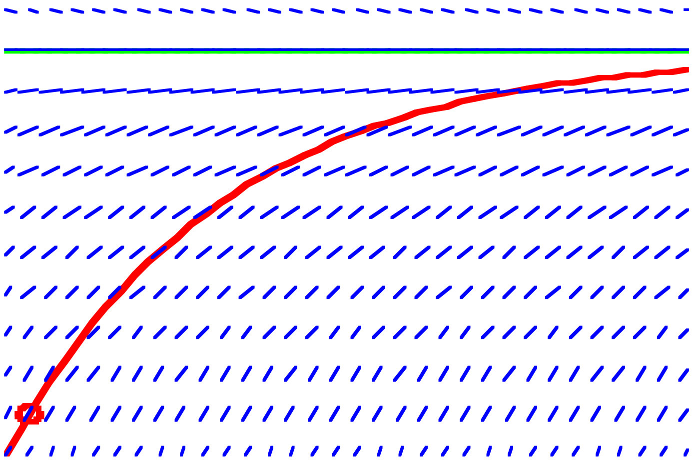
Hans Walser

Mathematik 1 für Naturwissenschaften



Modul 110

Differenzialgleichungen 1, Wachstum

UNI BASEL

Inhalt

Modul 110 für die Lehrveranstaltung *Mathematik 1 für Naturwissenschaften*

Winter 2002/03 Erstausgabe
Winter 2003/04 Fehlerbereinigung. Grafische Überarbeitung
Winter 2004/05 Technische Überarbeitung. Straffung
Winter 2005/06 Fehlerbereinigung. Geändertes Layout
Winter 2006/07 MathType
Herbst 2007 Kleine Ergänzung
Herbst 2009 Fehlerkorrektur
Herbst 2013 Grafische Überarbeitung

last modified: 23. September 2013

Hans Walser
Mathematisches Institut, Rheinsprung 21, 4051 Basel
www.walser-h-m.ch/hans

1 Einführung: Wachstum

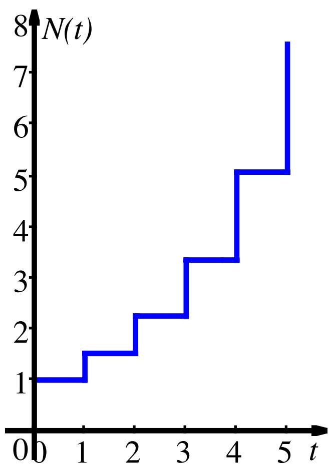
Das „natürlichste“ und einfachste Wachstumsmodell ist das exponentielle Wachstum, das von einer konstanten Wachstumsrate pro Zeiteinheit ausgeht.

1.1 Beispiel: 50% Wachstum pro Jahr

$$N(0) = 1$$

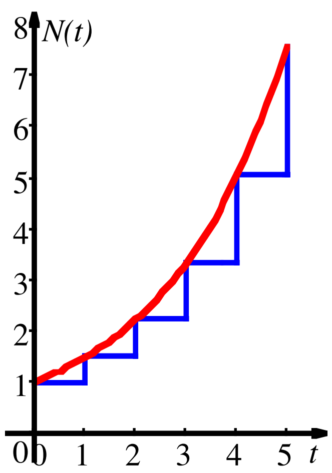
$$\Delta N = 0.5\, N(t)$$

$$N(t+1) = 1.5\, N(t)$$



50% Wachstum pro Jahr, Wachstumsschübe Ende Jahr

Für eine größere Population verläuft das Wachstum quasi kontinuierlich:



Kontinuierliches Wachstum

Es gilt:

$$N(t) = N(0) \cdot 1.5^t = 1.5^t$$

$$N'(t) = \underset{\substack{\uparrow \\ N(t)}}{1.5^t} \ln\big(\underset{\substack{\uparrow \\ 0.4055}}{1.5}\big) = 0.4055 \cdot N(t)$$

Zwischen der Funktion $N(t)$ und ihrer Ableitung $N'(t)$ gilt also die Beziehung:

$$N'(t) = 0.4055 \cdot N(t)$$

Diese Gleichung enthält also sowohl die Funktion $N(t)$ wie auch ihre Ableitung $N'(t)$; dies ist ein Beispiel einer *Differenzialgleichung*.

Allgemein gilt für eine Exponentialfunktion $N(t) = cb^t$ wegen

$$N'(t) = \underset{\substack{\uparrow \\ N(t)}}{cb^t} \ln\big(\underset{\substack{\uparrow \\ a}}{b}\big)$$

die Differenzialgleichung:

$$N'(t) = a \cdot N(t)$$

Bei einer konstanten Wachstumsrate ist die momentane Zuwachsrate proportional zum Bestand. Wir erhalten damit die Differenzialgleichung:

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{momentane} \\ \text{Zuwachs-} \\ \text{geschwindigkeit}}}{y'(t)} = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Proportionalitäts-} \\ \text{faktor}}}{a} \cdot \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Bestand}}}{y(t)}$$

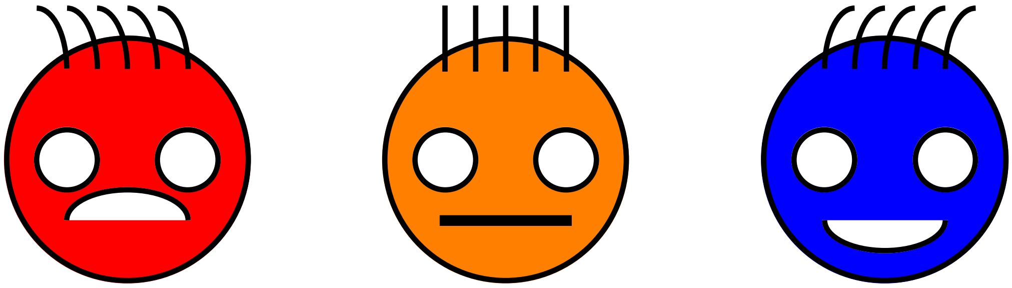
1.2 Problemstellung

Wir gehen nun von einer Differenzialgleichung aus:

$$y'(t) = a \cdot y(t)$$

Wir haben hier eine Information über die Ableitung $y'(t)$, aber die Funktion $y(t)$ ist nicht bekannt. Welches sind passende Funktionen $y(t)$, also Lösungen der Differenzialgleichungen?

1.2.1 Zwischenbemerkung über das Lösen von Differenzialgleichungen



Ableiten ist ein Handwerk

Integrieren ist eine Kunst

Lösen von Differenzial-gleichungen ist Glückssache

Tja

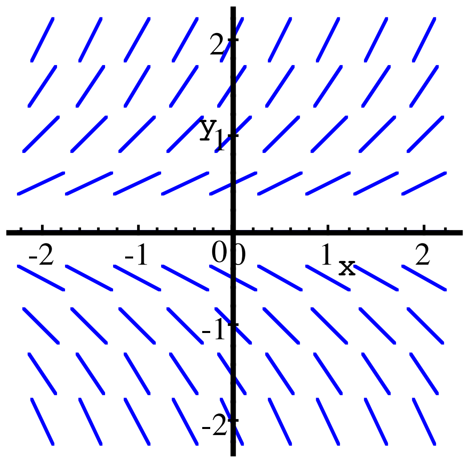
1.3 Beispiel

$$y'(t) = y(t)$$

Wegen $\left(\mathrm{e}^t\right)' = \left(\mathrm{e}^t\right)$ ist $y(t) = \mathrm{e}^t$ eine Lösung. Ist das die einzige Lösung?

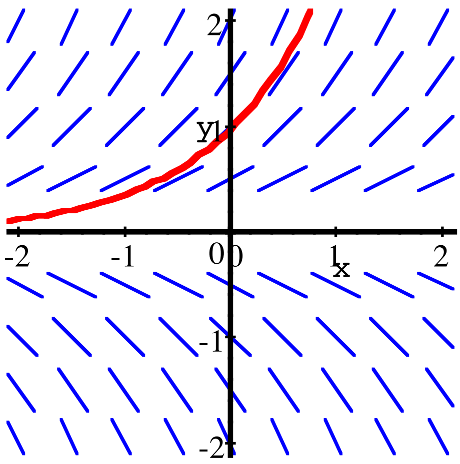
1.3.1 Tangentensteigung, Richtungsfeld

Das Bild visualisiert die Differenzialgleichung $y' = y$, indem y' als Steigung eingetragen wird.



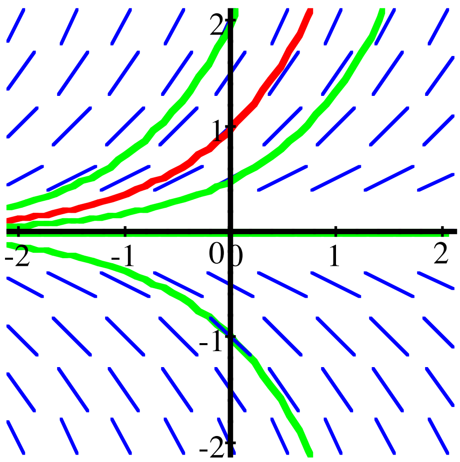
Richtungsfeld

Die Lösungskurve $y(t) = \mathrm{e}^t$ passt in dieses Richtungsfeld.



Richtungsfeld mit Lösungskurve

Es passen allerdings noch andere Lösungskurven ins selbe Richtungsfeld.



Weitere Lösungen

Welcher Zusammenhang besteht zwischen den verschiedenen Lösungen?

1.3.2 Allgemeine Lösung

Die Differenzialgleichung $y'(t) = y(t)$ hat die allgemeine Lösung:

$$y(t) = \underset{\boxed{\begin{array}{l}\text{Konstante,}\\ \text{wird durch}\\ \text{Anfangs-}\\ \text{bedingung}\\ \text{festgelegt}\end{array}}}{\underset{\uparrow}{A}} \cdot \mathrm{e}^t$$

1.3.2.1 Rechnerisches

Falls $A > 0$, können wir wie folgt umformen:

$$Ae^t = e^{\ln(A)} \cdot e^t = e^{t+\ln(A)}$$

Dies kann geometrisch interpretiert werden:

Ae^t	$=$	$e^{t+\ln(A)}$
$\uparrow$		$\uparrow$
Streckung in y-Richtung mit Faktor A		Verschiebung in x-Richtung um $-\ln(A)$

1.3.3 Anfangsbedingung

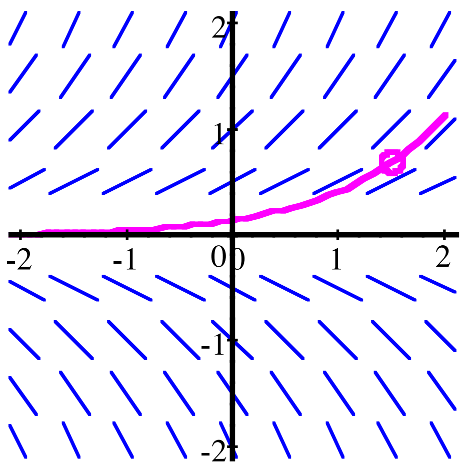
Die Differenzialgleichung $y'(t) = y(t)$ soll unter der Anfangsbedingung $y(0) = \frac{1}{2}$ gelöst werden. Es ist dann:

$$y(0) = Ae^0 = A \overset{\text{soll!}}{=} \frac{1}{2}$$

also $y(t) = \frac{1}{2}e^t$.

1.3.4 Andere „Anfangs"-Bedingung

Die Differenzialgleichung $y'(t) = y(t)$ soll unter der Anfangsbedingung $y(1.5) = 0.7$ gelöst werden. Es ist dann $0.7 = A \cdot e^{1.5}$ und damit $A = 0.7 \cdot e^{-1.5} \approx 0.15619$.



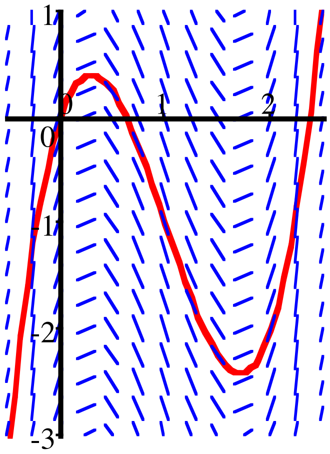
Andere Anfangsbedingung

2 Sonderfall: Integration

Die Differenzialgleichung $y'(x) = 6x^2 - 12x + 3$ ist ein reines Integrationsproblem:

$$y(x) = \int \left(6x^2 - 12x + 3\right) dx = 2x^3 - 6x^2 + 3x + C$$

Wegen der Integrationskonstanten C gibt es unendlich viele Lösungen. C muss durch die Anfangsbedingung festgelegt werden.



Richtungsfeld mit einer Lösungskurve

3 Differenzialgleichungen *n*-ter Ordnung

3.1 Ordnung einer Differenzialgleichung

Differenzialgleichungen *erster Ordnung*, Beispiele:

$$y' = 0$$

$$y' = ay$$

$$y' = ay + b$$

$$y' = a(A - y)(B - y)$$

$$y' = f(x)$$

$$y' = p(x)y + q(x)$$

Differenzialgleichungen *zweiter Ordnung*, Beispiele:

$$y'' = 0$$

$$y'' + ay = 0$$

$$y'' + by' + cy = \cos(x)$$

Die höchste vorkommende Ableitung gibt die *Ordnung* an.

3.2 Differenzialgleichungen erster Ordnung

3.2.1 Erinnerung

$$y'(t) = y(t)$$

Diese Differenzialgleichung hat die allgemeine Lösung:

$$y(t) = \underset{\substack{\uparrow \\ \boxed{\text{Konstante, wird durch Anfangsbedingung festgelegt}}}}{A} \cdot \mathrm{e}^t$$

3.2.2 Zusätzlicher Faktor

$$y'(x) = a \cdot y(x)$$

Die Lösung ist:

$$y(x) = A\mathrm{e}^{ax}$$

Kontrolle durch Ableiten:

$$\left(A\mathrm{e}^{ax}\right)' = A\mathrm{e}^{ax} \cdot \underset{\substack{\uparrow \\ \text{innere} \\ \text{Ableitung}}}{a} = a\left(A\mathrm{e}^{ax}\right)$$

3.2.3 Zusätzlicher Summand

Gottfried Wilhelm von Leibniz, 1646 - 1716

$$y'(x) = a \cdot y(x) + b$$

Dies ist die Schreibweise von NEWTON. Es ist aber hier besser, die Schreibweise von Leibniz zu verwenden:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = a \cdot y + b$$

3.2.3.1 Separation der Variablen

Die Schreibweise von Leibniz

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = ay + b$$

können wir umformen zu:

$$\frac{\mathrm{d}y}{ay+b} = \mathrm{d}x$$

Hier sind die Variablen x und y getrennt, links haben wir nur noch y, rechts nur noch x. Daher der Name *Separation der Variablen* für dieses Verfahren. Wir können nun mit Integration weiterfahren.

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{ay+b} = \int \mathrm{d}x$$

Für das Integral rechts erhalten wir $\int \mathrm{d}x = x + C_1$. Das Integral links ergibt:

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{ay+b} =$$

Also: $\int \frac{\mathrm{d}y}{ay+b} = \frac{1}{a}\ln\left(|ay+b|\right) + C_2$

Durch Gleichsetzen der beiden Integrale erhalten wir:

$$\ln\left(|ay+b|\right) = ax + C_3$$

Wir lösen dies nach y auf:

Somit ist:

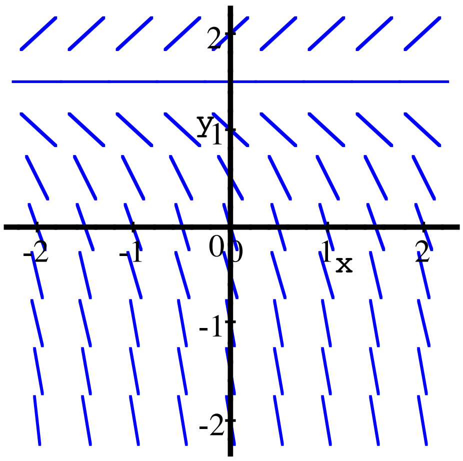
$$y(x) = \underset{\boxed{A = \pm\frac{1}{a}\mathrm{e}^{C}}}{\underset{\uparrow}{A}} \cdot \mathrm{e}^{ax} - \frac{b}{a}$$

Die Differenzialgleichung $y' = ay + b$ hat die Lösung:

$$y(x) = A\mathrm{e}^{ax} - \frac{b}{a}$$

3.2.3.2 Beispiel

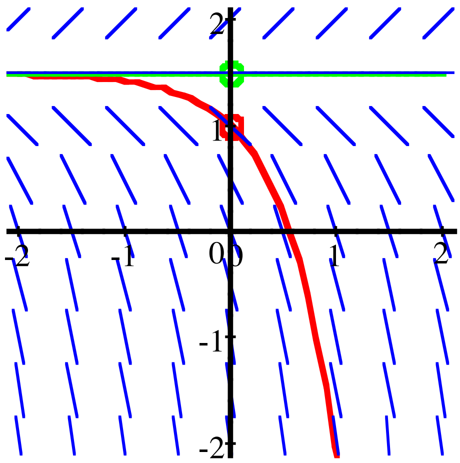
$$y' = 2y - 3$$



Richtungsfeld

a) Anfangsbedingung $y(0) = 1$

b) Anfangsbedingung $y(0) = 1.5$



Lösungskurven zu den Anfangsbedingungen

3.2.3.3 Bauland zu verkaufen

S'hät solangs hät.

Beschränkte Ressourcen führen zu einem beschränkten Wachstum.

Modell: Zuwachs proportional zu noch vorhandenen Ressourcen.

B: Total der Ressourcen

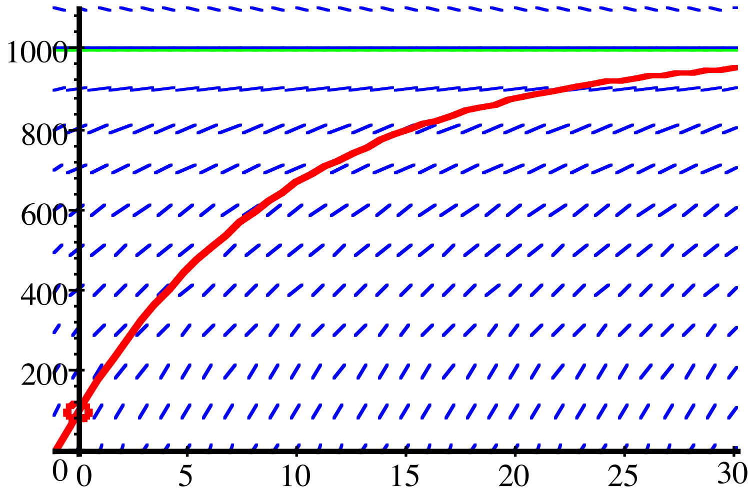
$N(t)$: Zum Zeitpunkt t bereits verbrauchte Ressourcen

Gemäß unserem Modell ergibt sich die Differenzialgleichung (λ ist ein Proportionalitätsfaktor):

$$N'(t) = \lambda\big(B - N(t)\big)$$

Diese Differenzialgleichung ist von der Form $y' = ay + b$.

Beispiel: $B = 1000$, $N(0) = 100$, $\lambda = 0.1$



Beschränktes Wachstum

3.3 Separation der Variablen

3.3.1 Erinnerung

$$y' = ay + b$$

Lösungsschritte:

3.3.2 Separierbare Differenzialgleichung

Eine Differenzialgleichung von der Form

$$y' = \frac{g(x)}{h(y)}$$

heißt *separierbar*.

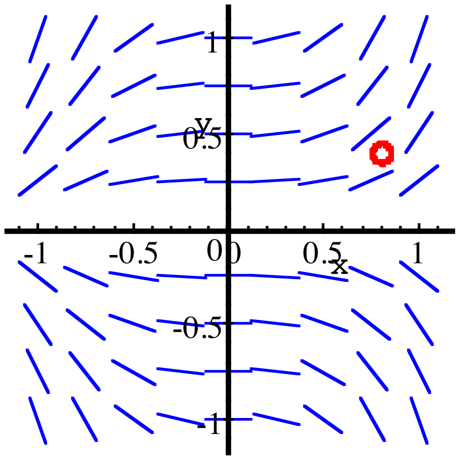
Die Variablen x und y sind separierbar.

Lösungsschritte:

3.3.2.1 Beispiel

$$y' = 3x^2 y$$

Anfangsbedingung: $y(0.8) = 0.4$

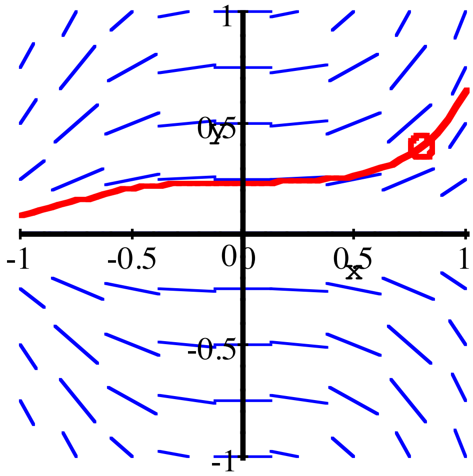


Richtungsfeld mit Anfangsbedingung

Lösungsschritte:

Wir erhalten somit:

$$y(x) \approx 0.2397 \cdot \mathrm{e}^{x^3}$$



Richtungsfeld mit Anfangsbedingung und Lösungskurve

Zwischenbemerkung: „hoch — hoch" ist wie folgt zu verstehen:

$$a^{b^c} = a^{\left(b^c\right)}$$

Die Rechnung beginnt im Exponenten. Zahlenbeispiel:

$$2^{3^2} = 2^{\left(3^2\right)} = 2^9 = 512$$

Vergleiche dazu:

$$\left(2^3\right)^2 = 8^2 = 64 \neq 512$$

3.4 Logistisches Wachstum

Die folgenden Ideen gehen zurück auf Pierre François VERHULST (1804 - 1849, Brüssel)

Pierre François VERHULST, 1804 - 1849

3.4.1 Modellvorstellung

- $N(t)$ mit *Kapazitätsgrenze* K
- N klein: K relativ groß, annähernd *exponentielles* Wachstum
- N in der Nähe von K: annähernd *Nullwachstum*

Dies führt zur Differenzialgleichung:

$$N'(t) = a\,N(t)\left(1 - \frac{N(t)}{K}\right)$$

Diese Differenzialgleichung ist von der Form (beachte unterschiedliche Bedeutung der Variablen a):

$$y' = ay^2 + by + c$$

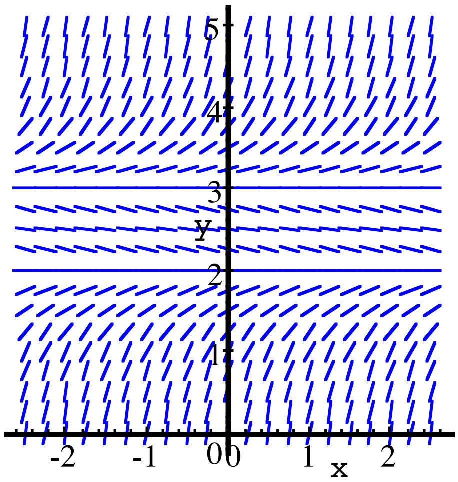
3.4.2 Beispiele zum logistischen Wachstum

- Wachstum der Kaninchenpopulation in Australien
-
-
-
-

3.4.3 Rechenbeispiel

$$y' = ay^2 + by + c$$

Wir studieren das konkrete Beispiel $y' = y^2 - 5y + 6 = (y-2)(y-3)$.



Richtungsfeld

Lösung mit Separation der Variablen:

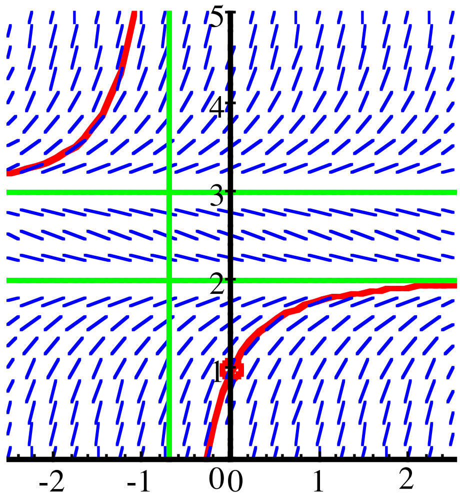
Wir erhalten somit: Die Differenzialgleichung $y' = y^2 - 5y + 6$ hat die allgemeine Lösung:

$$y(x) = \frac{3-2Ae^x}{1-Ae^x}$$

Wir untersuchen diese Lösung für verschiedene Anfangsbedingungen.

a) $y(0)=1$

Es ergibt sich: $y(x)=\frac{3-4e^x}{1-2e^x}$



Lösungskurve mit Asymptoten

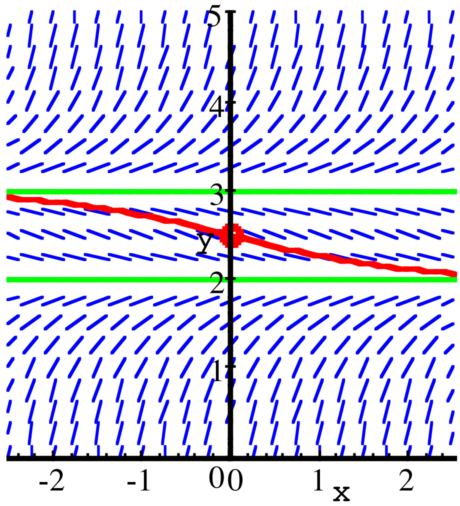
b) $y(0)=2$

Interessanter Fall, da $y=2$ eine Nullstelle von y^2-5y+6 ist.

Es gibt also keine Lösung für A. Trotzdem gibt es eine triviale Lösung der Differenzialgleichung, nämlich $y(x)=2$.

c) $y(0) = 2.5$

Wir erhalten $y(x) = \frac{3+2e^x}{1+e^x}$.



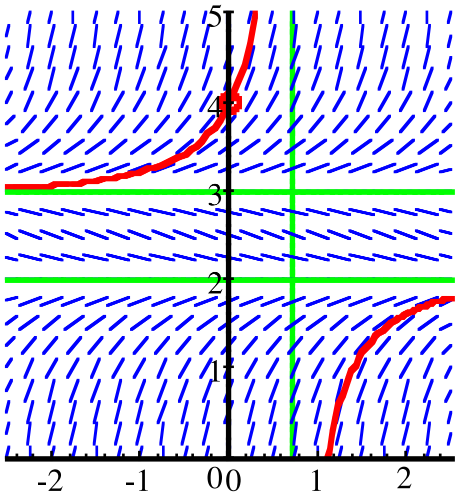
Lösungskurve

d) $y(0) = 3$

Wir erhalten die triviale Lösung $y(x) = 3$.

e) $y(0)=4$

Wir erhalten $y(x)=\frac{3-e^x}{1-\frac{1}{2}e^x}$.



Lösungskurve

3.4.4 Und jetzt das logistische Wachstum

Wir haben die Differenzialgleichung:

$$N'(t) = a\,N(t)\left(1 - \frac{N(t)}{K}\right)$$

Der Term rechts vom Gleichheitszeichen hat die beiden Nullstellen $N = 0$ und $N = K$. Eine analoge Rechnung wie beim vorhergehenden Beispiel führt zunächst auf:

$$N(t) = \frac{K}{C_3 e^{-at} + 1}$$

Anfangsbedingung: $N(0) = N_0$. Dies führt auf:

$$N(0) = \frac{K}{C_3 + 1} \overset{!}{=} N_0$$

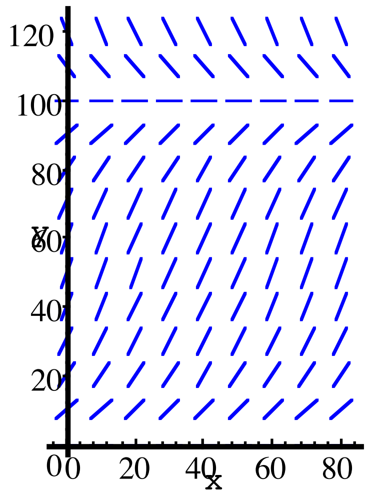
$$C_3 + 1 = \frac{K}{N_0} \quad \Rightarrow \quad C_3 = \frac{K}{N_0} - 1$$

$$N(t) = \frac{K}{\left(\frac{K}{N_0} - 1\right)e^{-at} + 1}$$

Die Differenzialgleichung $N'(t) = a\,N(t)\left(1 - \frac{N(t)}{K}\right)$ mit der Anfangsbedingung $N(0) = N_0$ hat die Lösung:

$$N(t) = \frac{K}{\left(\frac{K}{N_0} - 1\right)e^{-at} + 1}$$

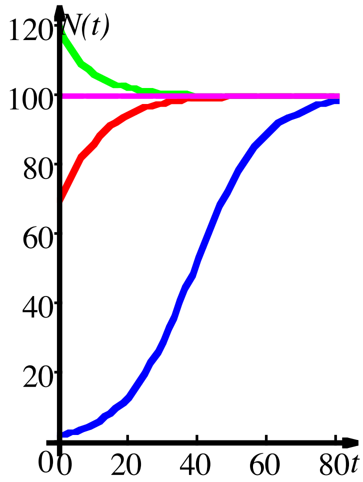
Die folgende Figur zeigt das Richtungsfeld für $K = 100$ und $a = 0.1$.



Richtungsfeld

Die folgende Figur zeigt die Lösungskurven für $K = 100$, $a = 0.1$ und die Anfangsbedingungen:

a) $N_0 = N(0) = 2$ b) $N_0 = N(0) = 70$ c) $N_0 = N(0) = 100$ d) $N_0 = N(0) = 120$



Lösungskurven

4 Zusammenfassung

Differenzialgleichung: Information über die Ableitung $y'(t)$, aber die Funktion $y(t)$ ist nicht bekannt.

Einfachstes Beispiel: $y'(t) = y(t)$. Führt zur Exponentialfunktion

4.1 Tangentensteigung, Richtungsfeld

Jede Lösungskurve passt sich ein.

4.2 Ordnung einer Differenzialgleichung

Gegeben durch die höchste vorkommende Ableitung.

4.3 Separation der Variablen

Schreibweise $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ verwenden, dann y nach links und x nach rechts. Auf beiden Seiten separat integrieren.

4.4 Wachstumsmodelle

Ohne Einschränkung: $y'(x) = a \cdot y(x)$. Gibt $y(x) = A\mathrm{e}^{ax}$

Beschränkte Ressourcen, Kapazitätsgrenze:

$$N'(t) = \lambda\left(B - N(t)\right) \text{ oder } y' = ay + b \text{. Gibt } y(x) = A\mathrm{e}^{ax} - \tfrac{b}{a}$$

Logistisches Wachstum:

$$N'(t) = a\, N(t)\left(1 - \frac{N(t)}{K}\right) \text{ (oder allgemein: } y' = ay^2 + by + c\text{)}$$

Anfangsbedingung $N(0) = N_0$ ergibt: $N(t) = \frac{K}{\left(\frac{K}{N_0} - 1\right)\mathrm{e}^{-at} + 1}$

Literatur

[Verhulst 1838] Verhulst, Pierre-François: Notice sur la loi que la population poursuit dans son accroissement. In: Corresp. Math. Phys. 10:113-121, 1838

[Verhulst 1845] Verhulst, Pierre-François: Recherches mathématiques sur la loi d'accroissement de la population, in: Mémoires de l'Académie Royale des Sciences et Belles Lettres de Bruxelles, Band 18, Brüssel 1845.