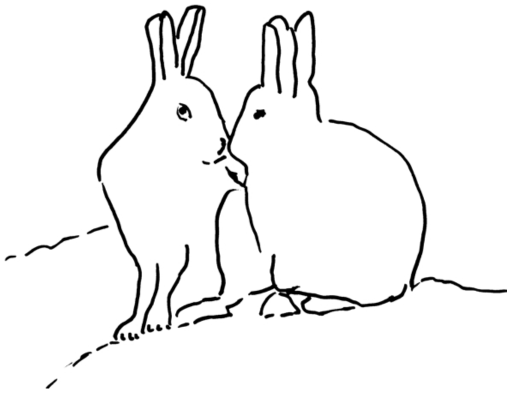
Hans Walser

Mathematik 1 für Naturwissenschaften



Modul 111

Systeme von Differenzialgleichungen

Luchs und Hase

UNI BASEL

Inhalt

Modul 111 für die Lehrveranstaltung *Mathematik 1 für Naturwissenschaften*

Winter 2002/03 Probeausgabe
Winter 2003/04 Ergänzungen, Fehlerkorrekturen, neue Moduleinteilung
Winter 2004/05 Technische Überarbeitung. Leichte Straffung
Winter 2005/06 Fehlerkorrekturen. Geändertes Layout
Winter 2006/07 MathType
Herbst 2007 Kleine Erweiterung
Herbst 2008 Geänderte Notationen
Herbst 2009 Kleine Änderungen
Herbst 2010 Fehlerkorrektur
Herbst 2013 Grafische Überarbeitung

last modified: 23. September 2013

Hans Walser
Mathematisches Institut, Rheinsprung 21, 4051 Basel
www.walser-h-m.ch/hans

1 Lineare Differenzialgleichung erster Ordnung

1.1 Inhomogener Fall

$$y' = p(x)y + q(x) \tag{I}$$

1.2 Homogener Fall

$$y' = p(x)y \tag{H}$$

Der homogene Fall lässt sich mit Separation der Variablen lösen: Aus

$$\frac{\mathrm{d}y}{y} = p(x)\,\mathrm{d}x$$

ergibt sich:

$$y_{\mathrm{H}} = C\mathrm{e}^{\int p(x)\,\mathrm{d}x}$$

Wie lösen wir nun den inhomogenen Fall?

1.3 Beispiel

Wir untersuchen das Beispiel:

$$y' = \tfrac{2}{x}y + x^2 \tag{I}$$

$$y' = \tfrac{2}{x}y \tag{H}$$

1.3.1 Homogener Fall

$$y' = \tfrac{2}{x}y \tag{H}$$

Mit Separation der Variablen finden wir:

Also:

$$y_{\mathrm{H}}(x) = Cx^2$$

1.3.2 Inhomogener Fall

$$y' = \tfrac{2}{x}y + x^2 \tag{I}$$

Eine partikuläre Lösung ist:

$$y_P(x) = x^3$$

Woher diese Lösung?

Diese Lösung ist nicht eigentlich „speziell“, sondern eine bestimmte Lösung unter anderen. Wir verwenden dafür die Bezeichnung *partikuläre* Lösung.

Kontrolle dieser Lösung:

Wir werden im nächsten Abschnitt besprechen, wie wir auf eine solche partikularen Lösung kommen. Zunächst noch folgendes: Wir hatten für den homogenen Fall die allgemeine Lösung $y_H(x) = Cx^2$, und für den inhomogenen Fall haben wir eine partikuläre Lösung $y_P(x) = x^3$. Die Kombination

$$y = Cx^2 + x^3$$

ist dann die allgemeine Lösung des inhomogenen Falles.

- Kontrolle: Wir müssen kontrollieren, ob $y' = \tfrac{2}{x}y + x^2$ ist. Also:

$$2Cx + 3x^2 \stackrel{?}{=} \tfrac{2}{x}\left(Cx^2 + x^3\right) + x^2$$

- Das Addieren des homogenen Anteils ändert nichts am Lösungsverhalten.

Es gilt:

Allgemeine Lösung der inhomogenen Differenzialgleichung
=
allgemeine Lösung der homogenen Differenzialgleichung
+
eine partikuläre Lösung der inhomogenen Differenzialgleichung

Dies können wir wie folgt einsehen:

$$y' = p(x)y + q(x) \tag{I}$$

$$y' = p(x)y \tag{H}$$

Es sei nun y_{H} eine Lösung von (H), also $y'_{\mathrm{H}} = p(x)y_{\mathrm{H}}$.

Ferner sei y_{I} eine Lösung von (I), das heißt $y'_{\mathrm{I}} = p(x)y_{\mathrm{I}} + q(x)$.

Wir behaupten nun, dass auch die Kombination

$$y = Cy_{\mathrm{H}} + y_{\mathrm{I}}$$

eine Lösung von (I) ist.

Nachweis:

Damit ergibt sich folgendes Vorgehen:

1. Die homogene Differenzialgleichung (H) lösen. Dies geht mit Separation der Variablen.
2. Eine spezielle Lösung der inhomogenen Differenzialgleichung (I) finden. (Wie geht das?)
3. Die Kombination ist dann die allgemeine Lösung der inhomogenen Differenzialgleichung (I).

Für den zweiten Punkt verwenden wir folgenden Trick:

1.3.2.1 Variation der Konstanten

Joseph-Louis Lagrange, 1736 - 1813

Diese Methode geht auf LAGRANGE (1736 - 1813) zurück.

Wir erklären sie an unserem Beispiel:

$$y' = \frac{2}{x}y + x^2 \tag{I}$$

$$y' = \frac{2}{x}y \tag{H}$$

Für (H) fanden wir die allgemeine Lösung $y_H = Cx^2$. Wir ersetzen darin die Konstante C durch die Funktion $a(x)$ — dies ist die „Variation der Konstanten" — und versuchen die Sache so hin zu würgen, dass sie auf die inhomogene Differenzialgleichung (I) passt, also eine partikuläre Lösung der inhomogenen Differenzialgleichung (I) ist. Aus

$$y_P = a(x)x^2$$

finden wir durch Ableiten (Produktregel):

$$y_P' = 2xa(x) + a'(x)x^2$$

Wir vergleichen dies mit der Differenzialgleichung (I):

$$y' = \tfrac{2}{x}y + x^2 = \tfrac{2}{x}a(x)x^2 + x^2$$

Wir sehen, dass die beiden Gleichungen übereinstimmen, wenn wir $a'(x) = 1$ setzen. Daraus folgt $a(x) = x$; die Additionskonstante lassen wir weg, da wir nur an irgend einer partikulären Lösung interessiert sind. Durch Einsetzen in $y_P = a(x)x^2$ erhalten wir:

$$y_P = a(x)x^2 = xx^2 = x^3$$

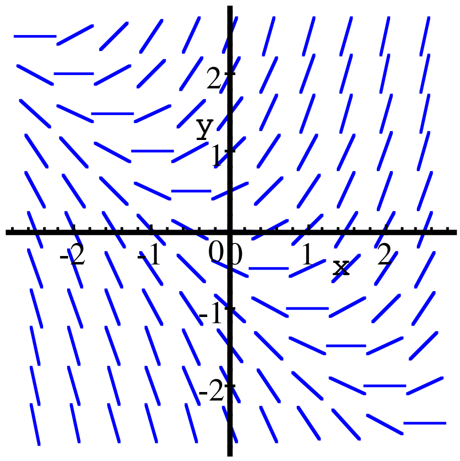
Dies ist eine partikuläre Lösung der inhomogenen Differenzialgleichung. Durch Addition der allgemeinen Lösung $y_H = Cx^2$ der homogenen Differenzialgleichung erhalten wir die allgemeine Lösung der inhomogenen Differenzialgleichung:

$$y = x^3 + Cx^2$$

1.4 Beispiel

Wir untersuchen die inhomogene Differenzialgleichung:

$$y' = y + x$$



Richtungsfeld von $y' = y + x$

Somit erhalten wir:

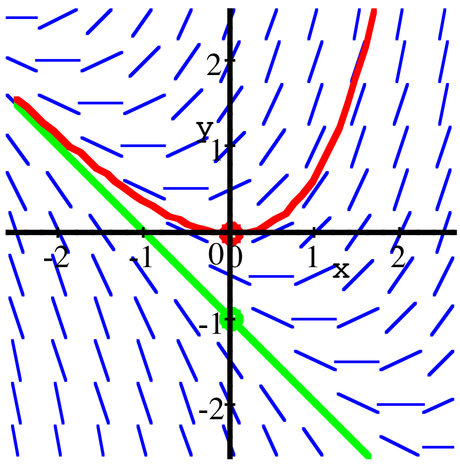
$$y = -x - 1 + Ce^x$$

a) Mit der Anfangsbedingung $y(0) = 0$ ergibt sich: $0 = -1 + C$, also $C = 1$ und

$$y = -x - 1 + e^x$$

b) Mit der Anfangsbedingung $y(0) = -1$ ergibt sich: $-1 = -1 + C$, also $C = 0$ und

$$y = -x - 1$$

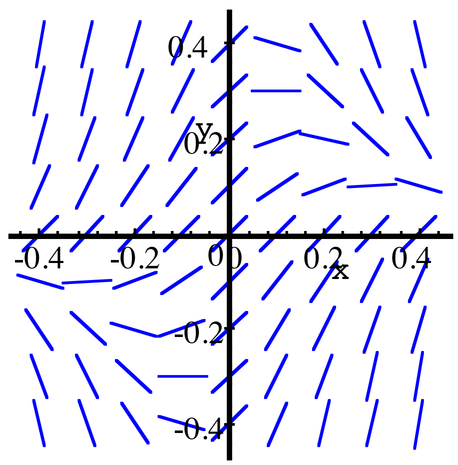


Lösungskurven

1.5 Frustrierendes Beispiel

Wir untersuchen die inhomogene Differenzialgleichung:

$$y' = 1 - 32xy$$



Richtungsfeld von $y' = 1 - 32xy$

Es ist $p(x) = -32x$ und $q(x) = 1$.

Für die homogene Differenzialgleichung $y' = -32xy$ finden wir:

Also $y_{\mathrm{H}} = C\mathrm{e}^{-16x^2}$. Soweit so gut. Nun die Variation der Konstanten, um eine partikuläre Lösung der inhomogenen Differenzialgleichung zu finden. Aus dem Ansatz:

$$y_P = a(x)\mathrm{e}^{-16x^2}$$

ergibt sich durch Ableiten:

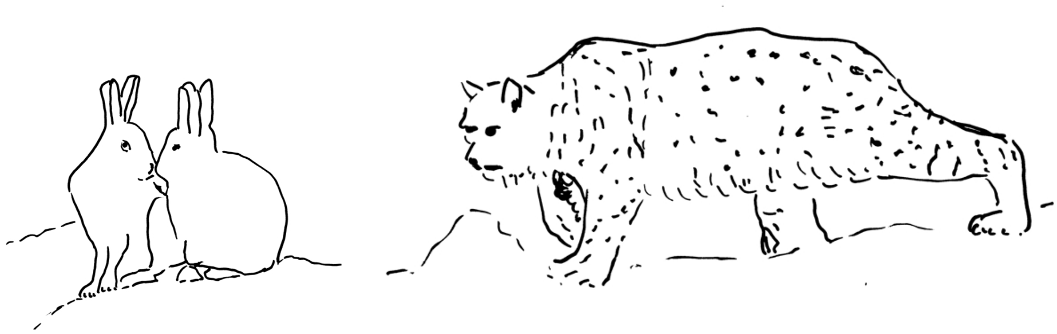
Somit ist:

$$a(x) = \int \mathrm{e}^{16x^2}\mathrm{d}x$$

Dieses Integral ist leider *nicht* elementar lösbar.

2 Systeme von Differenzialgleichungen

2.1 Luchs und Hase

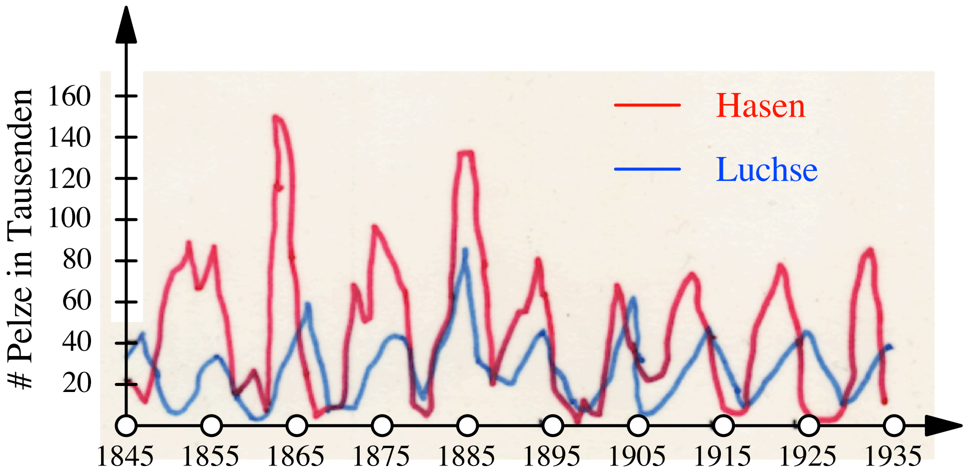


Hasen und Luchs

In diesem Beispiel geht es allgemein um die Frage „Räuber und Beute“ (Predator and Prey).

2.1.1 Etwas Geschichte

Die legendäre *Hudson Bay Company* war eine Handelsgesellschaft, welche im Norden Kanadas tätig war. Unter anderem kaufte sie den Trappern die Pelze der erbeuteten Tiere ab. Die folgende Grafik gibt eine Übersicht über die Hasenpelze und Luchspelze.



Hasenpelze und Luchspelze

Dabei fällt auf:

- Die Häufigkeiten verhalten sich periodisch. Die Periodenlänge beträgt etwa zehn Jahre.
- Die Daten für die Luchspelze sind gegenüber den Daten für die Hasenpelze zeitlich verschoben.

Wie sind diese Feststellungen zu erklären?

2.1.2 Modellbildung

Wir gehen von einem Gleichgewichtszustand für beide Populationen aus:

L = Anzahl Luchse im Gleichgewichtszustand

H = Anzahl Hasen im Gleichgewichtszustand

Im Gleichgewichtszustand wären beide Populationen konstant. Sobald das Gleichgewicht gestört wird, entstehen variable Populationszahlen. Es sei

$l(t)$ = Anzahl Luchse zur Zeit t

$h(t)$ = Anzahl Hasen zur Zeit t

Das Wachstum der Luchspopulation $l(t)$ hängt vom Nahrungsangebot $h(t)$ ab, die Abnahme der Hasenpopulation $h(t)$ wird durch die Feinde $l(t)$ bestimmt. Damit erhalten wir das System von Differenzialgleichungen (α und β sind Konstanten):

$$l'(t) = \alpha^2 \underbrace{\left(h(t) - H\right)}_{\substack{\text{Überschuss an} \\ \text{Hasen fördert} \\ \text{Luchspopulation}}}$$

$$h'(t) = -\beta^2 \underbrace{\left(l(t) - L\right)}_{\substack{\text{Zuviel Luchse} \\ \text{fressen Hasen}}}$$

2.1.3 System von Differenzialgleichungen

Zur Lösung des Systems von Differenzialgleichungen:

$$\begin{aligned} l'(t) &= \alpha^2 \left(h(t) - H\right) \\ h'(t) &= -\beta^2 \left(l(t) - L\right) \end{aligned}$$

leiten wir jede Gleichung ab und setzen die andere ein:

Damit erhalten wir folgende Differenzialgleichungen *zweiter* Ordnung:

$$l''(t) = -\alpha^2\beta^2 l(t) + \alpha^2\beta^2 L$$
$$h''(t) = -\beta^2\alpha^2 h(t) + \beta^2\alpha^2 H$$

Wir untersuchen zunächst die Differenzialgleichung für die Hasen:

$$h''(t) = -\beta^2\alpha^2 h(t) + \beta^2\alpha^2 H \qquad \text{(Inhomogener Fall, I)}$$

$$h''(t) = -\beta^2\alpha^2 h(t) \qquad \text{(Homogener Fall, H)}$$

Für den homogenen Fall (H) finden wir die allgemeine Lösung (wie, warum?):

$$h_{\mathrm{H}}(t) = C_1 \sin(\alpha\beta t) + C_2 \cos(\alpha\beta t)$$

Kontrolle:

Für den inhomogenen Fall (I) finden wir die triviale partikuläre Lösung:

$$h_{\mathrm{P}}(t) = H$$

Kontrolle:

Somit ergibt sich die allgemeine Lösung für (I):

$$h(t) = H + C_1 \sin(\alpha\beta t) + C_2 \cos(\alpha\beta t)$$

Wenn wir nun ableiten und in die Differenzialgleichung $h'(t) = -\beta^2\left(l(t) - L\right)$ einsetzen, erhalten wir:

$$l(t) = L + \tfrac{\alpha}{\beta} C_2 \sin(\alpha\beta t) - \tfrac{\alpha}{\beta} C_1 \cos(\alpha\beta t)$$

Zusammengefasst:

$$\begin{aligned} l(t) &= L + \tfrac{\alpha}{\beta} C_2 \sin(\alpha\beta t) - \tfrac{\alpha}{\beta} C_1 \cos(\alpha\beta t) \\ h(t) &= H + C_1 \sin(\alpha\beta t) + C_2 \cos(\alpha\beta t) \end{aligned}$$

Die Schreibweise mit den Konstanten ist in den beiden Funktionen $l(t)$ und $h(t)$ unterschiedlich. Wir können dies vereinheitlichen, indem wir die folgenden neuen Konstanten einführen:

$$\begin{aligned} D_1 &:= \tfrac{1}{\beta} C_1 \quad \Rightarrow \quad C_1 = \beta D_1 \\ D_2 &:= \tfrac{1}{\beta} C_2 \quad \Rightarrow \quad C_2 = \beta D_2 \end{aligned}$$

Damit erhalten wir:

$$\boxed{\begin{aligned} l(t) &= L + \alpha D_2 \sin(\alpha\beta t) - \alpha D_1 \cos(\alpha\beta t) \\ h(t) &= H + \beta D_1 \sin(\alpha\beta t) + \beta D_2 \cos(\alpha\beta t) \end{aligned}}$$

Beide Populationen schwanken um den Gleichgewichtszustand.

2.1.4 Beispiel

Es sei $\alpha^2 = 0.4$ und $\beta^2 = 0.9$

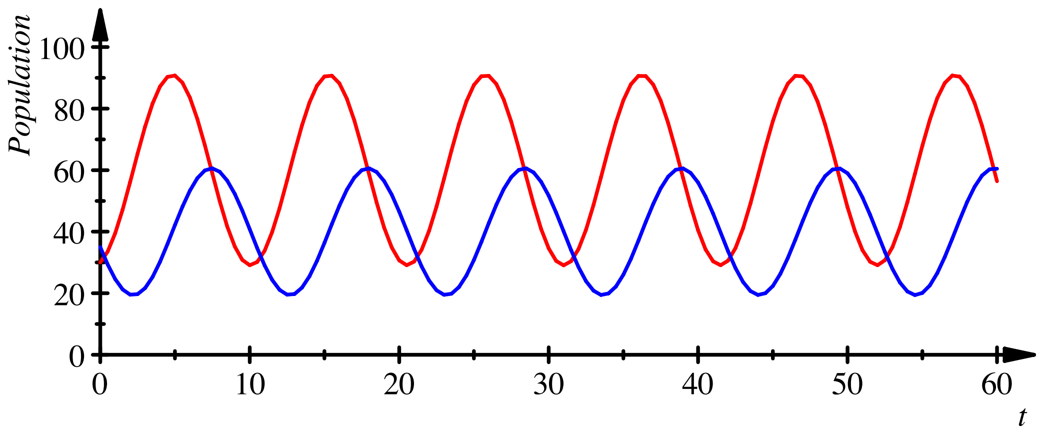
Luchs: $L = 40$, $l(0) = 35$

Hase: $H = 60$, $h(0) = 30$

Damit ergibt sich:

Also:

$$l(t) = 40 - 20\sin(0.6t) - 5\cos(0.6t)$$
$$h(t) = 60 + 7.5\sin(0.6t) - 30\cos(0.6t)$$



Verhalten der beiden Populationen

2.1.4.1 Zwischenbemerkung

Wie lässt sich die Funktion $h(t) = 60 + 7.5\sin(0.6t) - 30\cos(0.6t)$ als eine einzige Sinus- oder Kosinus-Schwingung darstellen? Für zum Beispiel eine einzige Sinus-Schwingung machen wir den Ansatz:

$$7.5\sin(0.6t) - 30\cos(0.6t) = C\sin(0.6t + \delta)$$

Das Additionstheorem für die Sinusfunktion liefert:

$$7.5\sin(0.6t) - 30\cos(0.6t) = C\sin(0.6t + \delta) = C\left(\sin(0.6t)\cos(\delta) + \cos(0.6t)\sin(\delta)\right)$$

Durch Vergleich erhalten wir $7.5 = C\cos(\delta)$ und $-30 = C\sin(\delta)$. Daraus ergibt sich:

Also ist $C \approx 30.923$ und $\delta \approx -1.326$. Somit können wir die Funktion $h(t)$ auch wie folgt schreiben:

$$h(t) = 60 + 30.923\sin(0.6t - 1.326)$$

Natürlich könnten wir die Funktion auch in eine einzige Kosinus-Schwingung umschreiben. Die Rechnung geht analog.

2.1.5 Krasses Beispiel

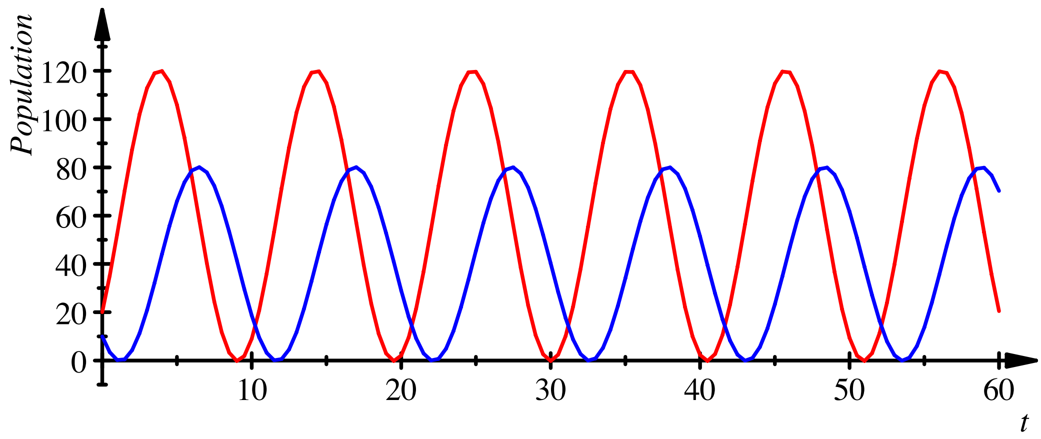
Es sei wiederum $\alpha^2 = 0.4$ und $\beta^2 = 0.9$.

Ferner: Luchs: $L = 40$, $l(0) = 10$, Hase: $H = 60$, $h(0) = 20$. Es sind also lediglich die beiden Anfangsbedingungen etwas verändert worden.

Damit ergibt sich:

$$l(t) = 40 - \tfrac{80}{3}\sin(0.6t) - 30\cos(0.6t)$$

$$h(t) = 60 + 45\sin(0.6t) - 40\cos(0.6t)$$



Veränderte Anfangsbedingungen

Schaffen die Populationen die Kurve?

Wenn wir die Funktionen $l(t)$ und $h(t)$ je zum Beispiel in einige einzige Kosinus-Schwingung umschreiben, erhalten wir:

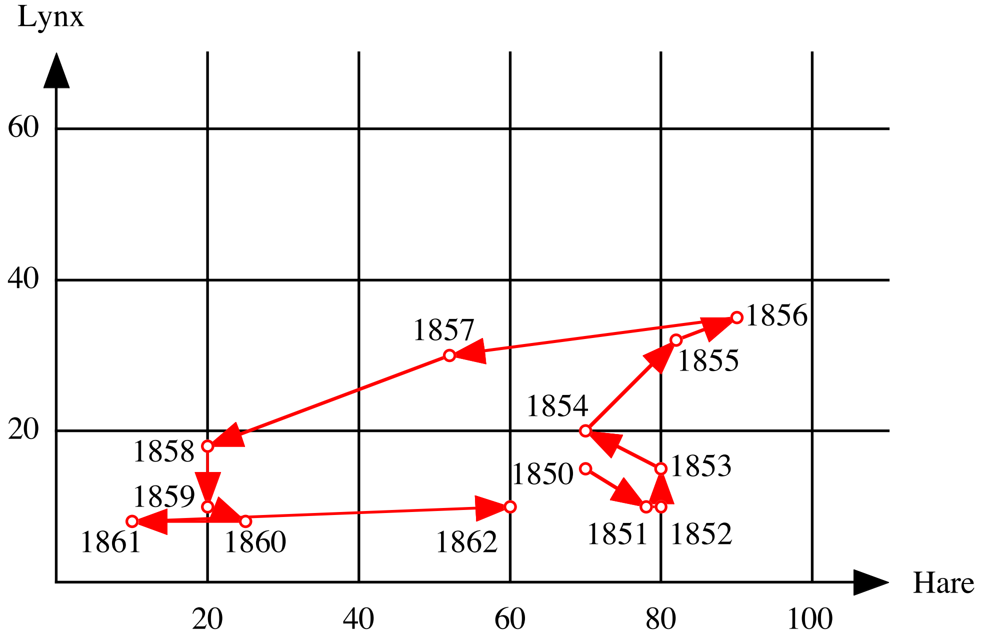
$$l(t) = 40 + 40.1386486\cos(0.6t + 2.414950313)$$

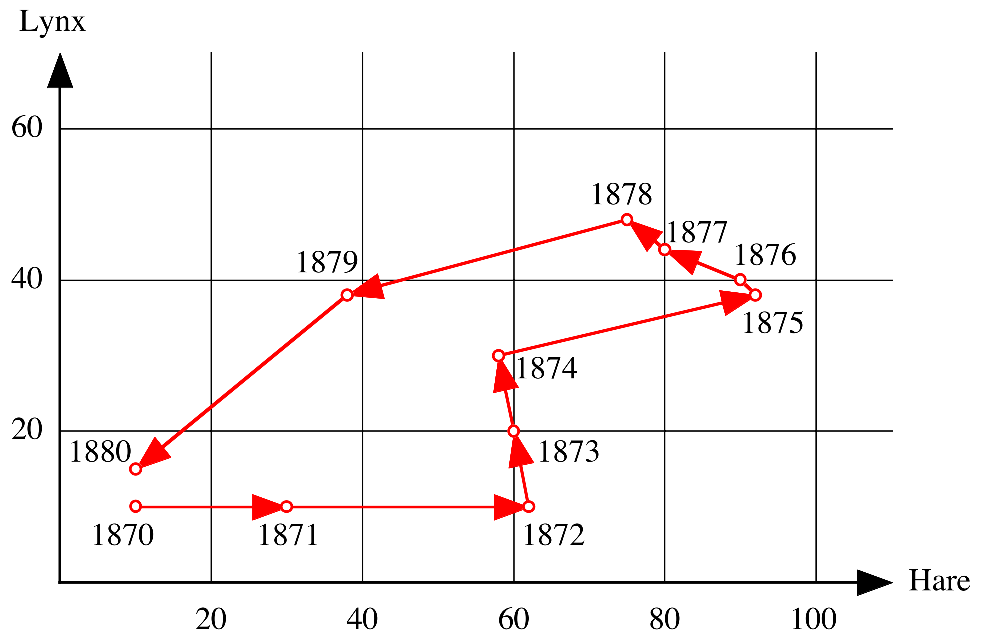
$$h(t) = 60 + 60.20797289\cos(0.6t - 2.297438667)$$

Wir sehen, dass beide Populationen aussterben.

2.1.6 Zyklisches Verhalten

Die folgende Figur zeigt eine andere Darstellung der Statistik der Hudson Bay Company für die Perioden 1850 - 1862 und 1870 - 1880.

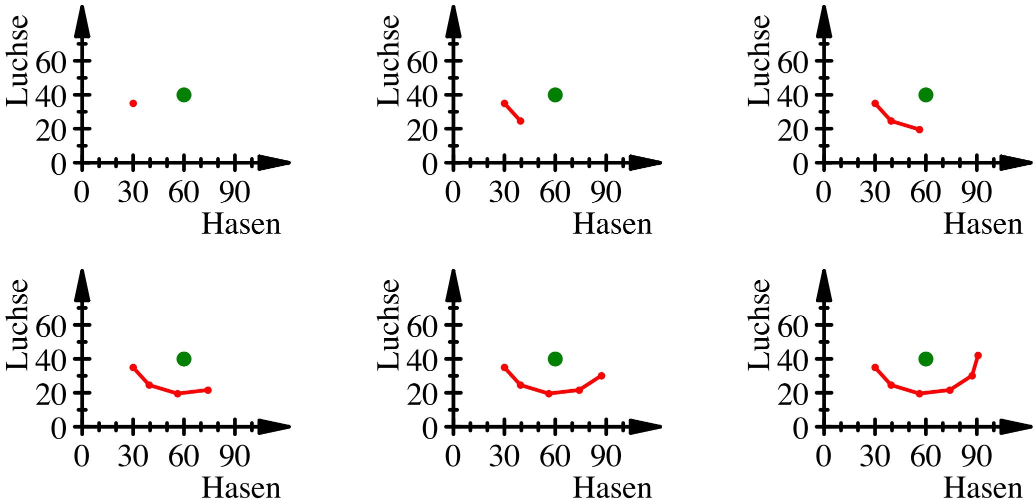




Andere Darstellung

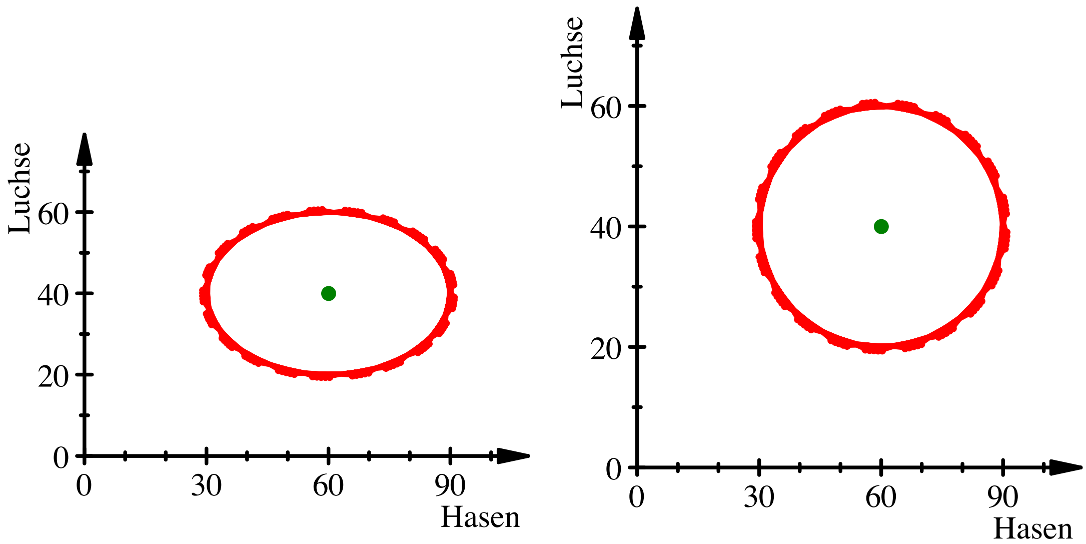
Wir erkennen darin eine Art zyklisches Verhalten.

Die folgende Figurensequenz zeigt dasselbe für die Lösungen unseres Systems von Differenzialgleichungen mit den Werten des ersten Beispiels, also $\alpha^2 = 0.4$ und $\beta^2 = 0.9$, Luchs: $L = 40$, $l(0) = 35$, Hase: $H = 60$, $h(0) = 30$.



Beginn des zyklischen Verhaltens

Die entstehende Ellipse hat den Gleichgewichtszustand als Mittelpunkt. Durch geeignete Wahl der Einheiten kann sie in einen Kreis transformiert werden.



Zyklisches Verhalten

3 Zusammenfassung

3.1 Inhomogener und homogener Fall

Allgemeine Lösung der inhomogenen Differenzialgleichung

=

allgemeine Lösung der homogenen Differenzialgleichung

+

eine partikuläre Lösung der inhomogenen Differenzialgleichung

Allgemeine Lösung homogen: Separation der Variablen

Partikuläre Lösung inhomogen: Variation der Konstanten. Konstante C durch $a(t)$ ersetzen, einsetzen und vergleichen.

3.2 Systeme von Differenzialgleichungen

Beispiel Luchs / Hase

$$l'(t) = \alpha^2 \big(h(t) - H\big)$$
$$h'(t) = -\beta^2 \big(l(t) - L\big)$$

Führt zu Schwingungen mit Phasenversatz um den Gleichgewichtszustand:

$$l(t) = L + \alpha D_2 \sin(\alpha\beta t) - \alpha D_1 \cos(\alpha\beta t)$$
$$h(t) = H + \beta D_1 \sin(\alpha\beta t) + \beta D_2 \cos(\alpha\beta t)$$

3.2.1 Vereinfachte Darstellung

Jede Schwingung kann als eine einzige Sinus- oder Kosinusfunktion dargestellt werden: Ansatz $\beta D_1 \sin(\alpha\beta t) + \beta D_2 \cos(\alpha\beta t) = C \sin(\alpha\beta t + \delta)$ mit Additionstheorem bearbeiten, dann vergleichen. C ist dann die effektive Amplitude.

3.2.2 Anderes Diagramm

Wir verwenden h und l als Koordinaten und t als Parameter. Es entsteht eine Ellipse. Zyklisches Verhalten.