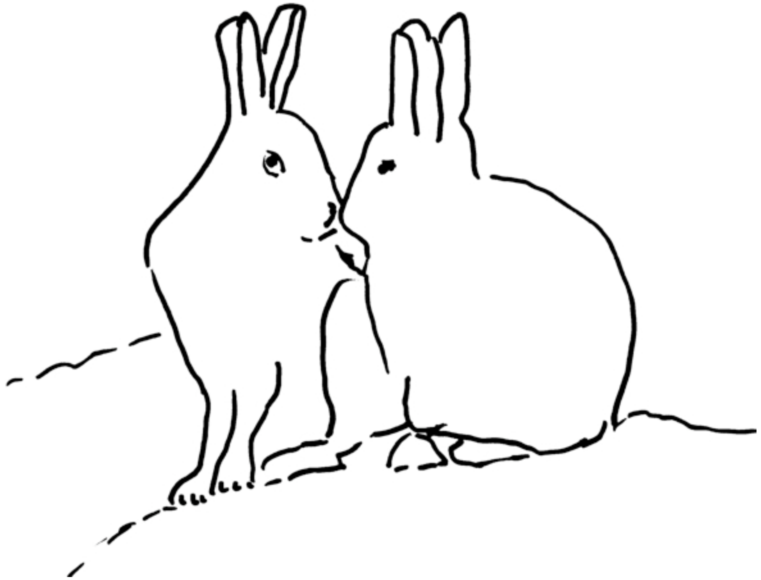


Modul 111

Systeme von Differenzialgleichungen. Luchs und Hase

Lineare Differenzialgleichung erster Ordnung

Inhomogener Fall: $$y' = p(x)\,y + q(x) \qquad \text{(I)}$$

Lineare Differenzialgleichung erster Ordnung

Inhomogener Fall: $y' = p(x)y + q(x)$ (I)

Homogener Fall: $y' = p(x)y$ (H)

Lineare Differenzialgleichung erster Ordnung

Inhomogener Fall: $y' = p(x)y + q(x)$ (I)

Homogener Fall: $y' = p(x)y$ (H)

(H) mit Separation der Variablen:

$$\frac{\mathrm{d}y}{y} = p(x)\,\mathrm{d}x \qquad \Rightarrow \qquad y_{\mathrm{H}} = C\mathrm{e}^{\int p(x)\,\mathrm{d}x}$$

Lineare Differenzialgleichung erster Ordnung

Inhomogener Fall: $y' = p(x)y + q(x)$ (I)

Homogener Fall: $y' = p(x)y$ (H)

(H) mit Separation der Variablen:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{y}} = p(x)\,\mathrm{d}x \qquad \Rightarrow \qquad y_{\mathrm{H}} = C\mathrm{e}^{\int p(x)\,\mathrm{d}x}$$

Lösung von (I)?

$$y' = \frac{2}{x}y + x^2 \qquad \text{(I)}$$

$$y' = \frac{2}{x}y \qquad \text{(H)}$$

$$y' = \frac{2}{x} y + x^2 \qquad \text{(I)}$$

$$y' = \frac{2}{x} y \qquad \text{(H)}$$

Wir lösen (H) mit Separation der Variablen:

$$y' = \frac{2}{x} y + x^2 \qquad \text{(I)}$$

$$y' = \frac{2}{x} y \qquad \text{(H)}$$

Wir lösen (H) mit Separation der Variablen:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{y}} = \frac{2}{x} \mathrm{d}x$$

$$y' = \frac{2}{x} y + x^2 \qquad \text{(I)}$$

$$y' = \frac{2}{x} y \qquad \text{(H)}$$

Wir lösen (H) mit Separation der Variablen:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{y}} = \frac{2}{x} \mathrm{d}x$$

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{y}} = \int \frac{2}{x} \mathrm{d}x$$

$$y' = \frac{2}{x} y + x^2 \qquad \text{(I)}$$

$$y' = \frac{2}{x} y \qquad \text{(H)}$$

Wir lösen (H) mit Separation der Variablen:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{y}} = \frac{2}{x} \mathrm{d}x$$

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{y}} = \int \frac{2}{x} \mathrm{d}x$$

$$\ln(|y|) = 2 \ln(|x|) + C_1 =$$

$$y' = \frac{2}{x} y + x^2 \qquad \text{(I)}$$

$$y' = \frac{2}{x} y \qquad \text{(H)}$$

Wir lösen (H) mit Separation der Variablen:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{y}} = \frac{2}{x} \mathrm{d}x$$

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{y}} = \int \frac{2}{x} \mathrm{d}x$$

$$\ln(|y|) = 2 \ln(|x|) + C_1 = \ln\left(x^2\right) + C_1$$

$$y' = \frac{2}{x} y + x^2 \qquad \text{(I)}$$

$$y' = \frac{2}{x} y \qquad \text{(H)}$$

Wir lösen (H) mit Separation der Variablen:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{y}} = \frac{2}{x}\mathrm{d}x$$

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{y}} = \int \frac{2}{x}\mathrm{d}x$$

$$\ln(|y|) = 2\ln(|x|) + C_1 = \ln\left(x^2\right) + C_1$$

$$|y| = \mathrm{e}^{\ln\left(x^2\right)+C_1} = C_2 x^2$$

$$y' = \frac{2}{x} y + x^2 \qquad \text{(I)}$$

$$y' = \frac{2}{x} y \qquad \text{(H)}$$

Wir lösen (H) mit Separation der Variablen:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{y}} = \frac{2}{x}\mathrm{d}x$$

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{y}} = \int \frac{2}{x}\mathrm{d}x$$

$$\ln(|y|) = 2\ln(|x|) + C_1 = \ln\left(x^2\right) + C_1$$

$$|y| = \mathrm{e}^{\ln\left(x^2\right)+C_1} = C_2 x^2$$

$$y_\mathrm{H} = Cx^2$$

$$y' = \frac{2}{x} y + x^2 \qquad \text{(I)}$$

Eine partikuläre Lösung fällt vom Himmel: $y_P = x^3$

Eine bestimmte, aber
nicht spezielle Lösung

$$y' = \frac{2}{x} y + x^2 \qquad\qquad \text{(I)}$$

Eine partikuläre Lösung fällt vom Himmel: $y_{\mathrm{P}} = x^3$

Kontrolle:

Linke Seite: $y' = 3x^2$

$$y' = \frac{2}{x} y + x^2 \qquad \text{(I)}$$

Eine partikuläre Lösung fällt vom Himmel: $y_\mathrm{P} = x^3$

Kontrolle:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{Linke Seite:} & y' = 3x^2 \\ \text{Reche Seite:} & \frac{2}{x} y + x^2 = \frac{2}{x} x^3 + x^2 = 3x^2 \end{array}\right\} \text{O.K.}$$

$$y' = \frac{2}{x} y + x^2 \qquad \text{(I)}$$

Eine partikuläre Lösung fällt vom Himmel: $y_P = x^3$

Wie komme ich auf diese Lösung?

$$y' = \frac{2}{x} y + x^2 \qquad \text{(I)} \quad \text{partikuläre Lösung:} \quad y_{\mathrm{P}} = x^3$$

$$y' = \frac{2}{x} y \qquad \text{(H)} \quad \text{allgemeine Lösung:} \quad y_{\mathrm{H}} = Cx^2$$

$$y' = \frac{2}{x}\,y + x^2 \qquad \text{(I)} \quad \text{partikuläre Lösung:} \quad y_P = x^3$$

$$y' = \frac{2}{x}\,y \qquad \text{(H)} \quad \text{allgemeine Lösung:} \quad y_H = Cx^2$$

Kombination: $\boxed{y = Cx^2 + x^3 \quad \text{allgemeine Lösung von (I)}}$

$y' = \frac{2}{x} y + x^2$ (I) partikuläre Lösung: $y_P = x^3$

$y' = \frac{2}{x} y$ (H) allgemeine Lösung: $y_H = Cx^2$

Kombination: $\boxed{y = Cx^2 + x^3 \quad \text{allgemeine Lösung von (I)}}$

Kontrolle:

Linke Seite: $y' = 2Cx + 3x^2$

$y' = \frac{2}{x} y + x^2$ (I) partikuläre Lösung: $y_P = x^3$

$y' = \frac{2}{x} y$ (H) allgemeine Lösung: $y_H = Cx^2$

Kombination: $\boxed{y = Cx^2 + x^3 \quad \text{allgemeine Lösung von (I)}}$

Kontrolle:

$$\left.\begin{array}{l} \text{Linke Seite: } y' = 2Cx + 3x^2 \\ \text{Rechte Seite: } \frac{2}{x} y + x^2 = \frac{2}{x}\left(Cx^2 + x^3\right) + x^2 = 2Cx + 2x^2 + x^2 \end{array}\right\} \text{O.K.}$$

Allgemeine Lösung der inhomogenen Differenzialgleichung

=

Partikuläre Lösung der inhomogenen Differenzialgleichung

+

allgemeine Lösung der homogenen Differenzialgleichung

Gilt immer

$$y' = p(x)y + q(x) \quad \text{(I)},$$

$$y' = p(x)y \quad \text{(H)},$$

$y' = p(x)y + q(x)$ (I), irgendeine Lösung sei: y_{I}

$y' = p(x)y$ (H),

Partikuläre Lösung

$$y_{\mathrm{I}}' = p(x)y_{\mathrm{I}} + q(x)$$

$y' = p(x)y + q(x)$ (I), irgendeine Lösung sei: y_{I}

$y' = p(x)y$ (H), Lösung sei: y_{H}

Allgemeine Lösung

$y_{\mathrm{I}}' = p(x)y_{\mathrm{I}} + q(x)$

$y_{\mathrm{H}}' = p(x)y_{\mathrm{H}}$

$y' = p(x)y + q(x)$ (I), irgendeine Lösung sei: y_I

$y' = p(x)y$ (H), Lösung sei: y_H

$y_\mathrm{I}' = p(x)y_\mathrm{I} + q(x)$

$y_\mathrm{H}' = p(x)y_\mathrm{H}$

Kombination: $y = Cy_\mathrm{H} + y_\mathrm{I}$ löst ebenfalls (I)

$y' = p(x)y + q(x)$ (I), irgendeine Lösung sei: y_{I}

$y' = p(x)y$ (H), Lösung sei: y_{H}

$y_{\mathrm{I}}' = p(x)y_{\mathrm{I}} + q(x)$

$y_{\mathrm{H}}' = p(x)y_{\mathrm{H}}$

Kombination: $y = Cy_{\mathrm{H}} + y_{\mathrm{I}}$ löst ebenfalls (I)

links: $y' = Cy_{\mathrm{H}}' + y_{\mathrm{I}}'$

$$y' = p(x)y + q(x) \quad \text{(I)}, \quad \text{irgendeine Lösung sei: } y_{\mathrm{I}}$$

$$y' = p(x)y \quad \text{(H)}, \ \text{Lösung sei: } y_{\mathrm{H}}$$

$$y'_{\mathrm{I}} = p(x)y_{\mathrm{I}} + q(x)$$

$$y'_{\mathrm{H}} = p(x)y_{\mathrm{H}}$$

Kombination: $y = Cy_{\mathrm{H}} + y_{\mathrm{I}}$ löst ebenfalls (I)

links: $y' = Cy'_{\mathrm{H}} + y'_{\mathrm{I}} = Cp(x)y_{\mathrm{H}} + p(x)y_{\mathrm{I}} + q(x)$

$y' = p(x)y + q(x)$ (I), irgendeine Lösung sei: y_{I}

$y' = p(x)y$ (H), Lösung sei: y_{H}

$y_{\mathrm{I}}' = p(x)y_{\mathrm{I}} + q(x)$

$y_{\mathrm{H}}' = p(x)y_{\mathrm{H}}$

Kombination: $y = Cy_{\mathrm{H}} + y_{\mathrm{I}}$ löst ebenfalls (I)

links: $y' = Cy_{\mathrm{H}}' + y_{\mathrm{I}}' = Cp(x)y_{\mathrm{H}} + p(x)y_{\mathrm{I}} + q(x)$

rechts: $p(x)y + q(x)$

$$y' = p(x)y + q(x) \quad \text{(I),} \quad \text{irgendeine Lösung sei: } y_\mathrm{I}$$

$$y' = p(x)y \quad \text{(H), Lösung sei: } y_\mathrm{H}$$

$$y'_\mathrm{I} = p(x)y_\mathrm{I} + q(x)$$

$$y'_\mathrm{H} = p(x)y_\mathrm{H}$$

Kombination: $y = Cy_\mathrm{H} + y_\mathrm{I}$ löst ebenfalls (I)

$$\left.\begin{array}{l} \text{links: } y' = Cy'_\mathrm{H} + y'_\mathrm{I} = Cp(x)y_\mathrm{H} + p(x)y_\mathrm{I} + q(x) \\ \text{rechts: } p(x)y + q(x) = p(x)\left(Cy_\mathrm{H} + y_\mathrm{I}\right) + q(x) \end{array}\right\} \text{O.K.}$$

Allgemeine Lösung der inhomogenen Differenzialgleichung

=

Partikuläre Lösung der inhomogenen Differenzialgleichung

+

allgemeine Lösung der homogenen Differenzialgleichung

Allgemeine Lösung der inhomogenen Differenzialgleichung

=

Partikuläre Lösung der inhomogenen Differenzialgleichung

+

allgemeine Lösung der homogenen Differenzialgleichung

Separation der Variablen

Allgemeine Lösung der inhomogenen Differenzialgleichung

Woher?

=

Partikuläre Lösung der inhomogenen Differenzialgleichung

+

allgemeine Lösung der homogenen Differenzialgleichung

Separation der Variablen

Variation der Konstanten

Joseph-Louis Lagrange
1736 - 1813

Variation der Konstanten

$$y' = \frac{2}{x}y + x^2 \qquad \text{(I)} \quad \text{partikuläre Lösung:} \quad y_{\mathrm{P}} = x^3 \ \text{(woher?)}$$

$$y' = \frac{2}{x}y \qquad \text{(H)} \quad \text{allgemeine Lösung:} \quad y_{\mathrm{H}} = Cx^2$$

Variation der Konstanten

$y' = \frac{2}{x} y + x^2$ (I) partikuläre Lösung: $y_{\mathrm{P}} = x^3$ (woher?)

$y' = \frac{2}{x} y$ (H) allgemeine Lösung: $y_{\mathrm{H}} = Cx^2$

Wir ersetzen $y_{\mathrm{H}} = \underbrace{C}_{\text{konstant}} x^2$ durch $y_{\mathrm{P}} = \underbrace{a(x)}_{\text{variabel}} x^2$

Variation der Konstanten

$y' = \frac{2}{x} y + x^2$ (I) partikuläre Lösung: $y_P = x^3$ (woher?)

$y' = \frac{2}{x} y$ (H) allgemeine Lösung: $y_H = Cx^2$

Wir ersetzen $y_H = Cx^2$ durch $y_P = a(x)x^2$

konstant

variabel

Allgemeine Lösung *homogen*

Versuch, eine *partikuläre* Lösung der inhomogenen Differenzialgleichung zu erhalten

Variation der Konstanten

$y' = \frac{2}{x} y + x^2$ (I) partikuläre Lösung: $y_P = x^3$ (woher?)

$y' = \frac{2}{x} y$ (H) allgemeine Lösung: $y_H = Cx^2$

Wir ersetzen $y_H = Cx^2$ durch $y_P = a(x)x^2$

$$y_P' = 2xa(x) + a'(x)x^2$$

Variation der Konstanten

$y' = \frac{2}{x}y + x^2$ (I) partikuläre Lösung: $y_P = x^3$ (woher?)

$y' = \frac{2}{x}y$ (H) allgemeine Lösung: $y_H = Cx^2$

Wir ersetzen $y_H = Cx^2$ durch $y_P = a(x)x^2$

$y'_P = 2xa(x) + a'(x)x^2$

Vergleich mit:

$y' = \frac{2}{x}y + x^2 = \frac{2}{x}a(x)x^2 + x^2$

Variation der Konstanten

$y' = \frac{2}{x} y + x^2$ (I) partikuläre Lösung: $y_P = x^3$ (woher?)

$y' = \frac{2}{x} y$ (H) allgemeine Lösung: $y_H = Cx^2$

Wir ersetzen $y_H = Cx^2$ durch $y_P = a(x)x^2$

$$\left.\begin{array}{l} y'_P = \underline{2xa(x)} + a'(x)x^2 \\ \text{Vergleich mit:} \\ y' = \frac{2}{x} y + x^2 = \underline{\frac{2}{x} a(x)} x^2 + x^2 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

Variation der Konstanten

$$y' = \frac{2}{x} y + x^2 \qquad \text{(I)} \quad \text{partikuläre Lösung:} \quad y_{\mathrm{P}} = x^3 \text{ (woher?)}$$

$$y' = \frac{2}{x} y \qquad \text{(H)} \quad \text{allgemeine Lösung:} \quad y_{\mathrm{H}} = Cx^2$$

Wir ersetzen $y_{\mathrm{H}} = Cx^2$ durch $y_{\mathrm{P}} = a(x)x^2$

$$\left.\begin{array}{l} y'_{\mathrm{P}} = 2\underline{xa(x)} + \underline{a'(x)x^2} \\ \text{Vergleich mit:} \\ y' = \dfrac{2}{x} y + x^2 = \underline{\dfrac{2}{x} a(x)}x^2 + \underline{x}^2 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

Variation der Konstanten

$$y' = \frac{2}{x}y + x^2 \qquad \text{(I)} \quad \text{partikuläre Lösung:} \quad y_\mathrm{P} = x^3 \ \text{(woher?)}$$

$$y' = \frac{2}{x}y \qquad \text{(H)} \quad \text{allgemeine Lösung:} \quad y_\mathrm{H} = Cx^2$$

Wir ersetzen $y_\mathrm{H} = Cx^2$ durch $y_\mathrm{P} = a(x)x^2$

$$\left.\begin{array}{l} y_\mathrm{P}' = 2\underline{xa(x)} + \underline{a'(x)x^2} \\ \text{Vergleich mit:} \\ y' = \frac{2}{x}y + x^2 = \frac{2}{x}\underline{a(x)x^2} + \underline{x}^2 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad a'(x) = 1$$

Variation der Konstanten

$y' = \frac{2}{x}y + x^2$ (I) partikuläre Lösung: $y_P = x^3$ (woher?)

$y' = \frac{2}{x}y$ (H) allgemeine Lösung: $y_H = Cx^2$

Wir ersetzen $y_H = Cx^2$ durch $y_P = a(x)x^2$

$$\left.\begin{array}{l} y_P' = \underline{2xa(x)} + \underline{a'(x)x^2} \\ \text{Vergleich mit:} \\ y' = \frac{2}{x}y + x^2 = \underline{\frac{2}{x}a(x)x^2} + \underline{x^2} \end{array}\right\} \Rightarrow \quad a'(x) = 1 \quad \Rightarrow \quad a(x) = x$$

Variation der Konstanten

$y' = \frac{2}{x} y + x^2$ (I) partikuläre Lösung: $y_P = x^3$ (woher?)

$y' = \frac{2}{x} y$ (H) allgemeine Lösung: $y_H = Cx^2$

Wir ersetzen $y_H = Cx^2$ durch $y_P = a(x)x^2$

$$\left.\begin{array}{l} y_P' = 2xa(x) + a'(x)x^2 \\ \text{Vergleich mit:} \\ y' = \frac{2}{x} y + x^2 = \frac{2}{x} a(x)x^2 + x^2 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad a'(x) = 1 \quad \Rightarrow \quad a(x) = x$$

$y_P = a(x)x^2$

Variation der Konstanten

$y' = \frac{2}{x} y + x^2$ (I) partikuläre Lösung: $y_P = x^3$ (woher?)

$y' = \frac{2}{x} y$ (H) allgemeine Lösung: $y_H = Cx^2$

Wir ersetzen $y_H = Cx^2$ durch $y_P = a(x) x^2$

$$\left.\begin{array}{l} y_P' = 2xa(x) + a'(x) x^2 \\ \text{Vergleich mit:} \\ y' = \frac{2}{x} y + x^2 = \frac{2}{x} a(x) x^2 + x^2 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad a'(x) = 1 \quad \Rightarrow \quad a(x) = x$$

$y_P = a(x) x^2 = xx^2$

Variation der Konstanten

$y' = \frac{2}{x} y + x^2$ (I) partikuläre Lösung: $y_P = x^3$ (woher?)

$y' = \frac{2}{x} y$ (H) allgemeine Lösung: $y_H = Cx^2$

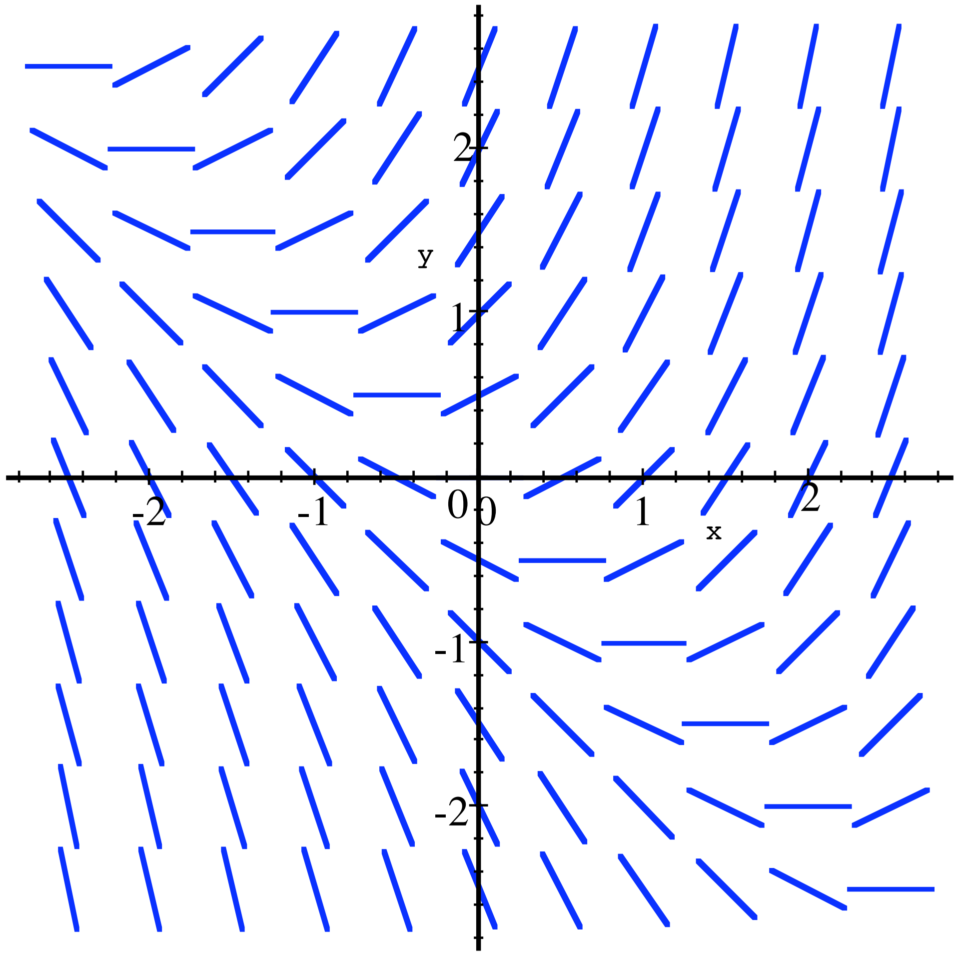
Wir ersetzen $y_H = Cx^2$ durch $y_P = a(x)x^2$

$$\left.\begin{array}{l} y_P' = 2xa(x) + a'(x)x^2 \\ \text{Vergleich mit:} \\ y' = \frac{2}{x} y + x^2 = \frac{2}{x} a(x)x^2 + x^2 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad a'(x) = 1 \quad \Rightarrow \quad a(x) = x$$

$y_P = a(x)x^2 = xx^2 = x^3$ voilà!

Beispiel: $\qquad y' = y + x$

Beispiel: $\quad y' = y + x$



$$\text{Beispiel:} \qquad y' = y + x$$

(H) $\qquad y' = y \quad \Rightarrow \quad y_{\mathrm{H}} = C\mathrm{e}^{x}$

Beispiel: $y' = y + x$

(H) $y' = y \quad \Rightarrow \quad y_H = Ce^x$

$y_P = a(x)e^x$ Constante variabel machen

Beispiel: $\quad y' = y + x$

(H) $\quad y' = y \quad \Rightarrow \quad y_H = C\mathrm{e}^x$

$y_P = a(x)\mathrm{e}^x$ Constante variabel machen

$y_P' = a'(x)\mathrm{e}^x + a(x)\mathrm{e}^x$

$$\text{Beispiel:} \qquad y' = y + x$$

$$\text{(H)} \qquad y' = y \quad \Rightarrow \quad y_H = Ce^x$$

$$y_P = a(x)e^x$$

Constante variabel machen

$$y'_P = a'(x)e^x + \underbrace{a(x)e^x}_{y_P}$$

Beispiel: $\quad y' = y + x$

(H) $\quad y' = y \quad \Rightarrow \quad y_H = C\mathrm{e}^x$

$y_P = a(x)\mathrm{e}^x$ Constante variabel machen

$$\left.\begin{array}{l} y_P' = a'(x)\mathrm{e}^x + \underbrace{a(x)\mathrm{e}^x}_{y_P} \\ \text{Vergleich} \\ y' = y + x \end{array}\right\}$$

Beispiel: $\quad y' = y + x$

(H) $\quad y' = y \quad \Rightarrow \quad y_H = Ce^x$

$y_P = a(x)e^x$ Constante variabel machen

$$\left.\begin{array}{l} y_P' = a'(x)e^x + \underbrace{a(x)e^x}_{y_P} \\ \text{Vergleich} \\ y' = y + x \end{array}\right\}$$

Beispiel: $\quad y' = y + x$

(H) $\quad y' = y \quad \Rightarrow \quad y_H = Ce^x$

$$y_P = a(x)e^x$$

Constante variabel machen

$$y_P' = \underline{a'(x)e^x} + \underline{\underbrace{a(x)e^x}_{y_P}}$$

Vergleich

$$y' = \underline{y} + \underline{x}$$

Beispiel: $\quad y' = y + x$

(H) $\quad y' = y \quad \Rightarrow \quad y_H = Ce^x$

$$y_P = a(x)e^x$$

Constante variabel machen

$$y_P' = a'(x)e^x + \underbrace{a(x)e^x}_{y_P}$$

Vergleich

$$y' = y + x$$

$$a'(x)e^x = x$$

Beispiel: $y' = y + x$

(H) $y' = y \Rightarrow y_H = Ce^x$

$y_P = a(x)e^x$ Constante variabel machen

$$\left.\begin{array}{l} y_P' = \underline{a'(x)e^x} + \underbrace{a(x)e^x}_{y_P} \\ \text{Vergleich} \\ y' = \underline{y} + \underline{x} \end{array}\right\} \underline{a'(x)e^x} = \underline{x} \Rightarrow a'(x) = xe^{-x}$$

Beispiel: $\quad y' = y + x$

$$a'(x) = x\mathrm{e}^{-x}$$

Beispiel: $\quad y' = y + x$

$$a'(x) = x\mathrm{e}^{-x}$$

$$a(x) = \int a'(x)\,\mathrm{d}\,x$$

$$\text{Beispiel:} \qquad y' = y + x$$

$$a'(x) = x\mathrm{e}^{-x}$$

Partielle Integration

$$a(x) = \int a'(x)\,\mathrm{d}x = \int \overset{\downarrow}{x}\,\overset{\uparrow}{\mathrm{e}^{-x}}\,\mathrm{d}x$$

$$\text{Beispiel:} \qquad y' = y + x$$

$$a'(x) = x\mathrm{e}^{-x}$$

Partielle Integration

$$a(x) = \int a'(x)\,\mathrm{d}x = \int \overset{\downarrow}{x}\,\overset{\uparrow}{\mathrm{e}^{-x}}\,\mathrm{d}x = -x\mathrm{e}^{-x} + \int \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$$

$$\text{Beispiel:} \qquad y' = y + x$$

$$a'(x) = x\mathrm{e}^{-x}$$

Partielle Integration

$$a(x) = \int a'(x)\,\mathrm{d}x = \int \overset{\downarrow}{x}\,\overset{\uparrow}{\mathrm{e}^{-x}}\,\mathrm{d}x = -x\mathrm{e}^{-x} + \underbrace{\int \mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x}_{-\mathrm{e}^{-x}}$$

$$\text{Beispiel:} \qquad y' = y + x$$

$$a'(x) = x\mathrm{e}^{-x}$$

Partielle Integration

$$a(x) = \int a'(x)\,\mathrm{d}x = \int \overset{\downarrow}{x}\,\mathrm{e}^{\overset{\uparrow}{-x}}\,\mathrm{d}x = -x\mathrm{e}^{-x} + \underbrace{\int \mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x}_{-\mathrm{e}^{-x}}$$

Wo bleibt die Integrationskonstante?

Beispiel: $\quad y' = y + x$

$$a'(x) = x\mathrm{e}^{-x}$$

Partielle Integration

$$a(x) = \int a'(x)\,\mathrm{d}x = \int \overset{\downarrow}{x}\,\overset{\uparrow}{\mathrm{e}^{-x}}\,\mathrm{d}x = -x\mathrm{e}^{-x} + \underbrace{\int \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x}_{-\mathrm{e}^{-x}} = \mathrm{e}^{-x}(-x-1)$$

Beispiel : $\quad y' = y + x$

$$a'(x) = x\mathrm{e}^{-x}$$

Partielle Integration

$$a(x) = \int a'(x)\,\mathrm{d}x = \int \overset{\downarrow}{x}\,\overset{\uparrow}{\mathrm{e}^{-x}}\,\mathrm{d}x = -x\mathrm{e}^{-x} + \underbrace{\int \mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x}_{-\mathrm{e}^{-x}} = \mathrm{e}^{-x}(-x-1)$$

$$y_{\mathrm{P}} = a(x)\mathrm{e}^{x}$$

„Variable Konstante“

Beispiel: $\quad y' = y + x$

$$a'(x) = x\mathrm{e}^{-x}$$

Partielle Integration

$$a(x) = \int a'(x)\,\mathrm{d}x = \int \overset{\downarrow}{x}\,\mathrm{e}^{\overset{\uparrow}{-x}}\,\mathrm{d}x = -x\mathrm{e}^{-x} + \underbrace{\int \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x}_{-\mathrm{e}^{-x}} = \mathrm{e}^{-x}(-x-1)$$

$$y_{\mathrm{P}} = a(x)\mathrm{e}^{x} = -x-1$$

„Variable Konstante“

Beispiel: $\quad y' = y + x$

$y_{\mathrm{H}} = C\mathrm{e}^{x}$ allgemein, homogene Diffglg

$y_{\mathrm{P}} = a(x)\mathrm{e}^{x} = -x - 1$ partikulär, inhomogene Diffglg

Allgemeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung:

$y(x) = -x - 1 + C\mathrm{e}^{x}$

$$\text{Beispiel:} \qquad y' = y + x$$

$$y = -x - 1 + Ce^{x}$$

a) Anfangsbedingung $\quad y(0) = 0$

$$\text{Beispiel:} \qquad y' = y + x$$

$$y = -x - 1 + C\mathrm{e}^{x}$$

a) Anfangsbedingung $\quad y(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad 0 = -1 + C$

$$\text{Beispiel:} \qquad y' = y + x$$

$$y = -x - 1 + C\mathrm{e}^{x}$$

a) Anfangsbedingung $\quad y(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad 0 = -1 + C \quad \Rightarrow \quad C = 1$

Beispiel: $\quad y' = y + x$

$$y = -x - 1 + C\mathrm{e}^{x}$$

a) Anfangsbedingung $\quad y(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad 0 = -1 + C \quad \Rightarrow \quad C = 1$

$$y = -x - 1 + \mathrm{e}^{x}$$

Beispiel: $\quad y' = y + x$

$$y = -x - 1 + Ce^{x}$$

a) Anfangsbedingung $\quad y(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad 0 = -1 + C \quad \Rightarrow \quad C = 1$

$$y = -x - 1 + e^{x}$$

b) Anfangsbedingung $\quad y(0) = -1$

Beispiel: $\quad y' = y + x$

$$y = -x - 1 + C\mathrm{e}^{x}$$

a) Anfangsbedingung $\quad y(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad 0 = -1 + C \quad \Rightarrow \quad C = 1$

$$y = -x - 1 + \mathrm{e}^{x}$$

b) Anfangsbedingung $\quad y(0) = -1 \quad \Rightarrow \quad -1 = -1 + C$

Beispiel: $\quad y' = y + x$

$$y = -x - 1 + C\mathrm{e}^{x}$$

a) Anfangsbedingung $\quad y(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad 0 = -1 + C \quad \Rightarrow \quad C = 1$

$$y = -x - 1 + \mathrm{e}^{x}$$

b) Anfangsbedingung $\quad y(0) = -1 \quad \Rightarrow \quad -1 = -1 + C \quad \Rightarrow \quad C = 0$

Beispiel: $\quad y' = y + x$

$$y = -x - 1 + C\mathrm{e}^{x}$$

a) Anfangsbedingung $\quad y(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad 0 = -1 + C \quad \Rightarrow \quad C = 1$

$$y = -x - 1 + \mathrm{e}^{x}$$

b) Anfangsbedingung $\quad y(0) = -1 \quad \Rightarrow \quad -1 = -1 + C \quad \Rightarrow \quad C = 0$

$$y = -x - 1$$

Beispiel: $\quad y' = y + x$

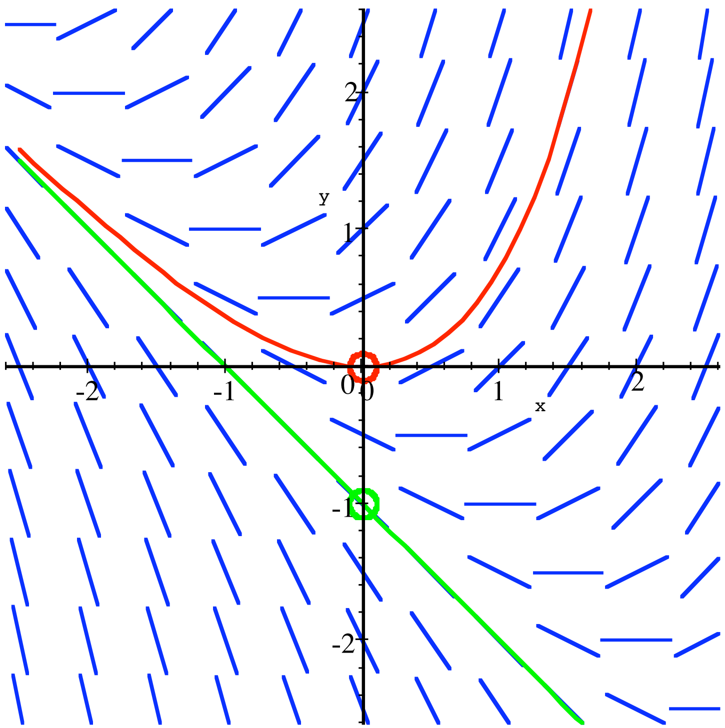
a) Anfangsbedingung $\quad y(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad y = -x - 1 + \mathrm{e}^{x}$

b) Anfangsbedingung $\quad y(0) = -1 \quad \Rightarrow \quad y = -x - 1$

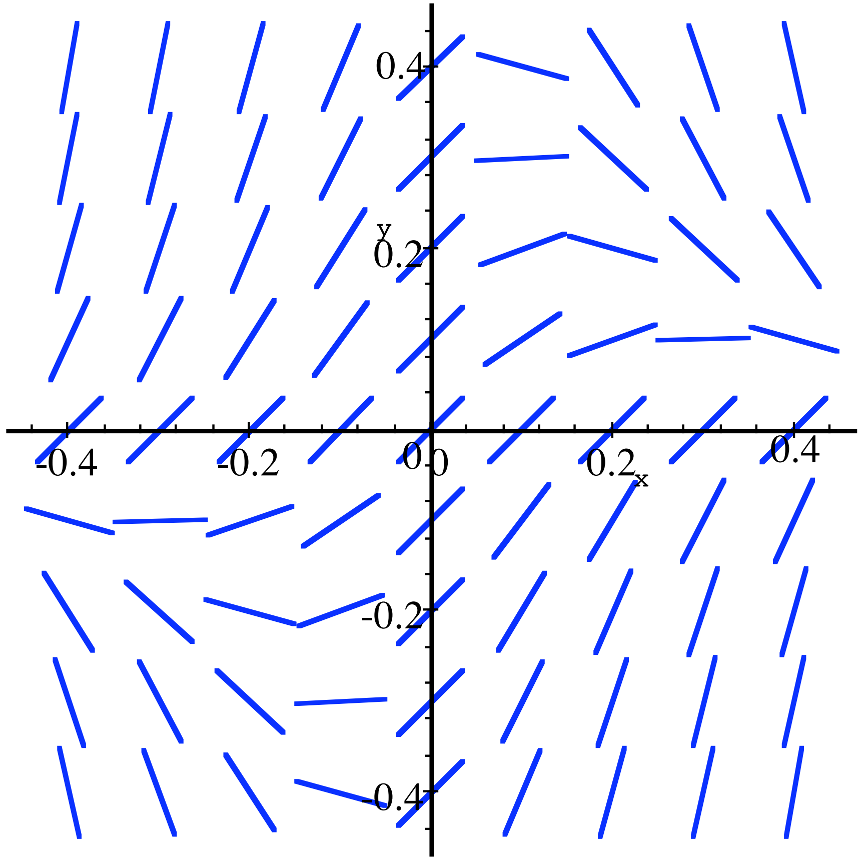
Beispiel: $\quad y' = y + x$

a) Anfangsbedingung $\quad y(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad y = -x - 1 + e^{x}$

b) Anfangsbedingung $\quad y(0) = -1 \quad \Rightarrow \quad y = -x - 1$



Beispiel: $\quad y' = 1 - 32xy$



Beispiel: $\quad y' = 1 - 32xy$

(H): $\quad y' = -32xy$

Beispiel: $y' = 1 - 32xy$

(H): $y' = -32xy$

$$\frac{\mathrm{d}y}{y} = -32x\,\mathrm{d}x$$

Beispiel: $\quad y' = 1 - 32xy$

(H): $\quad y' = -32xy$

$$\frac{\mathrm{d}y}{y} = -32x\,\mathrm{d}x$$

$$\ln\left(|y|\right) = -16x^2 + C_1$$

Beispiel: $y' = 1 - 32xy$

(H): $y' = -32xy$

$$\frac{\mathrm{d}y}{y} = -32x\,\mathrm{d}x$$

$$\ln\left(|y|\right) = -16x^2 + C_1$$

$$y_\mathrm{H} = C\mathrm{e}^{-16x^2}$$

Beispiel: $y' = 1 - 32xy$

$$y_{\mathrm{H}} = C\mathrm{e}^{-16x^2}$$

Beispiel: $y' = 1 - 32xy$

$$y_{\mathrm{H}} = C\mathrm{e}^{-16x^2}$$

$$y_{\mathrm{P}} = a(x)\mathrm{e}^{-16x^2}$$

Beispiel: $\quad y' = 1 - 32xy$

$$y_{\mathrm{H}} = C\mathrm{e}^{-16x^2}$$

$$y_{\mathrm{P}} = a(x)\mathrm{e}^{-16x^2}$$

$$y'_{\mathrm{P}} = a'(x)\mathrm{e}^{-16x^2} - 32x\,\underbrace{a(x)\mathrm{e}^{-16x^2}}_{y_{\mathrm{P}}}$$

$$\text{Beispiel:} \qquad y' = 1 - 32xy$$

$$y_\mathrm{H} = C\mathrm{e}^{-16x^2}$$

$$y_\mathrm{P} = a(x)\mathrm{e}^{-16x^2}$$

$$y_\mathrm{P}' = a'(x)\mathrm{e}^{-16x^2} - 32x\underbrace{a(x)\mathrm{e}^{-16x^2}}_{y_\mathrm{P}}$$

Vergleich:

$$y' = 1 - 32xy$$

$$\text{Beispiel:} \qquad y' = 1 - 32xy$$

$$y_\mathrm{H} = C\mathrm{e}^{-16x^2}$$

$$y_\mathrm{P} = a(x)\mathrm{e}^{-16x^2}$$

$$\left.\begin{array}{l} y_\mathrm{P}' = a'(x)\mathrm{e}^{-16x^2} - 32x\underbrace{a(x)\mathrm{e}^{-16x^2}}_{y_\mathrm{P}} \\ \\ \text{Vergleich:} \\ y' = 1 - 32xy \\ \\ \end{array}\right\} \Rightarrow a'(x)\mathrm{e}^{-16x^2} = 1$$

Beispiel: $\quad y' = 1 - 32xy$

$$y_\mathrm{H} = C\mathrm{e}^{-16x^2}$$

$$y_\mathrm{P} = a(x)\mathrm{e}^{-16x^2}$$

$$\left.\begin{array}{l} y'_\mathrm{P} = a'(x)\mathrm{e}^{-16x^2} - 32x\underbrace{a(x)\mathrm{e}^{-16x^2}}_{y_\mathrm{P}} \\ \\ \text{Vergleich:} \\ y' = 1 - 32xy \end{array}\right\} \Rightarrow a'(x)\mathrm{e}^{-16x^2} = 1 \Rightarrow a'(x) = \mathrm{e}^{16x^2}$$

Beispiel: $\quad y' = 1 - 32xy$

$$\left.\begin{array}{l} y_{\mathrm{H}} = C\mathrm{e}^{-16x^2} \\ y_{\mathrm{P}} = a(x)\mathrm{e}^{-16x^2} \\ y_{\mathrm{P}}' = a'(x)\mathrm{e}^{-16x^2} - 32x\underbrace{a(x)\mathrm{e}^{-16x^2}}_{y_{\mathrm{P}}} \\ \text{Vergleich:} \\ y' = 1 - 32xy \end{array}\right\} \Rightarrow a'(x)\mathrm{e}^{-16x^2} = 1 \Rightarrow a'(x) = \mathrm{e}^{16x^2}$$

$a(x) = \int \mathrm{e}^{16x^2}\,\mathrm{d}x \qquad$ geht nicht

90%

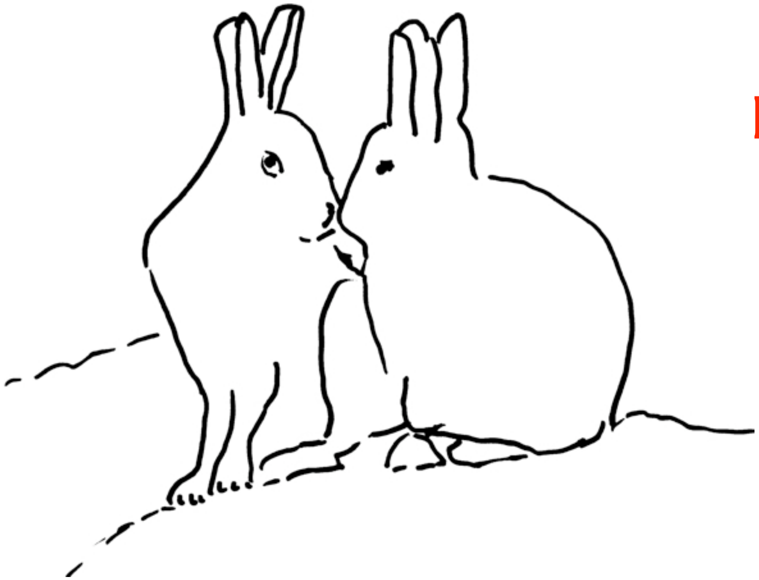
aller Lebewesen

beenden ihr Leben im Magen eines anderen Lebewesens

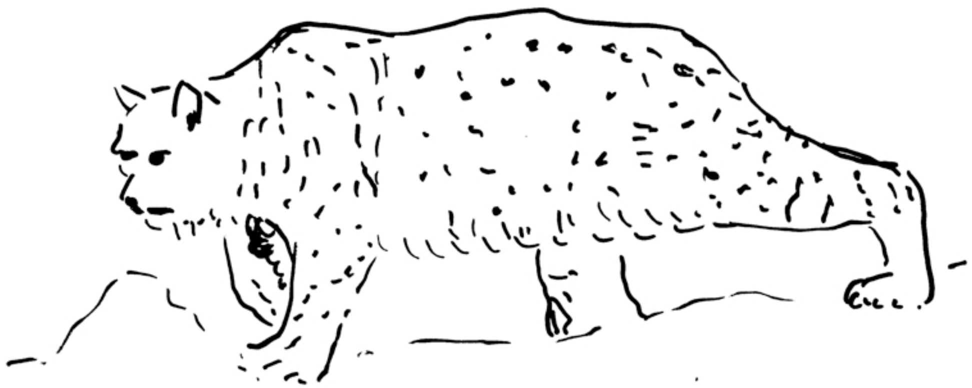
The early bird catches the early worm.
The early cat catches the early bird.
The early dog catches the early cat.

90%

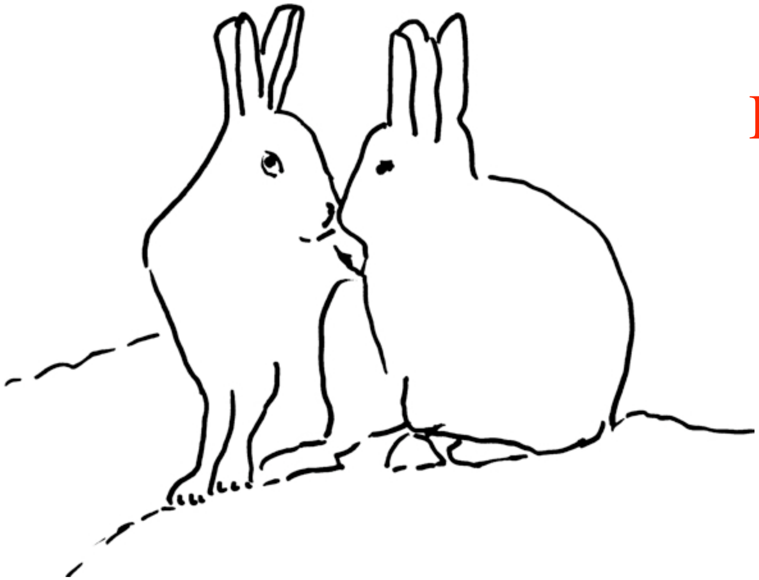
aller Lebewesen
beenden ihr Leben im Magen eines anderen Lebewesens



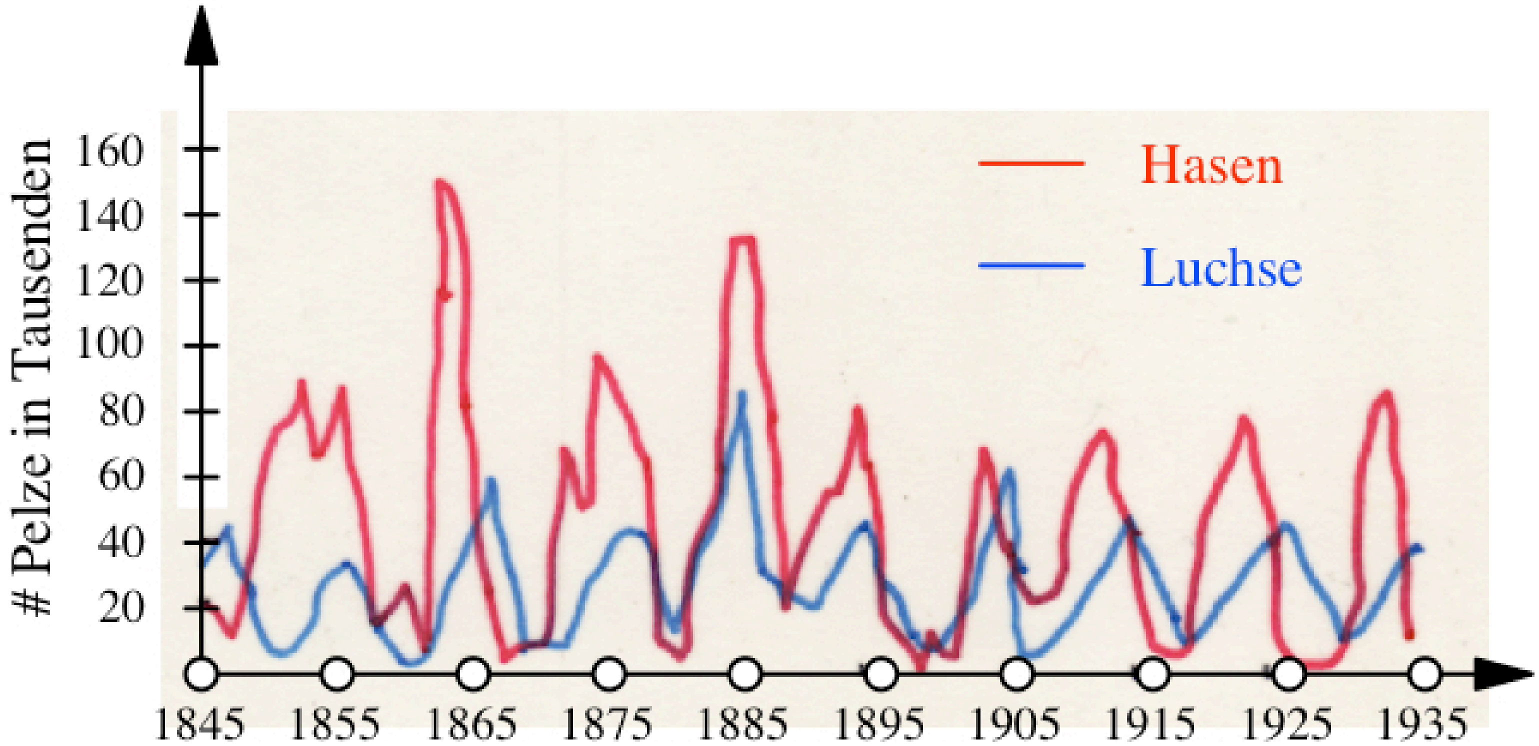
Hase



Luchs
und
Hase



Luchs und Hase



Gleichgewichtszustand

L = Anzahl Luchse im Gleichgewichtszustand

H = Anzahl Hasen im Gleichgewichtszustand

Gleichgewichtszustand

L = Anzahl Luchse im Gleichgewichtszustand

H = Anzahl Hasen im Gleichgewichtszustand

$l(t) = \#$ Luchse zur Zeit t

$h(t) = \#$ Hasen zur Zeit t

Gleichgewichtszustand

L = Anzahl Luchse im Gleichgewichtszustand

H = Anzahl Hasen im Gleichgewichtszustand

$l(t) = \#$ Luchse zur Zeit t

$h(t) = \#$ Hasen zur Zeit t

$$l'(t) = \alpha^2 \underbrace{\left(h(t) - H\right)}_{\substack{\text{Überschuss an} \\ \text{Hasen fördert} \\ \text{Luchspopulation}}}$$

Gleichgewichtszustand

L = Anzahl Luchse im Gleichgewichtszustand

H = Anzahl Hasen im Gleichgewichtszustand

$l(t) = \#$ Luchse zur Zeit t

$h(t) = \#$ Hasen zur Zeit t

$$l'(t) = \alpha^2 \underbrace{\left(h(t) - H\right)}_{\substack{\text{Überschuss an} \\ \text{Hasen fördert} \\ \text{Luchspopulation}}}$$

$$h'(t) = -\beta^2 \underbrace{\left(l(t) - L\right)}_{\substack{\text{Zuviel Luchse} \\ \text{fressen Hasen}}}$$

System von Differenzialgleichungen

$$\boxed{\begin{aligned} l'(t) &= \alpha^2\big(h(t)-H\big) \\ h'(t) &= -\beta^2\big(l(t)-L\big) \end{aligned}}$$

$$l'(t) = \alpha^2 \left(h(t) - H \right)$$

$$h'(t) = -\beta^2 \left(l(t) - L \right)$$

$$l'(t) = \alpha^2 \left(h(t) - H\right)$$

$$h'(t) = -\beta^2 \left(l(t) - L\right)$$

$$l''(t) = \alpha^2 h'(t)$$

$$l'(t) = \alpha^2\left(h(t) - H\right)$$

$$h'(t) = -\beta^2\left(l(t) - L\right)$$

$$l''(t) = \alpha^2 h'(t) = \alpha^2\left(-\beta^2\left(l(t) - L\right)\right)$$

$$l'(t) = \alpha^2 \left(h(t) - H\right)$$

$$h'(t) = -\beta^2 \left(l(t) - L\right)$$

$$l''(t) = \alpha^2 h'(t) = \alpha^2 \left(-\beta^2 \left(l(t) - L\right)\right) = -\alpha^2 \beta^2 l(t) + \alpha^2 \beta^2 L$$

$$l'(t) = \alpha^2 (h(t) - H)$$

$$h'(t) = -\beta^2 (l(t) - L)$$

$$l''(t) = \alpha^2 h'(t) = \alpha^2 \left(-\beta^2 (l(t) - L)\right) = -\alpha^2 \beta^2 l(t) + \alpha^2 \beta^2 L$$

$$h''(t) = -\beta^2 l'(t)$$

$$l'(t) = \alpha^2 \left(h(t) - H\right)$$

$$h'(t) = -\beta^2 \left(l(t) - L\right)$$

$$l''(t) = \alpha^2 h'(t) = \alpha^2 \left(-\beta^2 \left(l(t) - L\right)\right) = -\alpha^2 \beta^2 l(t) + \alpha^2 \beta^2 L$$

$$h''(t) = -\beta^2 l'(t) = -\beta^2 \left(\alpha^2 \left(h(t) - H\right)\right) = -\beta^2 \alpha^2 h(t) + \beta^2 \alpha^2 H$$

$$l'(t) = \alpha^2 \left(h(t) - H\right)$$

$$h'(t) = -\beta^2 \left(l(t) - L\right)$$

$$l''(t) = \alpha^2 h'(t) = \alpha^2 \left(-\beta^2 \left(l(t) - L\right)\right) = -\alpha^2 \beta^2 l(t) + \alpha^2 \beta^2 L$$

$$h''(t) = -\beta^2 l'(t) = -\beta^2 \left(\alpha^2 \left(h(t) - H\right)\right) = -\beta^2 \alpha^2 h(t) + \beta^2 \alpha^2 H$$

$$\boxed{\begin{aligned} l''(t) &= -\alpha^2 \beta^2 l(t) + \alpha^2 \beta^2 L \\ h''(t) &= -\beta^2 \alpha^2 h(t) + \beta^2 \alpha^2 H \end{aligned}}$$

$$l'(t) = \alpha^2 \left(h(t) - H\right)$$

$$h'(t) = -\beta^2 \left(l(t) - L\right)$$

$$l''(t) = \alpha^2 h'(t) = \alpha^2 \left(-\beta^2 \left(l(t) - L\right)\right) = -\alpha^2 \beta^2 l(t) + \alpha^2 \beta^2 L$$

$$h''(t) = -\beta^2 l'(t) = -\beta^2 \left(\alpha^2 \left(h(t) - H\right)\right) = -\beta^2 \alpha^2 h(t) + \beta^2 \alpha^2 H$$

Entflechtung

$$\boxed{\begin{aligned} l''(t) &= -\alpha^2 \beta^2 l(t) + \alpha^2 \beta^2 L \\ h''(t) &= -\beta^2 \alpha^2 h(t) + \beta^2 \alpha^2 H \end{aligned}}$$

nur Luchse

nur Hasen

Hasen zuerst

$$h''(t) = -\beta^2\alpha^2 h(t) + \beta^2\alpha^2 H \qquad \text{inhomogen}$$

Hasen zuerst

$$h''(t) = -\beta^2\alpha^2 h(t) + \beta^2\alpha^2 H \qquad \text{inhomogen}$$

$$h''(t) = -\beta^2\alpha^2 h(t) \qquad \text{homogen}$$

Hasen zuerst

$$h''(t) = -\beta^2\alpha^2 h(t) + \beta^2\alpha^2 H \qquad \text{inhomogen}$$

$$h''(t) = -\beta^2\alpha^2 h(t) \qquad \text{homogen}$$

Lösung: $h_{\mathrm{H}}(t) = C_1 \sin(\alpha\beta t) + C_2 \cos(\alpha\beta t)$

Hasen zuerst

$$h''(t) = -\beta^2\alpha^2 h(t) + \beta^2\alpha^2 H \qquad \text{inhomogen}$$

$$h''(t) = -\beta^2\alpha^2 h(t) \qquad \text{homogen}$$

Lösung: $h_{\mathrm{H}}(t) = C_1 \sin(\alpha\beta t) + C_2 \cos(\alpha\beta t)$

Kontrolle: $h'_{\mathrm{H}}(t) = \alpha\beta C_1 \cos(\alpha\beta t) - \alpha\beta C_2 \sin(\alpha\beta t)$

$$h''_{\mathrm{H}}(t) = -\alpha^2\beta^2 C_1 \sin(\alpha\beta t) - \alpha^2\beta^2 C_2 \cos(\alpha\beta t) = -\alpha^2\beta^2 h_H(t)$$

Hasen zuerst

$$h''(t) = -\beta^2\alpha^2 h(t) + \beta^2\alpha^2 H \qquad \text{inhomogen}$$

Hasen zuerst

$$h''(t) = -\beta^2\alpha^2 h(t) + \beta^2\alpha^2 H \qquad \text{inhomogen}$$

Triviale Lösung: $\quad h_{\mathrm{P}}(t) = H$

Hasen zuerst

$$h''(t) = -\beta^2\alpha^2 h(t) + \beta^2\alpha^2 H \qquad \text{inhomogen}$$

Triviale Lösung: $h_{\mathrm{P}}(t) = H$

Kontrolle: $h'_{\mathrm{P}}(t) = 0$

$$h''_{\mathrm{P}}(t) = 0$$

Hasen zuerst

$$h''(t) = -\beta^2\alpha^2 h(t) + \beta^2\alpha^2 H$$ inhomogen

Triviale Lösung: $h_P(t) = H$

Kontrolle: $h'_P(t) = 0$

$h''_P(t) = 0$

aber: $h''_P(t) = -\beta^2\alpha^2 h(t) + \beta^2\alpha^2 H = -\beta^2\alpha^2 H + \beta^2\alpha^2 H = 0$

Hasen zuerst

$$h''(t) = -\beta^2\alpha^2 h(t) + \beta^2\alpha^2 H$$ inhomogen

Allgemeine Lösung: $h(t) = H + C_1 \sin(\alpha\beta t) + C_2 \cos(\alpha\beta t)$

Pendelt um Gleichgewichtszustand

$$\boxed{\begin{aligned} l'(t) &= \alpha^2\big(h(t) - H\big) \\ h'(t) &= -\beta^2\big(l(t) - L\big) \end{aligned}}$$

$$h(t) = H + C_1 \sin(\alpha\beta t) + C_2 \cos(\alpha\beta t)$$

$$\boxed{\begin{aligned} l'(t) &= \alpha^2\left(h(t)-H\right) \\ h'(t) &= -\beta^2\left(l(t)-L\right) \end{aligned}}$$

$$h(t) = H + C_1 \sin(\alpha\beta t) + C_2 \cos(\alpha\beta t)$$

$$h'(t) = \alpha\beta C_1 \cos(\alpha\beta t) - \alpha\beta C_2 \sin(\alpha\beta t)$$

$$l'(t) = \alpha^2 (h(t) - H)$$
$$h'(t) = -\beta^2 (l(t) - L)$$

$$h(t) = H + C_1 \sin(\alpha\beta t) + C_2 \cos(\alpha\beta t)$$

$$h'(t) = \alpha\beta C_1 \cos(\alpha\beta t) - \alpha\beta C_2 \sin(\alpha\beta t) = -\beta^2 (l(t) - L)$$

$$l'(t) = \alpha^2 (h(t) - H)$$
$$h'(t) = -\beta^2 (l(t) - L)$$

$$h(t) = H + C_1 \sin(\alpha\beta t) + C_2 \cos(\alpha\beta t)$$

$$h'(t) = \alpha\beta C_1 \cos(\alpha\beta t) - \alpha\beta C_2 \sin(\alpha\beta t) = -\beta^2 (l(t) - L)$$

$$l(t) - L = -\tfrac{\alpha}{\beta} C_1 \cos(\alpha\beta t) + \tfrac{\alpha}{\beta} C_2 \sin(\alpha\beta t)$$

$$\boxed{\begin{aligned} l'(t) &= \alpha^2\left(h(t)-H\right) \\ h'(t) &= -\beta^2\left(l(t)-L\right) \end{aligned}}$$

$$h(t) = H + C_1\sin(\alpha\beta t) + C_2\cos(\alpha\beta t)$$

$$h'(t) = \alpha\beta C_1\cos(\alpha\beta t) - \alpha\beta C_2\sin(\alpha\beta t) = -\beta^2\left(l(t)-L\right)$$

$$l(t) - L = -\tfrac{\alpha}{\beta}C_1\cos(\alpha\beta t) + \tfrac{\alpha}{\beta}C_2\sin(\alpha\beta t)$$

$$l(t) = L + \tfrac{\alpha}{\beta}C_2\sin(\alpha\beta t) - \tfrac{\alpha}{\beta}C_1\cos(\alpha\beta t)$$

$$l(t) = L + \frac{\alpha}{\beta} C_2 \sin(\alpha\beta t) - \frac{\alpha}{\beta} C_1 \cos(\alpha\beta t)$$

$$h(t) = H + C_1 \sin(\alpha\beta t) + C_2 \cos(\alpha\beta t)$$

$$l(t) = L + \frac{\alpha}{\beta} C_2 \sin(\alpha\beta t) - \frac{\alpha}{\beta} C_1 \cos(\alpha\beta t)$$

$$h(t) = H + C_1 \sin(\alpha\beta t) + C_2 \cos(\alpha\beta t)$$

Andere Schreibweise:

$$D_1 := \frac{1}{\beta} C_1$$

$$D_2 := \frac{1}{\beta} C_2$$

$$l(t) = L + \alpha D_2 \sin(\alpha\beta t) - \alpha D_1 \cos(\alpha\beta t)$$

$$l(t) = L + \frac{\alpha}{\beta} C_2 \sin(\alpha\beta t) - \frac{\alpha}{\beta} C_1 \cos(\alpha\beta t)$$

$$h(t) = H + C_1 \sin(\alpha\beta t) + C_2 \cos(\alpha\beta t)$$

Andere Schreibweise:

$$D_1 := \frac{1}{\beta} C_1 \quad \Rightarrow \quad C_1 = \beta D_1$$

$$D_2 := \frac{1}{\beta} C_2 \quad \Rightarrow \quad C_2 = \beta D_2$$

$$l(t) = L + \alpha\, D_2 \sin(\alpha\beta t) - \alpha\, D_1 \cos(\alpha\beta t)$$

$$h(t) = H + \beta\, D_1 \sin(\alpha\beta t) + \beta\, D_2 \cos(\alpha\beta t)$$

$$\boxed{\begin{aligned} l'(t) &= \alpha^2\big(h(t) - H\big) \\ h'(t) &= -\beta^2\big(l(t) - L\big) \end{aligned}}$$

$$l(t) = L + \alpha D_2 \sin(\alpha\beta t) - \alpha D_1 \cos(\alpha\beta t)$$
$$h(t) = H + \beta D_1 \sin(\alpha\beta t) + \beta D_2 \cos(\alpha\beta t)$$

$$\boxed{\begin{aligned} l'(t) &= \alpha^2\left(h(t) - H\right) \\ h'(t) &= -\beta^2\left(l(t) - L\right) \end{aligned}}$$

$$l(t) = L + \alpha\, D_2 \sin(\alpha\beta t) - \alpha\, D_1 \cos(\alpha\beta t)$$
$$h(t) = H + \beta\, D_1 \sin(\alpha\beta t) + \beta\, D_2 \cos(\alpha\beta t)$$

Zwei Konstante
Frage der Anfangsbedingungen

Beispiel

$$\alpha^2 = 0.4 \qquad \beta^2 = 0.9$$

$$L = 40 \quad l(0) = 35$$

$$H = 60 \quad h(0) = 30$$

Beispiel

$$\alpha^2 = 0.4 \qquad \beta^2 = 0.9 \qquad \Rightarrow \quad \alpha\beta = \sqrt{0.36} = 0.6$$

$$L = 40 \quad l(0) = 35$$

$$H = 60 \quad h(0) = 30$$

Beispiel

$$\alpha^2 = 0.4 \qquad \beta^2 = 0.9 \qquad \Rightarrow \quad \alpha\beta = \sqrt{0.36} = 0.6$$

$$L = 40 \quad l(0) = 35$$

$$H = 60 \quad h(0) = 30$$

$$\begin{aligned} l(t) &= L + \alpha\, D_2 \sin(\alpha\beta t) - \alpha\, D_1 \cos(\alpha\beta t) \\ &= 40 + \sqrt{0.4}\, D_2 \sin(0.6t) - \sqrt{0.4}\, D_1 \cos(0.6t) \end{aligned}$$

Beispiel

$$\alpha^2 = 0.4 \qquad \beta^2 = 0.9 \qquad \Rightarrow \quad \alpha\beta = \sqrt{0.36} = 0.6$$

$$L = 40 \quad l(0) = 35$$

$$H = 60 \quad h(0) = 30$$

$$\begin{aligned} l(t) &= L + \alpha\, D_2 \sin(\alpha\beta t) - \alpha\, D_1 \cos(\alpha\beta t) \\ &= 40 + \sqrt{0.4}\, D_2 \sin(0.6t) - \sqrt{0.4}\, D_1 \cos(0.6t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h(t) &= H + \beta\, D_1 \sin(\alpha\beta t) + \beta\, D_2 \cos(\alpha\beta t) \\ &= 60 + \sqrt{0.9}\, D_1 \sin(0.6t) + \sqrt{0.9}\, D_2 \cos(0.6t) \end{aligned}$$

Beispiel

$$\alpha^2 = 0.4 \qquad \beta^2 = 0.9 \qquad \Rightarrow \quad \alpha\beta = \sqrt{0.36} = 0.6$$

$$L = 40 \quad l(0) = 35$$

$$H = 60 \quad h(0) = 30$$

$$l(t) = 40 + \sqrt{0.4}\, D_2 \sin(0.6t) - \sqrt{0.4}\, D_1 \cos(0.6t)$$

Beispiel

$$\alpha^2 = 0.4 \qquad \beta^2 = 0.9 \qquad \Rightarrow \quad \alpha\beta = \sqrt{0.36} = 0.6$$

$$L = 40 \quad l(0) = 35$$

$$H = 60 \quad h(0) = 30$$

$$l(t) = 40 + \sqrt{0.4}\, D_2 \sin(0.6t) - \sqrt{0.4}\, D_1 \cos(0.6t)$$

$$l(0) = 40 + \sqrt{0.4}\, D_2 \underbrace{\sin(0)}_{0} - \sqrt{0.4}\, D_1 \underbrace{\cos(0)}_{1}$$

Beispiel

$$\alpha^2 = 0.4 \qquad \beta^2 = 0.9 \qquad \Rightarrow \quad \alpha\beta = \sqrt{0.36} = 0.6$$

$$L = 40 \quad l(0) = 35$$

$$H = 60 \quad h(0) = 30$$

$$l(t) = 40 + \sqrt{0.4}\, D_2 \sin(0.6t) - \sqrt{0.4}\, D_1 \cos(0.6t)$$

$$l(0) = 40 + \sqrt{0.4}\, D_2 \underbrace{\sin(0)}_{0} - \sqrt{0.4}\, D_1 \underbrace{\cos(0)}_{1} = 40 - \sqrt{0.4}\, D_1$$

Beispiel

$$\alpha^2 = 0.4 \qquad \beta^2 = 0.9 \qquad \Rightarrow \quad \alpha\beta = \sqrt{0.36} = 0.6$$

$$L = 40 \quad l(0) = 35$$

$$H = 60 \quad h(0) = 30$$

$$l(t) = 40 + \sqrt{0.4}\, D_2 \sin(0.6t) - \sqrt{0.4}\, D_1 \cos(0.6t)$$

$$l(0) = 40 + \sqrt{0.4}\, D_2 \underbrace{\sin(0)}_{0} - \sqrt{0.4}\, D_1 \underbrace{\cos(0)}_{1} = 40 - \sqrt{0.4}\, D_1 \overset{!}{=} 35$$

Beispiel

$$\alpha^2 = 0.4 \qquad \beta^2 = 0.9 \qquad \Rightarrow \quad \alpha\beta = \sqrt{0.36} = 0.6$$

$$L = 40 \quad l(0) = 35$$

$$H = 60 \quad h(0) = 30$$

$$l(t) = 40 + \sqrt{0.4}\, D_2 \sin(0.6t) - \sqrt{0.4}\, D_1 \cos(0.6t)$$

$$l(0) = 40 + \sqrt{0.4}\, D_2 \underbrace{\sin(0)}_{0} - \sqrt{0.4}\, D_1 \underbrace{\cos(0)}_{1} = 40 - \sqrt{0.4}\, D_1 \overset{!}{=} 35$$

$$\Rightarrow D_1 = \frac{5}{\sqrt{0.4}}$$

Beispiel

$$\alpha^2 = 0.4 \qquad \beta^2 = 0.9 \qquad \Rightarrow \quad \alpha\beta = \sqrt{0.36} = 0.6$$

$$L = 40 \quad l(0) = 35$$

$$H = 60 \quad h(0) = 30$$

$$h(t) = 60 + \sqrt{0.9}\, D_1 \sin(0.6t) + \sqrt{0.9}\, D_2 \cos(0.6t)$$

Beispiel

$$\alpha^2 = 0.4 \qquad \beta^2 = 0.9 \qquad \Rightarrow \quad \alpha\beta = \sqrt{0.36} = 0.6$$

$$L = 40 \quad l(0) = 35$$

$$H = 60 \quad h(0) = 30$$

$$h(t) = 60 + \sqrt{0.9}\, D_1 \sin(0.6t) + \sqrt{0.9}\, D_2 \cos(0.6t)$$

$$h(0) = 60 + \sqrt{0.9}\, D_1 \sin(0) + \sqrt{0.9}\, D_2 \cos(0) = 60 + \sqrt{0.9}\, D_2 \overset{!}{=} 30$$

Beispiel

$$\alpha^2 = 0.4 \qquad \beta^2 = 0.9 \qquad \Rightarrow \quad \alpha\beta = \sqrt{0.36} = 0.6$$

$$L = 40 \quad l(0) = 35$$

$$H = 60 \quad h(0) = 30$$

$$h(t) = 60 + \sqrt{0.9}\, D_1 \sin(0.6t) + \sqrt{0.9}\, D_2 \cos(0.6t)$$

$$h(0) = 60 + \sqrt{0.9}\, D_1 \sin(0) + \sqrt{0.9}\, D_2 \cos(0) = 60 + \sqrt{0.9}\, D_2 \overset{!}{=} 30$$

$$\Rightarrow D_2 = -\frac{30}{\sqrt{0.9}}$$

$$l(t) = 40 + \sqrt{0.4}\, D_2 \sin(0.6t) - \sqrt{0.4}\, D_1 \cos(0.6t)$$

$$h(t) = 60 + \sqrt{0.9}\, D_1 \sin(0.6t) + \sqrt{0.9}\, D_2 \cos(0.6t)$$

$$D_1 = \frac{5}{\sqrt{0.4}} \quad D_2 = -\frac{30}{\sqrt{0.9}}$$

$$l(t) = 40 + \sqrt{0.4}\, D_2 \sin(0.6t) - \sqrt{0.4}\, D_1 \cos(0.6t)$$

$$h(t) = 60 + \sqrt{0.9}\, D_1 \sin(0.6t) + \sqrt{0.9}\, D_2 \cos(0.6t)$$

$$D_1 = \frac{5}{\sqrt{0.4}} \quad D_2 = -\frac{30}{\sqrt{0.9}}$$

$$l(t) = 40 - \underbrace{\underbrace{\frac{\sqrt{0.4}}{\sqrt{0.9}}}_{\sqrt{\frac{0.4}{0.9}} = \sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3}} \cdot 30}_{20} \sin(0.6t) - 5\cos(0.6t)$$

$$l(t) = 40 + \sqrt{0.4}\, D_2 \sin(0.6t) - \sqrt{0.4}\, D_1 \cos(0.6t)$$

$$h(t) = 60 + \sqrt{0.9}\, D_1 \sin(0.6t) + \sqrt{0.9}\, D_2 \cos(0.6t)$$

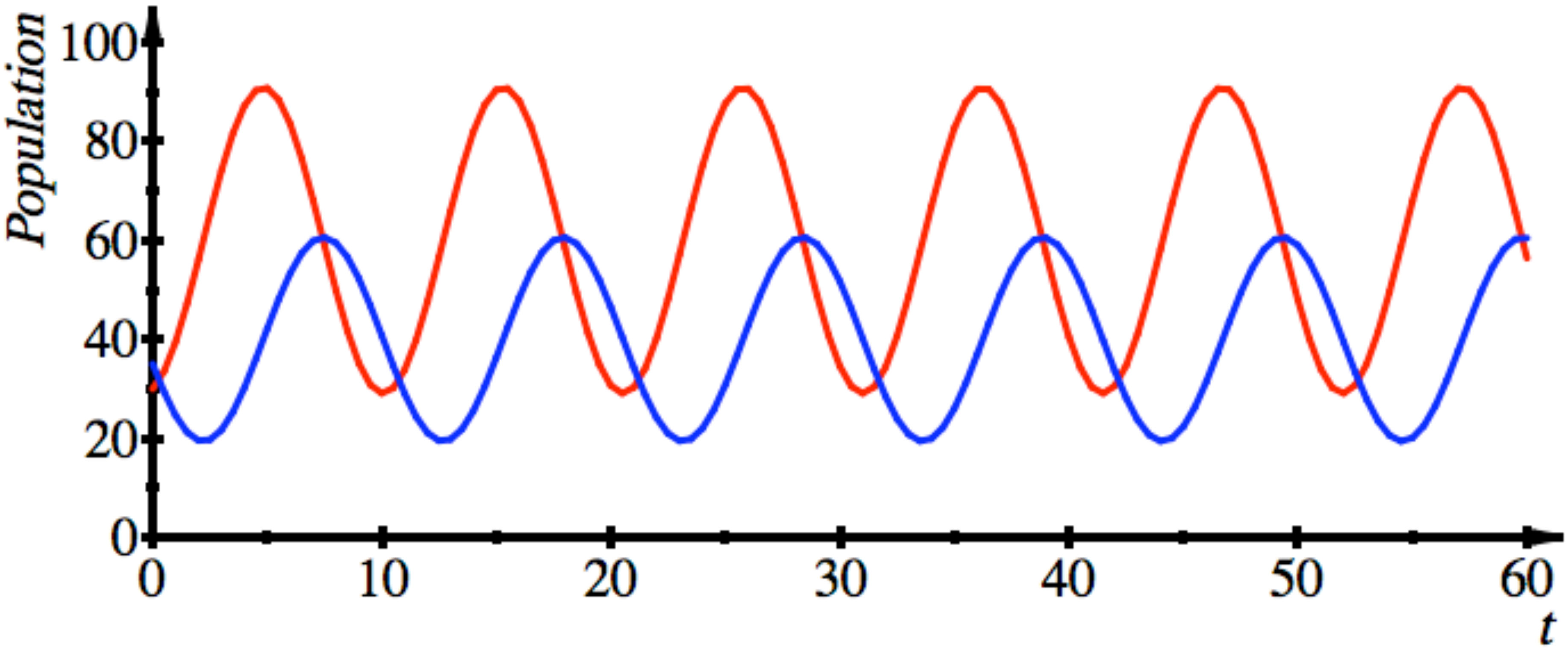
$$D_1 = \frac{5}{\sqrt{0.4}} \qquad D_2 = -\frac{30}{\sqrt{0.9}}$$

$$l(t) = 40 - \underbrace{\underbrace{\frac{\sqrt{0.4}}{\sqrt{0.9}}}_{\sqrt{\frac{0.4}{0.9}}=\sqrt{\frac{4}{9}}=\frac{2}{3}} \cdot 30}_{20} \sin(0.6t) - 5\cos(0.6t)$$

$$h(t) = 60 + \underbrace{\frac{3}{2} \cdot 5}_{7.5} \sin(0.6t) - 30\cos(0.6t)$$

$$l(t) = 40 - 20\sin(0.6t) - 5\cos(0.6t)$$

$$h(t) = 60 + 7.5\sin(0.6t) - 30\cos(0.6t)$$



$$h(t) = 60 + \underbrace{7.5\sin(0.6t) - 30\cos(0.6t)}_{\text{Einzige Schwingung?}}$$

$$h(t) = 60 + \underbrace{7.5\sin(0.6t) - 30\cos(0.6t)}_{\text{Einzige Schwingung?}}$$

Ansatz

$$7.5\sin(0.6t) - 30\cos(0.6t) = C\sin(0.6t + \delta)$$

$$h(t) = 60 + \underbrace{7.5\sin(0.6t) - 30\cos(0.6t)}_{\text{Einzige Schwingung?}}$$

Ansatz

$$7.5\sin(0.6t) - 30\cos(0.6t) = C\sin(0.6t + \delta)$$

Additionstheorem für Sinus

$$C\sin(0.6t + \delta) = C\left(\sin(0.6t)\cos(\delta) + \cos(0.6t)\sin(\delta)\right)$$

$$h(t) = 60 + \underbrace{7.5\sin(0.6t) - 30\cos(0.6t)}_{\text{Einzige Schwingung?}}$$

Ansatz

$$7.5\sin(0.6t) - 30\cos(0.6t) = C\sin(0.6t + \delta)$$

Additionstheorem für Sinus

$$C\sin(0.6t + \delta) = C\left(\sin(0.6t)\cos(\delta) + \cos(0.6t)\sin(\delta)\right)$$

$$7.5\sin(0.6t) - 30\cos(0.6t) = C\left(\sin(0.6t)\cos(\delta) + \cos(0.6t)\sin(\delta)\right)$$

$$h(t) = 60 + \underbrace{7.5\sin(0.6t) - 30\cos(0.6t)}_{\text{Einzige Schwingung?}}$$

Ansatz

$$7.5\sin(0.6t) - 30\cos(0.6t) = C\sin(0.6t + \delta)$$

Additionstheorem für Sinus

$$C\sin(0.6t + \delta) = C\left(\sin(0.6t)\cos(\delta) + \cos(0.6t)\sin(\delta)\right)$$

$$\underline{7.5\sin(0.6t)} - 30\cos(0.6t) = \underline{C\left(\sin(0.6t)\cos(\delta)\right.} + \left.\cos(0.6t)\sin(\delta)\right)$$

Vergleich

$$h(t) = 60 + \underbrace{7.5\sin(0.6t) - 30\cos(0.6t)}_{\text{Einzige Schwingung?}}$$

Ansatz

$$7.5\sin(0.6t) - 30\cos(0.6t) = C\sin(0.6t + \delta)$$

Additionstheorem für Sinus

$$C\sin(0.6t + \delta) = C\left(\sin(0.6t)\cos(\delta) + \cos(0.6t)\sin(\delta)\right)$$

$$\underline{7.5\sin(0.6t)} - 30\cos(0.6t) = \underline{C\left(\sin(0.6t)\cos(\delta)\right.} + \left.\cos(0.6t)\sin(\delta)\right)$$

Vergleich

$$\underline{7.5 = C\cos(\delta)}$$

$$h(t) = 60 + \underbrace{7.5\sin(0.6t) - 30\cos(0.6t)}_{\text{Einzige Schwingung?}}$$

Ansatz

$$7.5\sin(0.6t) - 30\cos(0.6t) = C\sin(0.6t + \delta)$$

Additionstheorem für Sinus

$$C\sin(0.6t + \delta) = C\left(\sin(0.6t)\cos(\delta) + \cos(0.6t)\sin(\delta)\right)$$

$$\underline{7.5\sin(0.6t)} - 30\cos(0.6t) = \underline{C\left(\sin(0.6t)\cos(\delta)\right.} + \left.\cos(0.6t)\sin(\delta)\right)$$

Vergleich

$$\underline{7.5 = C\cos(\delta)} \quad \text{und} \quad -30 = C\sin(\delta)$$

$$7.5 = C\cos(\delta)$$

$$-30 = C\sin(\delta)$$

$$7.5 = C\cos(\delta) \qquad 7.5^2 = 56.25 = C^2\left(\cos(\delta)\right)^2$$

$$-30 = C\sin(\delta) \qquad (-30)^2 = 900 = C^2\left(\sin(\delta)\right)^2$$

$$7.5 = C\cos(\delta) \qquad 7.5^2 = 56.25 = C^2\left(\cos(\delta)\right)^2$$

$$-30 = C\sin(\delta) \qquad (-30)^2 = 900 = C^2\left(\sin(\delta)\right)^2$$

$$956.25 = C^2$$

$$7.5 = C\cos(\delta) \qquad 7.5^2 = 56.25 = C^2\left(\cos(\delta)\right)^2$$

$$-30 = C\sin(\delta) \qquad (-30)^2 = 900 = C^2\left(\sin(\delta)\right)^2$$

$$956.25 = C^2$$

$$C = \pm\sqrt{956.25} \approx \pm 30.923$$

Was stimmt nun?

$$7.5 = C\cos(\delta) \qquad 7.5^2 = 56.25 = C^2(\cos(\delta))^2$$

$$-30 = C\sin(\delta) \qquad (-30)^2 = 900 = C^2(\sin(\delta))^2$$

$$956.25 = C^2$$

$$C = \pm\sqrt{956.25} \approx \pm 30.923$$

$$\frac{C\sin(\delta)}{C\cos(\delta)} = \tan(\delta) = \frac{-30}{7.5} = -4$$

$$7.5 = C\cos(\delta) \qquad\qquad 7.5^2 = 56.25 = C^2\left(\cos(\delta)\right)^2$$

$$-30 = C\sin(\delta) \qquad\qquad \underline{(-30)^2 = 900 = C^2\left(\sin(\delta)\right)^2}$$

$$956.25 = C^2$$

$$C = \pm\sqrt{956.25} \approx \pm 30.923$$

$$\frac{C\sin(\delta)}{C\cos(\delta)} = \tan(\delta) = \frac{-30}{7.5} = -4$$

$$\delta = \arctan(-4) + k\pi \approx -1.326 + k\pi$$

Was stimmt nun?

$$h(t) = 60 + 7.5\sin(0.6t) - 30\cos(0.6t) = 60 + C\sin(0.6t + \delta)$$

$$C = \pm\sqrt{956.25} \approx \pm 30.923$$

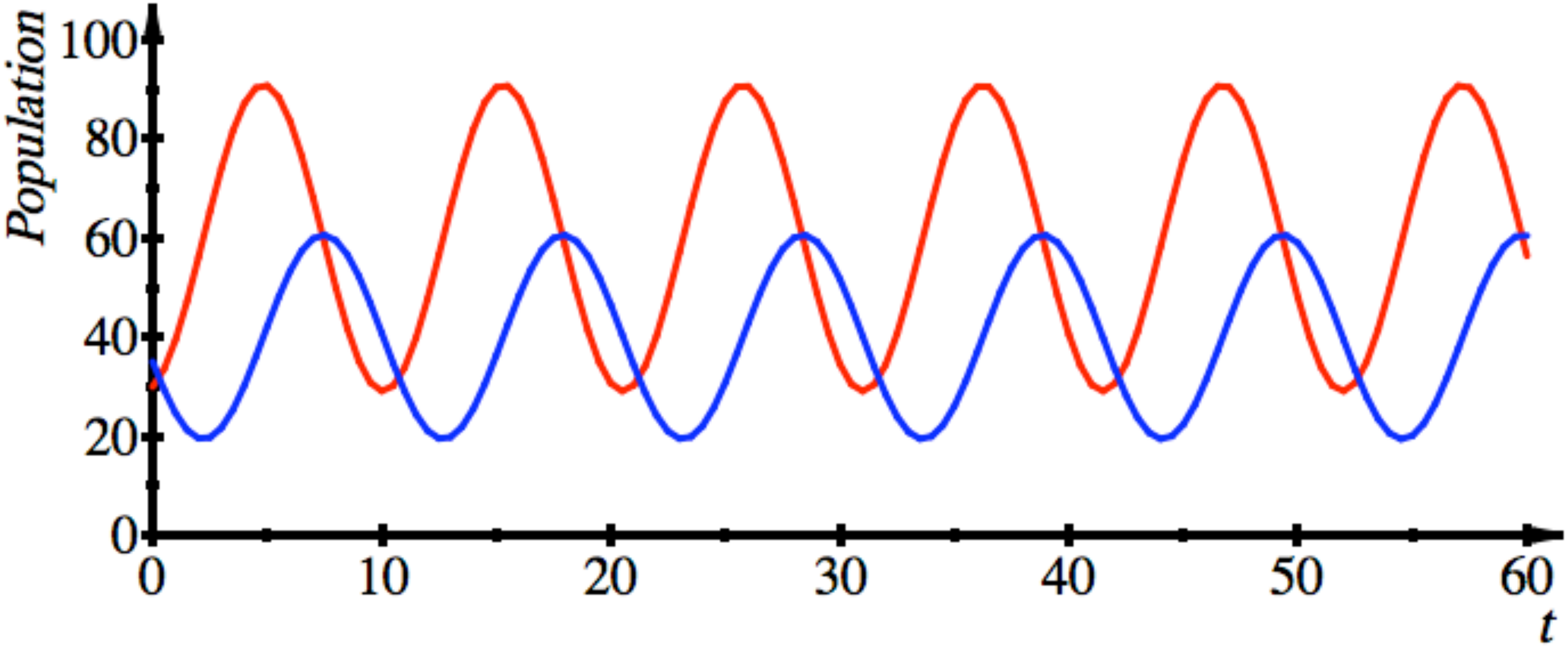
$$\delta = \arctan(-4) + k\pi \approx -1.326 + k\pi$$

Probieren mit verschiedenen Werten für t

$$h(t) = 60 + 30.923\sin(0.6t - 1.326)$$

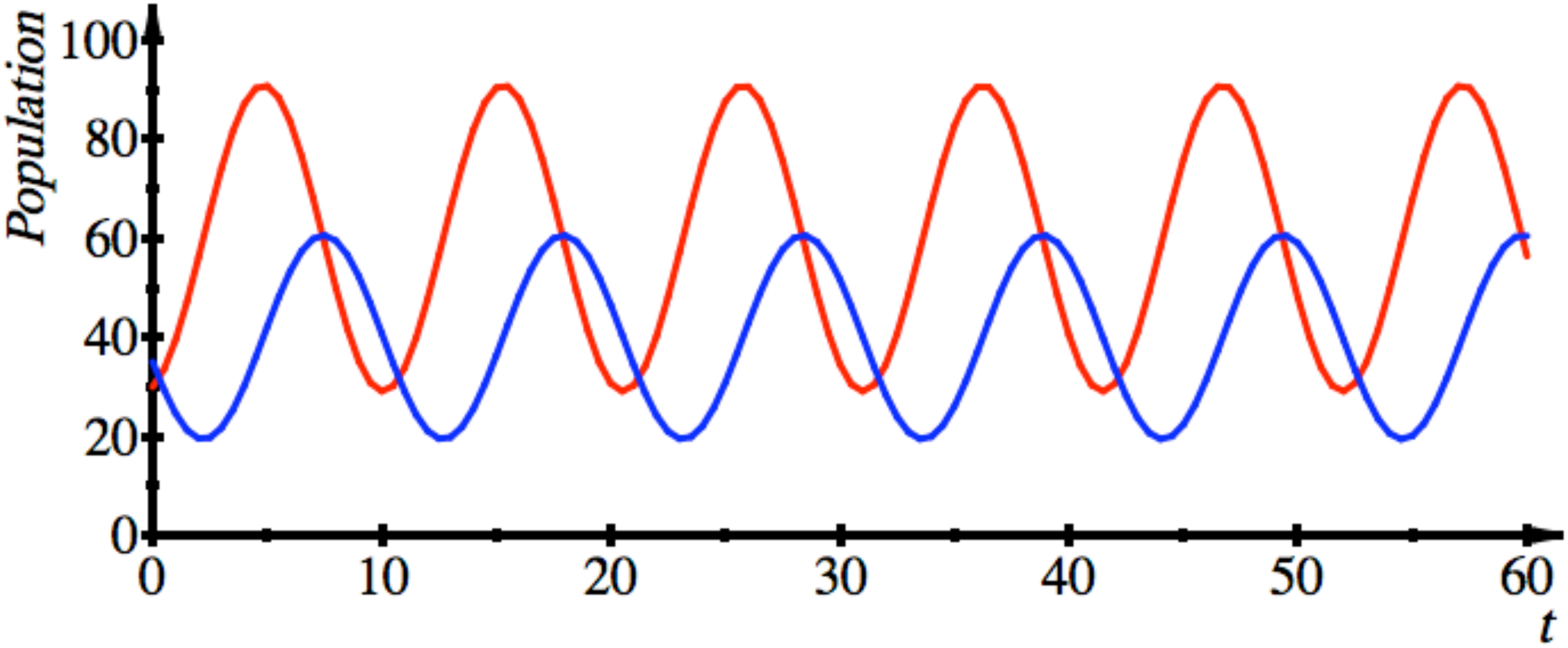
$$h(t) = 60 + 30.923\sin(0.6t - 1.326)$$

Amplitude



$$h(t) = 60 + 30.923\sin(0.6t - 1.326)$$

Analog: $l(t) = 40 + 20.616\sin(0.6t - 2.900)$



Krasses Beispiel

$$\alpha^2 = 0.4 \qquad \beta^2 = 0.9 \qquad \Rightarrow \quad \alpha\beta = \sqrt{0.36} = 0.6$$

$L = 40$ $\quad l(0) = 10 \qquad$ Leichte Veränderung

$H = 60$ $\quad h(0) = 20 \qquad$ der Anfangsbedingungen

Krasses Beispiel

$$\alpha^2 = 0.4 \qquad \beta^2 = 0.9 \qquad \Rightarrow \quad \alpha\beta = \sqrt{0.36} = 0.6$$

$L = 40 \quad l(0) = 10$ Leichte Veränderung

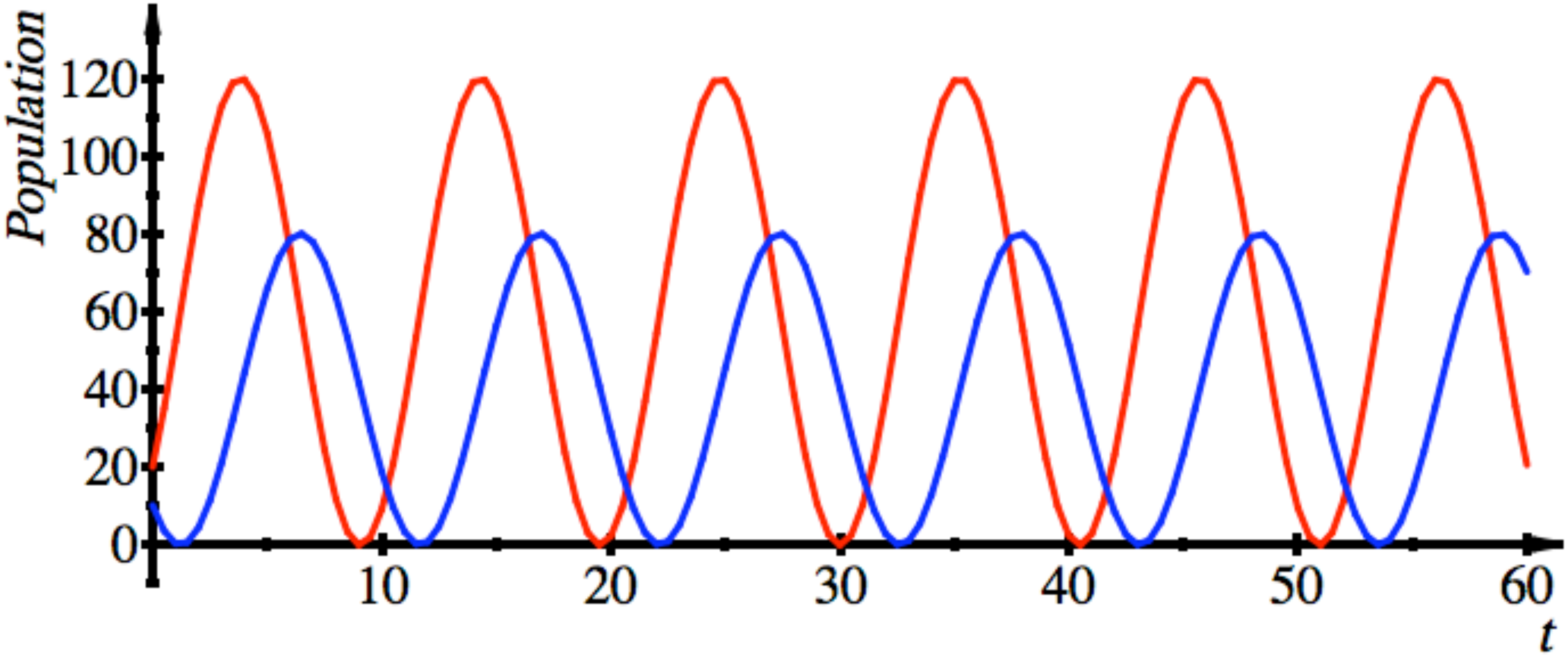
$H = 60 \quad h(0) = 20$ der Anfangsbedingungen

$$l(t) = 40 - \frac{80}{3}\sin(0.6t) - 30\cos(0.6t)$$

$$h(t) = 60 + 45\sin(0.6t) - 40\cos(0.6t)$$

$$l(t) = 40 - \frac{80}{3}\sin(0.6t) - 30\cos(0.6t)$$

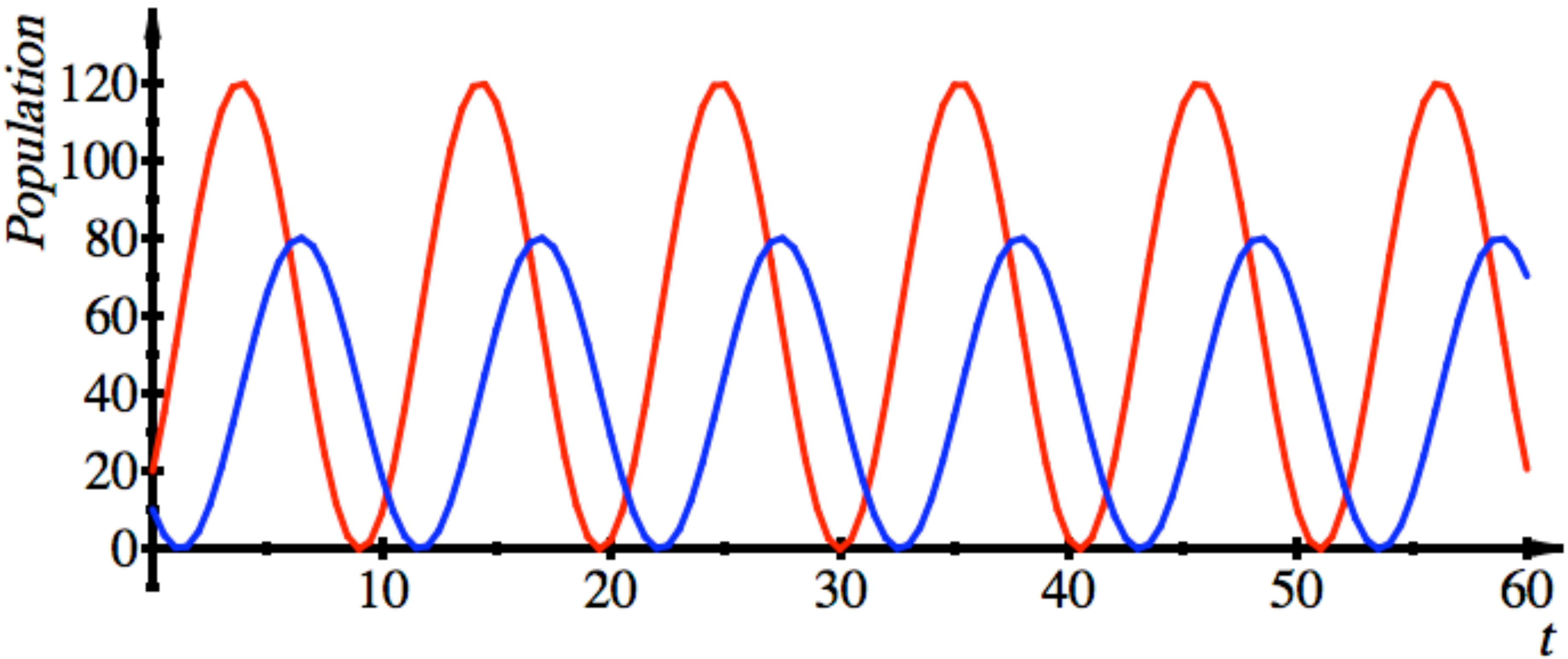
$$h(t) = 60 + 45\sin(0.6t) - 40\cos(0.6t)$$



Schaffen sie die Kurve?

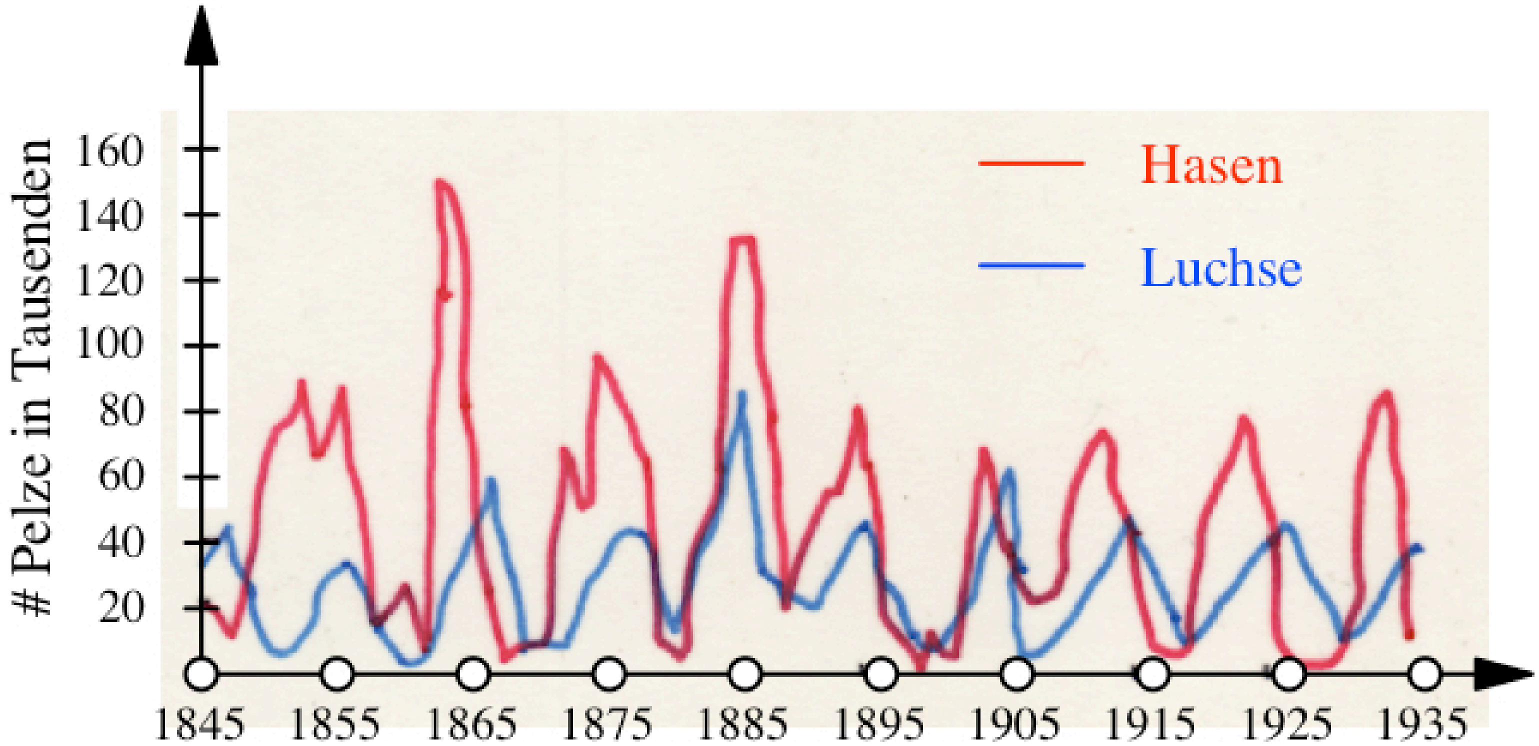
$$l(t) = 40 + 40.1386486\cos(0.6t + 2.414950313)$$

$$h(t) = 60 + 60.20797289\cos(0.6t - 2.297438667)$$

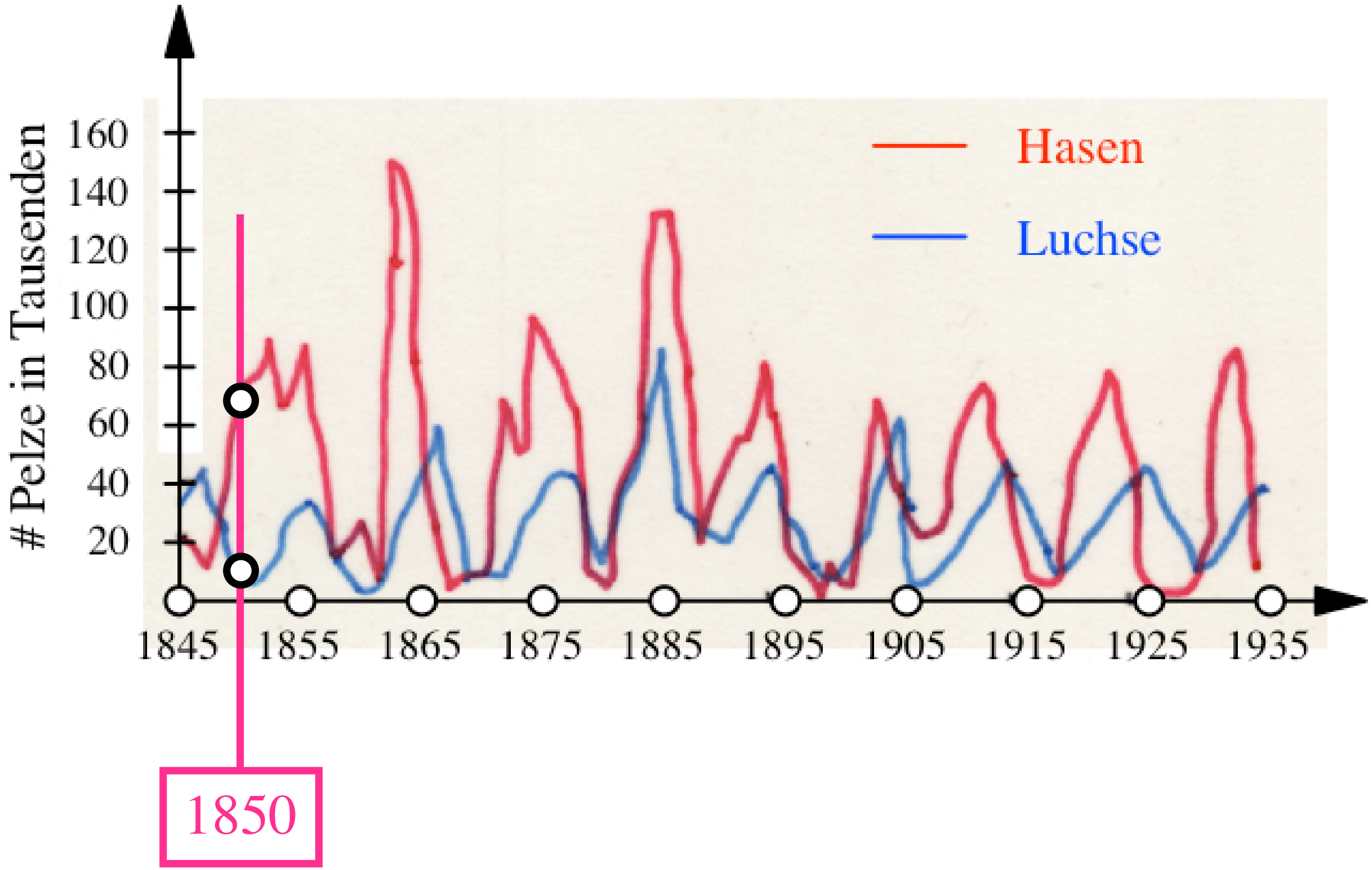


Schaffen sie die Kurve?
Leider nein.

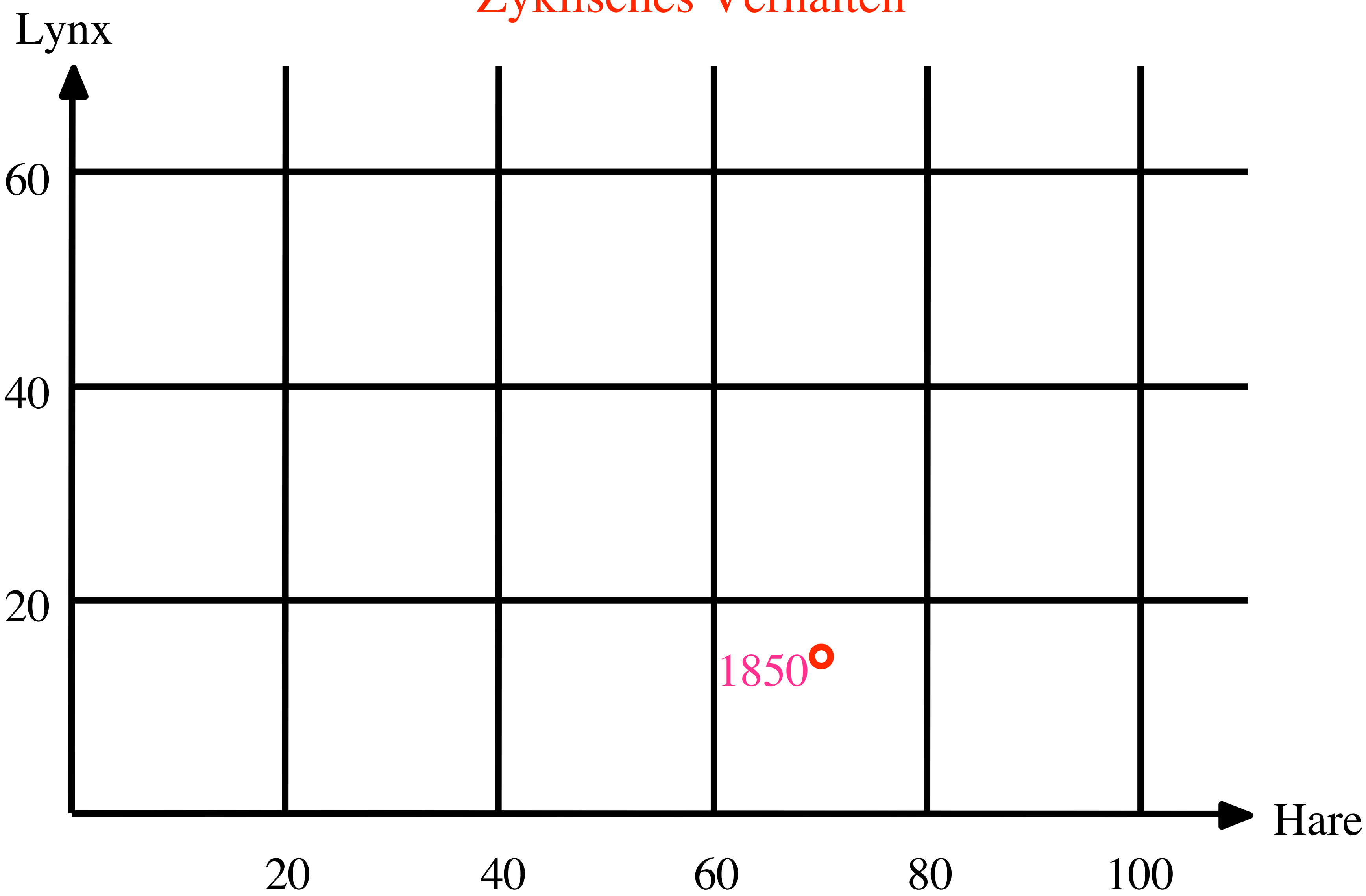
Luchs und Hase



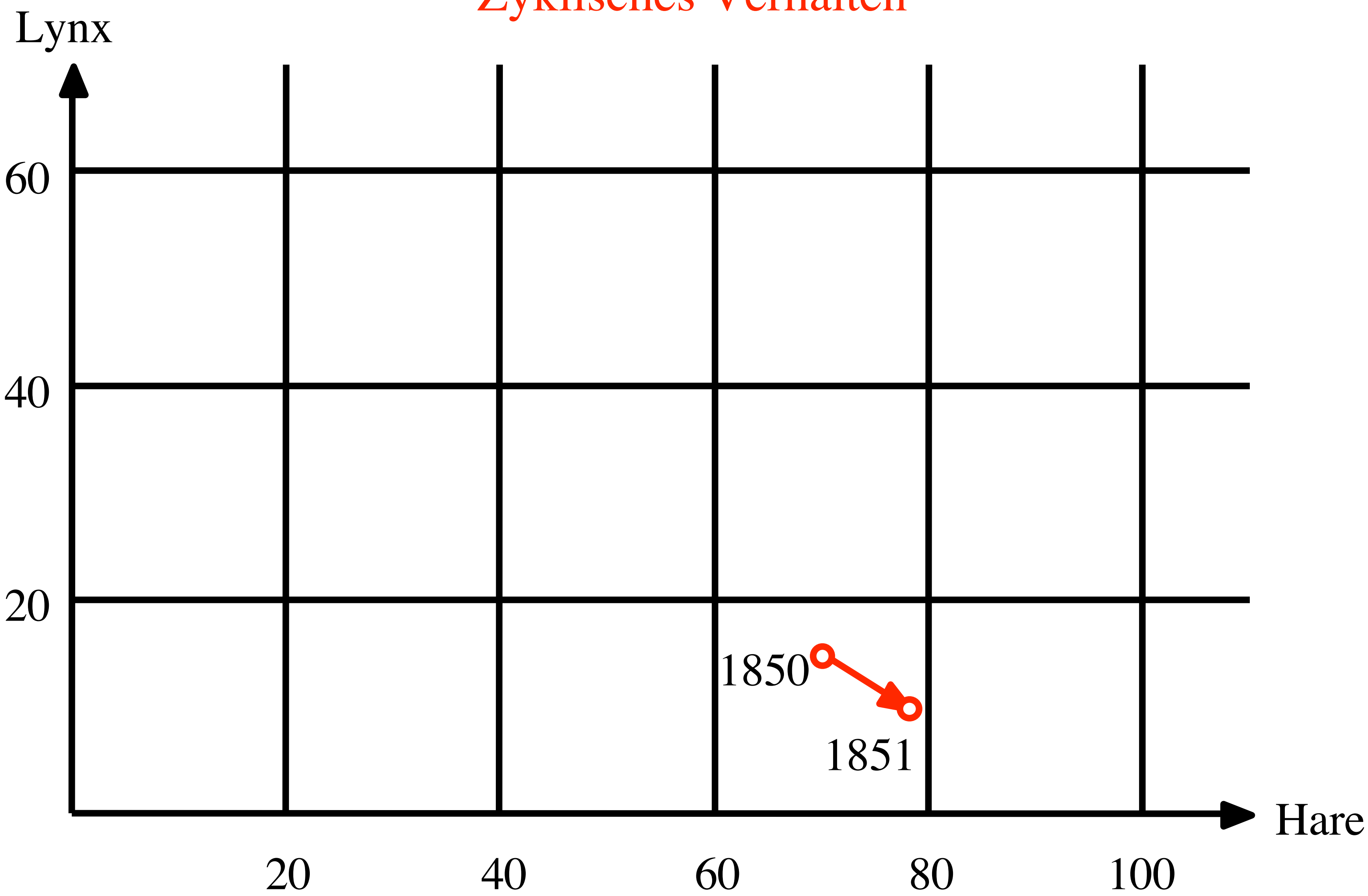
Luchs und Hase



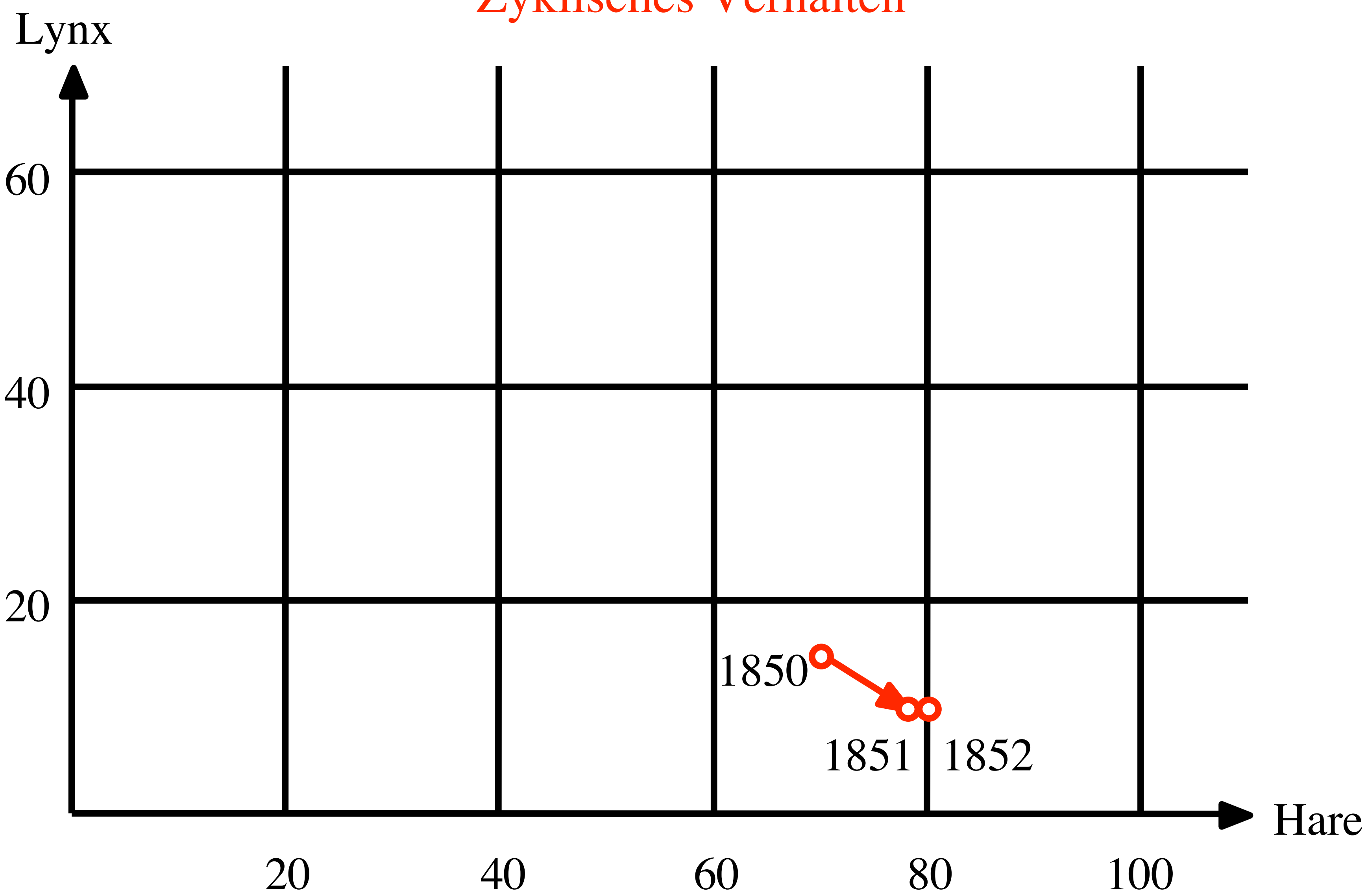
Zyklisches Verhalten



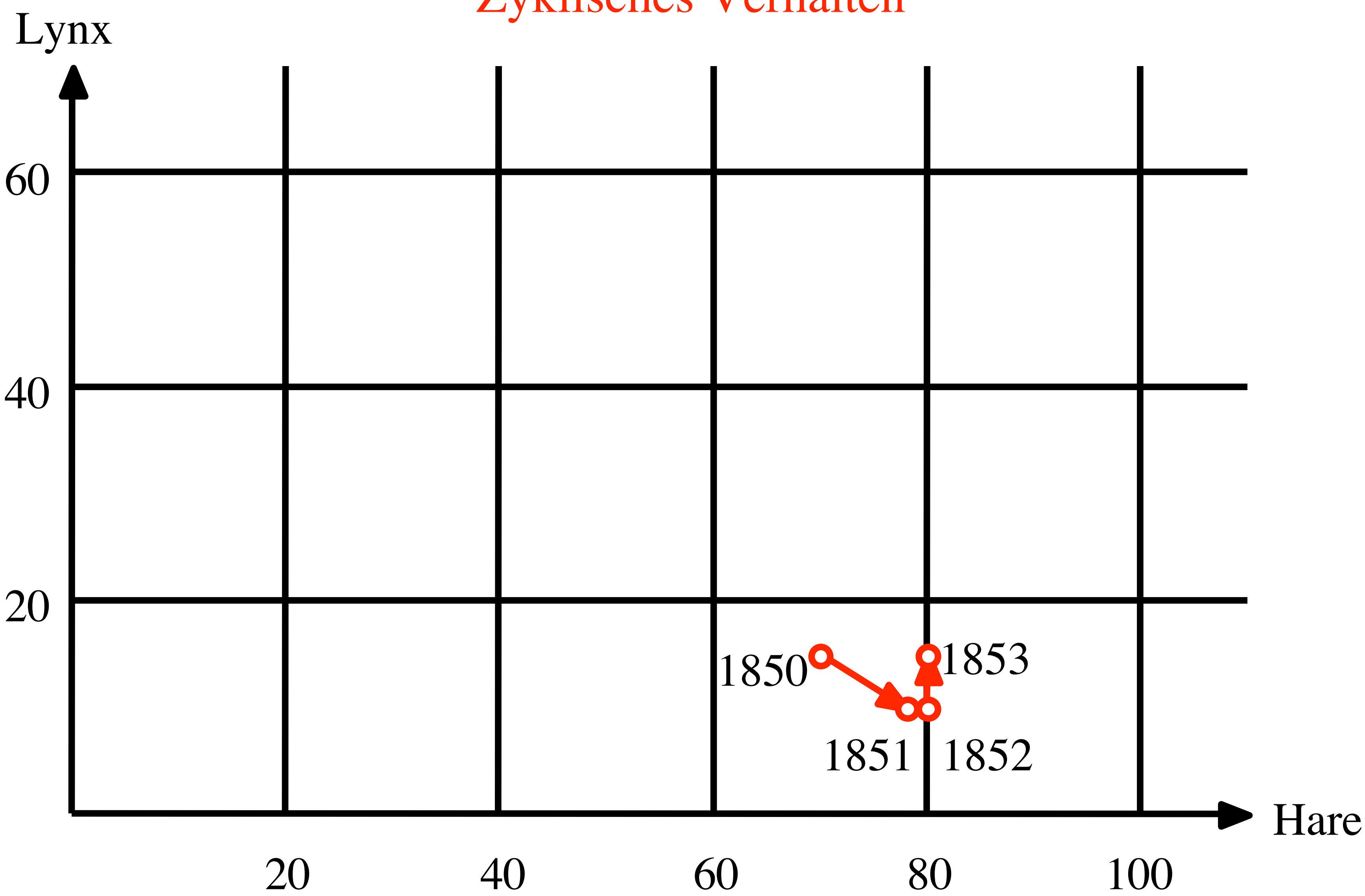
Zyklisches Verhalten



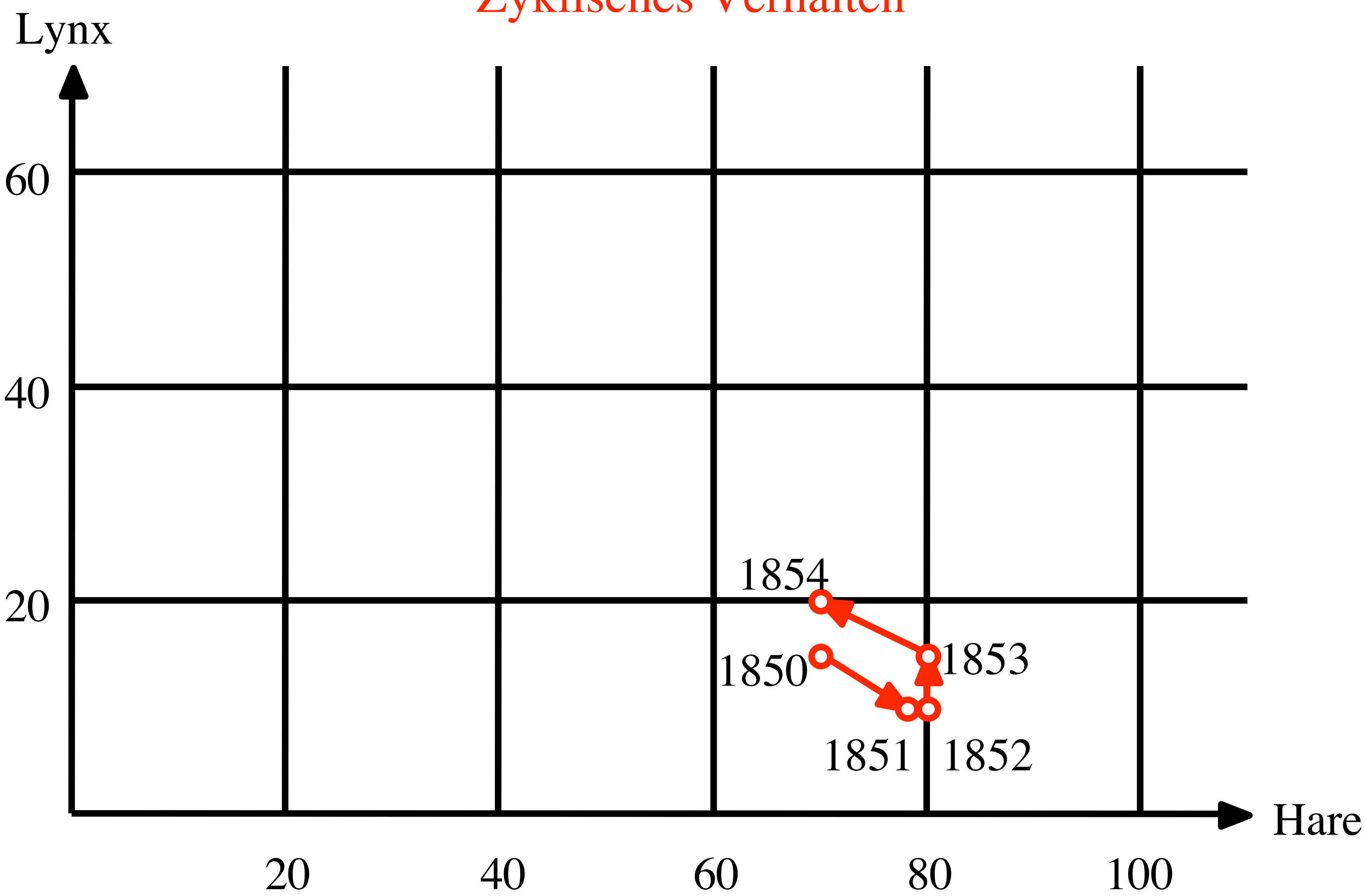
Zyklisches Verhalten

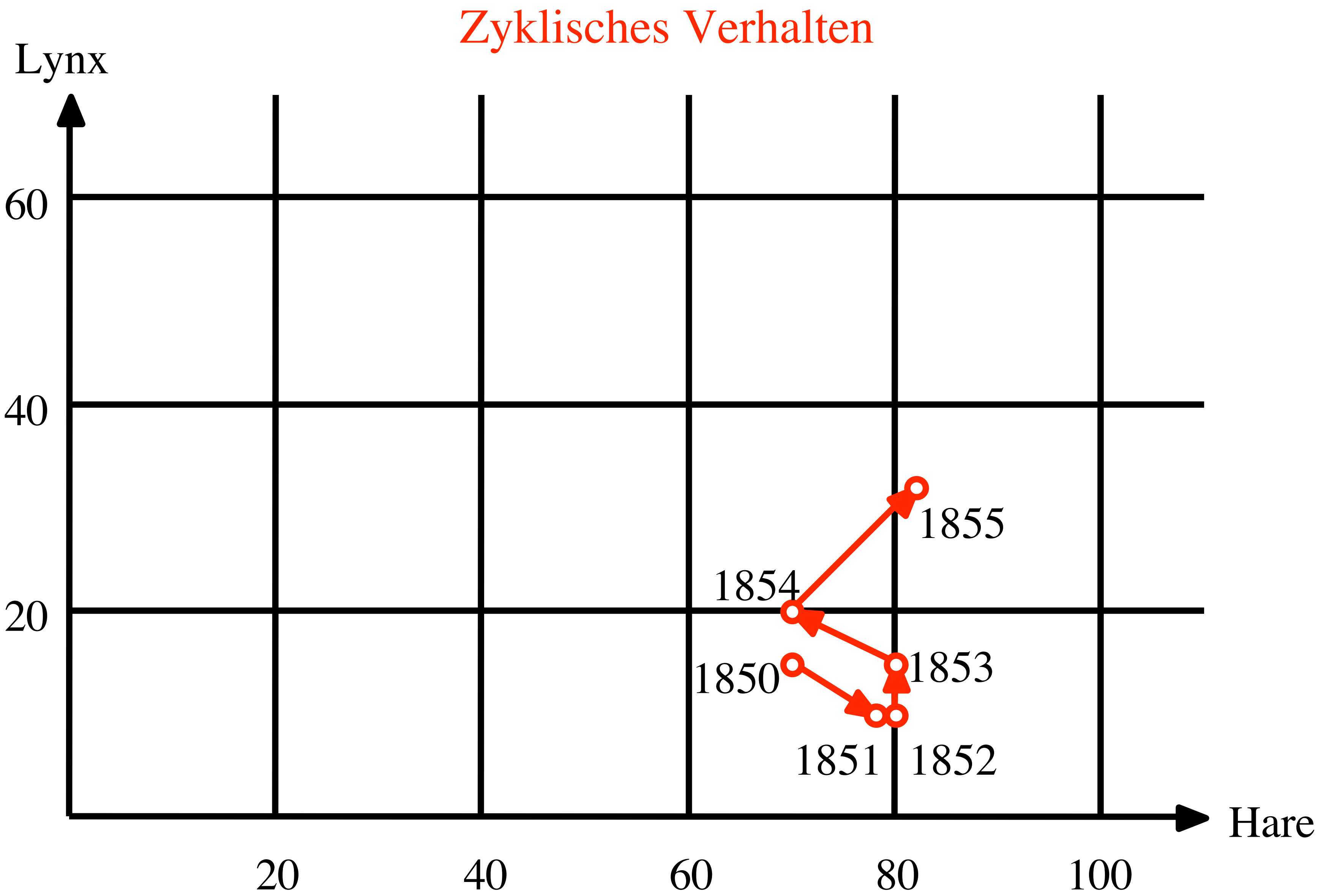


Zyklisches Verhalten

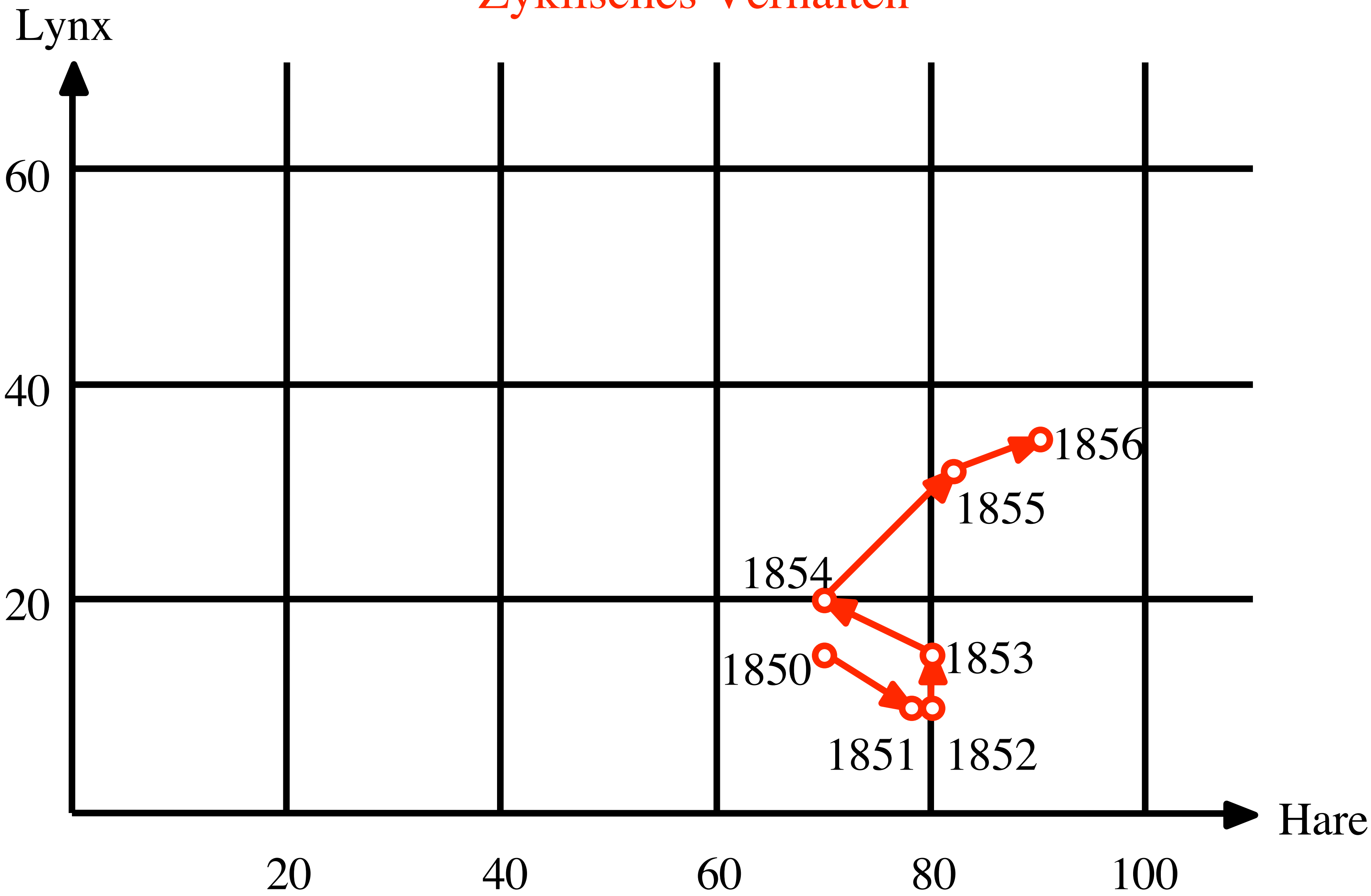


Zyklisches Verhalten

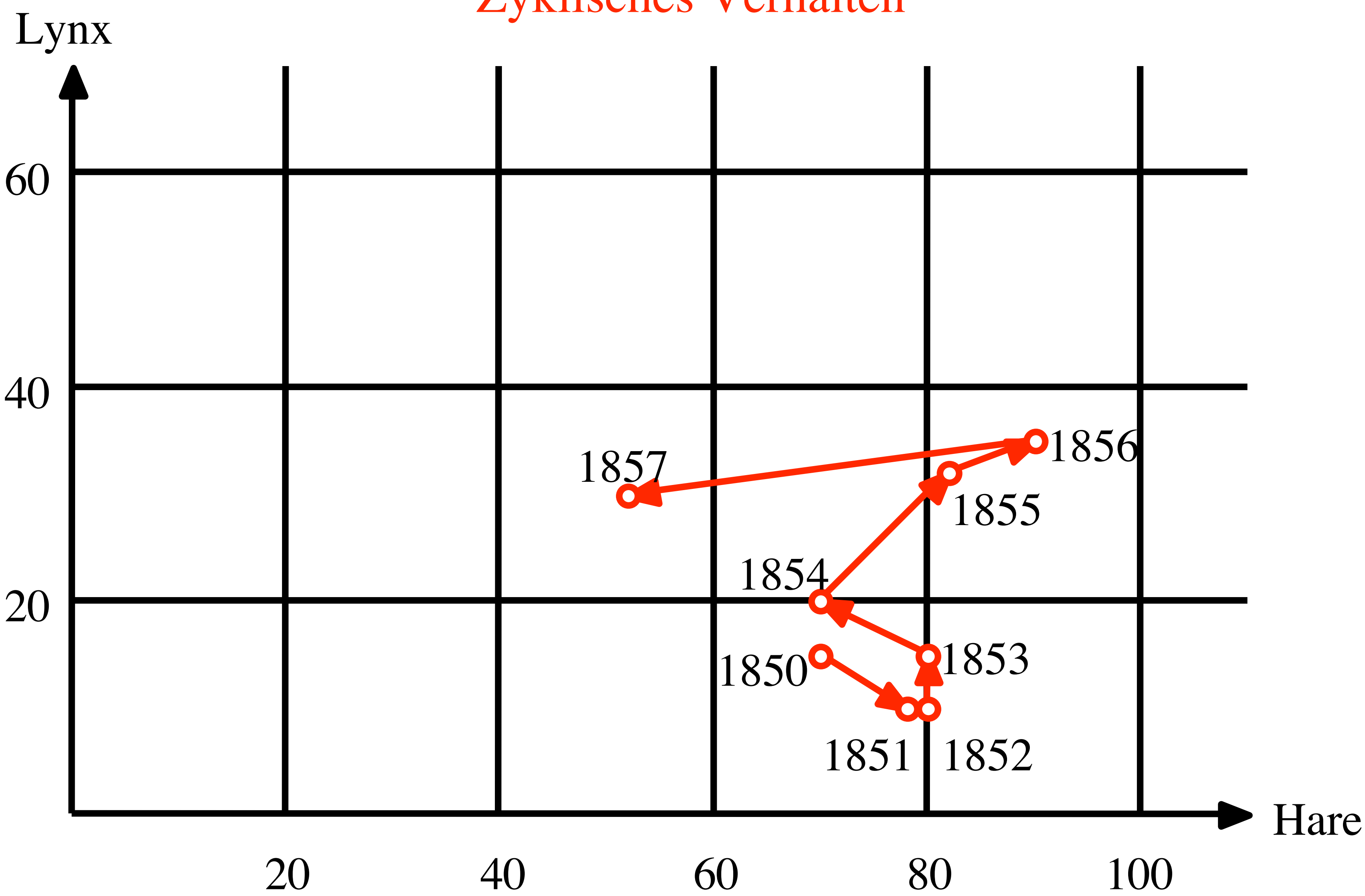


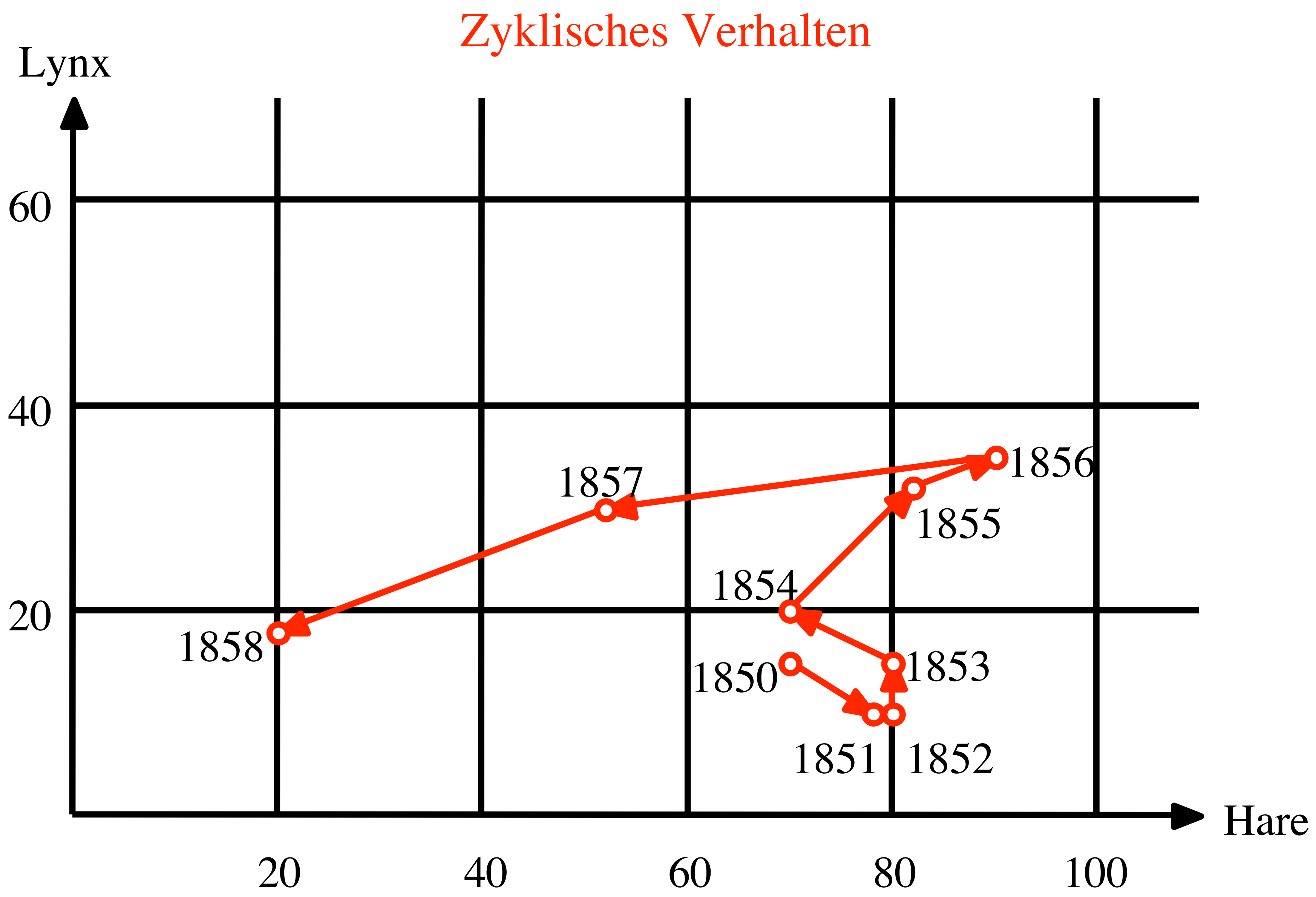

Zyklisches Verhalten
Lynx
60
40
20
1855
1854
1853
1850
1851
1852
Hare
20
40
60
80
100

Zyklisches Verhalten

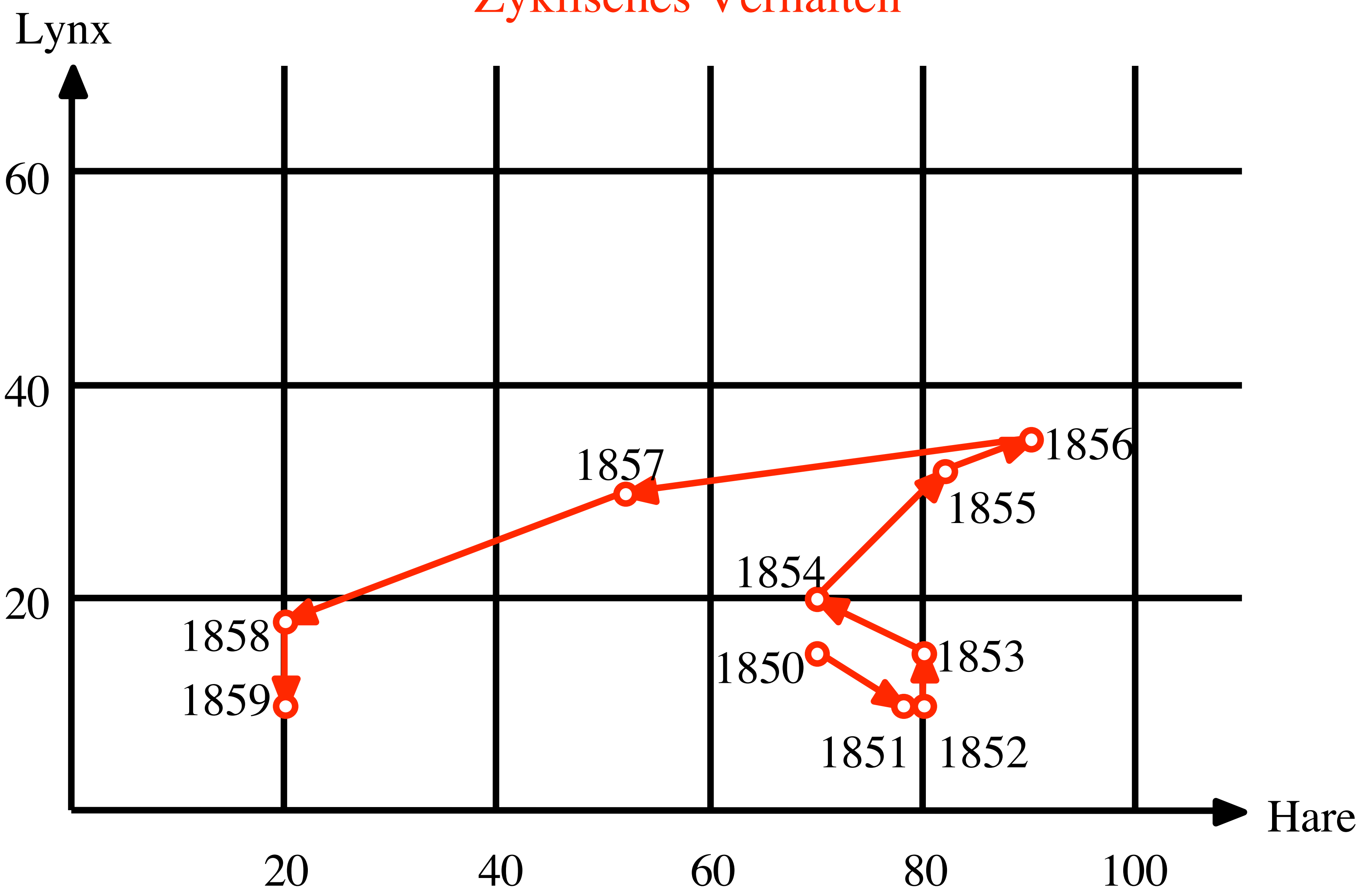


Zyklisches Verhalten

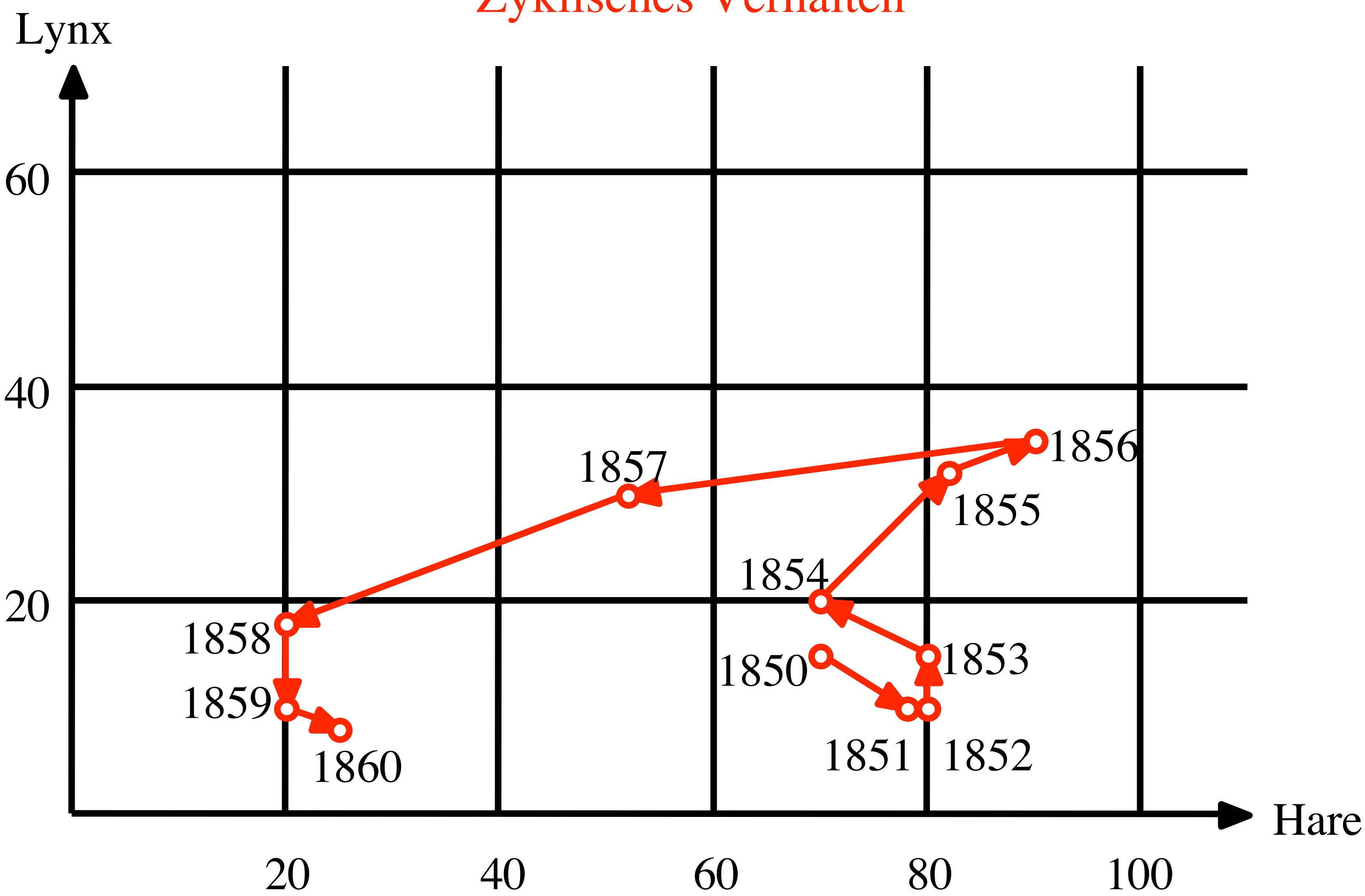



Zyklisches Verhalten
Lynx
60
40
20
1856
1857
1855
1854
1858
1853
1850
1851
1852
Hare
20
40
60
80
100

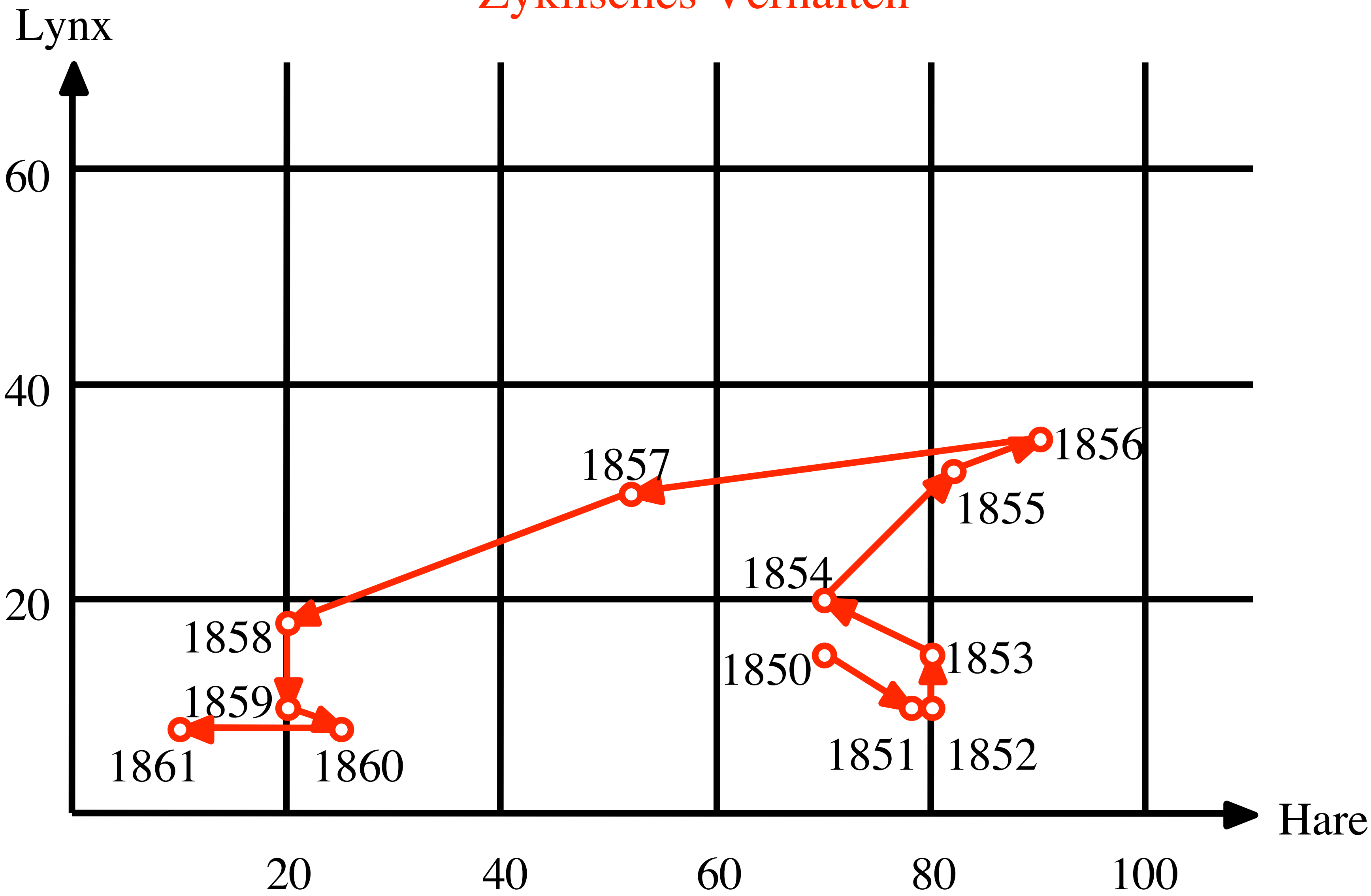
Zyklisches Verhalten



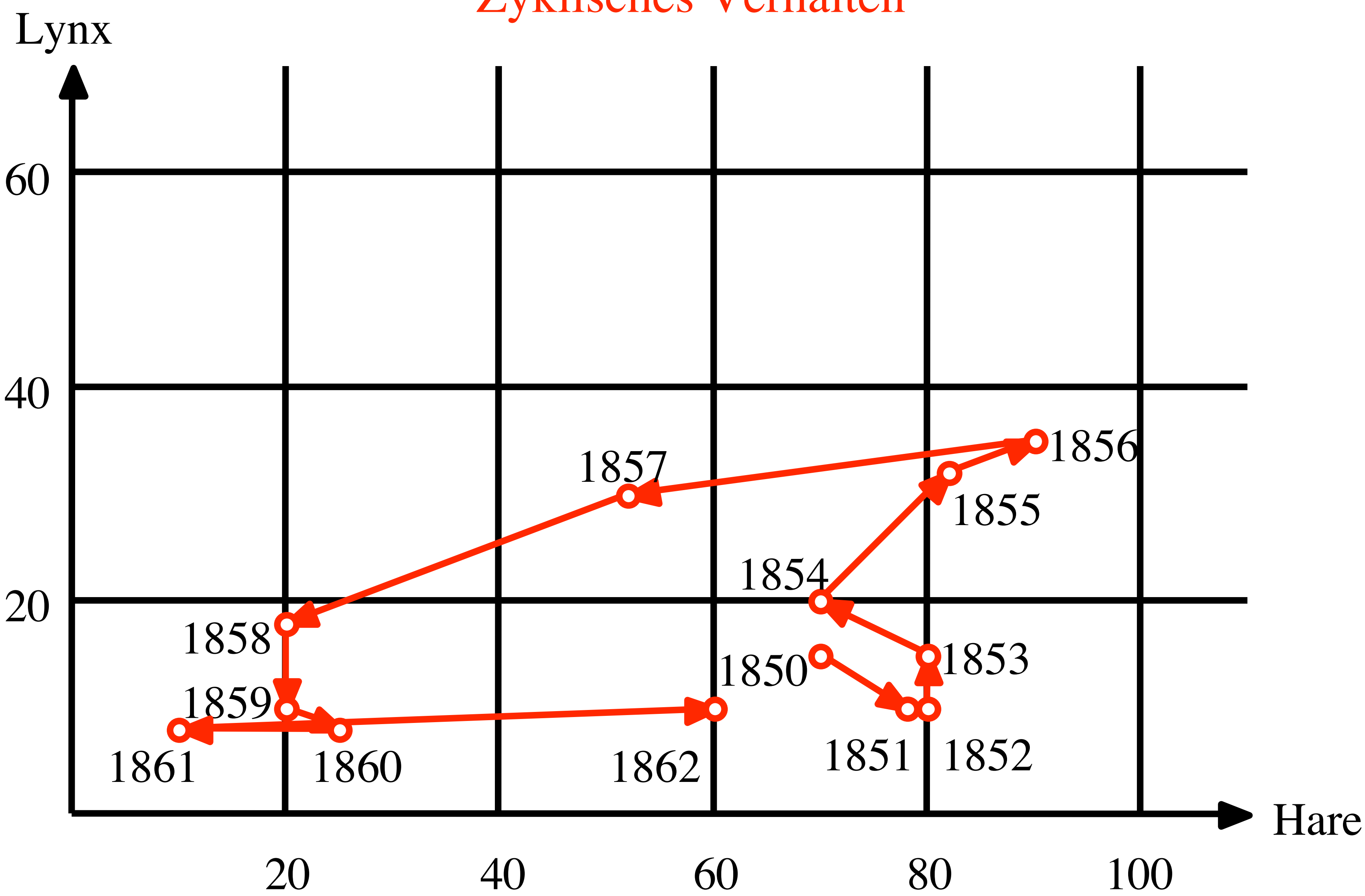
Zyklisches Verhalten



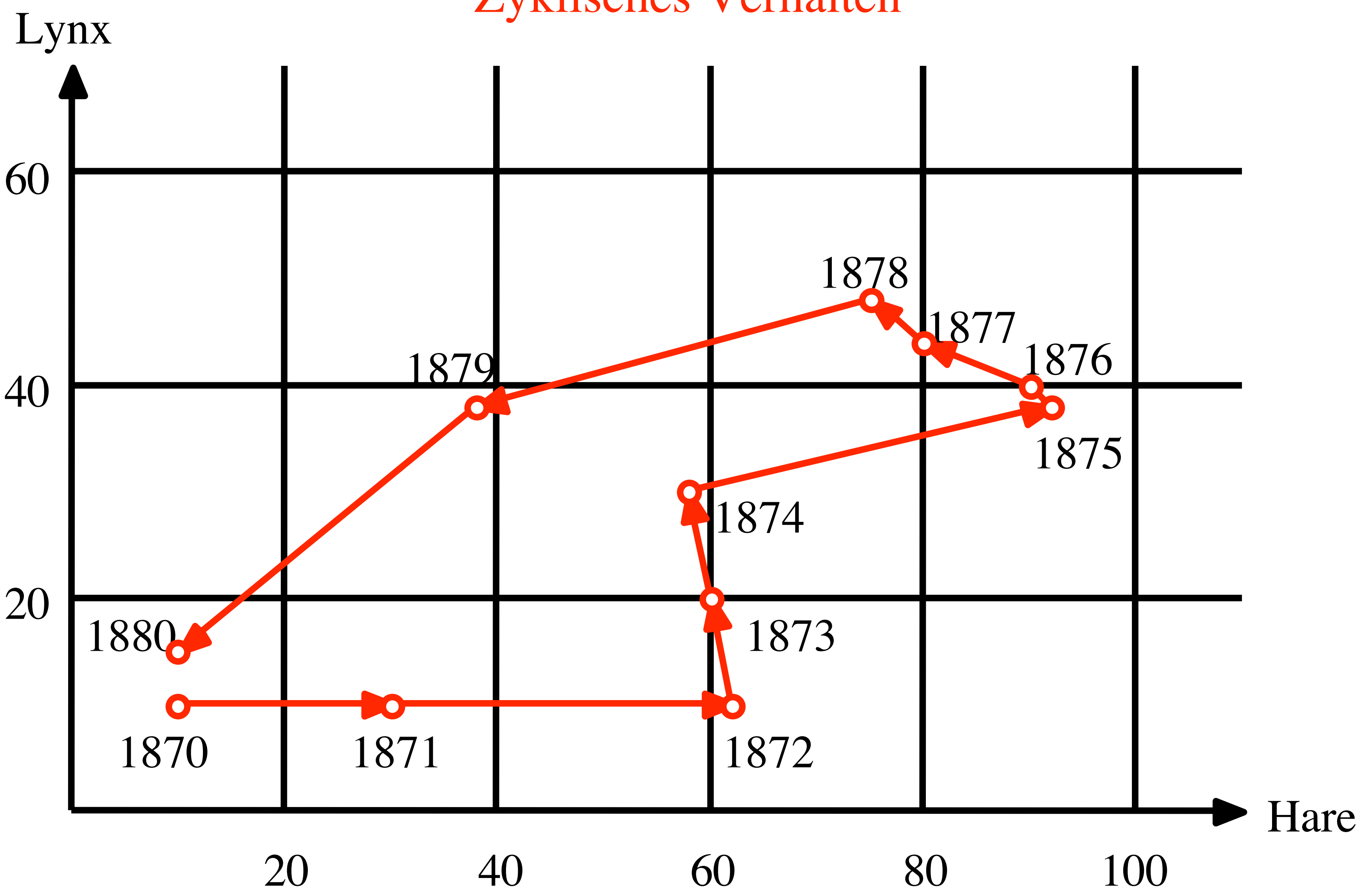
Zyklisches Verhalten



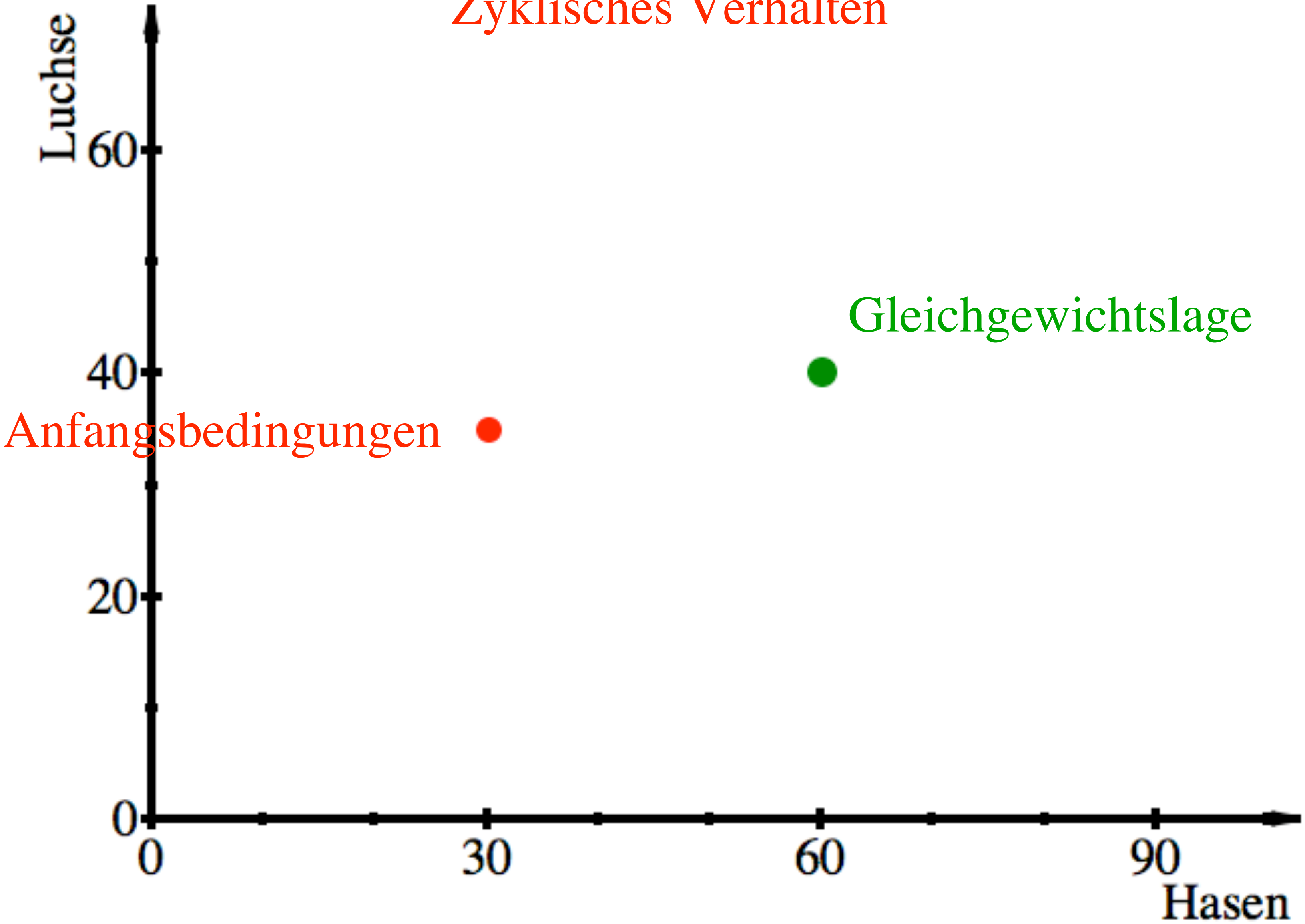
Zyklisches Verhalten

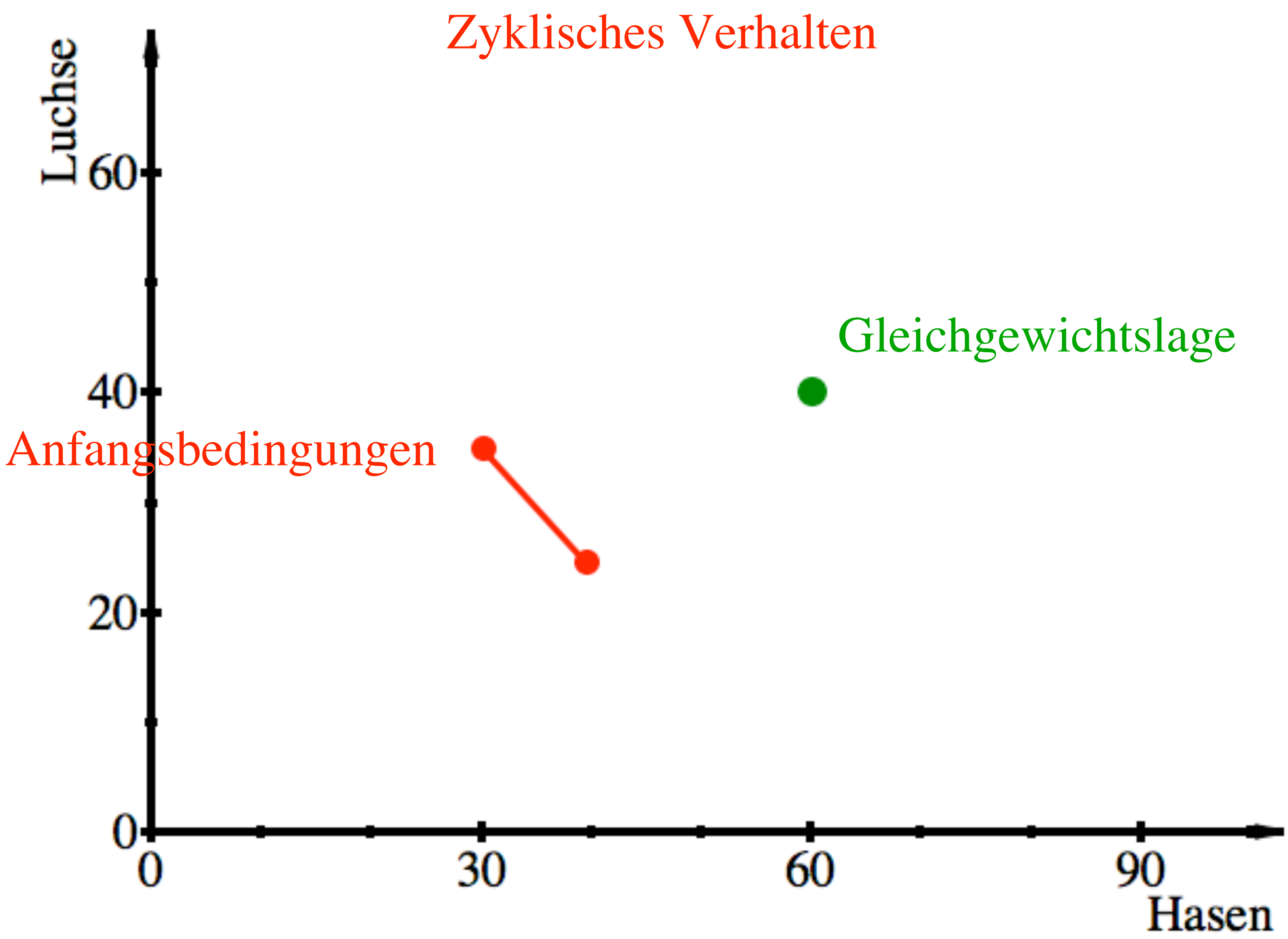


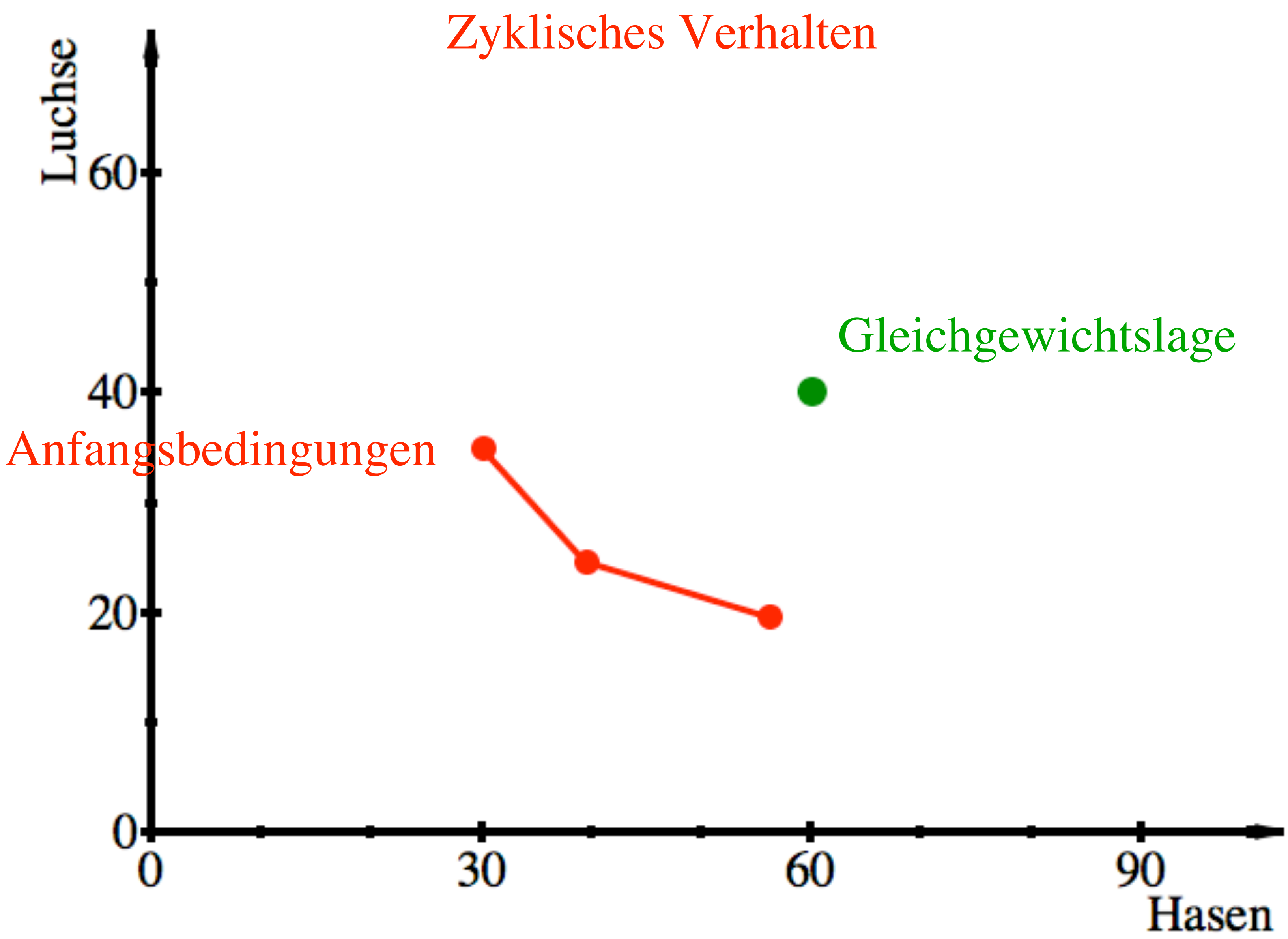
Zyklisches Verhalten

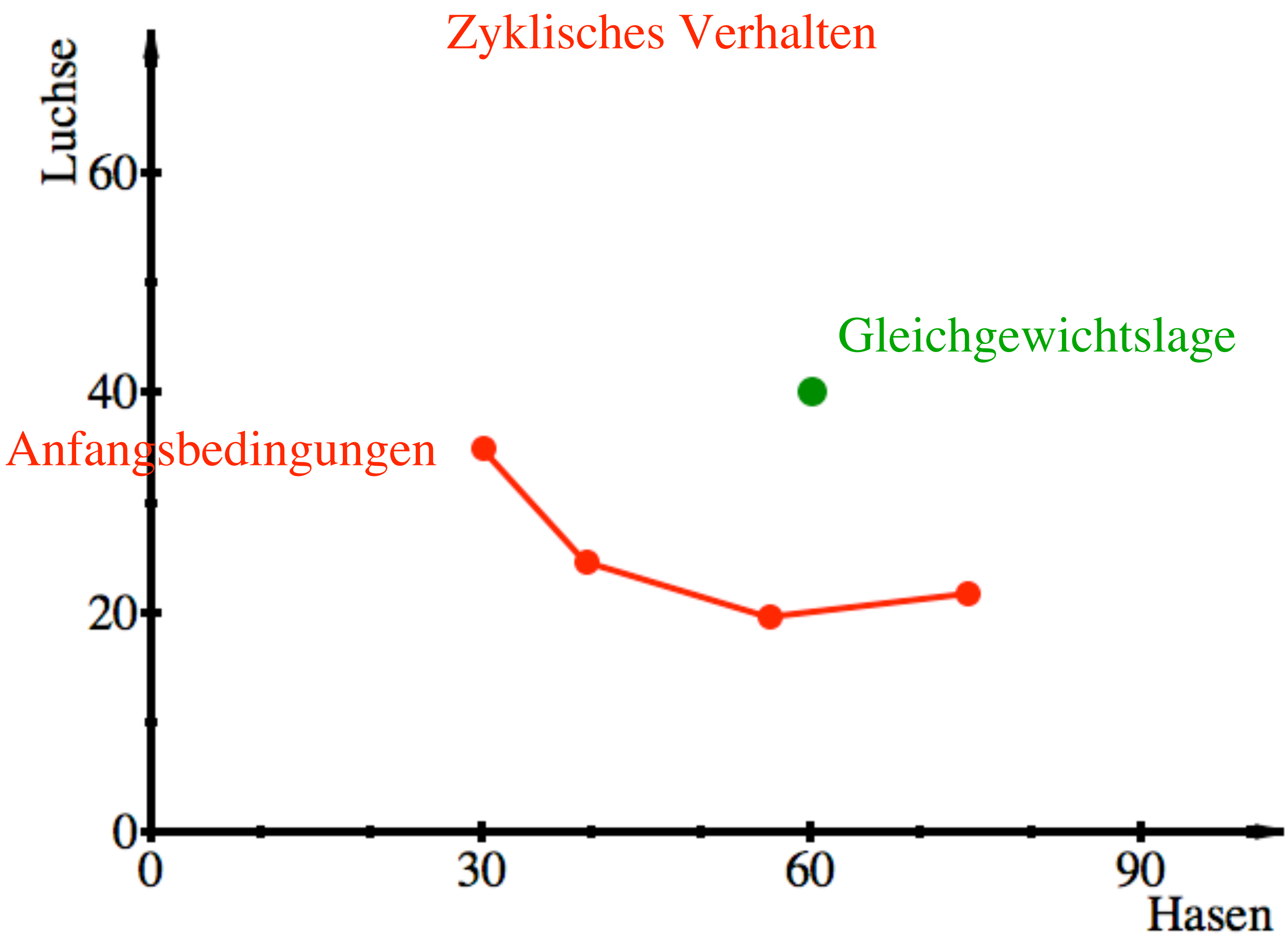


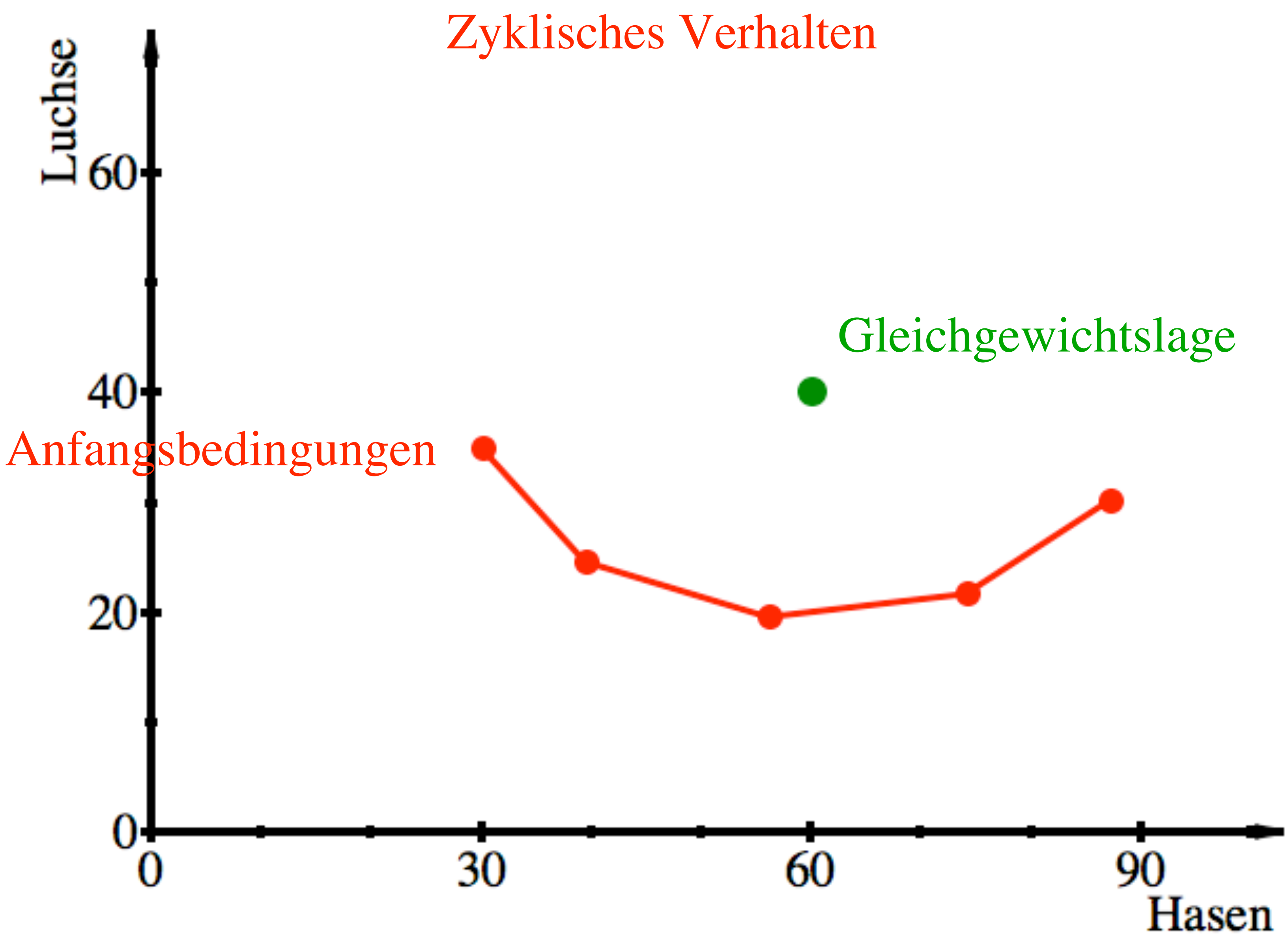
Zyklisches Verhalten

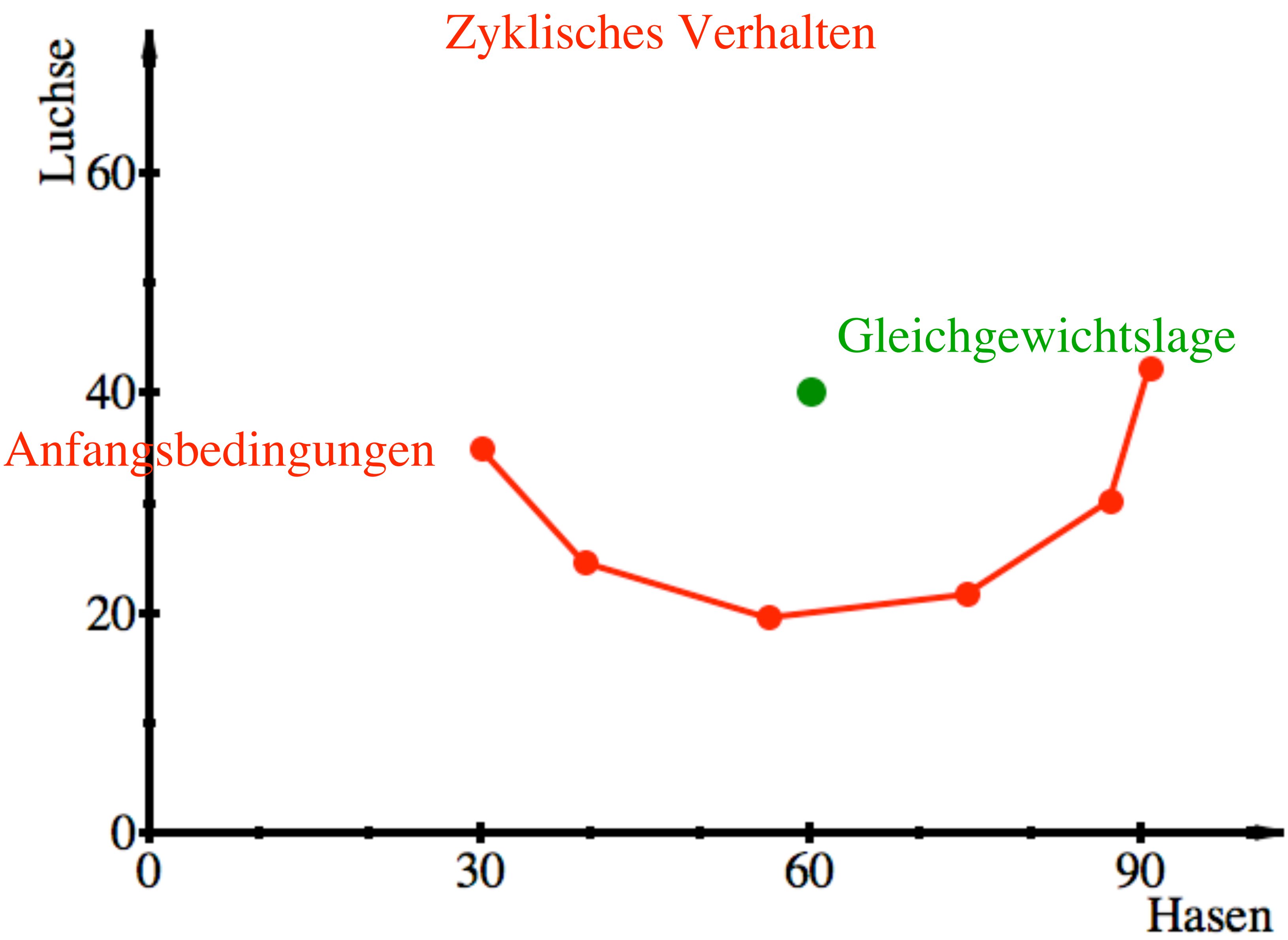


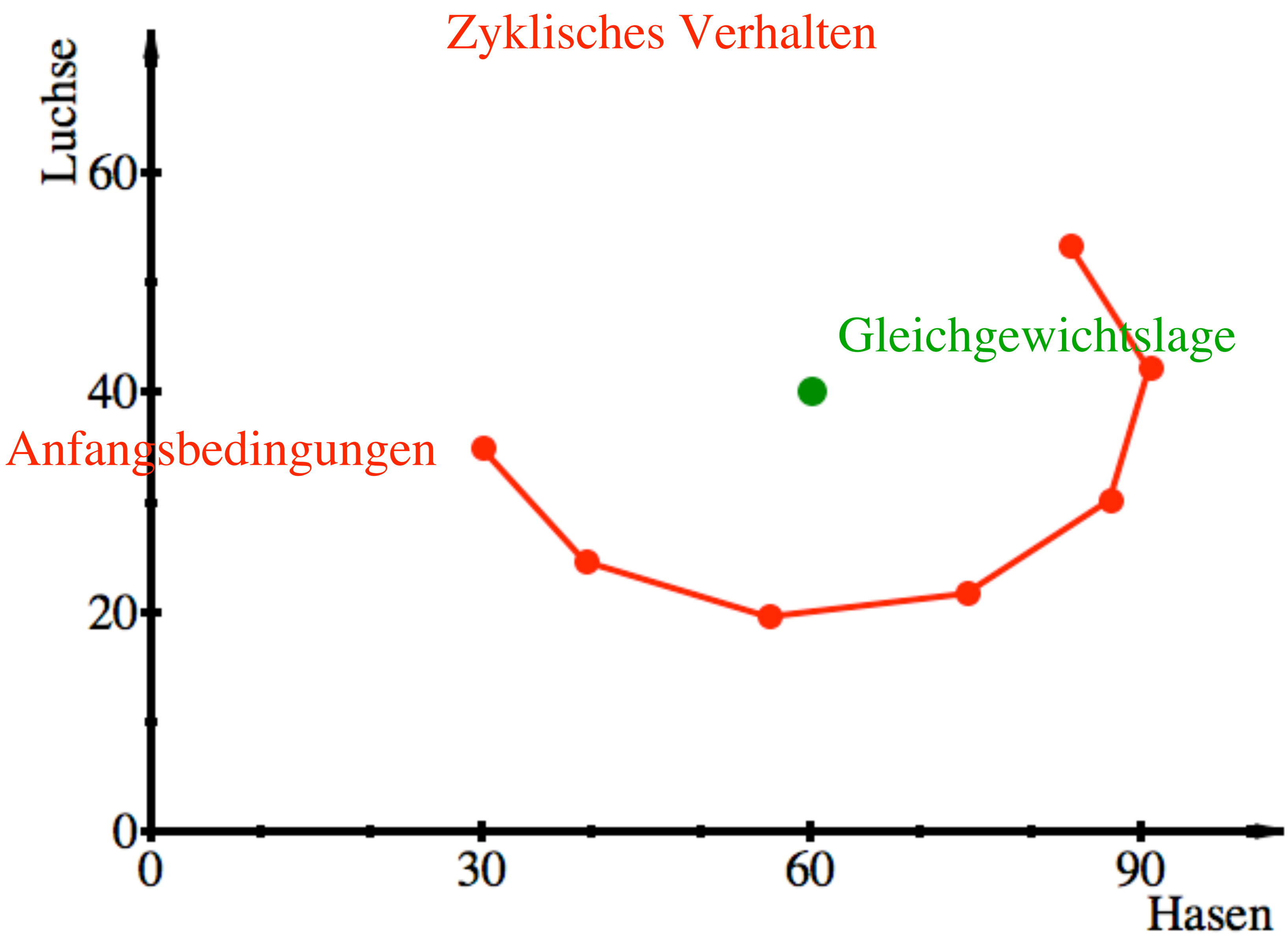

Zyklisches Verhalten
Luchse
60
40
20
0
Gleichgewichtslage
Anfangsbedingungen
0
30
60
90
Hasen

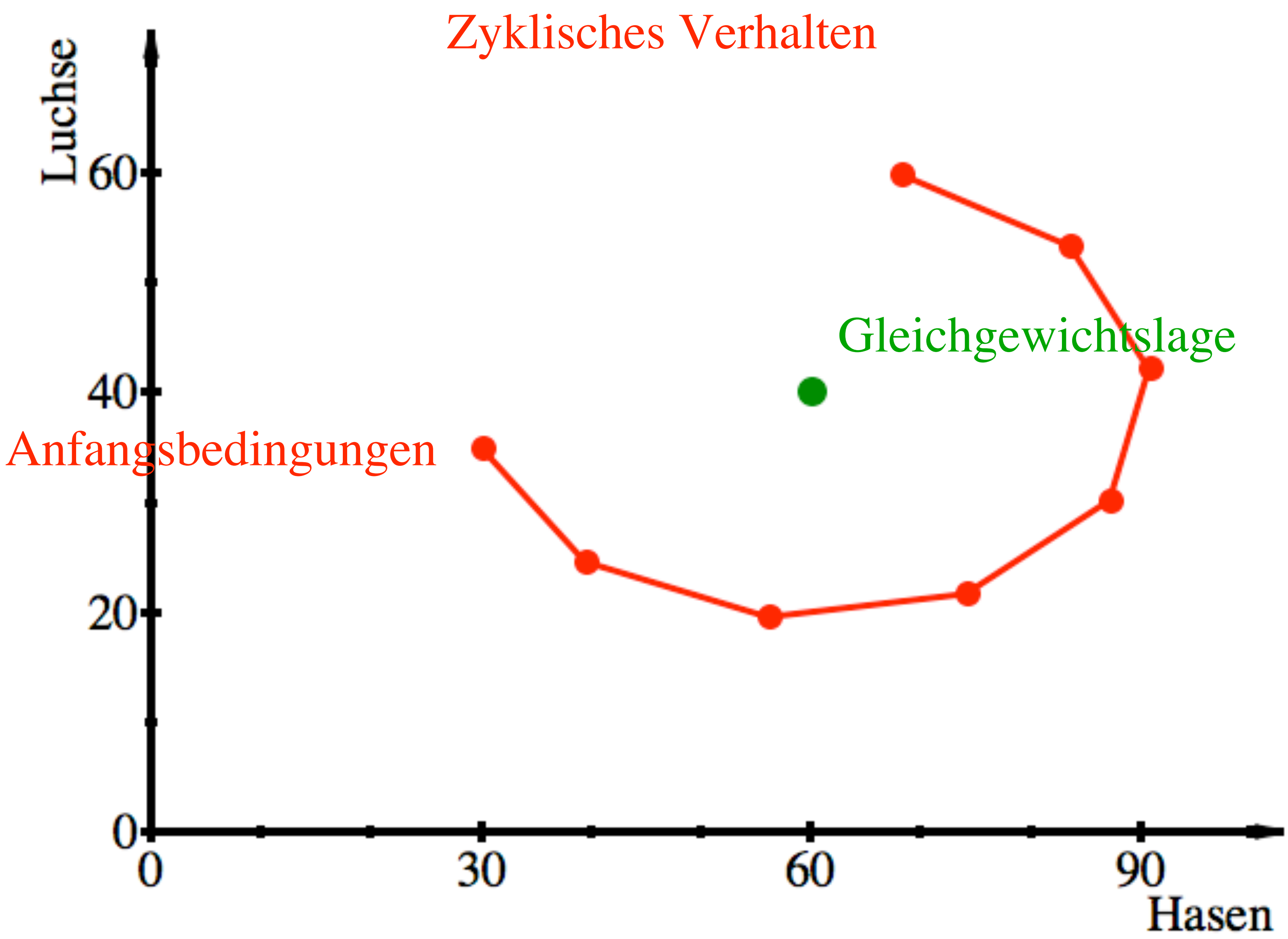

Zyklisches Verhalten
Luchse
60
40
20
0
Gleichgewichtslage
Anfangsbedingungen
0
30
60
90
Hasen

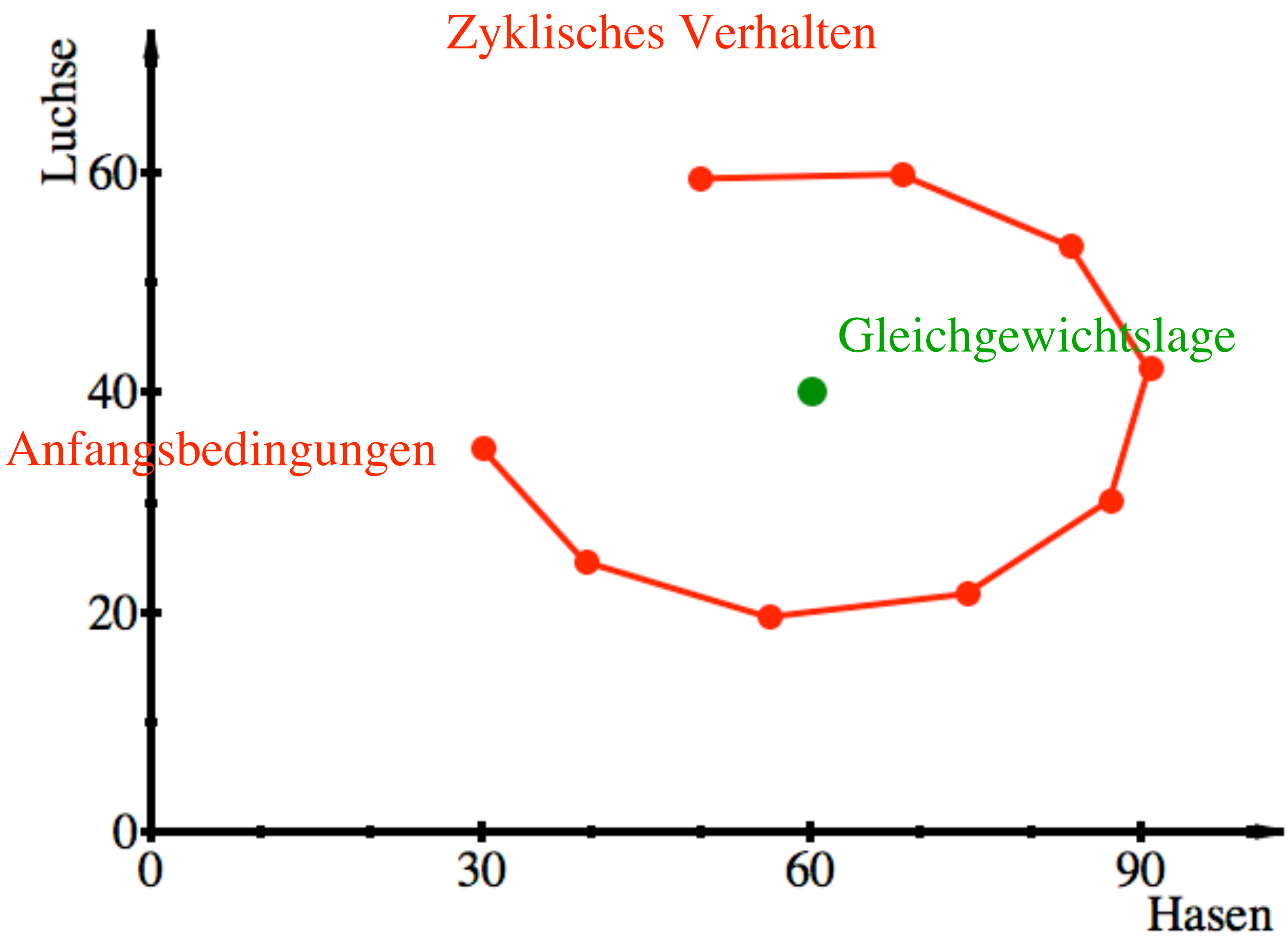

Zyklisches Verhalten
Luchse
60
40
20
0
Gleichgewichtslage
Anfangsbedingungen
0
30
60
90
Hasen

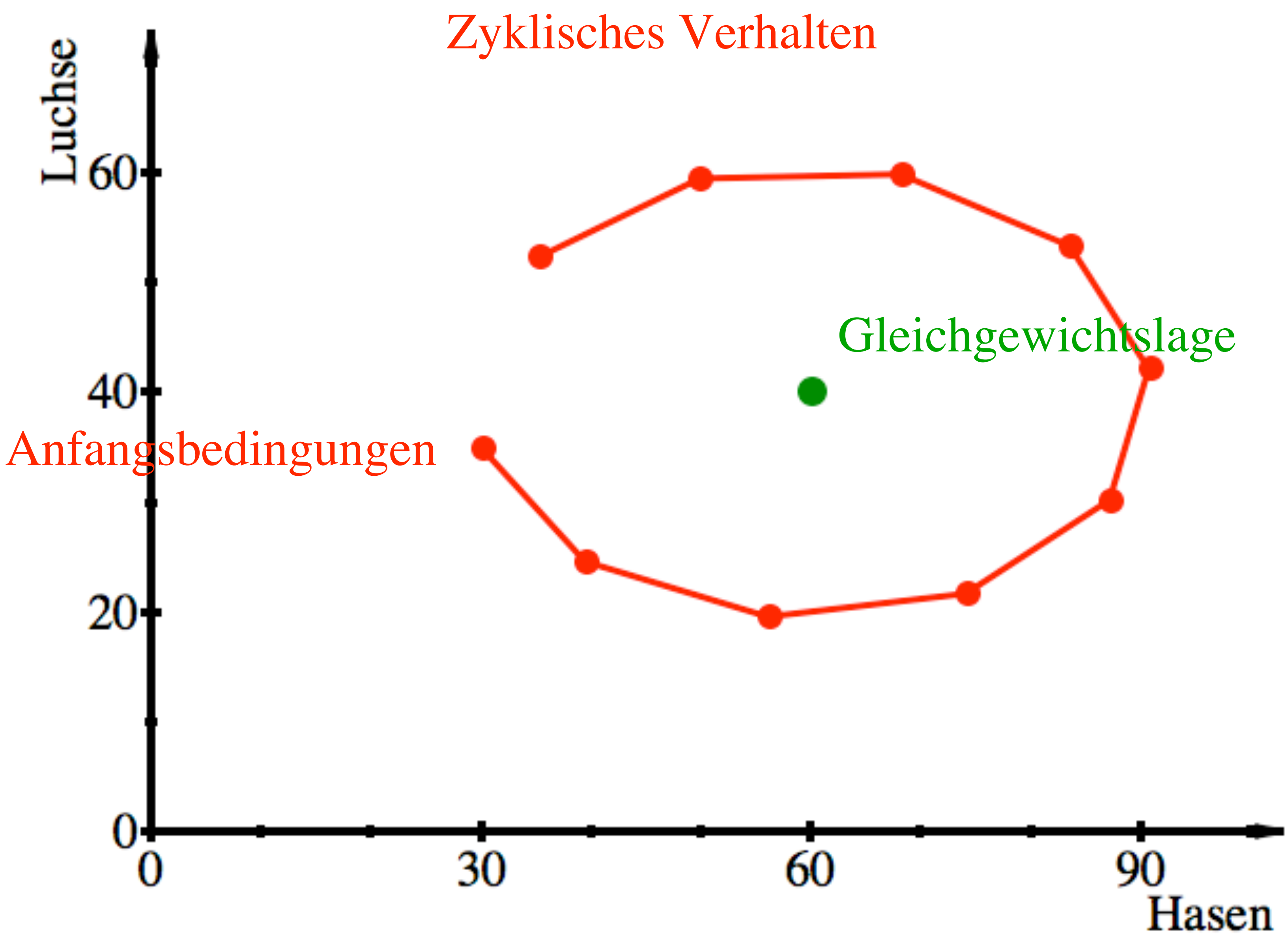

Zyklisches Verhalten
Luchse
60
40
20
0
Gleichgewichtslage
Anfangsbedingungen
0
30
60
90
Hasen

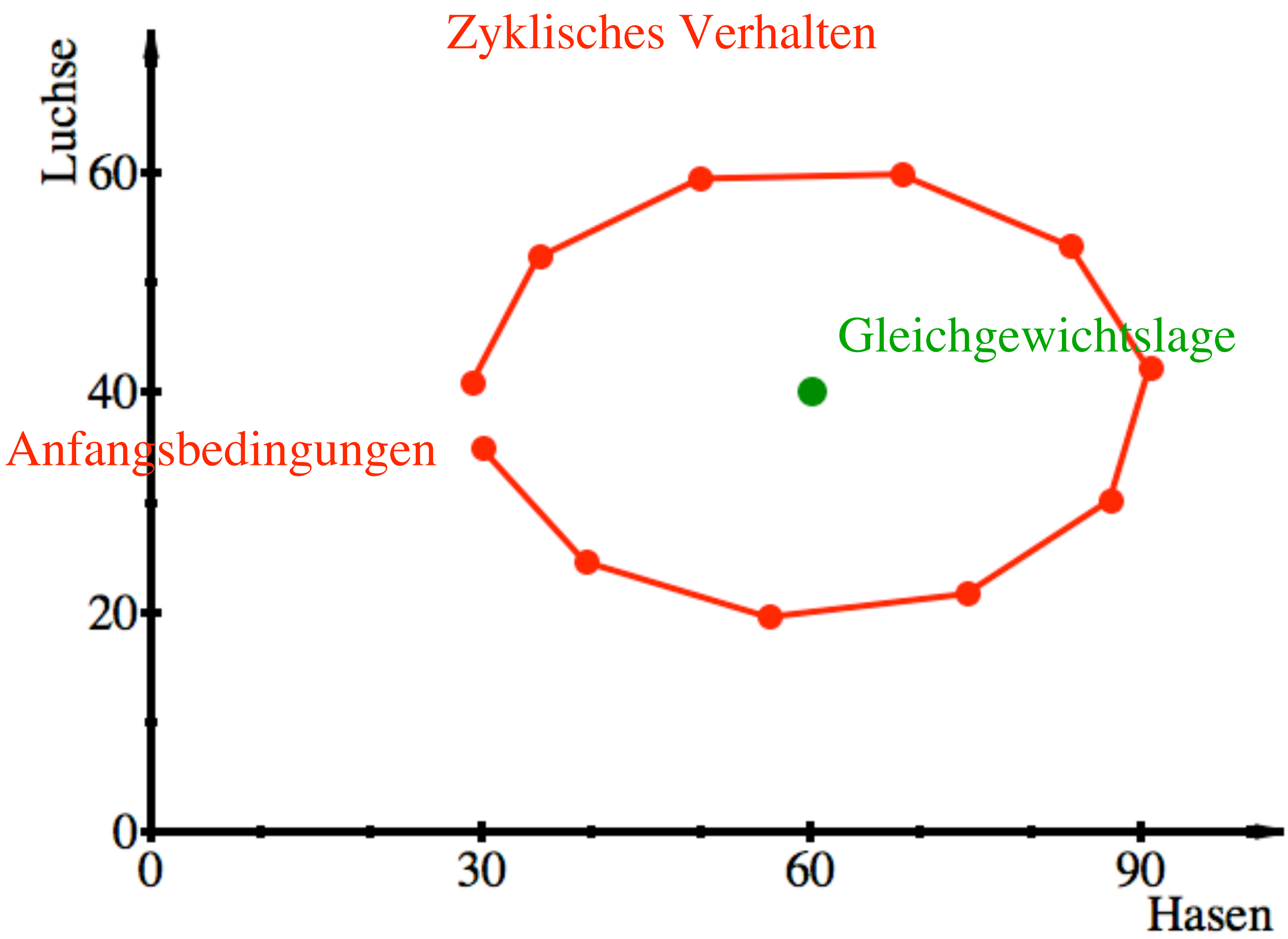

Zyklisches Verhalten
Luchse
60
40
20
0
Gleichgewichtslage
Anfangsbedingungen
0
30
60
90
Hasen


Zyklisches Verhalten
Luchse
60
40
20
0
Gleichgewichtslage
Anfangsbedingungen
0
30
60
90
Hasen


Zyklisches Verhalten
Luchse
60
40
20
0
Gleichgewichtslage
Anfangsbedingungen
0
30
60
90
Hasen

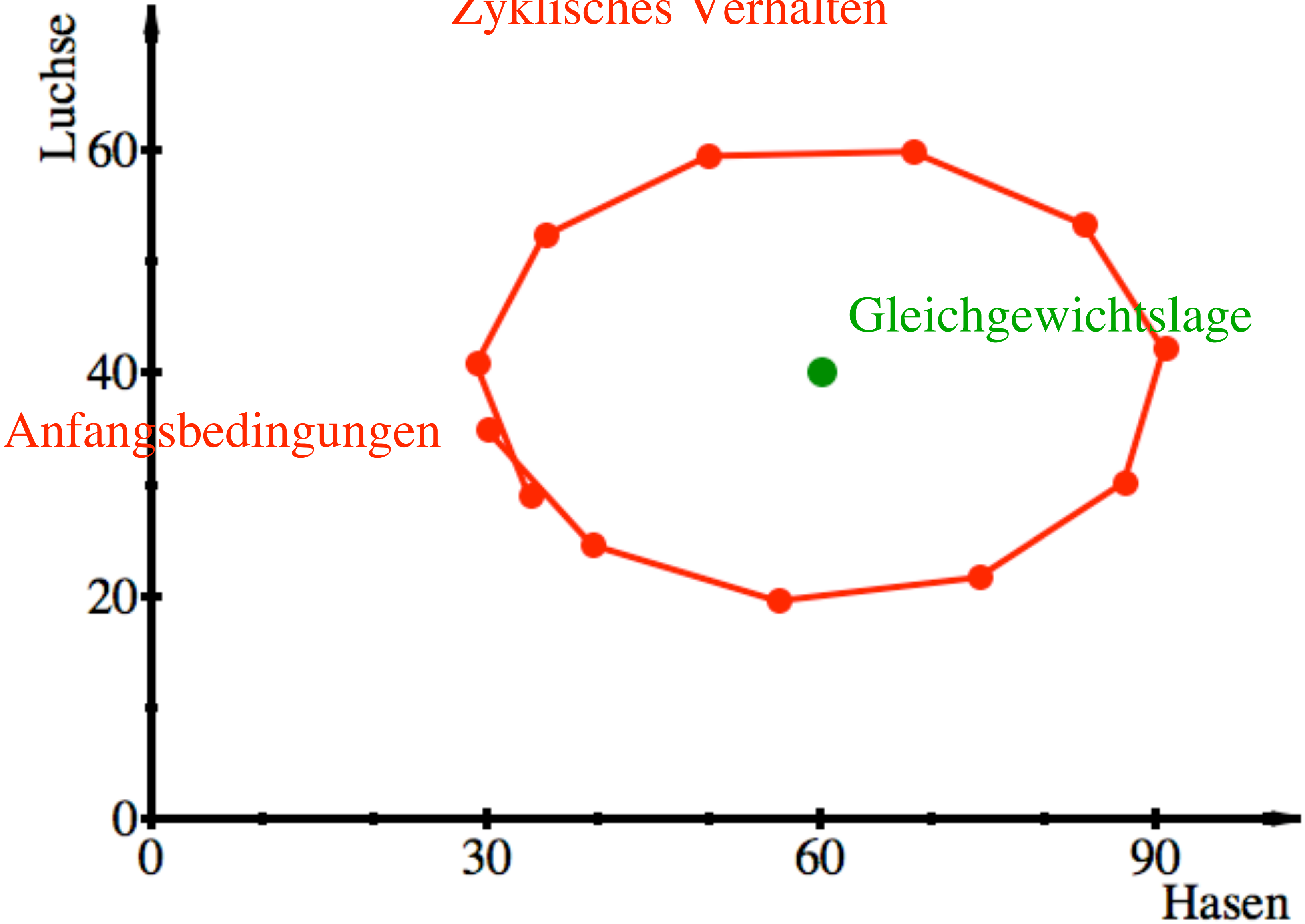

Zyklisches Verhalten
Luchse
60
40
20
0
Gleichgewichtslage
Anfangsbedingungen
0
30
60
90
Hasen


Zyklisches Verhalten
Luchse
60
40
20
0
Gleichgewichtslage
Anfangsbedingungen
0
30
60
90
Hasen



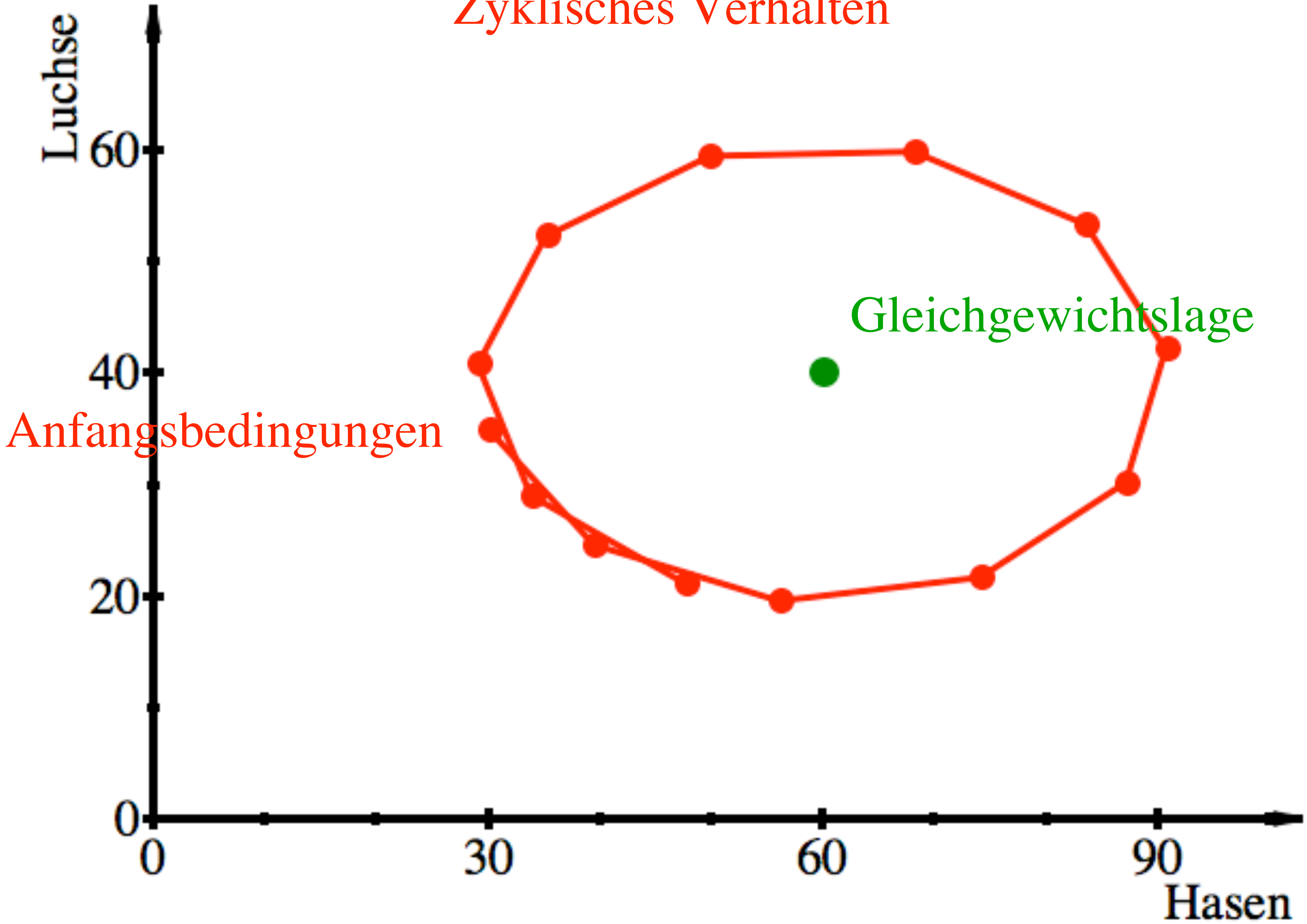
Zyklisches Verhalten
Luchse
60
40
20
0
Gleichgewichtslage
Anfangsbedingungen
0
30
60
90
Hasen

Zyklisches Verhalten



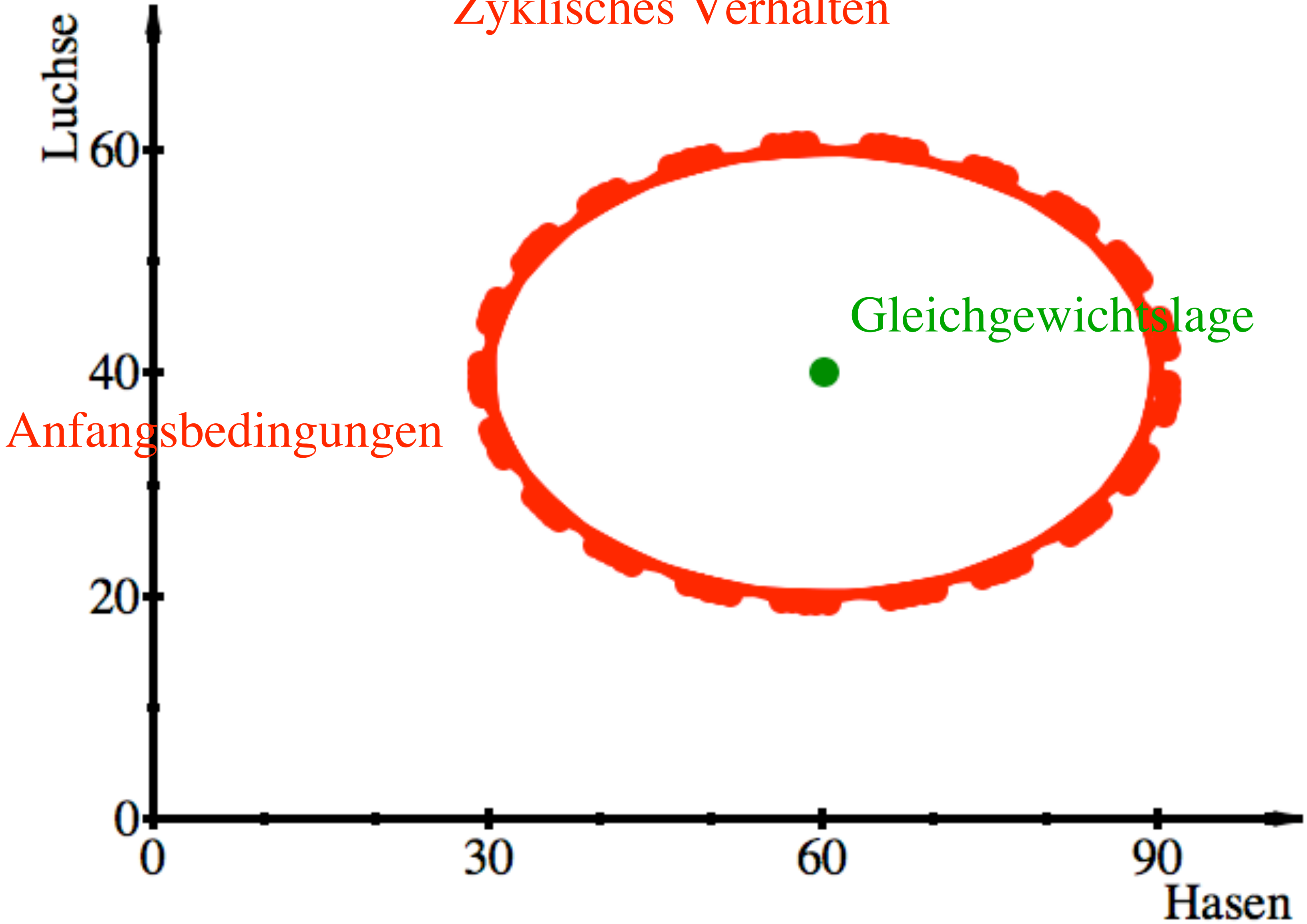
Es schließt sich, aber nicht a punto

Zyklisches Verhalten



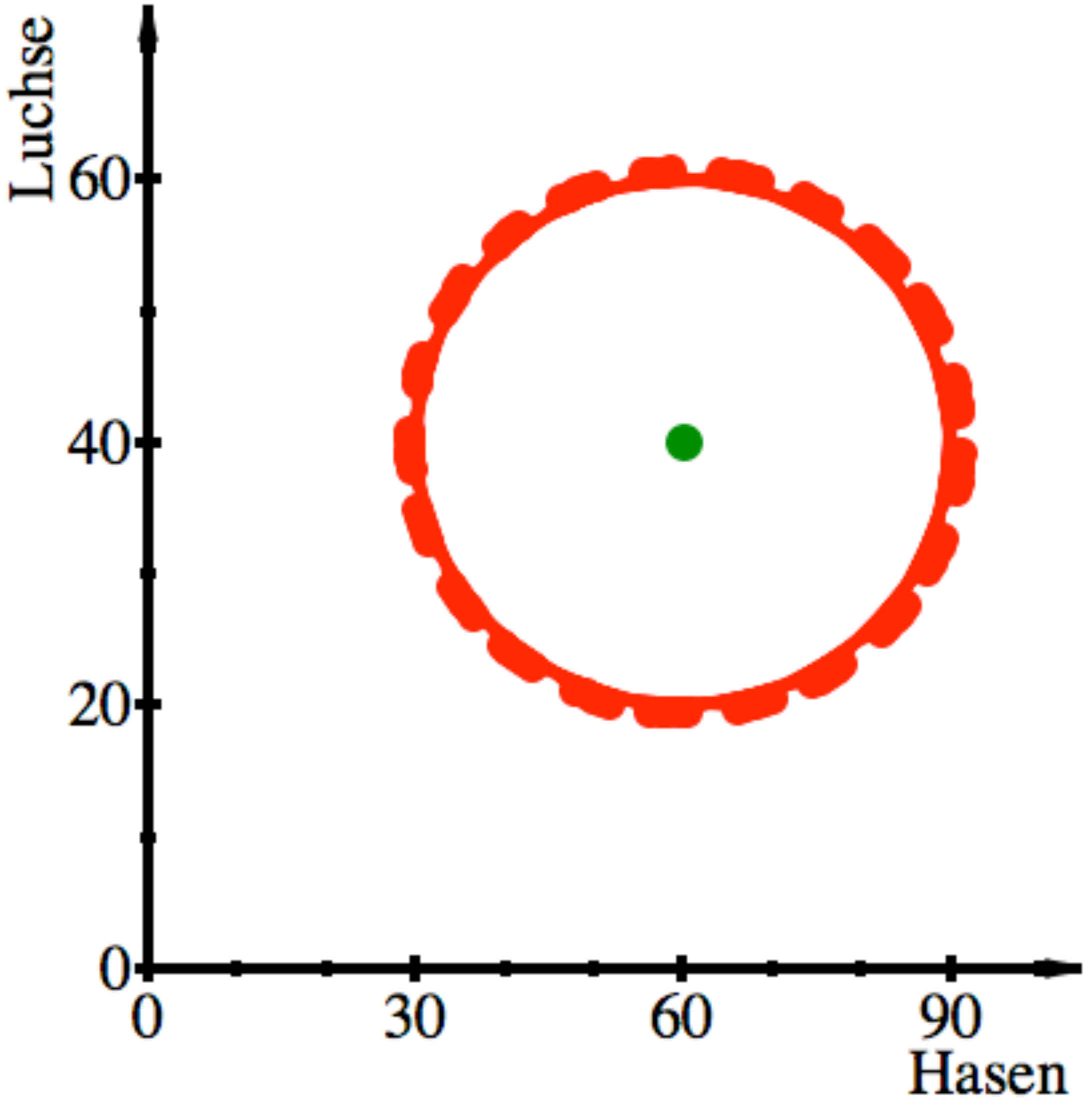
Es schließt sich, aber nicht a punto

Zyklisches Verhalten

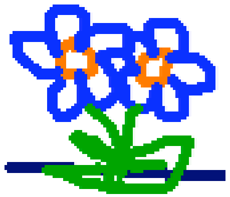


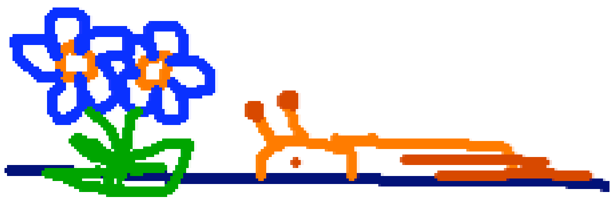
100 Jahre sind vergangen

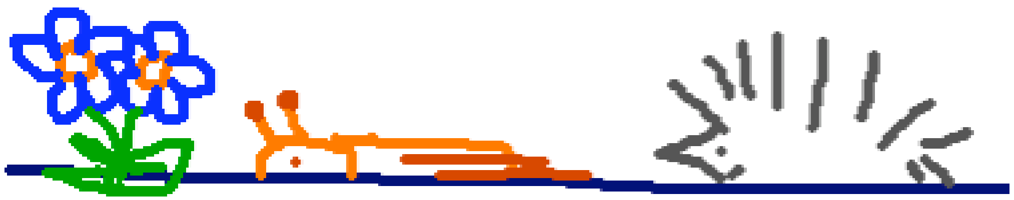
Zyklisches Verhalten

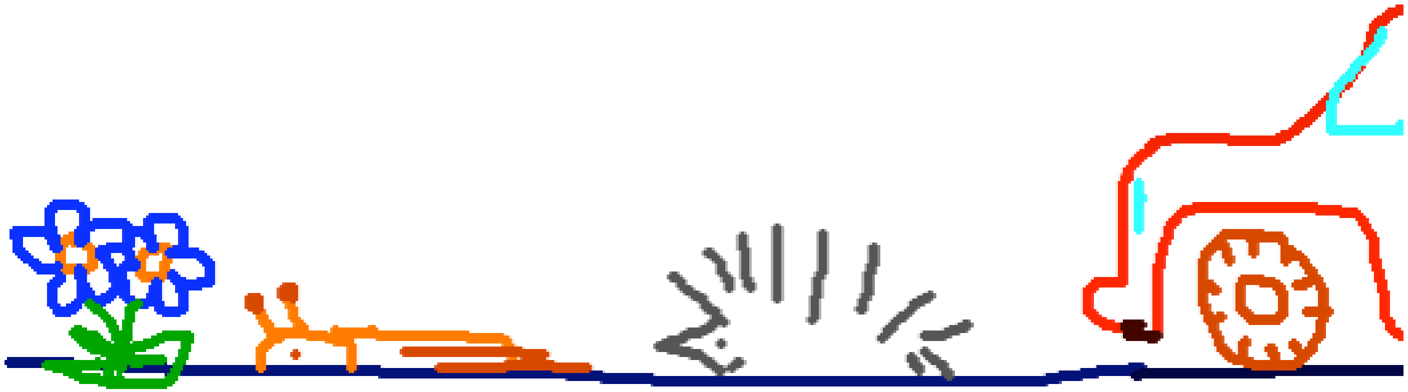


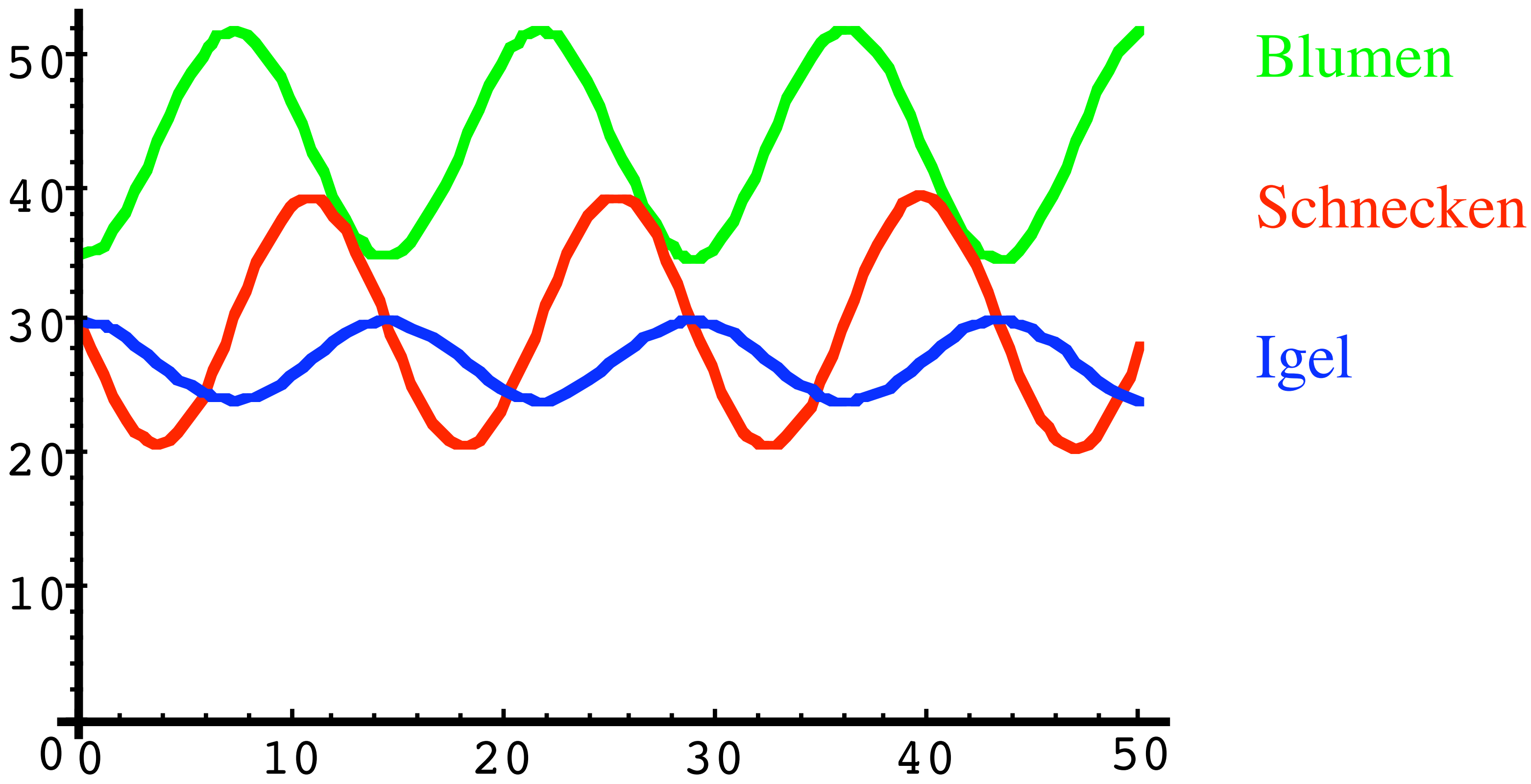
Geeignete Maßstäbe
liefern einen Kreis





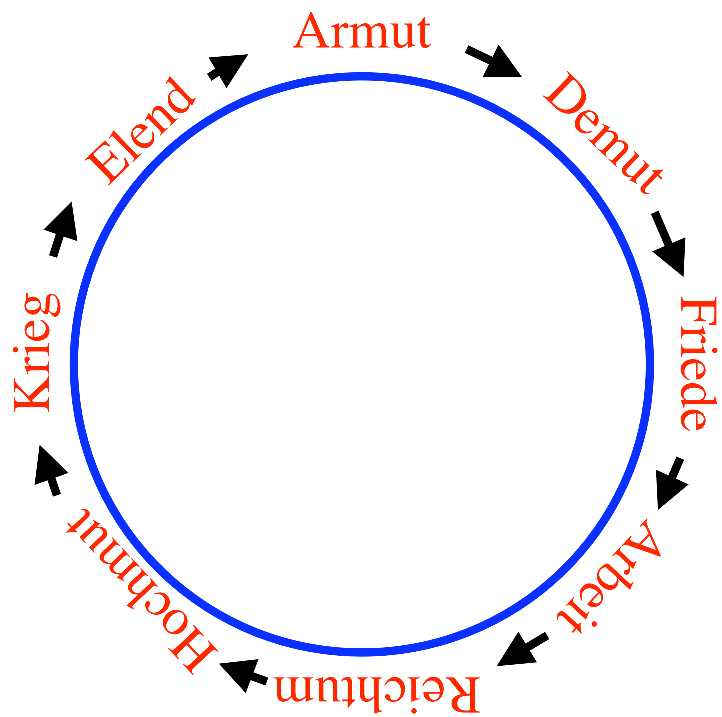




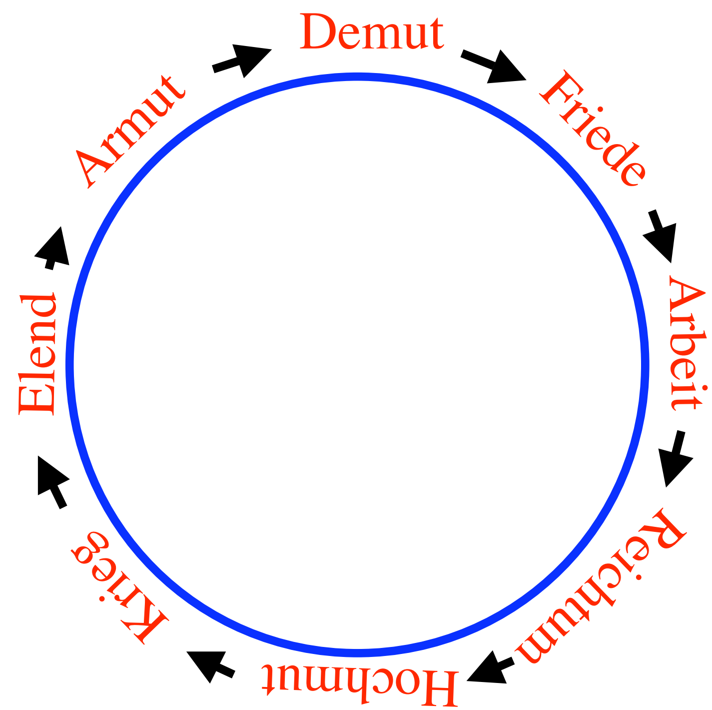


Blumen
Schnecken
Igel
50
40
30
20
10
0
0
10
20
30
40
50

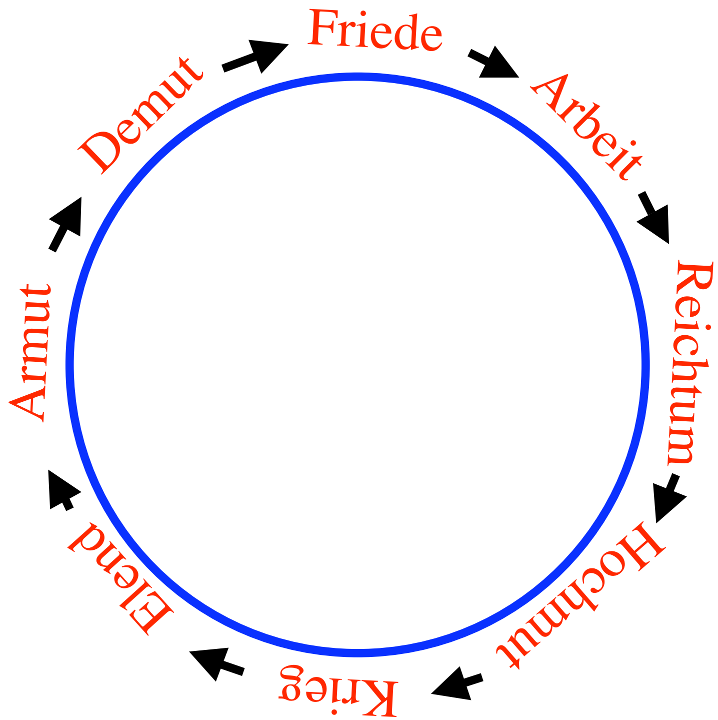
Zyklisches Verhalten



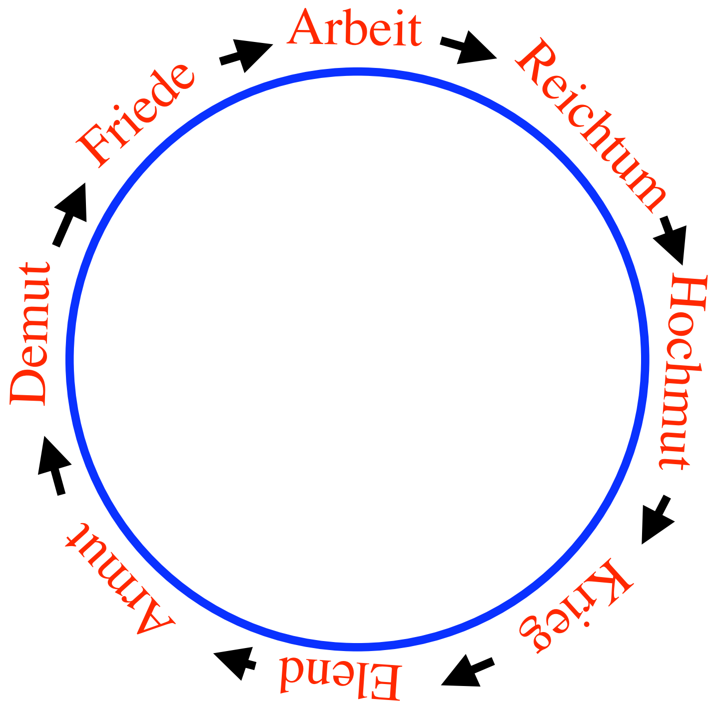
Zyklisches Verhalten



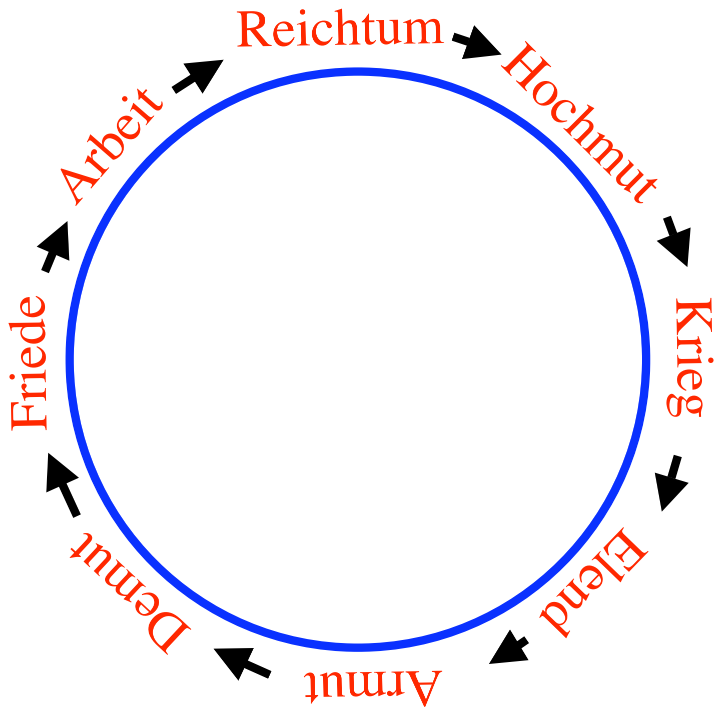
Zyklisches Verhalten



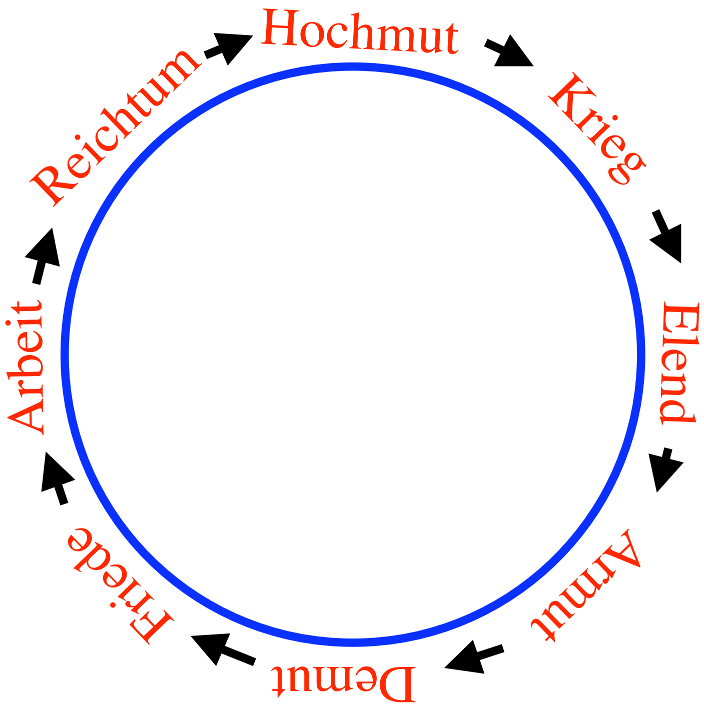
Zyklisches Verhalten



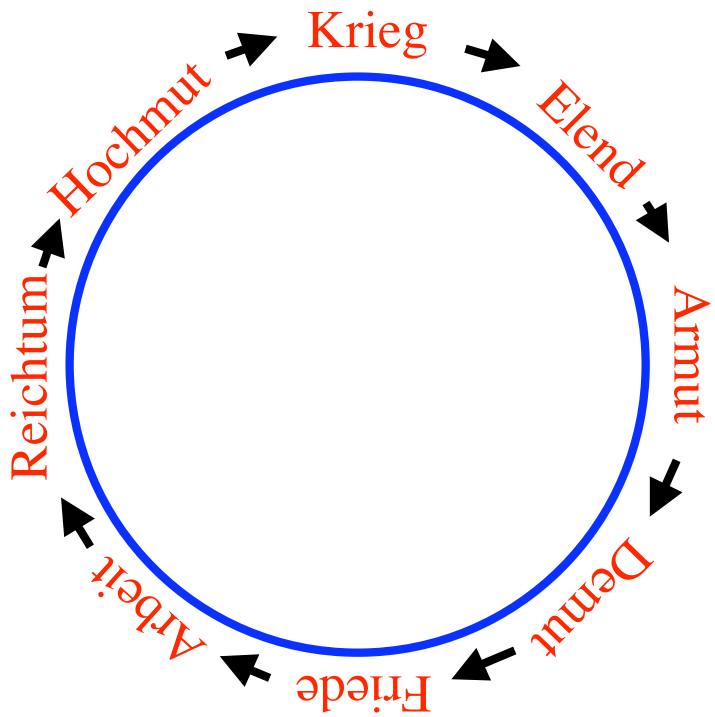
Zyklisches Verhalten



Zyklisches Verhalten



Zyklisches Verhalten



Zyklisches Verhalten