \overset{\substack{\text{soll!} \\ \downarrow}}{=} \frac{1}{2}$$

Anfangsbedingung (Randbedingung)

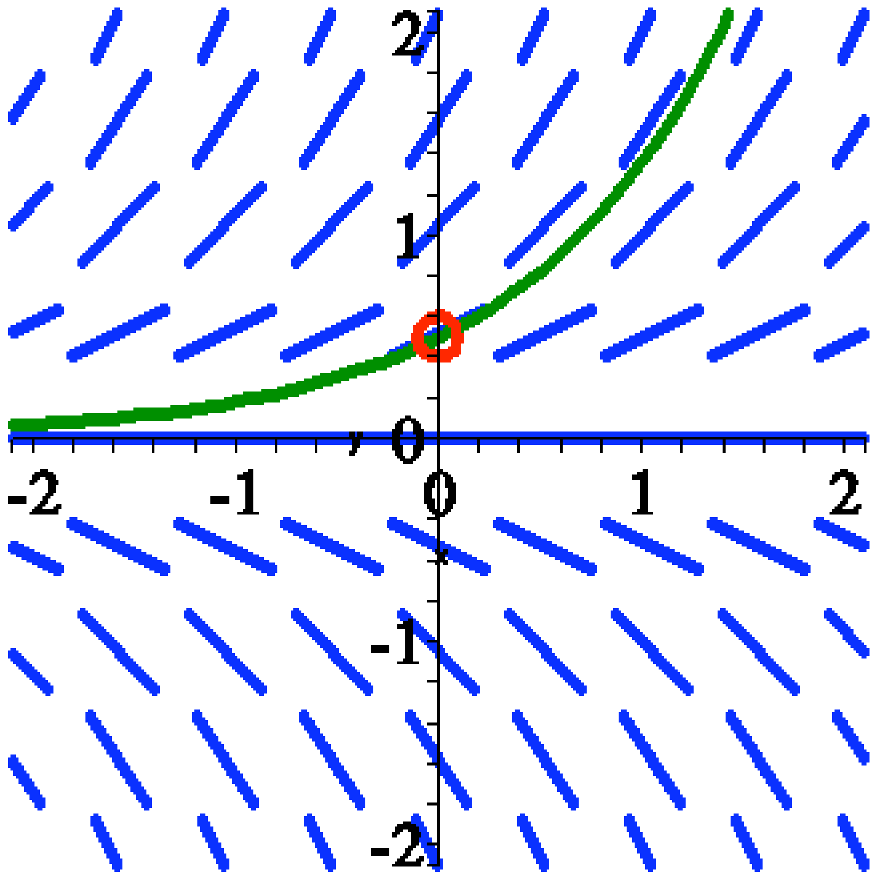
$$y'(t) = y(t) \quad \Rightarrow \quad y(t) = Ae^t$$

Anfangsbedingung (Beispiel): $\quad y(0) = \frac{1}{2}$

$$y(0) = Ae^0 = A \overset{\substack{\text{soll!} \\ \downarrow}}{=} \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad A = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad y(t) = \frac{1}{2}e^t$$

Anfangsbedingung (Randbedingung)

$$y'(t) = y(t), \quad y(0) = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad y(t) = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{t}$$



Anfangsbedingung (Randbedingung)

$$y'(t) = y(t), \quad y(0) = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad y(t) = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{t}$$

CAS Differenzialgleichung mit Anfangsbedingung

```
> diff(y(t),t) = y(t), y(0) = 1/2;
```

$$\frac{\partial}{\partial t}\,\mathrm{y}(t) = \mathrm{y}(t), \mathrm{y}(0) = \frac{1}{2}$$

Lösung

```
> dsolve({diff(y(t),t) = y(t), y(0) = 1/2}, y(t));
```

$$\mathrm{y}(t) = \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{t}$$

Andere Anfangsbedingung

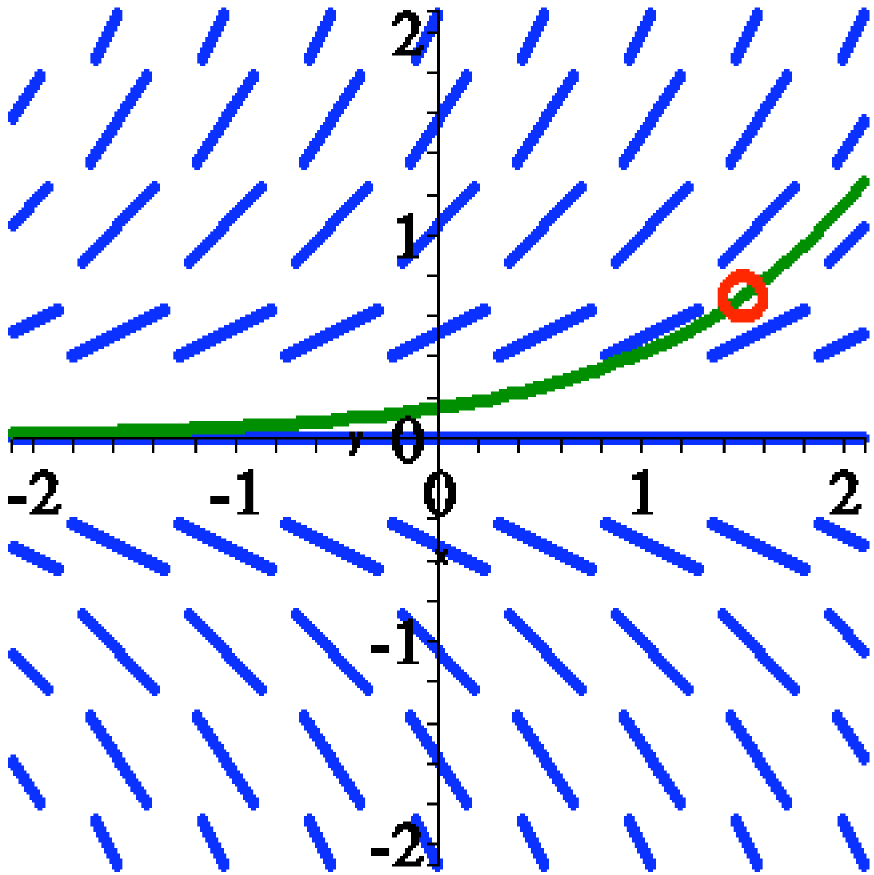
$$y'(t) = y(t) \quad \Rightarrow \quad y(t) = Ae^t$$

Andere "Anfangs"-Bedingung: $\quad y(1.5) = 0.7$

$$y(1.5) = Ae^{1.5} \overset{!}{=} 0.7 \quad \Rightarrow \quad A = 0.7 \cdot \mathrm{e}^{-1.5} \approx 0.15619$$

Andere Anfangsbedingung

$$y'(t) = y(t), \quad y(1.5) = 0.7 \quad \Rightarrow \quad y(t) \approx 0.15619e^{t}$$



Andere Anfangsbedingung

$$y'(t) = y(t), \quad y(1.5) = 0.7 \quad \Rightarrow \quad y(t) \approx 0.15619e^t$$

CAS Andere Anfangsbedingung

> diff(y(t),t) = y(t), y(1.5) = 0.7;

$$\frac{\partial}{\partial t} y(t) = y(t), y(1.5) = .7$$

Lösung

> dsolve({diff(y(t),t) = y(t), y(1.5) = 0.7}, y(t));

$$y(t) = .1561911121\, e^t$$

Sonderfall: Integration

$$y'(x) = 6x^2 - 12x + 3$$

Sonderfall: Integration

$$y'(x) = 6x^2 - 12x + 3$$

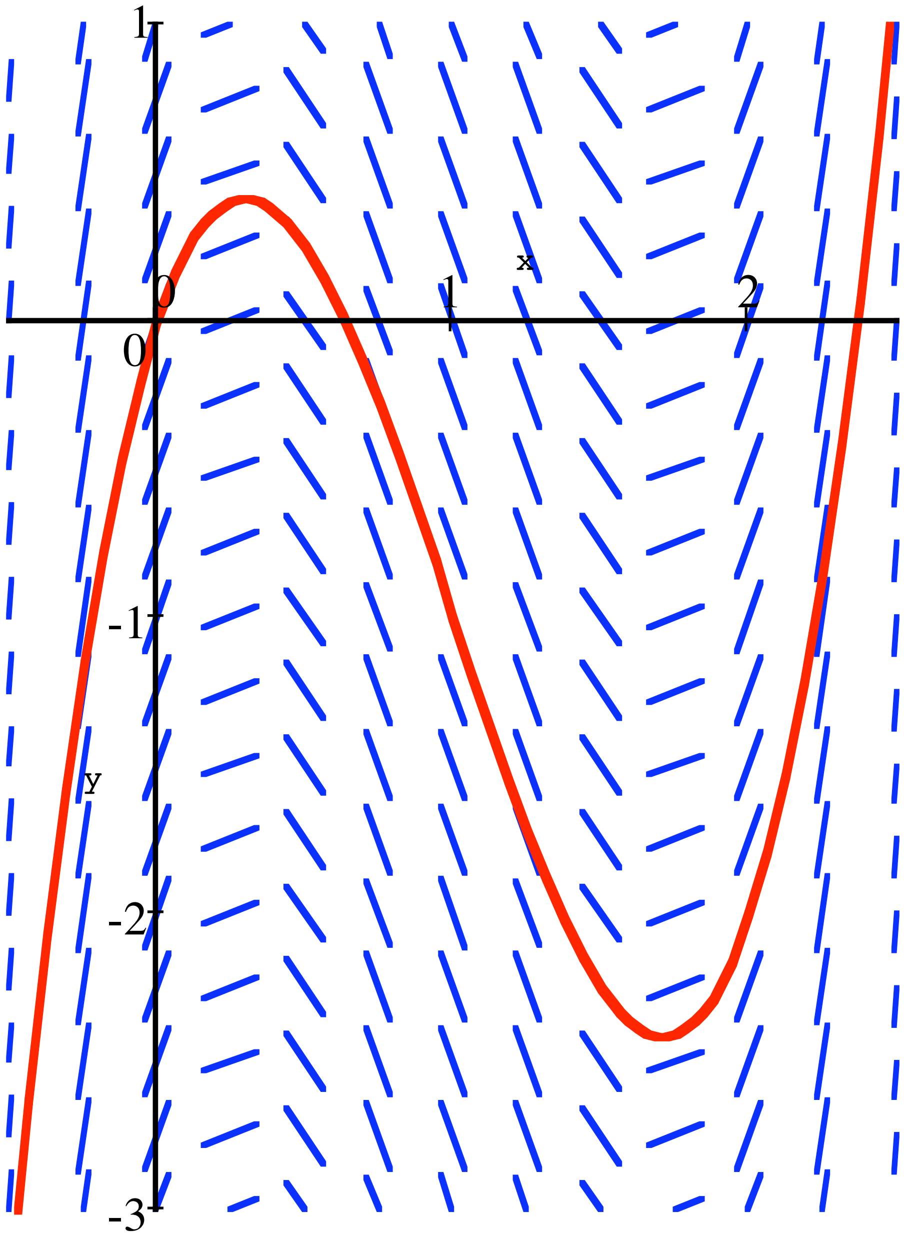
Rechts kommt $y(t)$ nicht vor; reines Integrationsproblem

Sonderfall: Integration

$$y'(x) = 6x^2 - 12x + 3$$

Rechts kommt $y(t)$ nicht vor; reines Integrationsproblem

$$y(x) = \int \left(6x^2 - 12x + 3\right) \mathrm{d}x = 2x^3 - 6x^2 + 3x + C$$



Sonderfall: Integration

$$y'(x) = 6x^2 - 12x + 3$$

$$\Downarrow$$

$$y(x) = \int \left(6x^2 - 12x + 3\right) \mathrm{d}x$$
$$= 2x^3 - 6x^2 + 3x + C$$

Kurve für $C = 0$

Differenzialgleichungen *erster Ordnung*

$$y' = 0$$

$$y' = ay$$

$$y' = ay + b$$

$$y' = a(A - y)(B - y)$$

$$y' = f(x)$$

$$y' = p(x)y + q(x)$$

Nur erste Ableitung

Differenzialgleichungen *zweiter Ordnung*

$$y'' = 0$$

$$y'' + ay = 0$$

$$y'' + by' + cy = \cos(x)$$

Die höchste vorkommende Ableitung gibt die *Ordnung* an.

Differenzialgleichungen *erster Ordnung*

$$y' = 0 \qquad \Rightarrow y(t) = C$$

$$y' = ay$$

$$y' = ay + b$$

$$y' = a(A - y)(B - y)$$

$$y' = f(x)$$

$$y' = p(x)y + q(x)$$

Nur erste Ableitung

Differenzialgleichungen *erster Ordnung*

$$y' = 0 \qquad \Rightarrow y(t) = C$$

$$y' = ay \qquad \Rightarrow y(t) = ?$$

$$y' = ay + b$$

$$y' = a(A - y)(B - y)$$

$$y' = f(x)$$

$$y' = p(x)y + q(x)$$

Nur erste Ableitung

Erinnerung: $y'(t) = y(t) \quad \Rightarrow \quad y(t) = A\mathrm{e}^{t}$

Erinnerung: $y'(t) = y(t) \quad \Rightarrow \quad y(t) = Ae^{t}$

Neu: $y'(x) = a \cdot y(x)$

Zusatzfaktor

Erinnerung: $y'(t) = y(t) \quad \Rightarrow \quad y(t) = Ae^{t}$

Neu: $y'(x) = a \cdot y(x)$

Lösung: $\boxed{y(x) = Ae^{ax}}$

Erinnerung: $y'(t) = y(t) \quad \Rightarrow \quad y(t) = Ae^t$

Neu: $y'(x) = a \cdot y(x)$

Lösung: $\boxed{y(x) = Ae^{ax}}$

Kontrolle: $\left(Ae^{ax}\right)' = Ae^{ax} \cdot a = a\underbrace{\left(Ae^{ax}\right)}_{y(x)}$

innere Ableitung

$$y'(x) = a \cdot y(x) + \underbrace{b}_{\text{Zusätzlicher Summand}}$$

$$y'(x) = a \cdot y(x) + b$$

Schreibweise von Leibniz: $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = a \cdot y + b$

$$y'(x) = a \cdot y(x) + b$$

Schreibweise von Leibniz: $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = a \cdot y + b$

Separation der Variablen: $\dfrac{\mathrm{d}y}{ay+b} = \mathrm{d}x$

alle y links / alle x rechts

$$y'(x) = a \cdot y(x) + b$$

Schreibweise von Leibniz: $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = a \cdot y + b$

Separation der Variablen: $\frac{\mathrm{d}y}{ay+b} = \mathrm{d}x$

Integration: $\int \frac{\mathrm{d}y}{ay+b} = \int \mathrm{d}x$

$$y'(x) = a \cdot y(x) + b$$

Schreibweise von Leibniz: $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = a \cdot y + b$

Separation der Variablen: $\frac{\mathrm{d}y}{ay+b} = \mathrm{d}x$

Integration: $\int \frac{\mathrm{d}y}{ay+b} = \int \mathrm{d}x$

Rechts: $\int \mathrm{d}x = x + C_1$

Nebenrechnung:

Links: $\int \frac{\mathrm{d}y}{ay+b} = ?$

Nebenrechnung:

Links: $\int \frac{\mathrm{d}y}{ay+b} = ?$

Substitution:

$u = ay + b$

Nebenrechnung:

Links: $\int \frac{\mathrm{d}y}{ay+b} = ?$

Substitution:

$$u = ay + b \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y} = a \quad \Rightarrow \quad \mathrm{d}y = \frac{\mathrm{d}u}{a}$$

Nebenrechnung:

Links: $\int \frac{\mathrm{d}y}{ay+b} = ?$

Substitution:

$$u = ay + b \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y} = a \quad \Rightarrow \quad \mathrm{d}y = \frac{\mathrm{d}u}{a}$$

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{ay+b} = \frac{1}{a} \int \frac{\mathrm{d}u}{u}$$

Nebenrechnung:

Links: $\int \frac{\mathrm{d}y}{ay+b} = ?$

Substitution:

$$u = ay + b \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y} = a \quad \Rightarrow \quad \mathrm{d}y = \frac{\mathrm{d}u}{a}$$

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{ay+b} = \frac{1}{a}\int \frac{\mathrm{d}u}{u} = \frac{1}{a}\ln\left(|u|\right) + C_2$$

Nebenrechnung:

Links: $\int \frac{\mathrm{d}y}{ay+b} = ?$

Substitution:

$$u = ay + b \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y} = a \quad \Rightarrow \quad \mathrm{d}y = \frac{\mathrm{d}u}{a}$$

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{ay+b} = \frac{1}{a}\int \frac{\mathrm{d}u}{u} = \frac{1}{a}\ln\left(|u|\right) + C_2 = \frac{1}{a}\ln\left(|ay+b|\right) + C_2$$

$$y'(x) = a \cdot y(x) + b$$

Schreibweise von Leibniz: $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = a \cdot y + b$

Separation der Variablen: $\dfrac{\mathrm{d}y}{ay+b} = \mathrm{d}x$

Integration: $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}y}{ay+b} = \int \mathrm{d}x$

Rechts: $\displaystyle\int \mathrm{d}x = x + C_1$

Links: $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}y}{ay+b} = \frac{1}{a}\ln\left(\left|ay+b\right|\right) + C_2$

$$y'(x) = a \cdot y(x) + b$$

Schreibweise von Leibniz: $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = a \cdot y + b$

Separation der Variablen: $\frac{\mathrm{d}y}{ay+b} = \mathrm{d}x$

Integration: $\int \frac{\mathrm{d}y}{ay+b} = \int \mathrm{d}x$

Rechts: $\int \mathrm{d}x = x + C_1$

Links: $\int \frac{\mathrm{d}y}{ay+b} = \frac{1}{a} \ln\left(|ay+b|\right) + C_2$

Vergleich: $\ln\left(|ay+b|\right) = ax + C_3$

Eine Integrationskonstante ist genug.

Vergleich: $\ln\left(\left|ay+b\right|\right)=ax+C_3$

Vergleich: $\ln(|ay+b|) = ax + C_3$

Gesucht ist y :

Vergleich: $\ln\left(\left|ay+b\right|\right) = ax + C_3$

Gesucht ist y:

$$\left|ay+b\right| = \mathrm{e}^{ax+C_3} = C_4 \mathrm{e}^{ax}$$

Vergleich: $\ln(|ay+b|) = ax + C_3$

Gesucht ist y:

$$|ay+b| = \mathrm{e}^{ax+C_3} = C_4\mathrm{e}^{ax}$$

$$ay+b = C_5\mathrm{e}^{ax}$$

Vergleich: $\ln\left(\left|ay+b\right|\right) = ax + C_3$

Gesucht ist y :

$$\left|ay+b\right| = \mathrm{e}^{ax+C_3} = C_4\mathrm{e}^{ax}$$

$$ay+b = C_5\mathrm{e}^{ax}$$

$$ay = C_5\mathrm{e}^{ax} - b$$

Vergleich: $\ln\left(\left|ay+b\right|\right)=ax+C_3$

Gesucht ist y :

$$\left|ay+b\right|=\mathrm{e}^{ax+C_3}=C_4\mathrm{e}^{ax}$$

$$ay+b=C_5\mathrm{e}^{ax}$$

$$ay=C_5\mathrm{e}^{ax}-b$$

$$y=A\mathrm{e}^{ax}-\frac{b}{a}$$

$$y' = ay + b$$

Lösung: $y = A\mathrm{e}^{ax} - \dfrac{b}{a}$

Beispiel: $y' = 2y - 3$

$y' = ay + b$

Lösung: $y = A\mathrm{e}^{ax} - \frac{b}{a}$

Beispiel: $y' = 2y - 3$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 2y - 3$$

$y' = ay + b$

Lösung: $y = A\mathrm{e}^{ax} - \frac{b}{a}$

Beispiel: $y' = 2y - 3$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 2y - 3$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{2y-3} = \mathrm{d}x$$

Separation
der Variablen

$y' = ay + b$

Lösung: $y = A\mathrm{e}^{ax} - \frac{b}{a}$

Beispiel: $y' = 2y - 3$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 2y - 3$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{2y-3} = \mathrm{d}x$$

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{2y-3} = \int \mathrm{d}x$$

$$y' = ay + b$$

Lösung: $y = A\mathrm{e}^{ax} - \frac{b}{a}$

Beispiel: $y' = 2y - 3$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 2y - 3$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{2y-3} = \mathrm{d}x$$

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{2y-3} = \int \mathrm{d}x$$

$$\frac{1}{2}\ln\left(|2y-3|\right) = x + C_1$$

$$y' = ay + b$$

Lösung: $y = A\mathrm{e}^{ax} - \frac{b}{a}$

Beispiel: $y' = 2y - 3$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 2y - 3$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{2y-3} = \mathrm{d}x$$

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{2y-3} = \int \mathrm{d}x$$

$$\frac{1}{2}\ln\left(|2y - 3|\right) = x + C_1$$

$$\ln\left(|2y - 3|\right) = 2x + C_2$$

$$y' = ay + b$$

Lösung: $y = A\mathrm{e}^{ax} - \frac{b}{a}$

Beispiel: $y' = 2y - 3$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 2y - 3$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{2y-3} = \mathrm{d}x$$

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{2y-3} = \int \mathrm{d}x$$

$$\frac{1}{2}\ln\left(|2y-3|\right) = x + C_1$$

$$\ln\left(|2y-3|\right) = 2x + C_2$$

$$2y - 3 = C_3 \mathrm{e}^{2x}$$

$$y' = ay + b$$

Lösung: $y = A\mathrm{e}^{ax} - \frac{b}{a}$

Beispiel: $y' = 2y - 3$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 2y - 3$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{2y-3} = \mathrm{d}x$$

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{2y-3} = \int \mathrm{d}x$$

$$\frac{1}{2}\ln\left(|2y-3|\right) = x + C_1$$

$$\ln\left(|2y-3|\right) = 2x + C_2$$

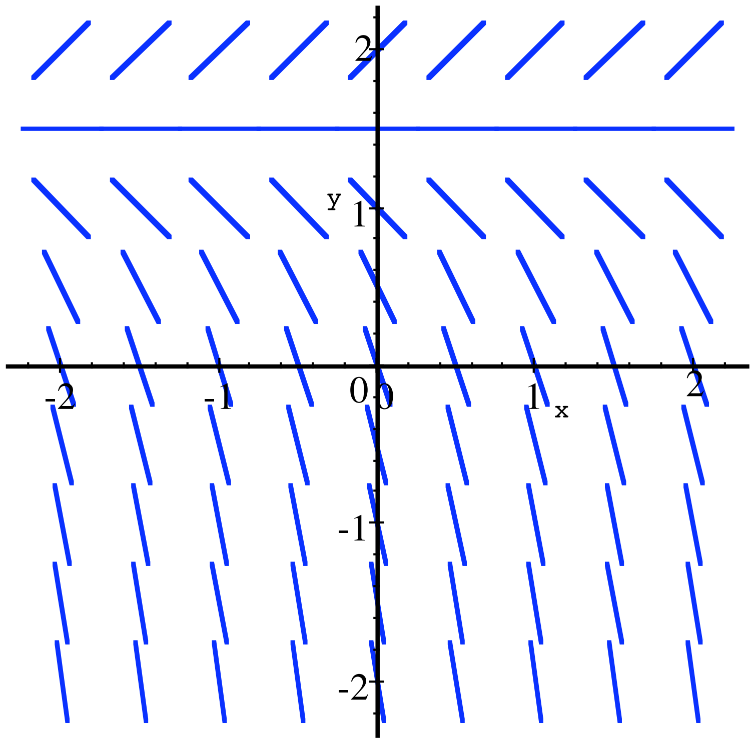
$$2y - 3 = C_3 \mathrm{e}^{2x}$$

$$y = A\mathrm{e}^{2x} + \frac{3}{2}$$

$$y' = ay + b$$

Lösung: $y = A\mathrm{e}^{ax} - \frac{b}{a}$

Beispiel: $y' = 2y - 3$



Warum diese waagerechte Linie?

Beispiel: $y' = 2y - 3 \quad \Rightarrow \quad y(x) = A\mathrm{e}^{2x} + \frac{3}{2}$

Beispiel: $y' = 2y - 3 \quad \Rightarrow \quad y(x) = Ae^{2x} + \frac{3}{2}$

Anfangsbedingung: $y(0) = 1$

Beispiel: $y' = 2y - 3 \quad \Rightarrow \quad y(x) = Ae^{2x} + \frac{3}{2}$

Anfangsbedingung: $y(0) = 1$

$$y(0) = Ae^{0} + \frac{3}{2} = A + \frac{3}{2} \overset{!}{=} 1$$

Beispiel: $y' = 2y - 3 \quad \Rightarrow \quad y(x) = A\mathrm{e}^{2x} + \frac{3}{2}$

Anfangsbedingung: $y(0) = 1$

$$y(0) = A\mathrm{e}^{0} + \frac{3}{2} = A + \frac{3}{2} \overset{!}{=} 1$$

$$A = -\frac{1}{2}$$

Beispiel: $y' = 2y - 3 \quad \Rightarrow \quad y(x) = Ae^{2x} + \frac{3}{2}$

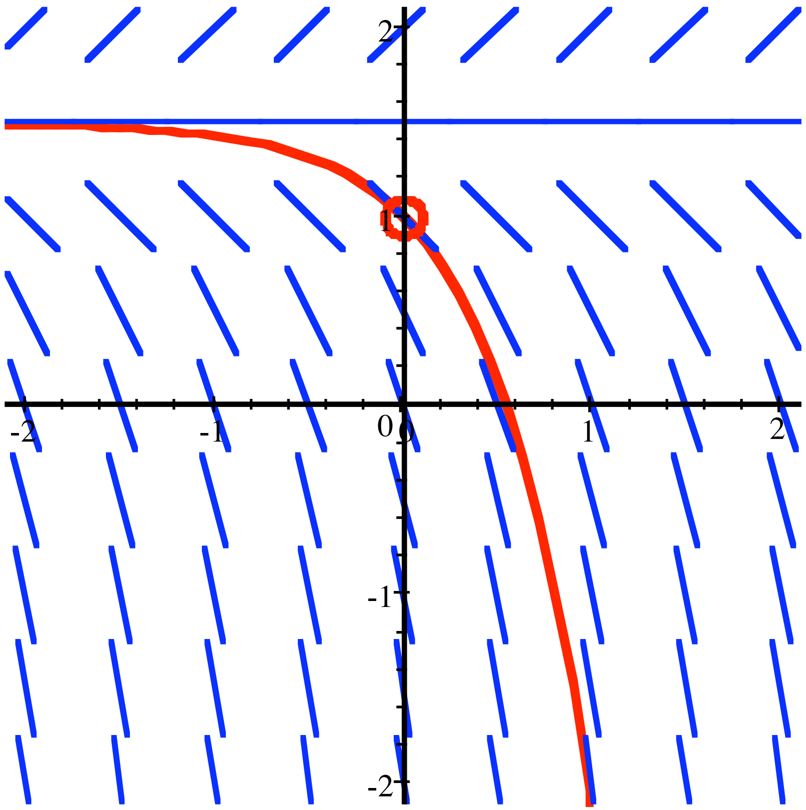
Anfangsbedingung: $y(0) = 1$

$$y(0) = Ae^0 + \frac{3}{2} = A + \frac{3}{2} \overset{!}{=} 1$$

$$A = -\frac{1}{2}$$

$$y(x) = -\frac{1}{2}e^{2x} + \frac{3}{2}$$

$$y' = 2y - 3, \quad y(0) = 1 \quad \Rightarrow \quad y(x) = -\frac{1}{2}e^{2x} + \frac{3}{2}$$



Beispiel: $y' = 2y - 3 \quad \Rightarrow \quad y(x) = Ae^{2x} + \frac{3}{2}$

Anfangsbedingung: $y(0) = 1.5$

Beispiel: $y' = 2y - 3 \quad \Rightarrow \quad y(x) = Ae^{2x} + \frac{3}{2}$

Anfangsbedingung: $y(0) = 1.5$

$$y(0) = Ae^{0} + \frac{3}{2} = A + \frac{3}{2} \overset{!}{=} 1.5$$

Beispiel: $y' = 2y - 3 \quad \Rightarrow \quad y(x) = A\mathrm{e}^{2x} + \frac{3}{2}$

Anfangsbedingung: $y(0) = 1.5$

$$y(0) = A\mathrm{e}^{0} + \frac{3}{2} = A + \frac{3}{2} \overset{!}{=} 1.5$$

$$A = 0$$

Beispiel: $y' = 2y - 3 \quad \Rightarrow \quad y(x) = Ae^{2x} + \frac{3}{2}$

Anfangsbedingung: $y(0) = 1.5$

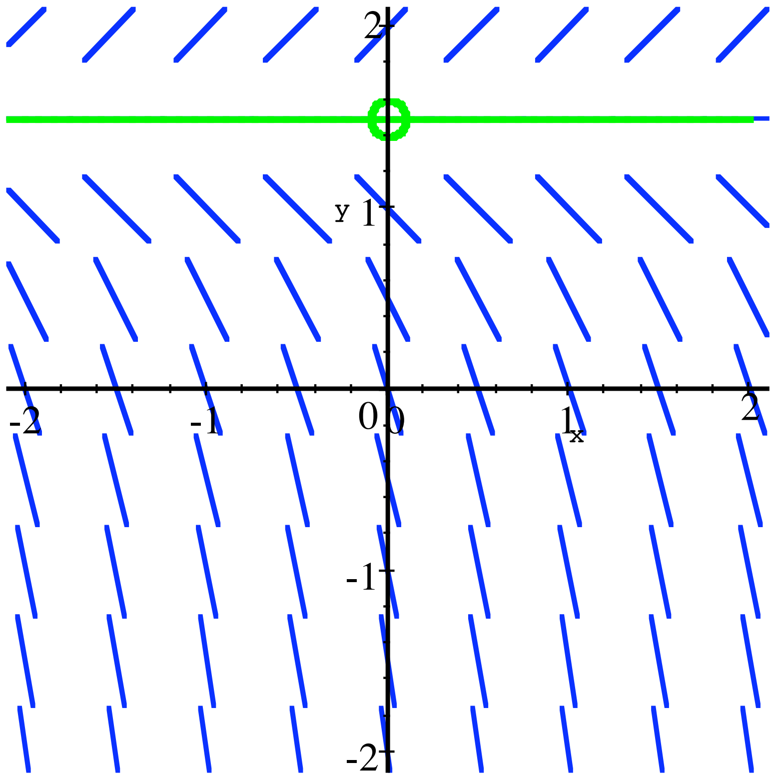
$$y(0) = Ae^{0} + \frac{3}{2} = A + \frac{3}{2} \overset{!}{=} 1.5$$

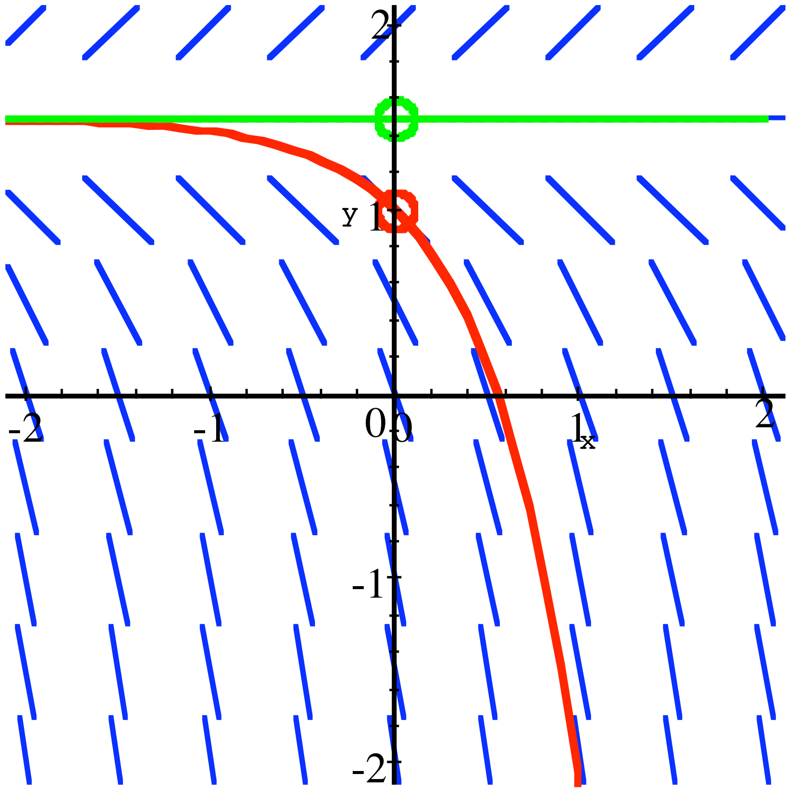
$$A = 0$$

$$y(x) = \frac{3}{2}$$

Ein bisschen viel Holz für eine Geige.

$$y' = 2y - 3, \quad y(0) = 1.5 \quad \Rightarrow \quad y(x) = \frac{3}{2}$$





2
y 1
-1
-2
-2
-1
0.0
1
x
2

Beschränkte Ressourcen

Es hät
solang's hät!

Wachstumsprognosen?

Modell: Zuwachs proportional zu noch vorhandenen Ressourcen

Modell: Zuwachs proportional zu noch vorhandenen Ressourcen

Total der Ressourcen
Kapazitätsgrenze

Zum Zeitpunkt *t*
verbrauchte Ressourcen

$$N'(t) = \lambda\left(B - N(t)\right)$$

Proportionalitätsfaktor

$$N'(t) = \lambda\left(B - N(t)\right)$$

Differenzialgleichung von der Form

$$y' = ay + b$$

Mit der Lösung: $y(x) = A\mathrm{e}^{ax} - \frac{b}{a}$

$$N'(t) = \lambda\bigl(B - N(t)\bigr)$$

Form: $y' = ay + b$, Lösung: $y(x) = A\mathrm{e}^{ax} - \frac{b}{a}$

$$a = -\lambda, \quad b = \lambda B$$

$$N(t) = A\mathrm{e}^{-\lambda t} + B$$

Total der Ressourcen
Kapazitätsgrenze

$$N'(t) = \lambda\left(B - N(t)\right) \quad \Rightarrow \quad \boxed{N(t) = A\mathrm{e}^{-\lambda t} + B}$$

Konstante, durch
Anfangsbedingung
gegeben

$$N'(t) = \lambda\big(B - N(t)\big) \quad \Rightarrow \quad N(t) = A\mathrm{e}^{-\lambda t} + B$$

$$\text{Beispiel}: \; B = 1000, \quad \lambda = 0.1$$

$$\text{Anfangsbedingung}: \; N(0) = 100$$

$$N'(t) = \lambda\big(B - N(t)\big) \quad \Rightarrow \quad N(t) = A\mathrm{e}^{-\lambda t} + B$$

$$\text{Beispiel}: \; B = 1000, \quad \lambda = 0.1$$

$$\text{Anfangsbedingung}: \; N(0) = 100$$

$$N(t) = A\mathrm{e}^{-0.1t} + 1000$$

$$N'(t) = \lambda\big(B - N(t)\big) \quad \Rightarrow \quad N(t) = A\mathrm{e}^{-\lambda t} + B$$

Beispiel: $B = 1000, \quad \lambda = 0.1$

Anfangsbedingung: $N(0) = 100$

$$N(t) = A\mathrm{e}^{-0.1t} + 1000$$

$$N(0) = A\mathrm{e}^{0} + 1000 \overset{!}{=} 100 \quad \Rightarrow \quad A = -900$$

$$N'(t) = \lambda\big(B - N(t)\big) \quad \Rightarrow \quad N(t) = A\mathrm{e}^{-\lambda t} + B$$

Beispiel: $B = 1000, \quad \lambda = 0.1$

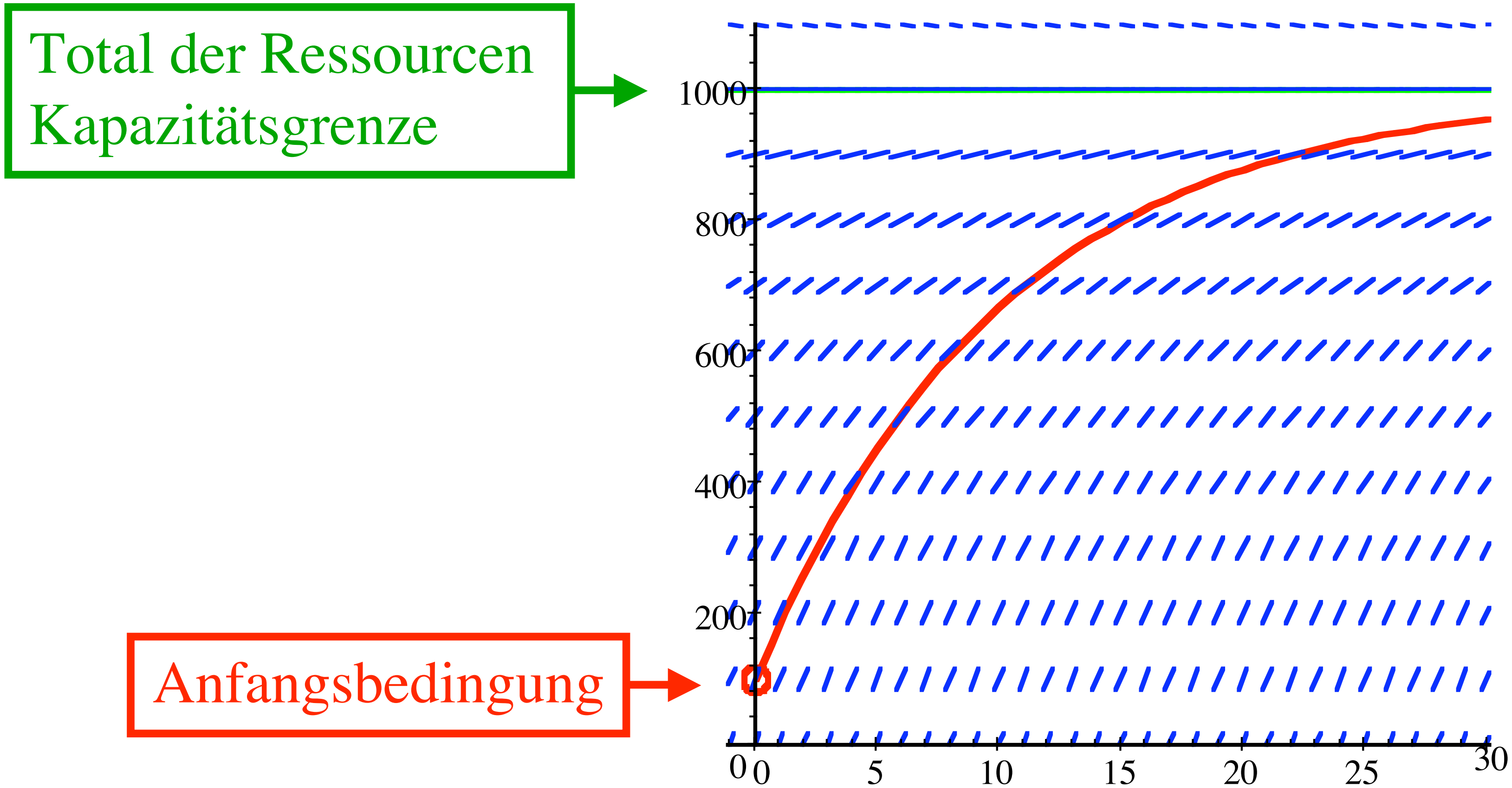
Anfangsbedingung: $N(0) = 100$

$$N(t) = A\mathrm{e}^{-0.1t} + 1000$$

$$N(0) = A\mathrm{e}^{0} + 1000 \overset{!}{=} 100 \quad \Rightarrow \quad A = -900$$

$$N(t) = -900\mathrm{e}^{-0.1t} + 1000$$

$$N(t) = -900e^{-0.1t} + 1000$$



Nochmals: Separation der Variablen

$$y'(x) = a \cdot y(x) + b$$

Schreibweise Leibniz: $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = a \cdot y + b$

Separation x und y: $\dfrac{\mathrm{d}y}{ay+b} = \mathrm{d}x$

Integration: $\underbrace{\int \dfrac{\mathrm{d}y}{ay+b}}_{\frac{1}{a}\ln(|ay+b|)+C_2} = \underbrace{\int \mathrm{d}x}_{x+C_1} \quad \Rightarrow \quad \ln(|ay+b|) = ax + C$

Nach y auflösen: $y = A\mathrm{e}^{ax} - \dfrac{b}{a}$

Eine Differenzialgleichung von der Form

$$y' = \frac{g(x)}{h(y)}$$

heißt *separierbar*.

Nochmals: Separation der Variablen

$$y'(x) = \frac{g(x)}{h(y)}$$

Nochmals: Separation der Variablen

$$y'(x) = \frac{g(x)}{h(y)}$$

Schreibweise Leibniz: $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{g(x)}{h(y)}$

Nochmals: Separation der Variablen

$$y'(x) = \frac{g(x)}{h(y)}$$

Schreibweise Leibniz: $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{g(x)}{h(y)}$

Separation x und y: $h(y)\mathrm{d}y = g(x)\mathrm{d}x$

Nochmals: Separation der Variablen

$$y'(x) = \frac{g(x)}{h(y)}$$

Schreibweise Leibniz: $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{g(x)}{h(y)}$

Separation x und y: $h(y)\mathrm{d}y = g(x)\mathrm{d}x$

Integration: $\int h(y)\mathrm{d}y = \int g(x)\mathrm{d}x$

Nochmals: Separation der Variablen

$$y'(x) = \frac{g(x)}{h(y)}$$

Schreibweise Leibniz: $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{g(x)}{h(y)}$

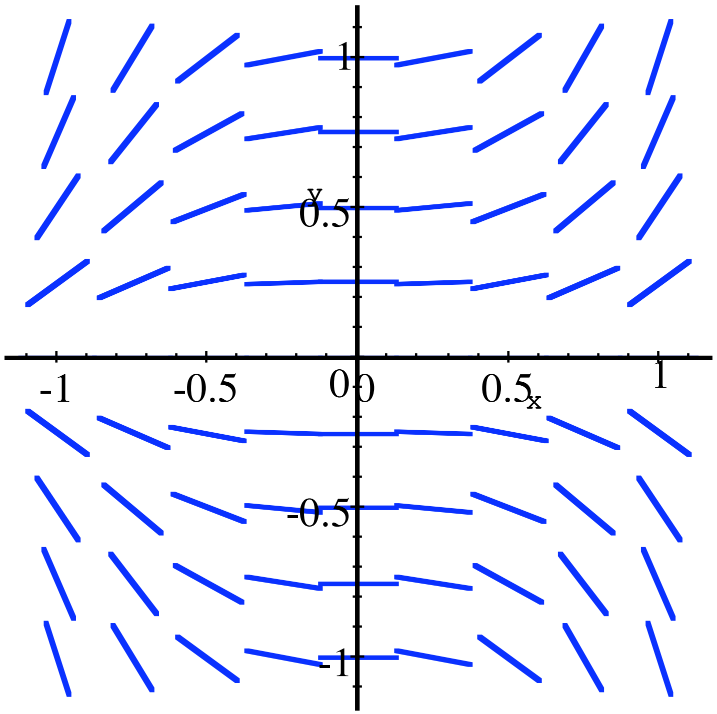
Separation x und y: $h(y)\,\mathrm{d}y = g(x)\,\mathrm{d}x$

Integration: $\int h(y)\,\mathrm{d}y = \int g(x)\,\mathrm{d}x$

Nach y auflösen: good luck!

Nochmals: Separation der Variablen

$$y'(x) = 3x^2 y$$



Nochmals: Separation der Variablen

$$y'(x) = 3x^2 y$$

Nochmals: Separation der Variablen

$$y'(x) = 3x^2 y$$

Schreibweise Leibniz: $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 3x^2 y$

Nochmals: Separation der Variablen

$$y'(x) = 3x^2 y$$

Schreibweise Leibniz: $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 3x^2 y$

Separation x und y: $\dfrac{\mathrm{d}y}{y} = 3x^2 \mathrm{d}x$

Nochmals: Separation der Variablen

$$y'(x) = 3x^2 y$$

Schreibweise Leibniz: $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 3x^2 y$

Separation x und y: $\dfrac{\mathrm{d}y}{y} = 3x^2 \mathrm{d}x$

Integration: $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}y}{y} = \int 3x^2 \mathrm{d}x$

Nochmals: Separation der Variablen

$$y'(x) = 3x^2 y$$

Schreibweise Leibniz: $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 3x^2 y$

Separation x und y: $\frac{\mathrm{d}y}{y} = 3x^2 \mathrm{d}x$

Integration: $\underbrace{\int \frac{\mathrm{d}y}{y}}_{\ln(|y|)} = \underbrace{\int 3x^2 \mathrm{d}x}_{x^3 + C}$

Nochmals: Separation der Variablen

$$y'(x) = 3x^2 y$$

Schreibweise Leibniz: $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 3x^2 y$

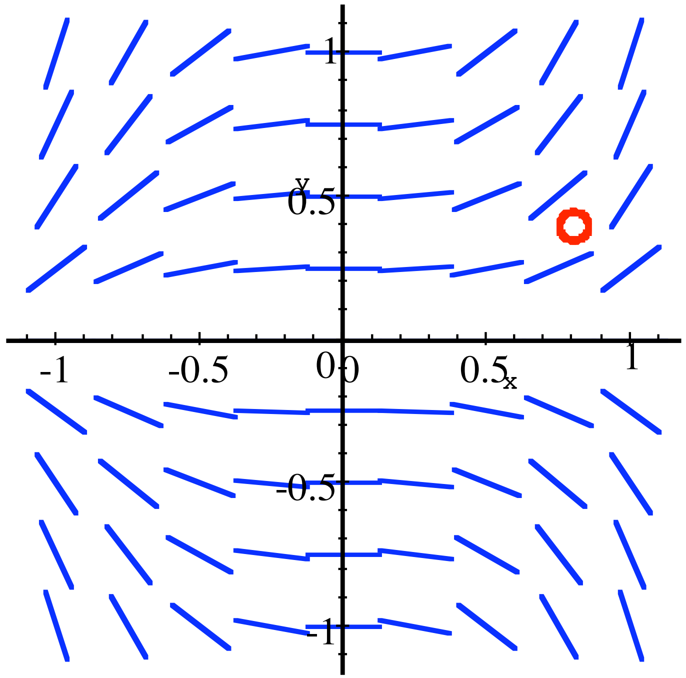
Separation x und y: $\frac{\mathrm{d}y}{y} = 3x^2 \mathrm{d}x$

Integration: $\underbrace{\int \frac{\mathrm{d}y}{y}}_{\ln(|y|)} = \underbrace{\int 3x^2 \mathrm{d}x}_{x^3 + C}$

Nach y auflösen: $y(x) = A\mathrm{e}^{x^3}$

$$y'(x) = 3x^2 y \quad \Rightarrow \quad y(x) = Ae^{x^3}$$

Anfangsbedingung: $y(0.8) = 0.4$



$$y'(x) = 3x^2 y \quad \Rightarrow \quad y(x) = A\mathrm{e}^{x^3}$$

Anfangsbedingung: $y(0.8) = 0.4$

$$y(0.8) = A\mathrm{e}^{0.8^3} \stackrel{!}{=} 0.4 \quad \Rightarrow \quad A = 0.4\mathrm{e}^{-\left(0.8^3\right)} \approx 0.2397$$

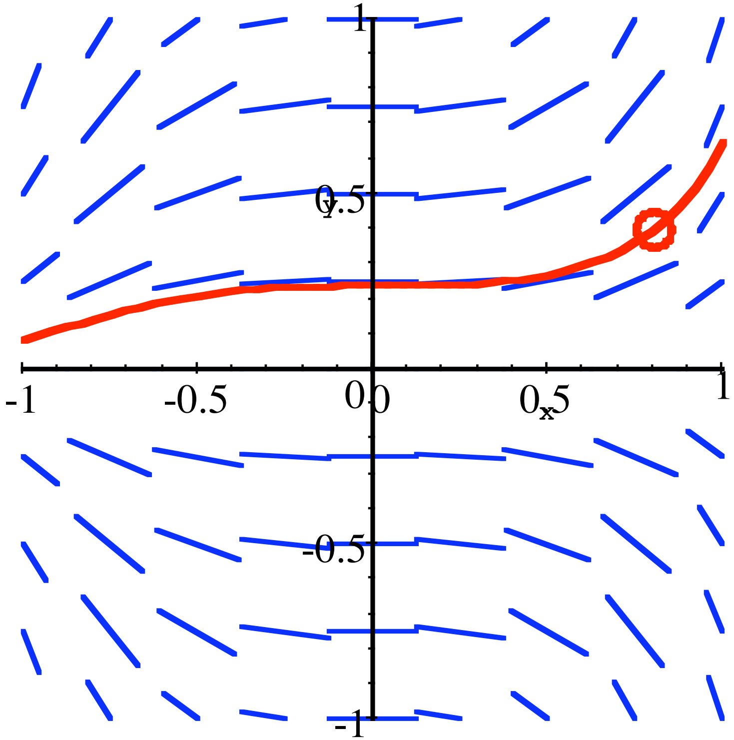
$$y'(x) = 3x^2 y \quad \Rightarrow \quad y(x) = A\mathrm{e}^{x^3}$$

Anfangsbedingung : $y(0.8) = 0.4$

$$y(0.8) = A\mathrm{e}^{0.8^3} \overset{!}{=} 0.4 \quad \Rightarrow \quad A = 0.4\mathrm{e}^{-\left(0.8^3\right)} \approx 0.2397$$

$$y(x) \approx 0.2397\mathrm{e}^{x^3}$$

$$y'(x) = 3x^2 y, \quad y(0.8) = 0.4 \quad \Rightarrow \quad y(x) \approx 0.2397\mathrm{e}^{x^3}$$



„hoch — hoch“

$a^{b^c} = a^{\left(b^c\right)}$ oben anfangen (so definiert)

„hoch — hoch“

$a^{b^c} = a^{\left(b^c\right)}$ oben anfangen (so definiert)

$2^{3^2} = 2^{\left(3^2\right)} = 2^9 = 512$

„hoch — hoch“

$$a^{b^c} = a^{\left(b^c\right)}$$ oben anfangen (so definiert)

$$2^{3^2} = 2^{\left(3^2\right)} = 2^9 = 512$$

$$\left(2^3\right)^2 = 8^2 = 64 \neq 512$$

Reihenfolge beim Potenzieren nicht vertauschbar!

„hoch — hoch“

$$a^{b^c} = a^{\left(b^c\right)} \text{ oben anfangen (so definiert)}$$

Falls doch, besser so:

$$\left(a^b\right)^c = a^{bc}$$

Logistisches Wachstum

Modellvorstellung, 1836,
Pierre François Verhulst
(1804 - 1849, Brüssel)

$N(t)$ mit *Kapazitätsgrenze K*

N klein: K relativ groß, annähernd *exponentielles* Wachstum

N in der Nähe von K: annähernd *Nullwachstum*

Logistisches Wachstum

Modellvorstellung, 1836,
Pierre François Verhulst
(1804 - 1849, Brüssel)

K

N klein: K relativ groß, annähernd *exponentielles* Wachstum

N in der Nähe von K: annähernd *Nullwachstum*

Logistisches Wachstum

Modellvorstellung, 1836,
Pierre François Verhulst
(1804 - 1849, Brüssel)

$N(t)$ mit *Kapazitätsgrenze K*

N klein: K relativ groß, annähernd *exponentielles* Wachstum

N in der Nähe von K: annähernd *Nullwachstum*

Beispiele zum logistischen Wachstum

Beispiele zum logistischen Wachstum

Wachstum der Kaninchenpopulation in Australien

Beispiele zum logistischen Wachstum

Wachstum der Kaninchenpopulation in Australien

Ausbreitung einer ansteckenden Krankheit

Beispiele zum logistischen Wachstum

Wachstum der Kaninchenpopulation in Australien

Ausbreitung einer ansteckenden Krankheit

Ausbreitung eines Gerüchtes

Beispiele zum logistischen Wachstum

Wachstum der Kaninchenpopulation in Australien

Ausbreitung einer ansteckenden Krankheit

Ausbreitung eines Gerüchtes

Politische Agitation einer entschlossenen Minderheit bei indifferenter Bevölkerung

Beispiele zum logistischen Wachstum

Wachstum der publizierten Todesmeldungen
bei einer Katastrophe

Wachstum der einbezahlten Summen
bei der Glückskette

Logistisches Wachstum

N(*t*) mit *Kapazitätsgrenze K*

N klein: *K* relativ groß, annähernd *exponentielles* Wachstum

N in der Nähe von *K*: annähernd *Nullwachstum*

$$\boxed{N'(t) = a\,N(t)\left(1 - \frac{N(t)}{K}\right)}$$

Proportionalitätsfaktor *a*

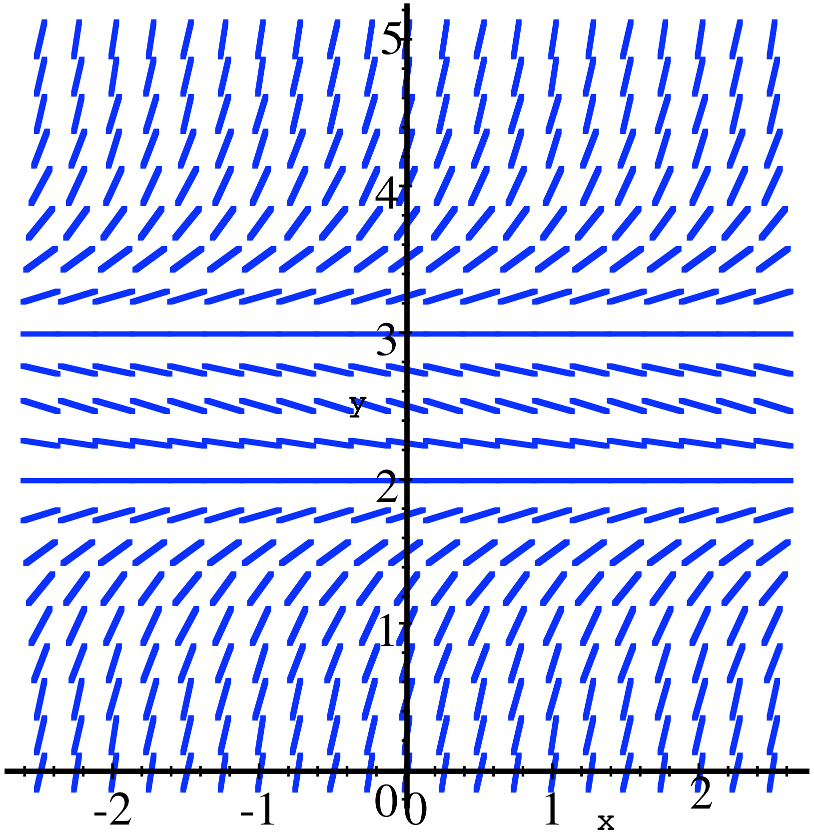
$$N'(t) = a\,N(t)\left(1 - \frac{N(t)}{K}\right)$$

Form:

$$y' = ay^2 + by + c$$

unterschiedliche Bedeutung von a

$$a_{\text{neu}} = -\frac{a_{\text{alt}}}{K}$$



$$y' = ay^2 + by + c$$

Beispiel :

$$y' = y^2 - 5y + 6$$

$$y' = (y-2)(y-3)$$

$$y' = y^2 - 5y + 6$$
$$y' = (y-2)(y-3)$$

$$y' = y^2 - 5y + 6$$
$$y' = (y-2)(y-3)$$

Schreibweise Leibniz: $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = (y-2)(y-3)$

$$y' = y^2 - 5y + 6$$
$$y' = (y-2)(y-3)$$

Schreibweise Leibniz: $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = (y-2)(y-3)$

Separation x und y: $\frac{\mathrm{d}y}{(y-2)(y-3)} = \mathrm{d}x$

$$y' = y^2 - 5y + 6$$
$$y' = (y-2)(y-3)$$

Schreibweise Leibniz: $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = (y-2)(y-3)$

Separation x und y: $\frac{\mathrm{d}y}{(y-2)(y-3)} = \mathrm{d}x$

Integration: $\underbrace{\int \frac{\mathrm{d}y}{(y-2)(y-3)}}_{\text{Partialbruchzerlegung}} = \underbrace{\int \mathrm{d}x}_{x+C_1}$

So richtig, auch nach neuem Duden

Partialbruchzerlegung

Ansatz $$\frac{1}{(y-2)(y-3)} = \frac{p}{y-2} + \frac{q}{y-3}$$

Partialbruchzerlegung

Ansatz $$\frac{1}{(y-2)(y-3)} = \frac{p}{y-2} + \frac{q}{y-3} \qquad \| \; (y-2)$$

Partialbruchzerlegung

Ansatz
$$\frac{1}{(y-2)(y-3)} = \frac{p}{y-2} + \frac{q}{y-3} \qquad \| \ (y-2)$$

$$\frac{1}{y-3} = p + \frac{q(y-2)}{y-3}$$

Partialbruchzerlegung

Ansatz $$\frac{1}{(y-2)(y-3)} = \frac{p}{y-2} + \frac{q}{y-3} \qquad \| \ (y-2)$$

$$\frac{1}{y-3} = p + \frac{q(y-2)}{y-3} \qquad \| \ y = 2 \text{ einsetzen}$$

Partialbruchzerlegung

Ansatz $$\frac{1}{(y-2)(y-3)} = \frac{p}{y-2} + \frac{q}{y-3} \qquad \| \; (y-2)$$

$$\frac{1}{y-3} = p + \frac{q(y-2)}{y-3} \qquad \| \; y = 2 \text{ einsetzen}$$

$$\frac{1}{2-3} = p + \frac{q(2-2)}{2-3} \quad \Rightarrow \quad p = -1$$

Partialbruchzerlegung

Ansatz $$\frac{1}{(y-2)(y-3)} = \frac{p}{y-2} + \frac{q}{y-3} \qquad \| \; (y-2)$$

$$\frac{1}{y-3} = p + \frac{q(y-2)}{y-3} \qquad \| \; y = 2 \text{ einsetzen}$$

$$\frac{1}{2-3} = p + \frac{q(2-2)}{2-3} \quad \Rightarrow \quad p = -1$$

Ansatz $$\frac{1}{(y-2)(y-3)} = \frac{p}{y-2} + \frac{q}{y-3} \qquad \| \; (y-3)$$

$$\frac{1}{y-2} = \frac{p(y-3)}{y-2} + q \qquad \| \; y = 3 \text{ einsetzen}$$

$$\frac{1}{3-2} = \frac{p(3-3)}{3-2} + q \quad \Rightarrow \quad q = 1$$

$$\underbrace{\int \frac{\mathrm{d}y}{(y-2)(y-3)}}_{\text{Partialbruchzerlegung}} = \int \frac{-\mathrm{d}y}{y-2} + \int \frac{\mathrm{d}y}{y-3}$$

$$\underbrace{\int \frac{\mathrm{d}y}{(y-2)(y-3)}}_{\text{Partialbruchzerlegung}} = \int \frac{-\mathrm{d}y}{y-2} + \int \frac{\mathrm{d}y}{y-3}$$

$$= -\ln\left(|y-2|\right) + \ln\left(|y-3|\right) + C_2$$

$$\underbrace{\int \frac{\mathrm{d}y}{(y-2)(y-3)}}_{\text{Partialbruchzerlegung}} = \int \frac{-\mathrm{d}y}{y-2} + \int \frac{\mathrm{d}y}{y-3}$$

$$= -\ln\left(|y-2|\right) + \ln\left(|y-3|\right) + C_2$$

$$= \ln\left(\left|\frac{y-3}{y-2}\right|\right) + C_2$$

Zurück zur Differenzialgleichung:

$$\underbrace{\int \frac{\mathrm{d}y}{(y-2)(y-3)}}_{\ln\left(\left|\frac{y-3}{y-2}\right|\right)+C_2} = \underbrace{\int \mathrm{d}x}_{x+C_1}$$

Zurück zur Differenzialgleichung:

$$\underbrace{\int \frac{\mathrm{d}y}{(y-2)(y-3)}}_{\ln\left(\left|\frac{y-3}{y-2}\right|\right)+C_2} = \underbrace{\int \mathrm{d}x}_{x+C_1}$$

$$\frac{y-3}{y-2} = A\mathrm{e}^x$$

Zurück zur Differenzialgleichung:

$$\underbrace{\int \frac{\mathrm{d}y}{(y-2)(y-3)}}_{\ln\left(\left|\frac{y-3}{y-2}\right|\right)+C_2} = \underbrace{\int \mathrm{d}x}_{x+C_1}$$

$$\frac{y-3}{y-2} = A\mathrm{e}^{x}$$

$$y-3 = A\mathrm{e}^{x}\left(y-2\right)$$

Zurück zur Differenzialgleichung:

$$\underbrace{\int \frac{\mathrm{d}y}{(y-2)(y-3)}}_{\ln\left(\left|\frac{y-3}{y-2}\right|\right)+C_2} = \underbrace{\int \mathrm{d}x}_{x+C_1}$$

$$\frac{y-3}{y-2} = A\mathrm{e}^x$$

$$y-3 = A\mathrm{e}^x\left(y-2\right)$$

$$y\left(1-A\mathrm{e}^x\right) = 3-2A\mathrm{e}^x$$

Zurück zur Differenzialgleichung:

$$\underbrace{\int \frac{\mathrm{d}y}{(y-2)(y-3)}}_{\ln\left(\left|\frac{y-3}{y-2}\right|\right)+C_2} = \underbrace{\int \mathrm{d}x}_{x+C_1}$$

$$\frac{y-3}{y-2} = A\mathrm{e}^x$$

$$y-3 = A\mathrm{e}^x\left(y-2\right)$$

$$y\left(1-A\mathrm{e}^x\right) = 3-2A\mathrm{e}^x$$

$$y = \frac{3-2A\mathrm{e}^x}{1-A\mathrm{e}^x}$$

$$y' = y^2 - 5y + 6$$

Allgemeine Lösung :

$$y(x) = \frac{3-2Ae^x}{1-Ae^x}$$

Beispiele von Anfangsbedingungen :

a) $y(0) = 1$

b) $y(0) = 2$

c) $y(0) = 2.5$

d) $y(0) = 3$

e) $y(0) = 4$

$$y' = y^2 - 5y + 6 \quad \Rightarrow \quad y(x) = \frac{3-2Ae^x}{1-Ae^x}$$

a) Anfangsbedingung: $y(0) = 1$

$$y' = y^2 - 5y + 6 \quad \Rightarrow \quad y(x) = \frac{3-2A\mathrm{e}^x}{1-A\mathrm{e}^x}$$

a) Anfangsbedingung: $\quad y(0) = 1$

$$y(0) = \frac{3-2A}{1-A} \stackrel{!}{=} 1$$

$$y' = y^2 - 5y + 6 \quad \Rightarrow \quad y(x) = \frac{3 - 2Ae^x}{1 - Ae^x}$$

a) Anfangsbedingung: $y(0) = 1$

$$y(0) = \frac{3 - 2A}{1 - A} \overset{!}{=} 1$$

$$3 - 2A = 1 - A$$

$$y' = y^2 - 5y + 6 \quad \Rightarrow \quad y(x) = \frac{3-2Ae^x}{1-Ae^x}$$

a) Anfangsbedingung: $\quad y(0) = 1$

$$y(0) = \frac{3-2A}{1-A} \overset{!}{=} 1$$

$$3 - 2A = 1 - A$$

$$2 = A \quad \Rightarrow \quad \boxed{A = 2}$$

$$y' = y^2 - 5y + 6 \quad \Rightarrow \quad y(x) = \frac{3-2Ae^x}{1-Ae^x}$$

a) Anfangsbedingung: $y(0) = 1$

$$y(0) = \frac{3-2A}{1-A} \overset{!}{=} 1$$

$$3 - 2A = 1 - A$$

$$2 = A \quad \Rightarrow \quad \boxed{A = 2}$$

$$\boxed{y(x) = \frac{3-4e^x}{1-2e^x}}$$

$$\boxed{y(x) = \frac{3-4\mathrm{e}^{x}}{1-2\mathrm{e}^{x}}}$$

Bemerkungen:

- Nenner hat Nullstelle bei $x = \ln\left(\frac{1}{2}\right) \quad \Rightarrow \quad$ Pol bei $x = \ln\left(\frac{1}{2}\right) \approx -0.693$

$$\boxed{y(x) = \frac{3-4e^x}{1-2e^x}}$$

Bemerkungen:

- Nenner hat Nullstelle bei $x = \ln\left(\frac{1}{2}\right) \quad \Rightarrow \quad$ Pol bei $x = \ln\left(\frac{1}{2}\right) \approx -0.693$

- $\lim\limits_{x \to +\infty} y(x) = \frac{-4}{-2} = 2$

$$\boxed{y(x) = \frac{3-4e^x}{1-2e^x}}$$

Bemerkungen:

- Nenner hat Nullstelle bei $x = \ln\left(\frac{1}{2}\right) \quad \Rightarrow \quad$ Pol bei $x = \ln\left(\frac{1}{2}\right) \approx -0.693$

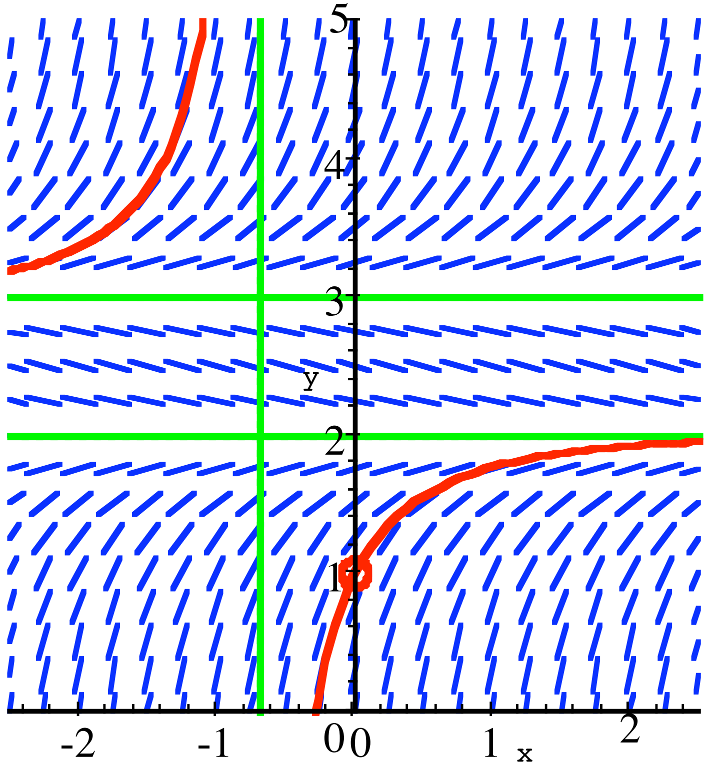
- $\lim\limits_{x \to +\infty} y(x) = \frac{-4}{-2} = 2$

- $\lim\limits_{x \to -\infty} y(x) = \frac{3}{1} = 3$

$$y' = y^2 - 5y + 6, \quad y(0) = 1 \quad \Rightarrow \quad y(x) = \frac{3-4e^x}{1-2e^x}$$

- Nenner hat Nullstelle bei $x = \ln\left(\frac{1}{2}\right) \quad \Rightarrow \quad$ Pol bei $x = \ln\left(\frac{1}{2}\right) \approx -0.693$

- $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(y(x)\right) = \frac{-4}{-2} = 2$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(y(x)\right) = \frac{3}{1} = 3$



$$y' = y^2 - 5y + 6 \quad \Rightarrow \quad y(x) = \frac{3-2Ae^x}{1-Ae^x}$$

b) Anfangsbedingung: $\quad y(0) = 2$

$$y' = y^2 - 5y + 6 \quad \Rightarrow \quad y(x) = \frac{3-2Ae^x}{1-Ae^x}$$

b) Anfangsbedingung: $y(0) = 2$

$$y(0) = \frac{3-2A}{1-A} \stackrel{!}{=} 2$$

$$y' = y^2 - 5y + 6 \quad \Rightarrow \quad y(x) = \frac{3-2A\mathrm{e}^x}{1-A\mathrm{e}^x}$$

b) Anfangsbedingung: $y(0) = 2$

$$y(0) = \frac{3-2A}{1-A} \overset{!}{=} 2$$

$$3 - 2A = 2 - 2A$$

$$y' = y^2 - 5y + 6 \quad \Rightarrow \quad y(x) = \frac{3-2Ae^x}{1-Ae^x}$$

b) Anfangsbedingung: $\quad y(0) = 2$

$$y(0) = \frac{3-2A}{1-A} \overset{!}{=} 2$$

$$3 - 2A = 2 - 2A$$

$$3 = 2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\text{igitt igitt}}$$

$$y' = y^2 - 5y + 6 \quad \Rightarrow \quad y(x) = \frac{3-2Ae^x}{1-Ae^x}$$

b) Anfangsbedingung: $y(0) = 2$

$$y(0) = \frac{3-2A}{1-A} \overset{!}{=} 2$$

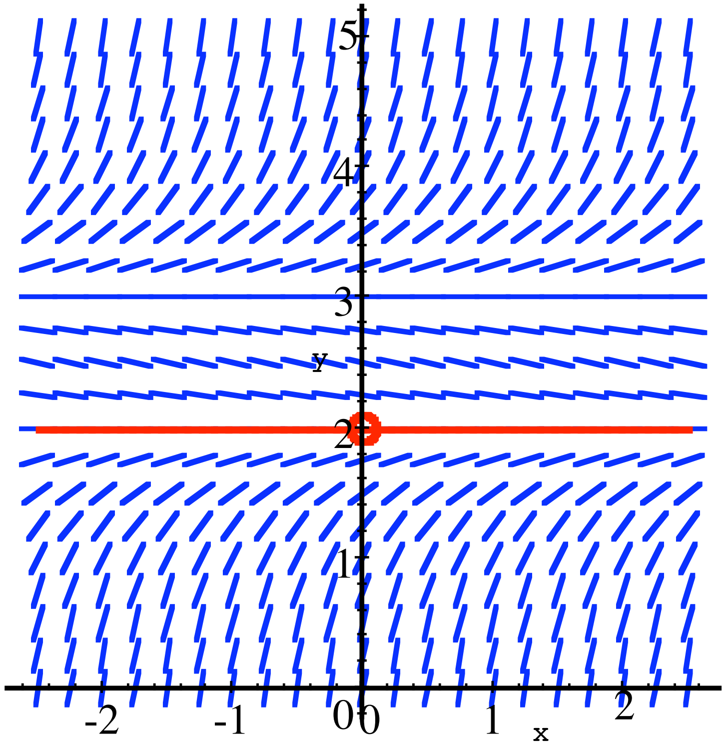
$$3 - 2A = 2 - 2A$$

$$3 = 2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\text{igitt igitt}}$$

Triviale Lösung:

$$\boxed{y(x) = 2}$$

$$y' = y^2 - 5y + 6, \quad y(0) = 2 \quad \Rightarrow \quad y(x) = 2$$



$$y' = y^2 - 5y + 6 \quad \Rightarrow \quad y(x) = \frac{3-2Ae^x}{1-Ae^x}$$

c) Anfangsbedingung : $y(0) = 2.5$

$$y(0) = \frac{3-2A}{1-A} \overset{!}{=} 2.5$$

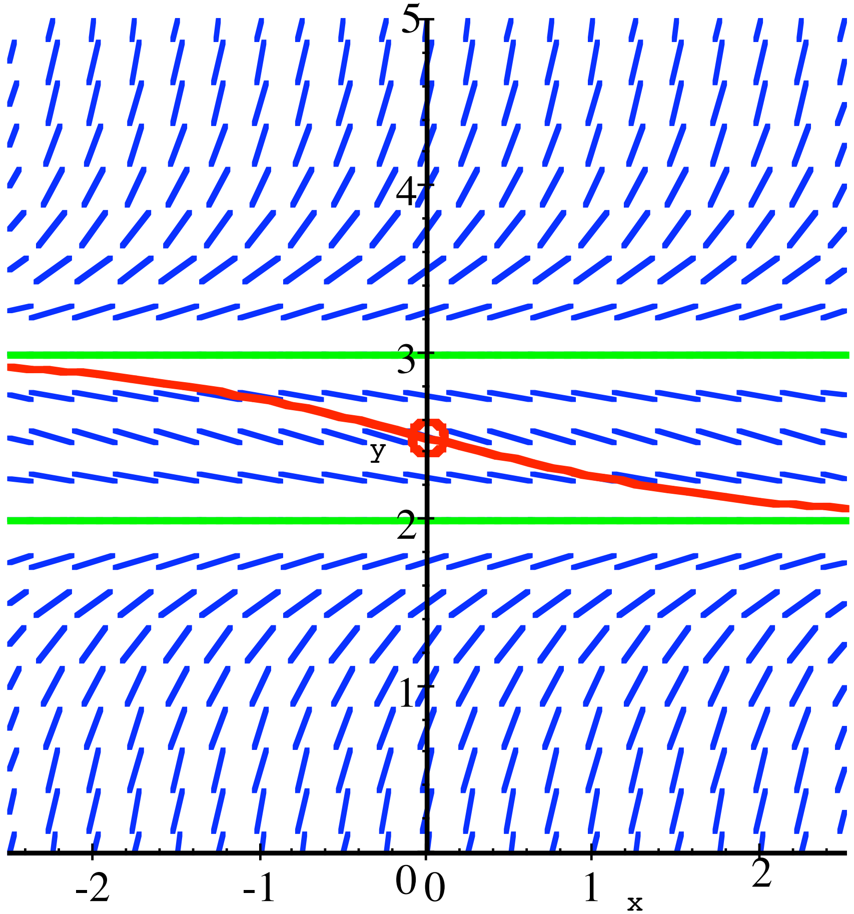
$$3 - 2A = 2.5 - 2.5A$$

$$0.5A = -0.5 \quad \Rightarrow \quad \boxed{A = -1}$$

$$y(x) = \frac{3+2e^x}{1+e^x}$$

$$y' = y^2 - 5y + 6, \quad y(0) = 2.5 \quad \Rightarrow \quad y(x) = \frac{3+2e^x}{1+e^x}$$

- $\lim\limits_{x \to +\infty} y(x) = \frac{2}{1} = 2$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} y(x) = \frac{3}{1} = 3$



$$y' = y^2 - 5y + 6 \quad \Rightarrow \quad y(x) = \tfrac{3-2Ae^x}{1-Ae^x}$$

d) Anfangsbedingung : $y(0) = 3$

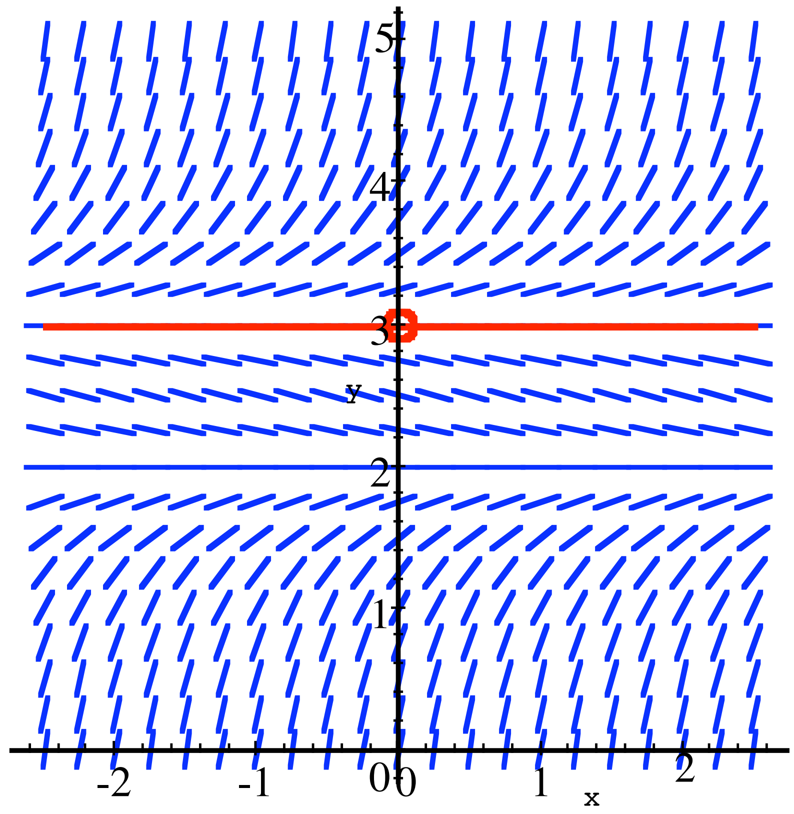
$$y(0) = \tfrac{3-2A}{1-A} \overset{!}{=} 3$$

$$3 - 2A = 3 - 3A$$

$$A = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{A = 0}$$ No problem

$$y(x) = \tfrac{3}{1} = 3$$

$$y' = y^2 - 5y + 6, \quad y(0) = 3 \quad \Rightarrow \quad y(x) = 3$$



$$y' = y^2 - 5y + 6 \quad \Rightarrow \quad y(x) = \frac{3-2A\mathrm{e}^x}{1-A\mathrm{e}^x}$$

e) Anfangsbedingung : $y(0) = 4$

$$y(0) = \frac{3-2A}{1-A} \stackrel{!}{=} 4$$

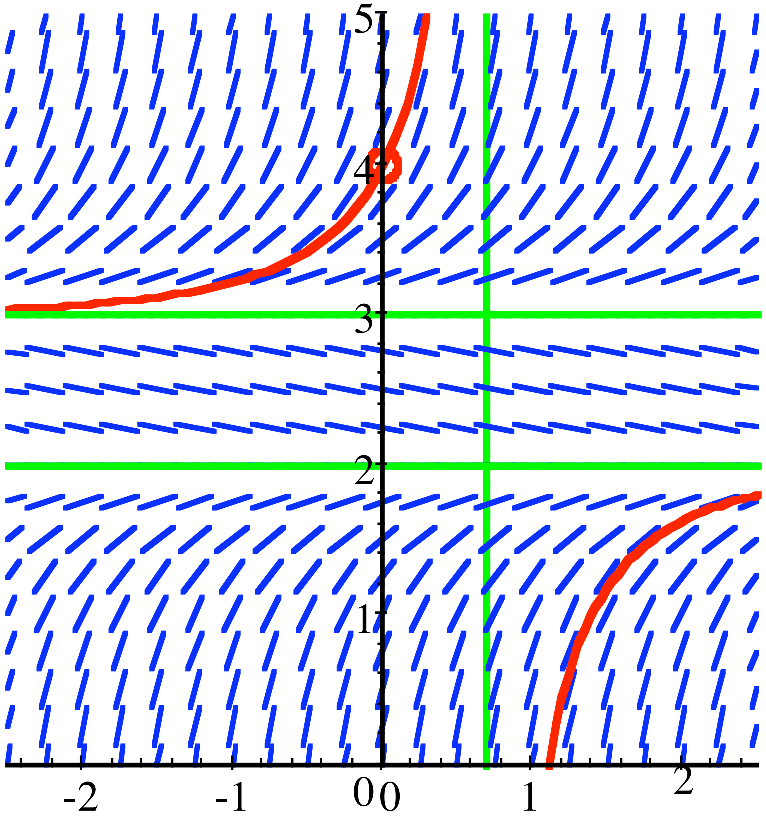
$$3 - 2A = 4 - 4A$$

$$2A = 1 \quad \Rightarrow \quad \boxed{A = \frac{1}{2}}$$

$$y(x) = \frac{3-1\mathrm{e}^x}{1-\frac{1}{2}\mathrm{e}^x}$$

$$y' = y^2 - 5y + 6, \quad y(0) = 4 \quad \Rightarrow \quad y(x) = \frac{3 - e^x}{1 - \frac{1}{2}e^x}$$

- Nenner hat Nullstelle bei $x = \ln(2)$ $\quad \Rightarrow \quad$ Pol bei $x = \ln(2) \approx 0.693$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} y(x) = \frac{-1}{-\frac{1}{2}} = 2$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} y(x) = \frac{3}{1} = 3$



Logistisches Wachstum

N(t) mit *Kapazitätsgrenze K*

N klein: *K* relativ groß, annähernd *exponentielles* Wachstum

N in der Nähe von *K*: annähernd *Nullwachstum*

$$\boxed{N'(t) = a\,N(t)\left(1 - \frac{N(t)}{K}\right)}$$

Proportionalitätsfaktor *a*

Vergleich

$$y' = y^2 - 5y + 6 \qquad\qquad N'(t) = a\,N(t)\left(1 - \frac{N(t)}{K}\right)$$

Vergleich

$$y' = y^2 - 5y + 6$$

Nullstellen
$y=2$, $y=3$

$$N'(t) = a\,N(t)\left(1 - \frac{N(t)}{K}\right)$$

Nullstellen
$N=0$, $N=K$

Vergleich

$$y' = y^2 - 5y + 6$$

Nullstellen
y=2, y=3

lange Rechnung

$$N'(t) = a\,N(t)\left(1 - \frac{N(t)}{K}\right)$$

Nullstellen
N=0, N=K

analoge Rechnung

Vergleich

$$y' = y^2 - 5y + 6$$

Nullstellen
$y=2$, $y=3$

lange Rechnung

allgemeine Lösung:

$$y(x) = \frac{3-2Ae^x}{1-Ae^x}$$

$$N'(t) = a\,N(t)\left(1 - \frac{N(t)}{K}\right)$$

Nullstellen
$N=0$, $N=K$

analoge Rechnung

Vergleich

$$y' = y^2 - 5y + 6$$

Nullstellen
y=2, y=3

lange Rechnung

allgemeine Lösung:

$$y(x) = \frac{3-2Ae^x}{1-Ae^x}$$

$$N'(t) = a\,N(t)\left(1 - \frac{N(t)}{K}\right)$$

Nullstellen
N=0, N=K

analoge Rechnung

allgemeine Lösung:

$$N(t) = \frac{K}{C_3 e^{-at} + 1}$$

$$N(t) = \frac{K}{C_3 \mathrm{e}^{-at} + 1}$$

$$N(t) = \frac{K}{C_3 \mathrm{e}^{-at} + 1}$$

Anfangsbedingung: $N(0) = N_0$

$$N(t) = \frac{K}{C_3 e^{-at} + 1}$$

Anfangsbedingung: $N(0) = N_0$

$$N(0) = \frac{K}{C_3 + 1} \overset{!}{=} N_0$$

$$N(t) = \frac{K}{C_3 e^{-at} + 1}$$

Anfangsbedingung: $N(0) = N_0$

$$N(0) = \frac{K}{C_3 + 1} \overset{!}{=} N_0$$

$$C_3 + 1 = \frac{K}{N_0} \quad \Rightarrow \quad C_3 = \frac{K}{N_0} - 1$$

$$N(t) = \frac{K}{C_3 e^{-at} + 1}$$

Anfangsbedingung: $N(0) = N_0$

$$N(0) = \frac{K}{C_3 + 1} \overset{!}{=} N_0$$

$$C_3 + 1 = \frac{K}{N_0} \quad \Rightarrow \quad C_3 = \frac{K}{N_0} - 1$$

$$N(t) = \frac{K}{\left(\frac{K}{N_0} - 1\right) e^{-at} + 1}$$

Logistisches Wachstum

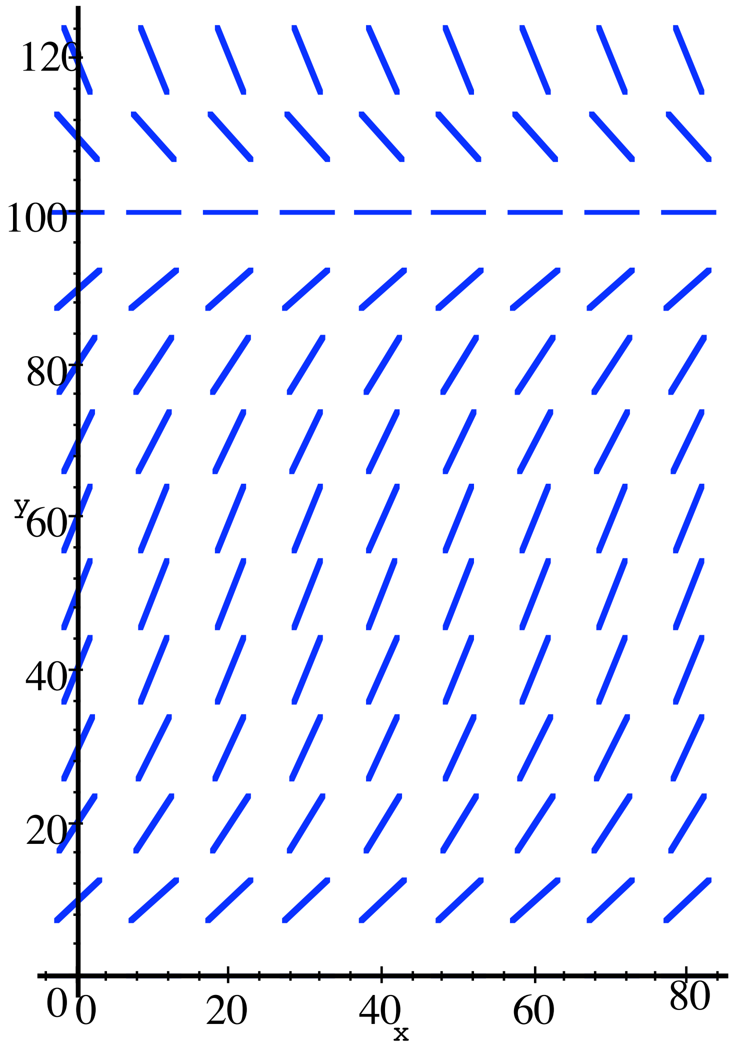
$$N'(t) = a\,N(t)\left(1 - \frac{N(t)}{K}\right)$$

$$N(0) = N_0$$

Lösung

$$N(t) = \boxed{\frac{K}{\left(\frac{K}{N_0} - 1\right)e^{-at} + 1}}$$

Beispiel $K = 100,\ a = 0.1$



Beispiel $K = 100,\ a = 0.1$

$N_0 = N(0) = 120$

$N_0 = N(0) = 100$

$N_0 = N(0) = 70$

$N_0 = N(0) = 2$