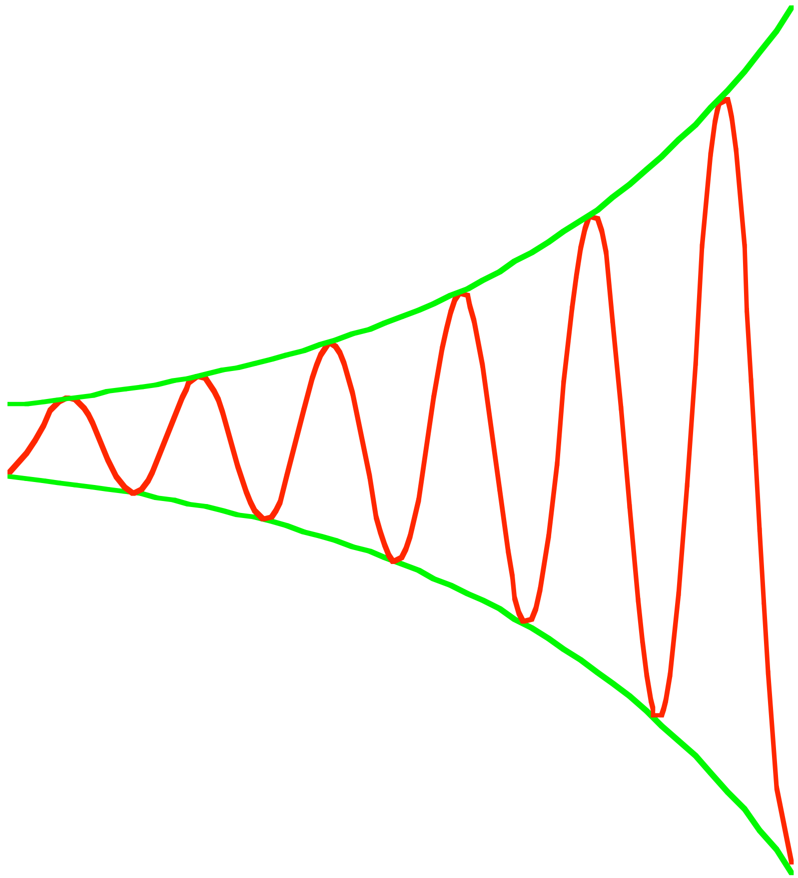


# Modul 112

## Lineare Differenzialgleichungen zweiter Ordnung

Beispiel: $y''(t) = 0$

Beispiel: $y''(t) = 0$

Lösung: $y(t) = At + B$

Beispiel: $y''(t) = 0$

Lösung: $y(t) = At + B$

Kontrolle: $y'(t) = A$

$$y''(t) = 0$$

Beispiel: $y''(t) = y(t)$

Beispiel: $y''(t) = y(t)$

Lösung: $y(t) = A\mathrm{e}^{t} + B\mathrm{e}^{-t}$

Kontrolle: $y'(t) = A\mathrm{e}^{t} - B\mathrm{e}^{-t}$

$$y''(t) = A\mathrm{e}^{t} + B\mathrm{e}^{-t} = y(t)$$

Beispiel: $y''(t) = -y(t)$

Beispiel: $y''(t) = -y(t)$

Lösung: $y(t) = \sin(t)$ oder $y(t) = \cos(t)$

Beispiel: $y''(t) = -y(t)$

Lösung: $y(t) = \sin(t)$ oder $y(t) = \cos(t)$

allgemein: $y(t) = A\sin(t) + B\cos(t)$

Kontrolle: $y'(t) = A\cos(t) - B\sin(t)$

$$y''(t) = -A\sin(t) - B\cos(t) = -y(t)$$

Beispiel: $ay'' + by' + cy = 0$

homogen, linear, zweite Ordnung

Beispiel: $ay'' + by' + cy = 0$

homogen, linear, zweite Ordnung

Versuch ("Ansatz"): $y = \mathrm{e}^{\lambda t}$

Beispiel: $ay'' + by' + cy = 0$

homogen, linear, zweite Ordnung

Versuch ("Ansatz"): $y = \mathrm{e}^{\lambda t}$ $y' = \lambda \mathrm{e}^{\lambda t}$ $y'' = \lambda^2 \mathrm{e}^{\lambda t}$

Beispiel: $ay'' + by' + cy = 0$

homogen, linear, zweite Ordnung

Versuch ("Ansatz"): $y = \mathrm{e}^{\lambda t}$ $y' = \lambda \mathrm{e}^{\lambda t}$ $y'' = \lambda^2 \mathrm{e}^{\lambda t}$

einsetzen:

$$ay'' + by' + cy = a\lambda^2 \mathrm{e}^{\lambda t} + b\lambda \mathrm{e}^{\lambda t} + c\mathrm{e}^{\lambda t} = \mathrm{e}^{\lambda t}\left(a\lambda^2 + b\lambda + c\right) \overset{\text{soll}}{\underset{\downarrow}{=}} 0$$

$$e^{\lambda t}\left(a\lambda^2 + b\lambda + c\right) \overset{\text{soll}}{\downarrow}{=} 0$$

Kann nicht
Null sein

$$\mathrm{e}^{\lambda t}\left(a\lambda^2 + b\lambda + c\right) \overset{\text{soll}}{=} 0$$

Kann nicht Null sein

$$e^{\lambda t}\left(a\lambda^2 + b\lambda + c\right) \overset{\text{soll}}{=} 0$$

also muss dies Null sein

charakteristische Gleichung

$$a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$$

charakteristische Gleichung

$$\boxed{a\lambda^2 + b\lambda + c = 0}$$

zwei, eine oder gar keine Lösung ...

# Erster Fall: zwei reelle Lösungen

$$ay'' + by' + cy = 0 \quad \text{mit} \quad b^2 - 4ac > 0$$

## Erster Fall: zwei reelle Lösungen

$$ay'' + by' + cy = 0 \quad \text{mit} \quad b^2 - 4ac > 0$$

charakteristische Gleichung $\quad a\lambda^2 + b\lambda + c = 0 \quad$ hat Lösungen

$$\lambda_1 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \qquad \lambda_2 = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

# Erster Fall: zwei reelle Lösungen

Differenzialgleichung $\quad ay'' + by' + cy = 0$

hat die Lösung

$$\boxed{y(t) = \underset{\uparrow}{A}e^{\lambda_1 t} + \underset{\uparrow}{B}e^{\lambda_2 t}}$$

Braucht zwei Anfangsbedingungen

Kontrolle: $ay'' + by' + cy = 0$ $y(t) = Ae^{\lambda_1 t} + Be^{\lambda_2 t}$

Kontrolle: $ay'' + by' + cy = 0$ $\qquad y(t) = Ae^{\lambda_1 t} + Be^{\lambda_2 t}$

$$y'(t) = \lambda_1 Ae^{\lambda_1 t} + \lambda_2 Be^{\lambda_2 t}$$

Kontrolle: $ay'' + by' + cy = 0$ $y(t) = A\mathrm{e}^{\lambda_1 t} + B\mathrm{e}^{\lambda_2 t}$

$$y'(t) = \lambda_1 A\mathrm{e}^{\lambda_1 t} + \lambda_2 B\mathrm{e}^{\lambda_2 t}$$

$$y''(t) = \lambda_1^2 A\mathrm{e}^{\lambda_1 t} + \lambda_2^2 B\mathrm{e}^{\lambda_2 t}$$

Kontrolle: $ay'' + by' + cy = 0$ $\qquad y(t) = A\mathrm{e}^{\lambda_1 t} + B\mathrm{e}^{\lambda_2 t}$

$y'(t) = \lambda_1 A\mathrm{e}^{\lambda_1 t} + \lambda_2 B\mathrm{e}^{\lambda_2 t}$

$y''(t) = \lambda_1^2 A\mathrm{e}^{\lambda_1 t} + \lambda_2^2 B\mathrm{e}^{\lambda_2 t}$ einsetzen:

Kontrolle: $\quad ay'' + by' + cy = 0 \qquad y(t) = A\mathrm{e}^{\lambda_1 t} + B\mathrm{e}^{\lambda_2 t}$

$$y'(t) = \lambda_1 A\mathrm{e}^{\lambda_1 t} + \lambda_2 B\mathrm{e}^{\lambda_2 t}$$

$$y''(t) = \lambda_1^2 A\mathrm{e}^{\lambda_1 t} + \lambda_2^2 B\mathrm{e}^{\lambda_2 t}$$ einsetzen:

$$a\left(\lambda_1^2 A\mathrm{e}^{\lambda_1 t} + \lambda_2^2 B\mathrm{e}^{\lambda_2 t}\right) + b\left(\lambda_1 A\mathrm{e}^{\lambda_1 t} + \lambda_2 B\mathrm{e}^{\lambda_2 t}\right) + c\left(A\mathrm{e}^{\lambda_1 t} + B\mathrm{e}^{\lambda_2 t}\right) =$$

Kontrolle: $\quad ay'' + by' + cy = 0 \qquad y(t) = Ae^{\lambda_1 t} + Be^{\lambda_2 t}$

$$y'(t) = \lambda_1 Ae^{\lambda_1 t} + \lambda_2 Be^{\lambda_2 t}$$

$$y''(t) = \lambda_1^2 Ae^{\lambda_1 t} + \lambda_2^2 Be^{\lambda_2 t}$$ einsetzen:

$$a\left(\lambda_1^2 \underline{Ae^{\lambda_1 t}} + \lambda_2^2 Be^{\lambda_2 t}\right) + b\left(\lambda_1 \underline{Ae^{\lambda_1 t}} + \lambda_2 Be^{\lambda_2 t}\right) + c\left(\underline{Ae^{\lambda_1 t}} + Be^{\lambda_2 t}\right) =$$

$$= \underline{Ae^{\lambda_1 t}}\left(a\lambda_1^2 + b\lambda_1 + c\right) +$$

Kontrolle: $ay'' + by' + cy = 0$ $\qquad y(t) = Ae^{\lambda_1 t} + Be^{\lambda_2 t}$

$$y'(t) = \lambda_1 Ae^{\lambda_1 t} + \lambda_2 Be^{\lambda_2 t}$$

$$y''(t) = \lambda_1^2 Ae^{\lambda_1 t} + \lambda_2^2 Be^{\lambda_2 t}$$ einsetzen:

$$a\left(\lambda_1^2 \underline{Ae^{\lambda_1 t}} + \lambda_2^2 \underline{Be^{\lambda_2 t}}\right) + b\left(\lambda_1 \underline{Ae^{\lambda_1 t}} + \lambda_2 \underline{Be^{\lambda_2 t}}\right) + c\left(\underline{Ae^{\lambda_1 t}} + \underline{Be^{\lambda_2 t}}\right) =$$

$$= \underline{Ae^{\lambda_1 t}}\left(a\lambda_1^2 + b\lambda_1 + c\right) + \underline{Be^{\lambda_2 t}}\left(a\lambda_2^2 + b\lambda_2 + c\right)$$

Kontrolle: $ay'' + by' + cy = 0 \qquad y(t) = Ae^{\lambda_1 t} + Be^{\lambda_2 t}$

$$y'(t) = \lambda_1 Ae^{\lambda_1 t} + \lambda_2 Be^{\lambda_2 t}$$

$$y''(t) = \lambda_1^2 Ae^{\lambda_1 t} + \lambda_2^2 Be^{\lambda_2 t}$$

einsetzen:

$$a\left(\lambda_1^2 \underline{Ae^{\lambda_1 t}} + \lambda_2^2 \underline{Be^{\lambda_2 t}}\right) + b\left(\lambda_1 \underline{Ae^{\lambda_1 t}} + \lambda_2 \underline{Be^{\lambda_2 t}}\right) + c\left(\underline{Ae^{\lambda_1 t}} + \underline{Be^{\lambda_2 t}}\right) =$$

$$= \underline{Ae^{\lambda_1 t}} \underbrace{\left(a\lambda_1^2 + b\lambda_1 + c\right)}_{0} + \underline{Be^{\lambda_2 t}} \underbrace{\left(a\lambda_2^2 + b\lambda_2 + c\right)}_{0}$$

Kontrolle: $\quad ay'' + by' + cy = 0 \qquad y(t) = Ae^{\lambda_1 t} + Be^{\lambda_2 t}$

$$y'(t) = \lambda_1 Ae^{\lambda_1 t} + \lambda_2 Be^{\lambda_2 t}$$

$$y''(t) = \lambda_1^2 Ae^{\lambda_1 t} + \lambda_2^2 Be^{\lambda_2 t}$$ einsetzen:

$$a\left(\lambda_1^2 \underline{Ae^{\lambda_1 t}} + \lambda_2^2 \underline{Be^{\lambda_2 t}}\right) + b\left(\lambda_1 \underline{Ae^{\lambda_1 t}} + \lambda_2 \underline{Be^{\lambda_2 t}}\right) + c\left(\underline{Ae^{\lambda_1 t}} + \underline{Be^{\lambda_2 t}}\right) =$$

$$= \underline{Ae^{\lambda_1 t}} \underbrace{\left(a\lambda_1^2 + b\lambda_1 + c\right)}_{0} + \underline{Be^{\lambda_2 t}} \underbrace{\left(a\lambda_2^2 + b\lambda_2 + c\right)}_{0} = 0$$

Beispiel

$2y'' - 10y' + 12y = 0$ mit $y(0) = 7$ und $y'(0) = 19$

Anfangsbedingungen

Beispiel

$2y'' - 10y' + 12y = 0$ mit $y(0) = 7$ und $y'(0) = 19$

Charakteristische Gleichung:

Beispiel

$2y'' - 10y' + 12y = 0$ mit $y(0) = 7$ und $y'(0) = 19$

Charakteristische Gleichung:

$$2\lambda^2 - 10\lambda + 12 = 0$$

Beispiel

$2y'' - 10y' + 12y = 0$ mit $y(0) = 7$ und $y'(0) = 19$

Charakteristische Gleichung:

$$2\lambda^2 - 10\lambda + 12 = 0$$

$$\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$$

Beispiel

$2y'' - 10y' + 12y = 0$ mit $y(0) = 7$ und $y'(0) = 19$

Charakteristische Gleichung:

$$2\lambda^2 - 10\lambda + 12 = 0$$

$$\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$$

$$(\lambda - 3)(\lambda - 2) = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = 3, \quad \lambda_2 = 2$$

Beispiel

$2y'' - 10y' + 12y = 0$ mit $y(0) = 7$ und $y'(0) = 19$

Charakteristische Gleichung:

$$2\lambda^2 - 10\lambda + 12 = 0$$

$$\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$$

$$(\lambda - 3)(\lambda - 2) = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = 3, \quad \lambda_2 = 2$$

$$y(t) = A\mathrm{e}^{3t} + B\mathrm{e}^{2t}$$

Beispiel

$2y'' - 10y' + 12y = 0$ mit $y(0) = 7$ und $y'(0) = 19$

Anfangsbedingungen

$y(t) = Ae^{3t} + Be^{2t}$

Beispiel

$2y'' - 10y' + 12y = 0$ mit $y(0) = 7$ und $y'(0) = 19$

$$y(t) = Ae^{3t} + Be^{2t}$$

$$y'(t) = 3Ae^{3t} + 2Be^{2t}$$

Beispiel

$2y'' - 10y' + 12y = 0$ mit $y(0) = 7$ und $y'(0) = 19$

$y(t) = Ae^{3t} + Be^{2t}$ $\qquad$ $y(0) = A\underbrace{e^{0}}_{1} + Be^{0}$

$y'(t) = 3Ae^{3t} + 2Be^{2t}$

Beispiel

$2y'' - 10y' + 12y = 0$ mit $y(0) = 7$ und $y'(0) = 19$

$y(t) = Ae^{3t} + Be^{2t}$

$$y(0) = A\underbrace{e^{0}}_{1} + Be^{0} = A + B$$

$y'(t) = 3Ae^{3t} + 2Be^{2t}$

Beispiel

$2y'' - 10y' + 12y = 0$ mit $y(0) = 7$ und $y'(0) = 19$

$$y(t) = Ae^{3t} + Be^{2t} \qquad y(0) = A\underbrace{e^{0}}_{1} + Be^{0} = A + B \overset{!}{=} 7$$

$$y'(t) = 3Ae^{3t} + 2Be^{2t}$$

Beispiel

$2y'' - 10y' + 12y = 0$ mit $y(0) = 7$ und $y'(0) = 19$

$$y(t) = Ae^{3t} + Be^{2t} \qquad y(0) = A\underbrace{e^0}_{1} + Be^0 = A + B \overset{!}{=} 7$$

$$y'(t) = 3Ae^{3t} + 2Be^{2t} \qquad y'(0) = 3Ae^0 + 2Be^0 = 3A + 2B \overset{!}{=} 19$$

Beispiel

$2y'' - 10y' + 12y = 0$ mit $y(0) = 7$ und $y'(0) = 19$

$$y(t) = Ae^{3t} + Be^{2t} \qquad y(0) = A\underbrace{e^0}_{1} + Be^0 = A + B \overset{!}{=} 7$$

$$y'(t) = 3Ae^{3t} + 2Be^{2t} \qquad y'(0) = 3Ae^0 + 2Be^0 = 3A + 2B \overset{!}{=} 19$$

$$\begin{aligned} A + B &= 7 \\ 3A + 2B &= 19 \end{aligned}$$

Beispiel

$2y'' - 10y' + 12y = 0$ mit $y(0) = 7$ und $y'(0) = 19$

$$y(t) = Ae^{3t} + Be^{2t}$$

$$\begin{aligned} A + B &= 7 \\ 3A + 2B &= 19 \end{aligned}$$

Beispiel

$2y'' - 10y' + 12y = 0$ mit $y(0) = 7$ und $y'(0) = 19$

$$y(t) = Ae^{3t} + Be^{2t}$$

$$\begin{aligned} A + B &= 7 & \qquad -2A - 2B &= -14 \\ 3A + 2B &= 19 & \qquad 3A + 2B &= 19 \end{aligned}$$

Beispiel

$2y'' - 10y' + 12y = 0$ mit $y(0) = 7$ und $y'(0) = 19$

$$y(t) = Ae^{3t} + Be^{2t}$$

$$\begin{aligned} A + B &= 7 \\ 3A + 2B &= 19 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} -2A - 2B &= -14 \\ 3A + 2B &= 19 \\ \hline A \qquad &= 5 \end{aligned}$$

Beispiel

$2y'' - 10y' + 12y = 0$ mit $y(0) = 7$ und $y'(0) = 19$

$y(t) = A\mathrm{e}^{3t} + B\mathrm{e}^{2t}$

$$
\begin{aligned}
A + B &= 7 \\
3A + 2B &= 19
\end{aligned}
\qquad\qquad
\begin{array}{r}
-2A - 2B = -14 \\
3A + 2B = 19 \\
\hline
A \qquad = 5
\end{array}
$$

$B = 2$

Beispiel

$2y'' - 10y' + 12y = 0$ mit $y(0) = 7$ und $y'(0) = 19$

$$y(t) = A\mathrm{e}^{3t} + B\mathrm{e}^{2t}$$

$$\begin{aligned} A + B &= 7 \\ 3A + 2B &= 19 \end{aligned} \qquad\qquad \begin{array}{r} -2A - 2B = -14 \\ 3A + 2B = 19 \\ \hline A \qquad = 5 \end{array}$$

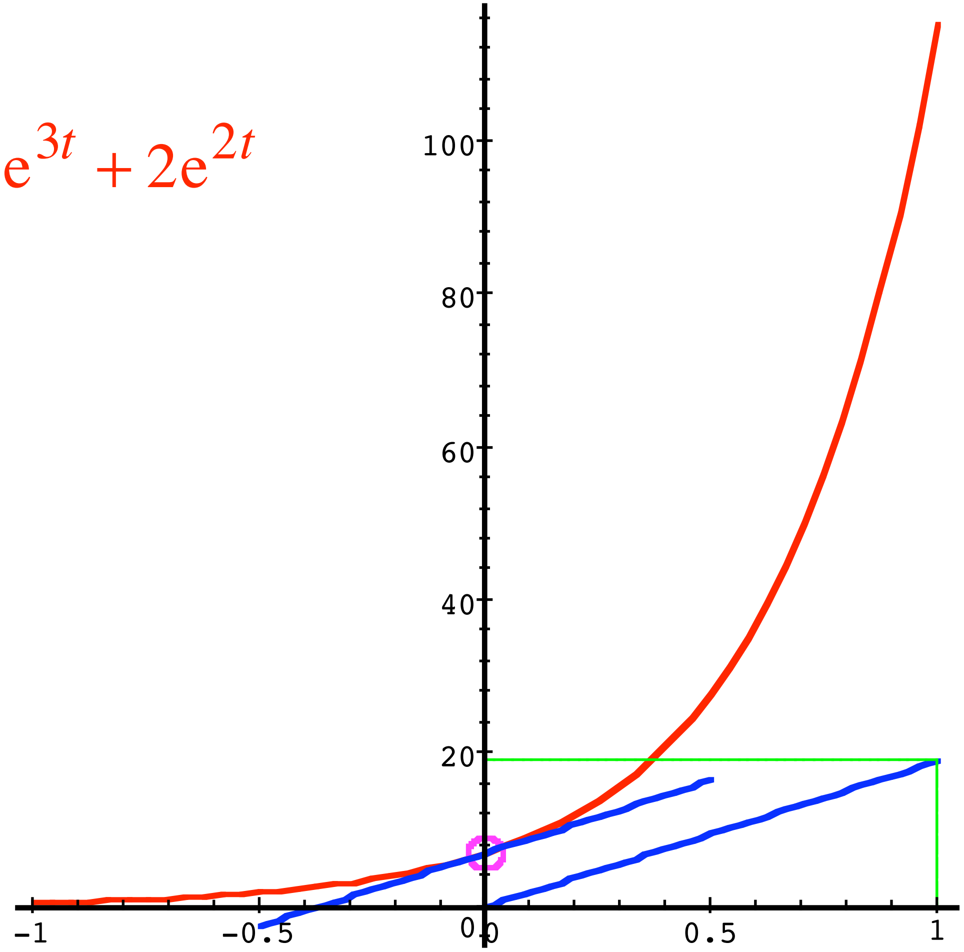
$$B = 2$$

$$y(t) = 5\mathrm{e}^{3t} + 2\mathrm{e}^{2t}$$

Beispiel

$2y'' - 10y' + 12y = 0$ mit $y(0) = 7$ und $y'(0) = 19$

$y(t) = 5e^{3t} + 2e^{2t}$



Mit CAS

```
> DGl:=2*diff(y(t), t$2) - 10*diff(y(t), t) + 12*y(t) = 0;
```

$$DGl := 2\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}\,y(t)\right) - 10\left(\frac{\partial}{\partial t}\,y(t)\right) + 12\,y(t) = 0$$

Mit CAS

```
> DGl:=2*diff(y(t), t$2) - 10*diff(y(t), t) + 12*y(t) = 0;
```

$$DGl := 2\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}\mathrm{y}(t)\right) - 10\left(\frac{\partial}{\partial t}\mathrm{y}(t)\right) + 12\,\mathrm{y}(t) = 0$$

---

```
> dsolve({DGl, y(0) = 7,  D(y)(0)=19}, y(t));
```

$$\mathrm{y}(t) = 2\,\mathrm{e}^{(2\,t)} + 5\,\mathrm{e}^{(3\,t)}$$

## Zweiter Fall: eine reelle Lösung

$$ay'' + by' + cy = 0 \quad \text{mit} \quad b^2 - 4ac = 0$$

# Zweiter Fall: eine reelle Lösung

$$ay'' + by' + cy = 0 \quad \text{mit} \quad b^2 - 4ac = 0$$

Charakteristische Gleichung $a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$

hat Lösung $\lambda_0 = \frac{-b}{2a}$

## Zweiter Fall: eine reelle Lösung

$$ay'' + by' + cy = 0 \quad \text{mit} \quad b^2 - 4ac = 0$$

Charakteristische Gleichung $a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$

hat Lösung $\lambda_0 = \frac{-b}{2a}$

Differenzialgleichung $ay'' + by' + cy = 0$

hat Lösung $y(t) = (At + B)e^{\lambda_0 t}$

Braucht zwei Anfangsbedingungen

## Zweiter Fall: eine reelle Lösung

$$ay'' + by' + cy = 0 \quad \text{mit} \quad b^2 - 4ac = 0, \quad \lambda_0 = \frac{-b}{2a}$$

Lösung: $\quad y(t) = (At + B)\mathrm{e}^{\lambda_0 t}$

## Zweiter Fall: eine reelle Lösung

$$ay'' + by' + cy = 0 \quad \text{mit} \quad b^2 - 4ac = 0, \quad \lambda_0 = \frac{-b}{2a}$$

Lösung: $\quad y(t) = (At + B)\mathrm{e}^{\lambda_0 t}$

Kontrolle: $\quad y'(t) = A\mathrm{e}^{\lambda_0 t} + \lambda_0 (At + B)\mathrm{e}^{\lambda_0 t}$

Zweiter Fall: eine reelle Lösung

$$ay'' + by' + cy = 0 \quad \text{mit} \quad b^2 - 4ac = 0, \quad \lambda_0 = \frac{-b}{2a}$$

Lösung: $\quad y(t) = (At + B)\mathrm{e}^{\lambda_0 t}$

Kontrolle: $\quad y'(t) = A\mathrm{e}^{\lambda_0 t} + \lambda_0 (At + B)\mathrm{e}^{\lambda_0 t} = \mathrm{e}^{\lambda_0 t}(A + At\lambda_0 + B\lambda_0)$

## Zweiter Fall: eine reelle Lösung

$$ay'' + by' + cy = 0 \quad \text{mit} \quad b^2 - 4ac = 0, \quad \lambda_0 = \frac{-b}{2a}$$

Lösung: $\quad y(t) = (At + B)\mathrm{e}^{\lambda_0 t}$

Kontrolle: $\quad y'(t) = A\mathrm{e}^{\lambda_0 t} + \lambda_0 (At + B)\mathrm{e}^{\lambda_0 t} = \mathrm{e}^{\lambda_0 t}(A + At\lambda_0 + B\lambda_0)$

$$y''(t) = \lambda_0 \mathrm{e}^{\lambda_0 t}(A + At\lambda_0 + B\lambda_0) + A\lambda_0 \mathrm{e}^{\lambda_0 t}$$

## Zweiter Fall: eine reelle Lösung

$$ay'' + by' + cy = 0 \quad \text{mit} \quad b^2 - 4ac = 0, \quad \lambda_0 = \frac{-b}{2a}$$

Lösung: $\quad y(t) = (At + B)\mathrm{e}^{\lambda_0 t}$

Kontrolle: $\quad y'(t) = A\mathrm{e}^{\lambda_0 t} + \lambda_0 (At + B)\mathrm{e}^{\lambda_0 t} = \mathrm{e}^{\lambda_0 t}\left(A + At\lambda_0 + B\lambda_0\right)$

$$y''(t) = \lambda_0 \mathrm{e}^{\lambda_0 t}\left(A + At\lambda_0 + B\lambda_0\right) + A\lambda_0 \mathrm{e}^{\lambda_0 t}$$

$$= \mathrm{e}^{\lambda_0 t}\left(\lambda_0^2 At + \lambda_0^2 B + 2\lambda_0 A\right)$$

# Zweiter Fall: eine reelle Lösung

$$ay'' + by' + cy = 0 \quad \text{mit} \quad b^2 - 4ac = 0, \quad \lambda_0 = \frac{-b}{2a}$$

Lösung: $\quad y(t) = (At + B)\mathrm{e}^{\lambda_0 t}$

Kontrolle: $\quad y'(t) = A\mathrm{e}^{\lambda_0 t} + \lambda_0 (At + B)\mathrm{e}^{\lambda_0 t} = \mathrm{e}^{\lambda_0 t}\left(A + At\lambda_0 + B\lambda_0\right)$

$$y''(t) = \lambda_0 \mathrm{e}^{\lambda_0 t}\left(A + At\lambda_0 + B\lambda_0\right) + A\lambda_0 \mathrm{e}^{\lambda_0 t}$$

$$= \mathrm{e}^{\lambda_0 t}\left(\lambda_0^2 At + \lambda_0^2 B + 2\lambda_0 A\right)$$

einsetzen:

$$\underbrace{\mathrm{e}^{\lambda_0 t}}_{\neq 0}\left(a\left(\lambda_0^2 At + \lambda_0^2 B + 2\lambda_0 A\right) + b\left(A + At\lambda_0 + B\lambda_0\right) + c\left(At + B\right)\right) \overset{?}{=} 0$$

## Zweiter Fall: eine reelle Lösung

$$ay'' + by' + cy = 0 \quad \text{mit} \quad b^2 - 4ac = 0, \quad \lambda_0 = \frac{-b}{2a}$$

Lösung: $\quad y(t) = (At + B)\mathrm{e}^{\lambda_0 t}$

Kontrolle: $\quad y'(t) = A\mathrm{e}^{\lambda_0 t} + \lambda_0 (At + B)\mathrm{e}^{\lambda_0 t} = \mathrm{e}^{\lambda_0 t}\left(A + At\lambda_0 + B\lambda_0\right)$

$$y''(t) = \lambda_0 \mathrm{e}^{\lambda_0 t}\left(A + At\lambda_0 + B\lambda_0\right) + A\lambda_0 \mathrm{e}^{\lambda_0 t}$$

$$= \mathrm{e}^{\lambda_0 t}\left(\lambda_0^2 At + \lambda_0^2 B + 2\lambda_0 A\right)$$

einsetzen:

$$\underbrace{\mathrm{e}^{\lambda_0 t}}_{\neq 0}\underbrace{\left(a\left(\lambda_0^2 At + \lambda_0^2 B + 2\lambda_0 A\right) + b\left(A + At\lambda_0 + B\lambda_0\right) + c(At + B)\right)}_{\overset{?}{=} 0} \overset{?}{=} 0$$

# Zweiter Fall: eine reelle Lösung

$$ay'' + by' + cy = 0 \qquad \lambda_0 = \frac{-b}{2a}$$

---

$$a\left(\lambda_0^2 At + \lambda_0^2 B + 2\lambda_0 A\right) + b\left(A + At\lambda_0 + B\lambda_0\right) + c\left(At + B\right) \overset{?}{=} 0$$

# Zweiter Fall: eine reelle Lösung

$$ay'' + by' + cy = 0 \qquad \lambda_0 = \frac{-b}{2a}$$

---

$$a\left(\lambda_0^2 \underline{At} + \lambda_0^2 B + 2\lambda_0 A\right) + b\left(A + \underline{At}\lambda_0 + B\lambda_0\right) + c\left(\underline{At} + B\right) \overset{?}{=} 0$$

# Zweiter Fall: eine reelle Lösung

$$ay'' + by' + cy = 0 \qquad \lambda_0 = \frac{-b}{2a}$$

---

$$a\left(\lambda_0^2 \underline{At} + \lambda_0^2 B + 2\lambda_0 A\right) + b\left(A + \underline{At}\lambda_0 + B\lambda_0\right) + c\left(\underline{At} + B\right) \stackrel{?}{=} 0$$

$$\underline{At}\left(a\lambda_0^2 + b\lambda_0 + c\right)$$

# Zweiter Fall: eine reelle Lösung

$$ay'' + by' + cy = 0 \qquad \lambda_0 = \frac{-b}{2a}$$

---

$$a\left(\lambda_0^2 \underline{At} + \lambda_0^2 B + 2\lambda_0 A\right) + b\left(A + \underline{At}\lambda_0 + B\lambda_0\right) + c\left(\underline{At} + B\right) \stackrel{?}{=} 0$$

$$\underline{At}\underbrace{\left(a\lambda_0^2 + b\lambda_0 + c\right)}_{0}$$

# Zweiter Fall: eine reelle Lösung

$$ay'' + by' + cy = 0 \qquad \lambda_0 = \frac{-b}{2a}$$

---

$$a\left(\lambda_0^2 \underline{At} + \lambda_0^2 B + 2\lambda_0 \underline{A}\right) + b\left(\underline{A} + \underline{At}\lambda_0 + B\lambda_0\right) + c\left(\underline{At} + B\right) \overset{?}{=} 0$$

$$\underline{At}\underbrace{\left(a\lambda_0^2 + b\lambda_0 + c\right)}_{0} + \underline{A}\left(2\lambda_0 a + b\right)$$

# Zweiter Fall: eine reelle Lösung

$$ay'' + by' + cy = 0 \qquad \lambda_0 = \frac{-b}{2a}$$

---

$$a\left(\lambda_0^2 \underline{At} + \lambda_0^2 \underline{B} + 2\lambda_0 \underline{A}\right) + b\left(\underline{A} + \underline{At}\lambda_0 + \underline{B}\lambda_0\right) + c\left(\underline{At} + \underline{B}\right) \overset{?}{=} 0$$

$$\underline{At}\underbrace{\left(a\lambda_0^2 + b\lambda_0 + c\right)}_{0} + \underline{A}\left(2\lambda_0 a + b\right) + \underline{B}\left(a\lambda_0^2 + b\lambda_0 + c\right) \overset{?}{=} 0$$

# Zweiter Fall: eine reelle Lösung

$$ay'' + by' + cy = 0 \qquad \lambda_0 = \frac{-b}{2a}$$

---

$$a\left(\lambda_0^2 \underline{At} + \lambda_0^2 \underline{B} + 2\lambda_0 \underline{A}\right) + b\left(\underline{A} + \underline{At}\lambda_0 + \underline{B}\lambda_0\right) + c\left(\underline{At} + \underline{B}\right) \stackrel{?}{=} 0$$

$$\underline{At}\underbrace{\left(a\lambda_0^2 + b\lambda_0 + c\right)}_{0} + \underline{A}\left(2\lambda_0 a + b\right) + \underline{B}\underbrace{\left(a\lambda_0^2 + b\lambda_0 + c\right)}_{0} \stackrel{?}{=} 0$$

# Zweiter Fall: eine reelle Lösung

$$ay'' + by' + cy = 0 \qquad \lambda_0 = \frac{-b}{2a}$$

$$a\left(\lambda_0^2 \underline{At} + \lambda_0^2 \underline{B} + 2\lambda_0 \underline{A}\right) + b\left(\underline{A} + \underline{At}\lambda_0 + \underline{B}\lambda_0\right) + c\left(\underline{At} + \underline{B}\right) \stackrel{?}{=} 0$$

$$\underline{At}\underbrace{\left(a\lambda_0^2 + b\lambda_0 + c\right)}_{0} + \underline{A}\left(2\lambda_0 a + b\right) + \underline{B}\underbrace{\left(a\lambda_0^2 + b\lambda_0 + c\right)}_{0} \stackrel{?}{=} 0$$

$$2\lambda_0 a + b \stackrel{?}{=} 0$$

# Zweiter Fall: eine reelle Lösung

$$ay'' + by' + cy = 0 \qquad \lambda_0 = \frac{-b}{2a}$$

---

$$a\left(\lambda_0^2 \underline{At} + \lambda_0^2 \underline{B} + 2\lambda_0 \underline{A}\right) + b\left(\underline{A} + \underline{At}\lambda_0 + \underline{B}\lambda_0\right) + c\left(\underline{At} + \underline{B}\right) \overset{?}{=} 0$$

$$\underline{At}\underbrace{\left(a\lambda_0^2 + b\lambda_0 + c\right)}_{0} + \underline{A}\left(2\lambda_0 a + b\right) + \underline{B}\underbrace{\left(a\lambda_0^2 + b\lambda_0 + c\right)}_{0} \overset{?}{=} 0$$

$$2\underset{\overset{\uparrow}{\frac{-b}{2a}}}{\lambda_0} a + b \overset{?}{=} 0$$

# Zweiter Fall: eine reelle Lösung

$ay'' + by' + cy = 0 \qquad \lambda_0 = \frac{-b}{2a}$

---

$$a\left(\lambda_0^2 \underline{At} + \lambda_0^2 \underline{B} + 2\lambda_0 \underline{A}\right) + b\left(\underline{A} + \underline{At}\lambda_0 + \underline{B}\lambda_0\right) + c\left(\underline{At} + \underline{B}\right) \stackrel{?}{=} 0$$

$$\underline{At}\underbrace{\left(a\lambda_0^2 + b\lambda_0 + c\right)}_{0} + \underline{A}\left(2\lambda_0 a + b\right) + \underline{B}\underbrace{\left(a\lambda_0^2 + b\lambda_0 + c\right)}_{0} \stackrel{?}{=} 0$$

$$\cancel{2}\,\underset{\substack{\uparrow \\ \frac{-b}{\cancel{2}\cancel{a}}}}{\lambda_0}\,\cancel{a} + b \stackrel{?}{=} 0$$

$$3y'' - 30y' + 75y = 0 \quad \text{mit} \quad y(0) = 3, \quad y'(0) = 13$$

$$3y'' - 30y' + 75y = 0 \quad \text{mit} \quad y(0) = 3, \quad y'(0) = 13$$

Charakteristische Gleichung:

$$3\lambda^2 - 30\lambda + 75 = 0$$

$$3y'' - 30y' + 75y = 0 \quad \text{mit} \quad y(0) = 3, \quad y'(0) = 13$$

Charakteristische Gleichung:

$$3\lambda^2 - 30\lambda + 75 = 0$$

$$\lambda^2 - 10\lambda + 25 = 0$$

$$3y'' - 30y' + 75y = 0 \quad \text{mit} \quad y(0) = 3, \quad y'(0) = 13$$

Charakteristische Gleichung:

$$3\lambda^2 - 30\lambda + 75 = 0$$

$$\lambda^2 - 10\lambda + 25 = 0$$

$$(\lambda - 5)^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_0 = 5$$

$$3y'' - 30y' + 75y = 0 \quad \text{mit} \quad y(0) = 3, \quad y'(0) = 13$$

Charakteristische Gleichung:

$$3\lambda^2 - 30\lambda + 75 = 0$$

$$\lambda^2 - 10\lambda + 25 = 0$$

$$(\lambda - 5)^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_0 = 5$$

$$y(t) = (At + B)\mathrm{e}^{\lambda_0 t}$$

in unserem Fall:

$$y(t) = (At + B)\mathrm{e}^{5t}$$

$$3y'' - 30y' + 75y = 0 \quad \text{mit} \quad y(0) = 3, \quad y'(0) = 13$$

$$y(t) = (At + B)\mathrm{e}^{5t}$$

$$3y'' - 30y' + 75y = 0 \quad \text{mit} \quad y(0) = 3, \quad y'(0) = 13$$

$$y(t) = (At + B)\mathrm{e}^{5t}$$

$$y'(t) = A\mathrm{e}^{5t} + 5(At + B)\mathrm{e}^{5t}$$

$$3y'' - 30y' + 75y = 0 \quad \text{mit} \quad y(0) = 3, \quad y'(0) = 13$$

$$y(t) = (At + B)\mathrm{e}^{5t} \qquad \Rightarrow y(0) = (A \cdot 0 + B)\mathrm{e}^{0} = B \overset{!}{=} 3$$

$$y'(t) = A\mathrm{e}^{5t} + 5(At + B)\mathrm{e}^{5t}$$

$$3y'' - 30y' + 75y = 0 \quad \text{mit} \quad y(0) = 3, \quad y'(0) = 13$$

$$y(t) = (At + B)\mathrm{e}^{5t} \qquad \Rightarrow y(0) = (A \cdot 0 + B)\mathrm{e}^{0} = B \overset{!}{=} 3$$

$$y'(t) = A\mathrm{e}^{5t} + 5(At + B)\mathrm{e}^{5t} \Rightarrow y'(0) = A\mathrm{e}^{0} + 5(A \cdot 0 + B)\mathrm{e}^{0}$$

$$y'(0) = A + 5B \overset{!}{=} 13$$

$$3y'' - 30y' + 75y = 0 \quad \text{mit} \quad y(0) = 3, \quad y'(0) = 13$$

$$y(t) = (At + B)\mathrm{e}^{5t} \qquad \Rightarrow y(0) = (A \cdot 0 + B)\mathrm{e}^{0} = B \overset{!}{=} 3$$

$$y'(t) = A\mathrm{e}^{5t} + 5(At + B)\mathrm{e}^{5t} \Rightarrow y'(0) = A\mathrm{e}^{0} + 5(A \cdot 0 + B)\mathrm{e}^{0}$$

$$y'(0) = A + 5B \overset{!}{=} 13$$

$$B = 3, \quad A = -2$$

$$3y'' - 30y' + 75y = 0 \quad \text{mit} \quad y(0) = 3, \quad y'(0) = 13$$

$$y(t) = (At + B)\mathrm{e}^{5t} \qquad \Rightarrow y(0) = (A \cdot 0 + B)\mathrm{e}^{0} = B \overset{!}{=} 3$$

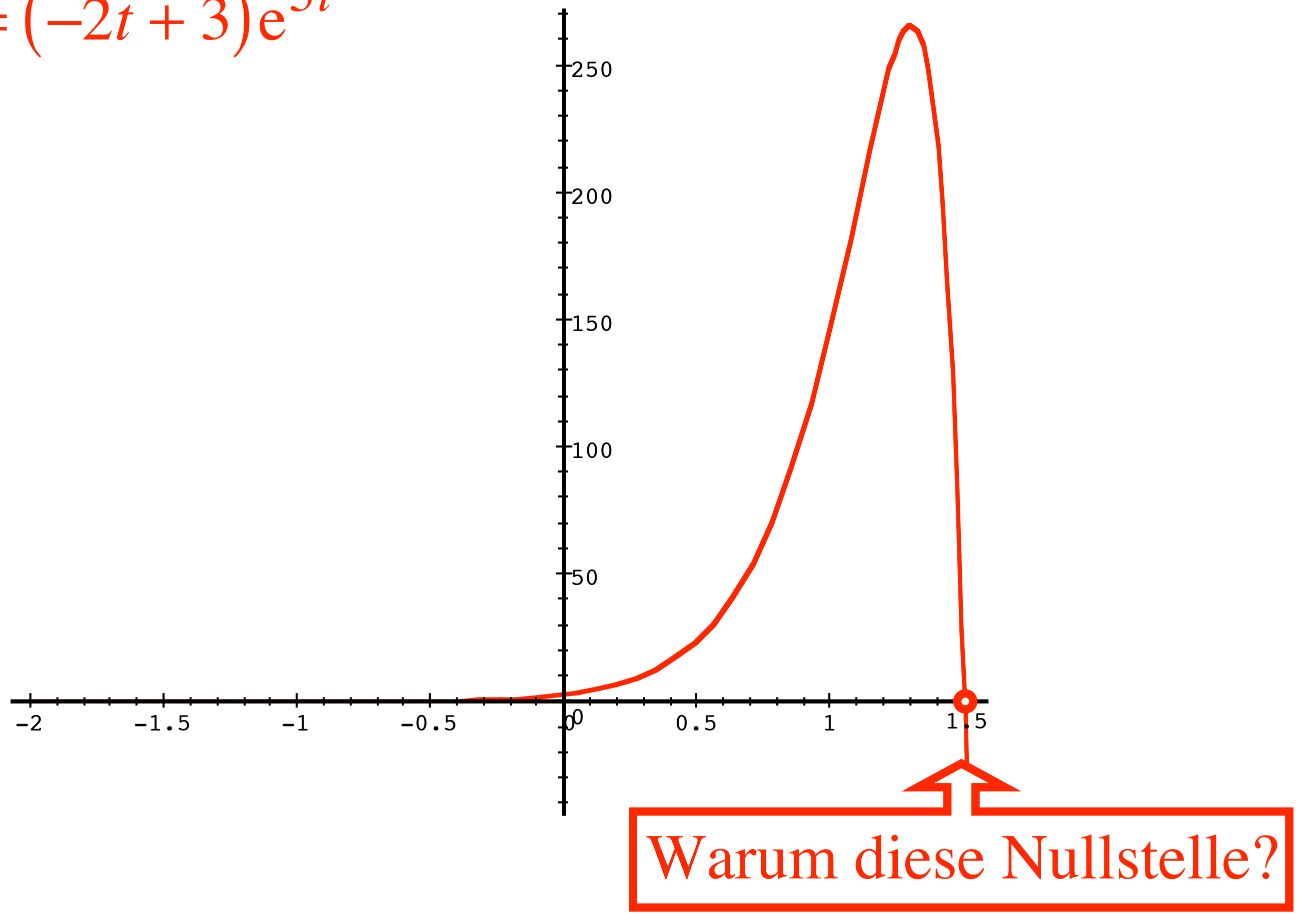
$$y'(t) = A\mathrm{e}^{5t} + 5(At + B)\mathrm{e}^{5t} \Rightarrow y'(0) = A\mathrm{e}^{0} + 5(A \cdot 0 + B)\mathrm{e}^{0}$$

$$y'(0) = A + 5B \overset{!}{=} 13$$

$$B = 3, \quad A = -2 \quad \Rightarrow \quad y(t) = (-2t + 3)\mathrm{e}^{5t}$$

$$3y'' - 30y' + 75y = 0 \quad \text{mit} \quad y(0) = 3, \quad y'(0) = 13$$

$$y(t) = (-2t + 3)e^{5t}$$



# CAS

```
> 3*diff(y(t), t$2) - 30*diff(y(t), t)+75*y(t) = 0;
```

$$3\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}\mathrm{y}(t)\right) - 30\left(\frac{\partial}{\partial t}\mathrm{y}(t)\right) + 75\,\mathrm{y}(t) = 0$$

CAS

```
> 3*diff(y(t), t$2) - 30*diff(y(t), t)+75*y(t) = 0;
```

$$3\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}\mathrm{y}(t)\right)-30\left(\frac{\partial}{\partial t}\mathrm{y}(t)\right)+75\,\mathrm{y}(t)=0$$

---

```
> dsolve({3*diff(y(t), t$2) - 30*diff(y(t),
t)+75*y(t) = 0, y(0) = 3, D(y)(0) = 13}, y(t));
```

$$\mathrm{y}(t)=3\,\mathrm{e}^{(5\,t)}-2\,\mathrm{e}^{(5\,t)}\,t$$

Dritter Fall: Keine reelle Lösung der charakteristischen Gleichung

$$ay'' + by' + cy = 0 \quad \text{mit} \quad b^2 - 4ac < 0$$

Dritter Fall: Keine reelle Lösung der charakteristischen Gleichung

$$ay'' + by' + cy = 0 \quad \text{mit} \quad b^2 - 4ac < 0$$

Erinnerung:

$$y'' = -y \quad \text{also} \quad y'' + y = 0$$

Dritter Fall: Keine reelle Lösung der charakteristischen Gleichung

$$ay'' + by' + cy = 0 \quad \text{mit} \quad b^2 - 4ac < 0$$

Erinnerung:

$y'' = -y \quad \text{also} \quad y'' + y = 0$

Charakteristische Gleichung: $\lambda^2 + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = \pm \mathrm{i}$

Dritter Fall: Keine reelle Lösung der charakteristischen Gleichung

$$ay'' + by' + cy = 0 \quad \text{mit} \quad b^2 - 4ac < 0$$

Erinnerung:

$y'' = -y \quad \text{also} \quad y'' + y = 0$

Charakteristische Gleichung: $\lambda^2 + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = \pm \mathrm{i}$

Lösung der Differenzialgleichung: $y(t) = A\sin(t) + B\cos(t)$

Dritter Fall: Keine reelle Lösung der charakteristischen Gleichung

$$ay'' + by' + cy = 0 \quad \text{mit} \quad b^2 - 4ac < 0$$

Wir definieren:

$$\boxed{\rho = \frac{-b}{2a} \qquad \text{und} \qquad \omega = \frac{\sqrt{4ac - b^2}}{2a}}$$

Dritter Fall: Keine reelle Lösung der charakteristischen Gleichung

$$ay'' + by' + cy = 0 \quad \text{mit} \quad b^2 - 4ac < 0$$

Wir definieren:

$$\rho = \frac{-b}{2a} \qquad \text{und} \qquad \omega = \frac{\sqrt{4ac - b^2}}{2a}$$

Radikand positiv!

Dritter Fall: Keine reelle Lösung der charakteristischen Gleichung

$$ay'' + by' + cy = 0 \quad \text{mit} \quad b^2 - 4ac < 0$$

Wir definieren:

$$\boxed{\rho = \frac{-b}{2a} \qquad \text{und} \qquad \omega = \frac{\sqrt{4ac-b^2}}{2a}}$$

Differenzialgleichung hat Lösung:

$$\boxed{y(t) = \mathrm{e}^{\rho t}\left(A\sin(\omega t) + B\cos(\omega t)\right)}$$

## Dritter Fall: Keine reelle Lösung der charakteristischen Gleichung

$$ay'' + by' + cy = 0 \quad \text{mit} \quad b^2 - 4ac < 0$$

Wir definieren:

$$\boxed{\rho = \frac{-b}{2a} \qquad \text{und} \qquad \omega = \frac{\sqrt{4ac - b^2}}{2a}}$$

Differenzialgleichung hat Lösung:

$$\boxed{y(t) = \mathrm{e}^{\rho t}\left(A\sin(\omega t) + B\cos(\omega t)\right)}$$

Kontrolle aufwändig. Wird weggelassen.

Dritter Fall: Komplexe Bearbeitung

$$a\lambda^2 + b\lambda + c = 0 \quad \text{mit} \quad b^2 - 4ac < 0$$

Dritter Fall: Komplexe Bearbeitung

$$a\lambda^2 + b\lambda + c = 0 \quad \text{mit} \quad b^2 - 4ac < 0$$

$$\lambda_1 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \quad \text{und} \quad \lambda_2 = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Dritter Fall: Komplexe Bearbeitung

$$a\lambda^2 + b\lambda + c = 0 \quad \text{mit} \quad b^2 - 4ac < 0$$

$$\lambda_1 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \quad \text{und} \quad \lambda_2 = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Radikand negativ

Dritter Fall: Komplexe Bearbeitung

$$a\lambda^2 + b\lambda + c = 0 \quad \text{mit} \quad b^2 - 4ac < 0$$

$$\lambda_1 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \quad \text{und} \quad \lambda_2 = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Radikand negativ

$$\rho = \frac{-b}{2a} \qquad \text{und} \qquad \omega = \frac{\sqrt{4ac-b^2}}{2a}$$

Radikand positiv!

Dritter Fall: Komplexe Bearbeitung

$$a\lambda^2 + b\lambda + c = 0 \quad \text{mit} \quad b^2 - 4ac < 0$$

$$\lambda_1 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \quad \text{und} \quad \lambda_2 = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Radikand negativ

$$\rho = \frac{-b}{2a} \qquad \text{und} \qquad \omega = \frac{\sqrt{4ac-b^2}}{2a}$$

Erinnerung: $\sqrt{-36} = \sqrt{36\mathrm{i}^2} = 6\mathrm{i}$

Dritter Fall: Komplexe Bearbeitung

$$a\lambda^2 + b\lambda + c = 0 \quad \text{mit} \quad b^2 - 4ac < 0$$

$$\lambda_1 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \quad \text{und} \quad \lambda_2 = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Radikand negativ

$$\rho = \frac{-b}{2a} \qquad \text{und} \qquad \omega = \frac{\sqrt{4ac-b^2}}{2a}$$

Erinnerung: $\sqrt{-36} = \sqrt{36\mathrm{i}^2} = 6\mathrm{i}$

$$\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \mathrm{i}\frac{\sqrt{4ac-b^2}}{2a} = \mathrm{i}\omega$$

Dritter Fall: Komplexe Bearbeitung

$$a\lambda^2 + b\lambda + c = 0 \quad \text{mit} \quad b^2 - 4ac < 0$$

$$\lambda_1 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \quad \text{und} \quad \lambda_2 = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Radikand negativ

$$\rho = \frac{-b}{2a} \qquad \text{und} \qquad \omega = \frac{\sqrt{4ac-b^2}}{2a}$$

Erinnerung: $\sqrt{-36} = \sqrt{36\mathrm{i}^2} = 6\mathrm{i}$

$$\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \mathrm{i}\frac{\sqrt{4ac-b^2}}{2a} = \mathrm{i}\omega$$

$$\lambda_1 = \rho + \mathrm{i}\omega \quad \text{und} \quad \lambda_2 = \rho - \mathrm{i}\omega$$

Dritter Fall: Komplexe Bearbeitung

$$a\lambda^2 + b\lambda + c = 0 \quad \text{mit} \quad b^2 - 4ac < 0$$

$$\lambda_1 = \rho + \mathrm{i}\omega \quad \text{und} \quad \lambda_2 = \rho - \mathrm{i}\omega$$

Dritter Fall: Komplexe Bearbeitung

$$a\lambda^2 + b\lambda + c = 0 \quad \text{mit} \quad b^2 - 4ac < 0$$

$$\lambda_1 = \rho + \mathrm{i}\omega \quad \text{und} \quad \lambda_2 = \rho - \mathrm{i}\omega$$

Konjugiert komplex

Dritter Fall: Komplexe Bearbeitung

$$a\lambda^2 + b\lambda + c = 0 \quad \text{mit} \quad b^2 - 4ac < 0$$

$$\lambda_1 = \rho + \mathrm{i}\omega \quad \text{und} \quad \lambda_2 = \rho - \mathrm{i}\omega$$

Konjugiert komplex

Lösung der Differenzialgleichung:

$$y(t) = (C + \mathrm{i}D)\mathrm{e}^{\lambda_1 t} + (C - \mathrm{i}D)\mathrm{e}^{\lambda_2 t}$$

Auch konjugiert komplex

Dritter Fall: Komplexe Bearbeitung

$$a\lambda^2 + b\lambda + c = 0 \quad \text{mit} \quad b^2 - 4ac < 0$$

$$\lambda_1 = \rho + \mathrm{i}\omega \quad \text{und} \quad \lambda_2 = \rho - \mathrm{i}\omega$$

Konjugiert komplex

Lösung der Differenzialgleichung:

$$y(t) = (C + \mathrm{i}D)\mathrm{e}^{\lambda_1 t} + (C - \mathrm{i}D)\mathrm{e}^{\lambda_2 t}$$

$$y(t) = (C + \mathrm{i}D)\mathrm{e}^{(\rho + \mathrm{i}\omega)t} + (C - \mathrm{i}D)\mathrm{e}^{(\rho - \mathrm{i}\omega)t}$$

Dritter Fall: Komplexe Bearbeitung

$$y(t) = (C + \mathrm{i}D)\mathrm{e}^{(\rho+\mathrm{i}\omega)t} + (C - \mathrm{i}D)\mathrm{e}^{(\rho-\mathrm{i}\omega)t}$$

Dritter Fall: Komplexe Bearbeitung

$$y(t) = (C + \mathrm{i}D)\mathrm{e}^{(\rho + \mathrm{i}\omega)t} + (C - \mathrm{i}D)\mathrm{e}^{(\rho - \mathrm{i}\omega)t}$$

$$y(t) = (C + \mathrm{i}D)\mathrm{e}^{\rho t}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} + (C - \mathrm{i}D)\mathrm{e}^{\rho t}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}$$

Dritter Fall: Komplexe Bearbeitung

$$y(t) = (C + \mathrm{i}D)\mathrm{e}^{(\rho + \mathrm{i}\omega)t} + (C - \mathrm{i}D)\mathrm{e}^{(\rho - \mathrm{i}\omega)t}$$

$$y(t) = (C + \mathrm{i}D)\mathrm{e}^{\rho t}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} + (C - \mathrm{i}D)\mathrm{e}^{\rho t}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}$$

$$y(t) = \mathrm{e}^{\rho t}\left[(C + \mathrm{i}D)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} + (C - \mathrm{i}D)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\right]$$

Dritter Fall: Komplexe Bearbeitung

Eckige Klammer:

$$\left[\left(C+\mathrm{i}D\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}+\left(C-\mathrm{i}D\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\right]$$

Dritter Fall: Komplexe Bearbeitung

Eckige Klammer:

$$\left[(C+\mathrm{i}D)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}+(C-\mathrm{i}D)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\right]$$

$$=\left[(C+\mathrm{i}D)\big(\cos(\omega t)+\mathrm{i}\,\sin(\omega t)\big)+(C-\mathrm{i}D)\big(\cos(-\omega t)+\mathrm{i}\,\sin(-\omega t)\big)\right]$$

Formel von Euler

Formel von Euler

Dritter Fall: Komplexe Bearbeitung

Eckige Klammer:

$$\left[(C+\mathrm{i}D)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}+(C-\mathrm{i}D)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\right]$$

$$=\Big[(C+\mathrm{i}D)\big(\cos(\omega t)+\mathrm{i}\sin(\omega t)\big)+(C-\mathrm{i}D)\big(\cos(-\omega t)+\mathrm{i}\sin(-\omega t)\big)\Big]$$

$$=\Big[(C+\mathrm{i}D)\big(\cos(\omega t)+\mathrm{i}\sin(\omega t)\big)+(C-\mathrm{i}D)\big(\cos(\omega t)-\mathrm{i}\sin(\omega t)\big)\Big]$$

Kosinus gerade
Sinus ungerade

Dritter Fall: Komplexe Bearbeitung

Eckige Klammer:

$$\left[(C+\mathrm{i}D)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}+(C-\mathrm{i}D)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\right]$$

$$=\left[(C+\mathrm{i}D)\big(\cos(\omega t)+\mathrm{i}\sin(\omega t)\big)+(C-\mathrm{i}D)\big(\cos(-\omega t)+\mathrm{i}\sin(-\omega t)\big)\right]$$

$$=\left[(C+\mathrm{i}D)\big(\cos(\omega t)+\mathrm{i}\sin(\omega t)\big)+(C-\mathrm{i}D)\big(\cos(\omega t)-\mathrm{i}\sin(\omega t)\big)\right]$$

$$=\begin{bmatrix} C\cos(\omega t)+C\mathrm{i}\sin(\omega t)+\mathrm{i}D\cos(\omega t)-D\sin(\omega t) \\ +C\cos(\omega t)-C\mathrm{i}\sin(\omega t)-\mathrm{i}D\cos(\omega t)-D\sin(\omega t) \end{bmatrix}$$

Dritter Fall: Komplexe Bearbeitung

Eckige Klammer:

$$\left[(C+\mathrm{i}D)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}+(C-\mathrm{i}D)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\right]$$

$$=\left[(C+\mathrm{i}D)\left(\cos(\omega t)+\mathrm{i}\sin(\omega t)\right)+(C-\mathrm{i}D)\left(\cos(-\omega t)+\mathrm{i}\sin(-\omega t)\right)\right]$$

$$=\left[\color{red}{(C+\mathrm{i}D)\left(\cos(\omega t)+\mathrm{i}\sin(\omega t)\right)}+\color{blue}{(C-\mathrm{i}D)\left(\cos(\omega t)-\mathrm{i}\sin(\omega t)\right)}\right]$$

$$=\left[\begin{array}{l}\color{red}{C\cos(\omega t)+\cancel{C\mathrm{i}\sin(\omega t)}+\cancel{\mathrm{i}D\cos(\omega t)}-D\sin(\omega t)}\\ \color{blue}{+C\cos(\omega t)-\cancel{C\mathrm{i}\sin(\omega t)}-\cancel{\mathrm{i}D\cos(\omega t)}-D\sin(\omega t)}\end{array}\right]$$

Imaginärteile fallen weg

Dritter Fall: Komplexe Bearbeitung

Eckige Klammer:

$$\left[(C+\mathrm{i}D)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}+(C-\mathrm{i}D)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\right]$$

$$=\left[(C+\mathrm{i}D)\left(\cos(\omega t)+\mathrm{i}\sin(\omega t)\right)+(C-\mathrm{i}D)\left(\cos(-\omega t)+\mathrm{i}\sin(-\omega t)\right)\right]$$

$$=\left[(C+\mathrm{i}D)\left(\cos(\omega t)+\mathrm{i}\sin(\omega t)\right)+(C-\mathrm{i}D)\left(\cos(\omega t)-\mathrm{i}\sin(\omega t)\right)\right]$$

$$=\left[\begin{array}{l} C\cos(\omega t)+\cancel{C\mathrm{i}\sin(\omega t)}+\cancel{\mathrm{i}D\cos(\omega t)}-D\sin(\omega t) \\ +C\cos(\omega t)-\cancel{C\mathrm{i}\sin(\omega t)}-\cancel{\mathrm{i}D\cos(\omega t)}-D\sin(\omega t) \end{array}\right]$$

$$=2C\cos(\omega t)-2D\sin(\omega t)$$

Dritter Fall: Komplexe Bearbeitung

$$y(t) = \mathrm{e}^{\rho t}\left[(C + \mathrm{i}D)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} + (C - \mathrm{i}D)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\right]$$

$$y(t) = \mathrm{e}^{\rho t}\left[2C\cos(\omega t) - 2D\sin(\omega t)\right]$$

Dritter Fall: Komplexe Bearbeitung

$$y(t) = \mathrm{e}^{\rho t}\left[(C + \mathrm{i}D)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} + (C - \mathrm{i}D)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\right]$$

$$y(t) = \mathrm{e}^{\rho t}\left[2C\cos(\omega t) - 2D\sin(\omega t)\right]$$

Gleiche Form wie:

$$\boxed{y(t) = \mathrm{e}^{\rho t}\left(A\sin(\omega t) + B\cos(\omega t)\right)}$$

Dritter Fall: Keine reelle Lösung der charakteristischen Gleichung

$$ay'' + by' + cy = 0 \quad \text{mit} \quad b^2 - 4ac < 0$$

Wir definieren:

$$\boxed{\rho = \frac{-b}{2a} \qquad \text{und} \qquad \omega = \frac{\sqrt{4ac - b^2}}{2a}}$$

Differenzialgleichung hat Lösung:

$$\boxed{y(t) = \mathrm{e}^{\rho t}\left(A\sin(\omega t) + B\cos(\omega t)\right)}$$

$$32y'' - 8y' + 113y = 0 \quad \text{mit} \quad y(0) = -3, \quad y'(0) = \frac{3}{2}$$

$$32y'' - 8y' + 113y = 0 \quad \text{mit} \quad y(0) = -3, \quad y'(0) = \frac{3}{2}$$

$$b^2 - 4ac = (-8)^2 - 4 \cdot 32 \cdot 113 = -14400 < 0$$

$$32y'' - 8y' + 113y = 0 \quad \text{mit} \quad y(0) = -3, \quad y'(0) = \frac{3}{2}$$

$$b^2 - 4ac = (-8)^2 - 4 \cdot 32 \cdot 113 = -14400 < 0$$

$$\rho = \frac{-b}{2a} = \frac{8}{64} = \frac{1}{8}$$

$$32y'' - 8y' + 113y = 0 \quad \text{mit} \quad y(0) = -3, \quad y'(0) = \frac{3}{2}$$

$$b^2 - 4ac = (-8)^2 - 4 \cdot 32 \cdot 113 = -14400 < 0$$

$$\rho = \frac{-b}{2a} = \frac{8}{64} = \frac{1}{8} \qquad \omega = \frac{\sqrt{4ac-b^2}}{2a} = \frac{\sqrt{14400}}{64} = \frac{120}{64} = \frac{15}{8}$$

$$32y'' - 8y' + 113y = 0 \quad \text{mit} \quad y(0) = -3, \quad y'(0) = \tfrac{3}{2}$$

$$b^2 - 4ac = (-8)^2 - 4 \cdot 32 \cdot 113 = -14400 < 0$$

$$\rho = \frac{-b}{2a} = \frac{8}{64} = \frac{1}{8} \qquad \omega = \frac{\sqrt{4ac-b^2}}{2a} = \frac{\sqrt{14400}}{64} = \frac{120}{64} = \frac{15}{8}$$

$$y(t) = \mathrm{e}^{\rho t}\left(A\sin(\omega t) + B\cos(\omega t)\right)$$

In unserem Fall:

$$y(t) = \mathrm{e}^{\frac{1}{8}t}\left(A\sin\left(\tfrac{15}{8}t\right) + B\cos\left(\tfrac{15}{8}t\right)\right)$$

$$32y'' - 8y' + 113y = 0 \quad \text{mit} \quad y(0) = -3, \quad y'(0) = \frac{3}{2}$$

$$y(t) = \mathrm{e}^{\frac{1}{8}t}\left(A\sin\left(\frac{15}{8}t\right) + B\cos\left(\frac{15}{8}t\right)\right)$$

$$32y'' - 8y' + 113y = 0 \quad \text{mit} \quad y(0) = -3, \quad y'(0) = \frac{3}{2}$$

$$y(t) = \mathrm{e}^{\frac{1}{8}t}\left(A\sin\left(\frac{15}{8}t\right) + B\cos\left(\frac{15}{8}t\right)\right)$$

$$y'(t) = \frac{1}{8}\mathrm{e}^{\frac{1}{8}t}\left(A\sin\left(\frac{15}{8}t\right) + B\cos\left(\frac{15}{8}t\right)\right) + \frac{15}{8}\mathrm{e}^{\frac{1}{8}t}\left(A\cos\left(\frac{15}{8}t\right) - B\sin\left(\frac{15}{8}t\right)\right)$$

$$32y'' - 8y' + 113y = 0 \quad \text{mit} \quad y(0) = -3, \quad y'(0) = \frac{3}{2}$$

$$y(t) = \mathrm{e}^{\frac{1}{8}t}\left(A\sin\left(\frac{15}{8}t\right) + B\cos\left(\frac{15}{8}t\right)\right)$$

$$y'(t) = \frac{1}{8}\mathrm{e}^{\frac{1}{8}t}\left(A\sin\left(\frac{15}{8}t\right) + B\cos\left(\frac{15}{8}t\right)\right) + \frac{15}{8}\mathrm{e}^{\frac{1}{8}t}\left(A\cos\left(\frac{15}{8}t\right) - B\sin\left(\frac{15}{8}t\right)\right)$$

$$y(0) = \mathrm{e}^{0}\left(A\sin(0) + B\cos(0)\right) = B \overset{!}{=} -3$$

$$32y'' - 8y' + 113y = 0 \quad \text{mit} \quad y(0) = -3, \quad y'(0) = \tfrac{3}{2}$$

$$y(t) = \mathrm{e}^{\frac{1}{8}t}\left(A\sin\left(\tfrac{15}{8}t\right) + B\cos\left(\tfrac{15}{8}t\right)\right)$$

$$y'(t) = \tfrac{1}{8}\mathrm{e}^{\frac{1}{8}t}\left(A\sin\left(\tfrac{15}{8}t\right) + B\cos\left(\tfrac{15}{8}t\right)\right) + \tfrac{15}{8}\mathrm{e}^{\frac{1}{8}t}\left(A\cos\left(\tfrac{15}{8}t\right) - B\sin\left(\tfrac{15}{8}t\right)\right)$$

$$y(0) = \mathrm{e}^{0}\left(A\sin(0) + B\cos(0)\right) = B \overset{!}{=} -3$$

$$y'(0) = \tfrac{1}{8}\mathrm{e}^{0}\left(A\sin(0) + B\cos(0)\right) + \tfrac{15}{8}\mathrm{e}^{0}\left(A\cos(0) - B\sin(0)\right) = \tfrac{1}{8}B + \tfrac{15}{8}A \overset{!}{=} \tfrac{3}{2}$$

$$32y'' - 8y' + 113y = 0 \quad \text{mit} \quad y(0) = -3, \quad y'(0) = \tfrac{3}{2}$$

$$y(t) = \mathrm{e}^{\frac{1}{8}t}\left(A\sin\left(\tfrac{15}{8}t\right) + B\cos\left(\tfrac{15}{8}t\right)\right)$$

$$y'(t) = \tfrac{1}{8}\mathrm{e}^{\frac{1}{8}t}\left(A\sin\left(\tfrac{15}{8}t\right) + B\cos\left(\tfrac{15}{8}t\right)\right) + \tfrac{15}{8}\mathrm{e}^{\frac{1}{8}t}\left(A\cos\left(\tfrac{15}{8}t\right) - B\sin\left(\tfrac{15}{8}t\right)\right)$$

$$y(0) = \mathrm{e}^{0}\left(A\sin(0) + B\cos(0)\right) = B \overset{!}{=} -3$$

$$y'(0) = \tfrac{1}{8}\mathrm{e}^{0}\left(A\sin(0) + B\cos(0)\right) + \tfrac{15}{8}\mathrm{e}^{0}\left(A\cos(0) - B\sin(0)\right) = \tfrac{1}{8}B + \tfrac{15}{8}A \overset{!}{=} \tfrac{3}{2}$$

$$B = -3 \qquad B + 15A = 12 \quad \Rightarrow \quad A = 1$$

$$32y'' - 8y' + 113y = 0 \quad \text{mit} \quad y(0) = -3, \quad y'(0) = \frac{3}{2}$$

$$y(t) = \mathrm{e}^{\frac{1}{8}t}\left(A\sin\left(\tfrac{15}{8}t\right) + B\cos\left(\tfrac{15}{8}t\right)\right)$$

$$y'(t) = \tfrac{1}{8}\mathrm{e}^{\frac{1}{8}t}\left(A\sin\left(\tfrac{15}{8}t\right) + B\cos\left(\tfrac{15}{8}t\right)\right) + \tfrac{15}{8}\mathrm{e}^{\frac{1}{8}t}\left(A\cos\left(\tfrac{15}{8}t\right) - B\sin\left(\tfrac{15}{8}t\right)\right)$$

$$y(0) = \mathrm{e}^{0}\left(A\sin(0) + B\cos(0)\right) = B \overset{!}{=} -3$$

$$y'(0) = \tfrac{1}{8}\mathrm{e}^{0}\left(A\sin(0) + B\cos(0)\right) + \tfrac{15}{8}\mathrm{e}^{0}\left(A\cos(0) - B\sin(0)\right) = \tfrac{1}{8}B + \tfrac{15}{8}A \overset{!}{=} \tfrac{3}{2}$$

$$B = -3 \qquad B + 15A = 12 \quad \Rightarrow \quad A = 1$$

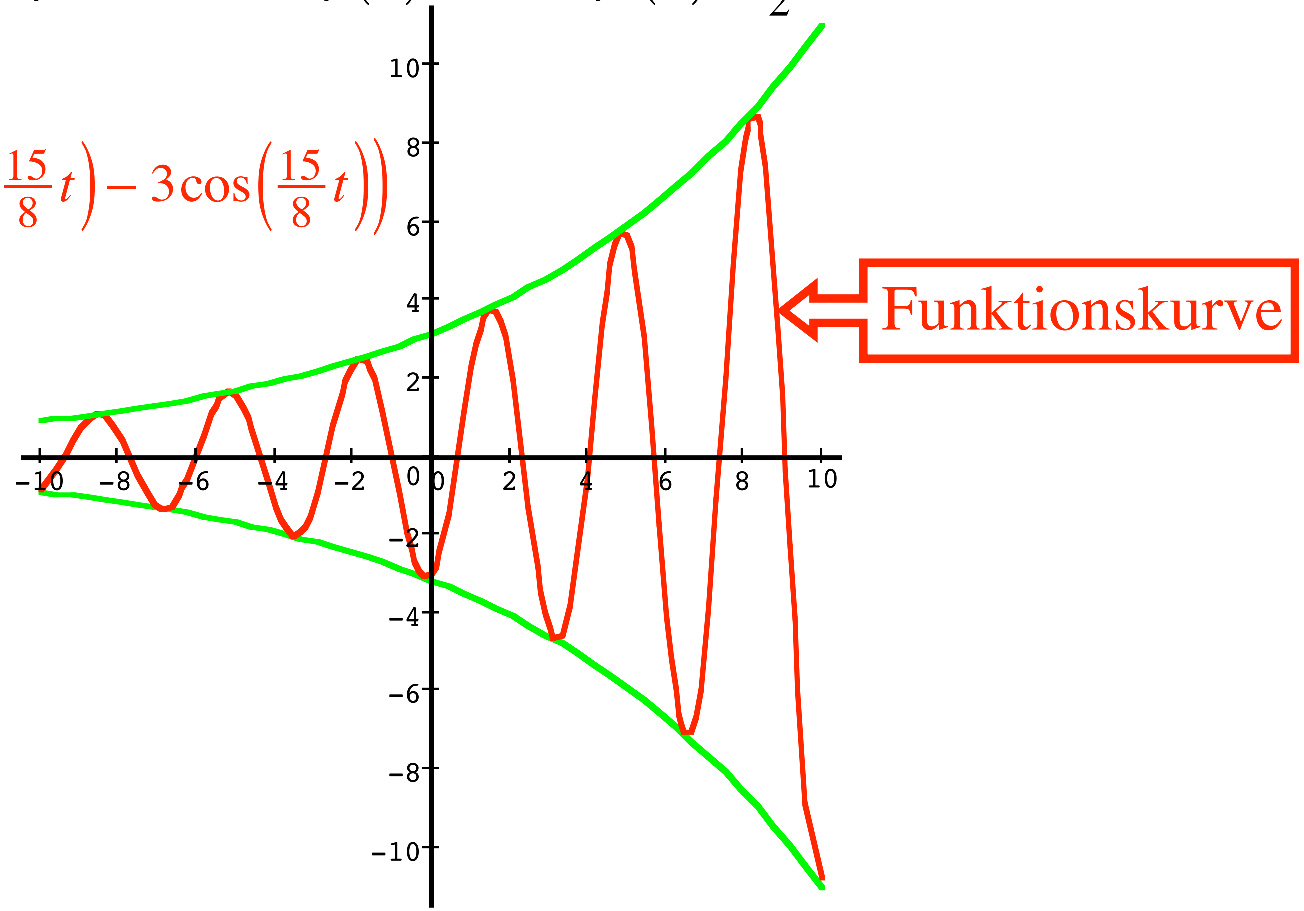
$$y(t) = \mathrm{e}^{\frac{1}{8}t}\left(\sin\left(\tfrac{15}{8}t\right) - 3\cos\left(\tfrac{15}{8}t\right)\right)$$

$$32y'' - 8y' + 113y = 0 \quad \text{mit} \quad y(0) = -3, \quad y'(0) = \frac{3}{2}$$

$$y(t) = \mathrm{e}^{\frac{1}{8}t}\left(\sin\left(\frac{15}{8}t\right) - 3\cos\left(\frac{15}{8}t\right)\right)$$

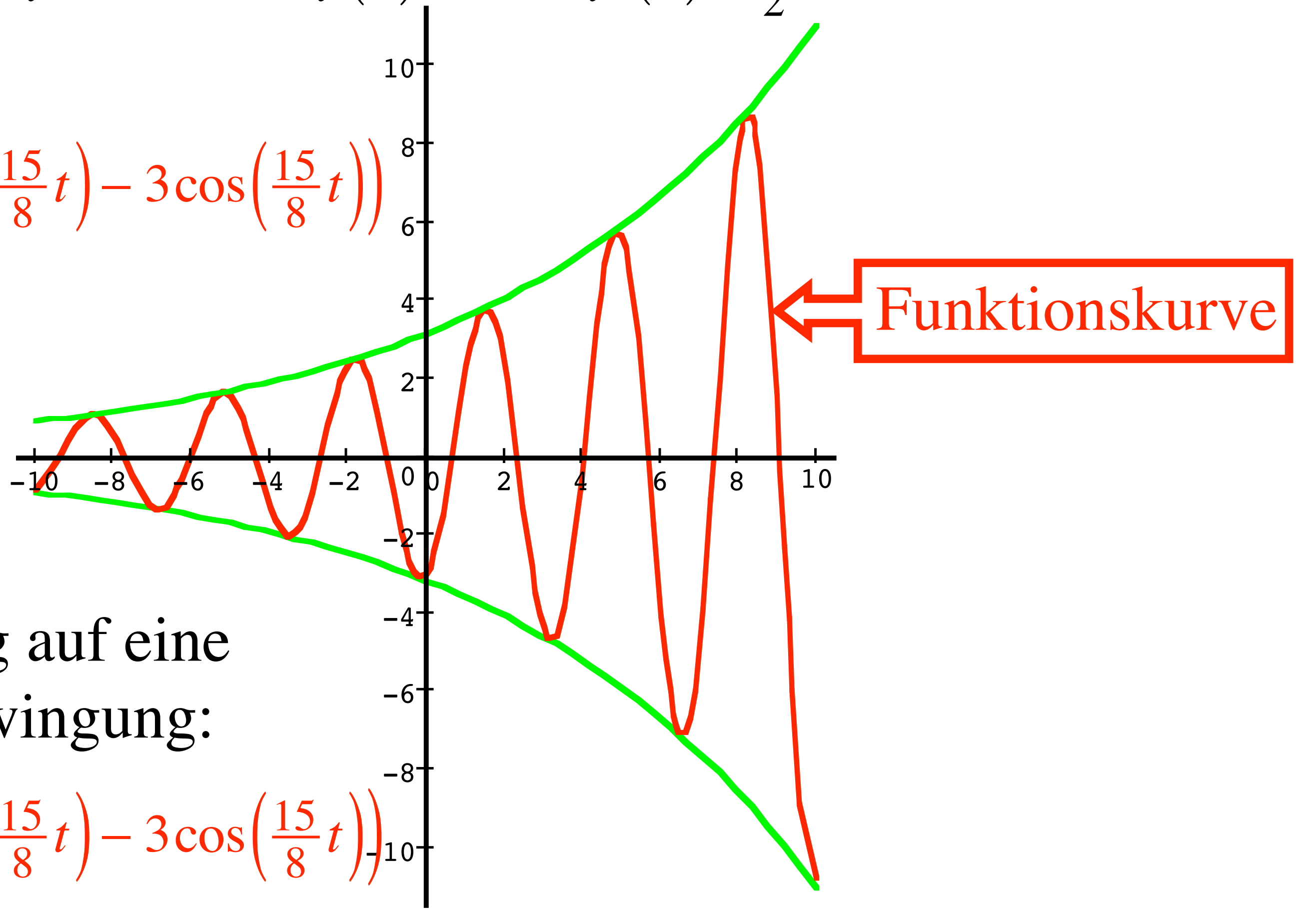
$$32y'' - 8y' + 113y = 0 \quad \text{mit} \quad y(0) = -3, \quad y'(0) = \frac{3}{2}$$

$$y(t) = e^{\frac{1}{8}t}\left(\sin\left(\frac{15}{8}t\right) - 3\cos\left(\frac{15}{8}t\right)\right)$$



$$32y'' - 8y' + 113y = 0 \quad \text{mit} \quad y(0) = -3, \quad y'(0) = \frac{3}{2}$$

$$y(t) = e^{\frac{1}{8}t}\left(\sin\left(\frac{15}{8}t\right) - 3\cos\left(\frac{15}{8}t\right)\right)$$



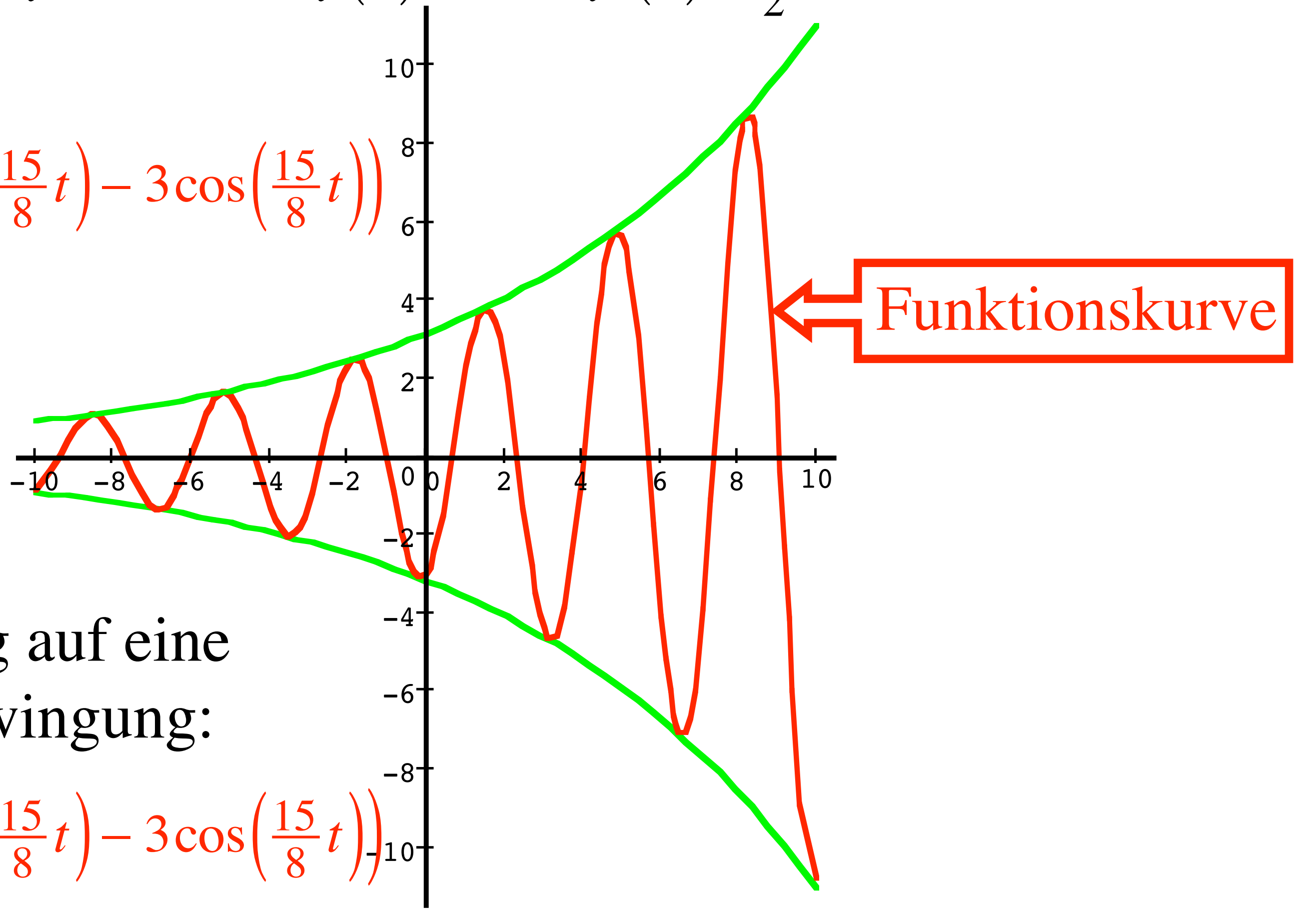

Umrechnung auf eine einzige Schwingung:

$$y(t) = e^{\frac{1}{8}t}\left(\sin\left(\frac{15}{8}t\right) - 3\cos\left(\frac{15}{8}t\right)\right)$$

$$= e^{\frac{1}{8}t}\sqrt{10}\,\sin\left(\frac{15}{8}t + \arctan(-3)\right)$$

$$32y'' - 8y' + 113y = 0 \quad \text{mit} \quad y(0) = -3, \quad y'(0) = \frac{3}{2}$$

$$y(t) = e^{\frac{1}{8}t}\left(\sin\left(\frac{15}{8}t\right) - 3\cos\left(\frac{15}{8}t\right)\right)$$




Umrechnung auf eine einzige Schwingung:

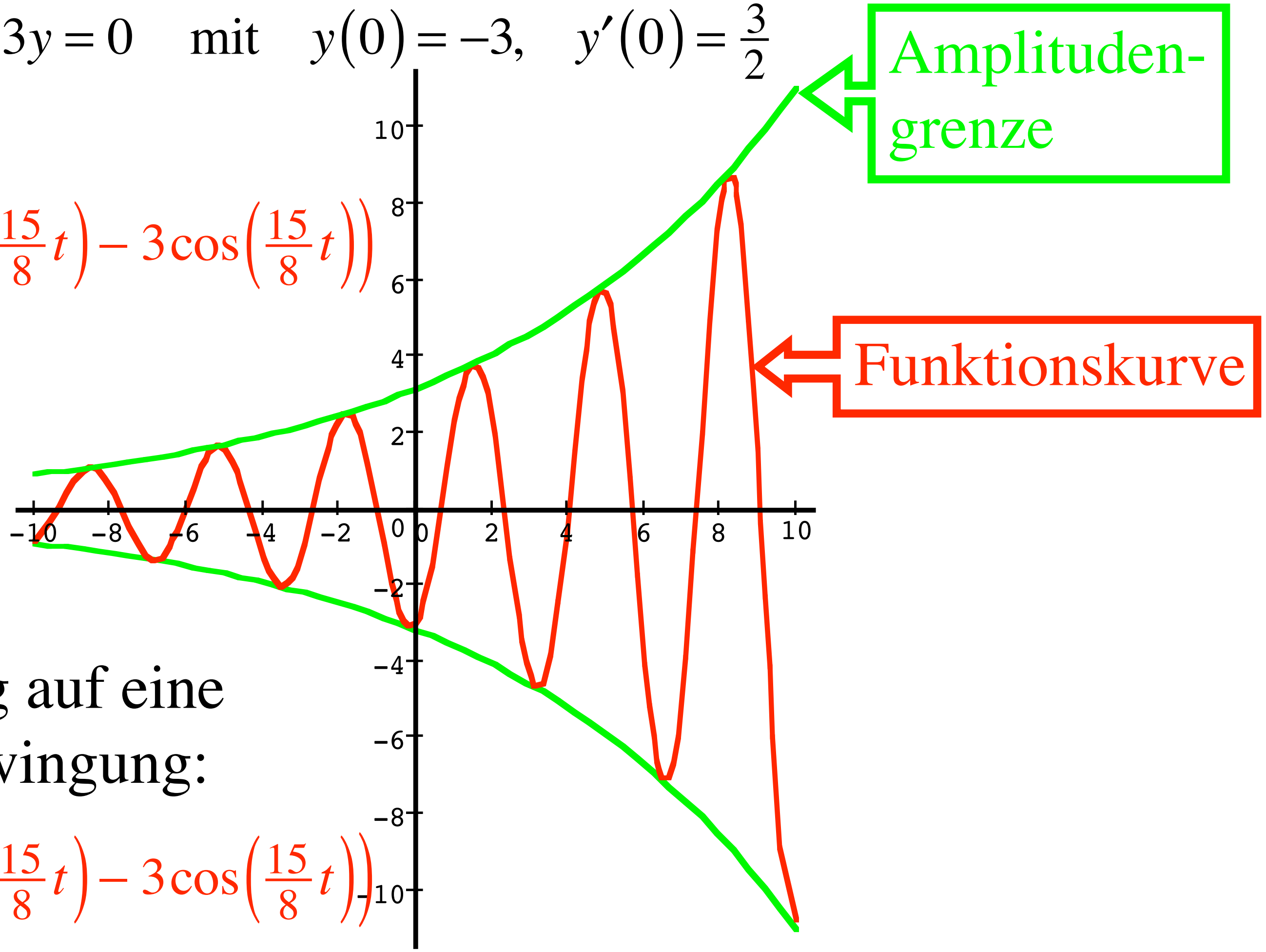
$$y(t) = e^{\frac{1}{8}t}\left(\sin\left(\frac{15}{8}t\right) - 3\cos\left(\frac{15}{8}t\right)\right)$$

$$= e^{\frac{1}{8}t}\sqrt{10}\,\sin\left(\frac{15}{8}t + \arctan(-3)\right)$$

$$= \sqrt{10}\,e^{\frac{1}{8}t}\,\sin\left(\frac{15}{8}t + \arctan(-3)\right)$$

$$32y'' - 8y' + 113y = 0 \quad \text{mit} \quad y(0) = -3, \quad y'(0) = \tfrac{3}{2}$$

$$y(t) = e^{\frac{1}{8}t}\left(\sin\left(\tfrac{15}{8}t\right) - 3\cos\left(\tfrac{15}{8}t\right)\right)$$




Umrechnung auf eine einzige Schwingung:

$$y(t) = e^{\frac{1}{8}t}\left(\sin\left(\tfrac{15}{8}t\right) - 3\cos\left(\tfrac{15}{8}t\right)\right)$$

$$= e^{\frac{1}{8}t}\sqrt{10}\,\sin\left(\tfrac{15}{8}t + \arctan(-3)\right)$$

$$= \sqrt{10}\,e^{\frac{1}{8}t}\,\sin\left(\tfrac{15}{8}t + \arctan(-3)\right)$$

# CAS

```
> 32*diff(y(t), t$2) - 8*diff(y(t), t)+113*y(t) = 0;
```

$$32\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}\mathrm{y}(t)\right) - 8\left(\frac{\partial}{\partial t}\mathrm{y}(t)\right) + 113\,\mathrm{y}(t) = 0$$

# CAS

```
> 32*diff(y(t), t$2) - 8*diff(y(t), t)+113*y(t) = 0;
```

$$32\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}\,y(t)\right) - 8\left(\frac{\partial}{\partial t}\,y(t)\right) + 113\,y(t) = 0$$

---

```
> dsolve({32*diff(y(t), t$2) - 8*diff(y(t), t)+113*y(t) = 0,
y(0) = -3, D(y)(0) = 3/2}, y(t));
```

$$y(t) = -3\,e^{(1/8\,t)}\cos\left(\frac{15}{8}\,t\right) + e^{(1/8\,t)}\sin\left(\frac{15}{8}\,t\right)$$

# Physikalische Anwendungen

# Das Federpendel

# Rücktreibende Kraft proportional zur Auslenkung

Rücktreibende Kraft proportional zur Auslenkung

$$\underset{\text{Masse}}{\underset{\uparrow}{m}} \cdot \underset{\text{Beschleunigung}}{\underset{\uparrow}{y''(t)}} = - \underset{\text{Federkonstante}}{\underset{\uparrow}{k}} \cdot \underset{\text{Auslenkung}}{\underset{\uparrow}{y(t)}}$$

Rücktreibende Kraft proportional zur Auslenkung

$$\underset{\substack{\uparrow\\ \text{Masse}}}{m} \cdot \underset{\substack{\uparrow\\ \text{Beschleunigung}}}{y''(t)} = - \underset{\substack{\uparrow\\ \text{Federkonstante}}}{k} \cdot \underset{\substack{\uparrow\\ \text{Auslenkung}}}{y(t)}$$

$$\boxed{my'' = -ky}$$

$$\boxed{my'' = -ky}$$

$$my'' = -ky$$
$$my'' + ky = 0$$

$$my'' = -ky$$

$$my'' + ky = 0$$

$$b^2 - 4ac =$$

$$my'' = -ky$$

$$my'' + ky = 0$$

$$b^2 - 4ac = 0 - 4mk$$

$$my'' = -ky$$

$$my'' + ky = 0$$

$$b^2 - 4ac = 0 - 4mk < 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Dritter Fall}$$

$$my'' = -ky$$

$$my'' + ky = 0$$

$$b^2 - 4ac = 0 - 4mk < 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Dritter Fall}$$

$$\rho = \frac{-b}{2a} = 0$$

$$\omega = \frac{\sqrt{4ac - b^2}}{2a} = \frac{\sqrt{4mk}}{2m} = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$my'' = -ky$$

$$my'' + ky = 0$$

$$b^2 - 4ac = 0 - 4mk < 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Dritter Fall}$$

$$\rho = \frac{-b}{2a} = 0$$

$$\omega = \frac{\sqrt{4ac - b^2}}{2a} = \frac{\sqrt{4mk}}{2m} = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$y(t) = \mathrm{e}^{\rho t}\left(A\sin(\omega t) + B\cos(\omega t)\right)$$

$$my'' = -ky$$

$$my'' + ky = 0$$

$$b^2 - 4ac = 0 - 4mk < 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Dritter Fall}$$

$$\rho = \frac{-b}{2a} = 0$$

$$\omega = \frac{\sqrt{4ac-b^2}}{2a} = \frac{\sqrt{4mk}}{2m} = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$y(t) = \mathrm{e}^{\rho t}\left(A\sin(\omega t) + B\cos(\omega t)\right)$$

In unserem Fall:

$$y(t) = \underbrace{\mathrm{e}^0}_{=1}\left(A\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\,t\right) + B\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\,t\right)\right)$$

## Federpendel

$$\boxed{y(t) = A\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\,t\right) + B\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\,t\right)}$$

## Federpendel

$$\boxed{y(t) = A\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\,t\right) + B\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\,t\right)}$$

Beispiel: $m = 0.15\ \mathrm{kg}$ $\quad k = 42\ \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}} = 42\ \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{s}^2}$

$$y(0) = 0.0354\ \mathrm{m} \qquad y'(0) = 0.4\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

## Federpendel

$$\boxed{y(t) = A\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\,t\right) + B\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\,t\right)}$$

Beispiel: $m = 0.15\ \mathrm{kg}$ $\quad k = 42\ \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}} = 42\ \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{s}^2}$

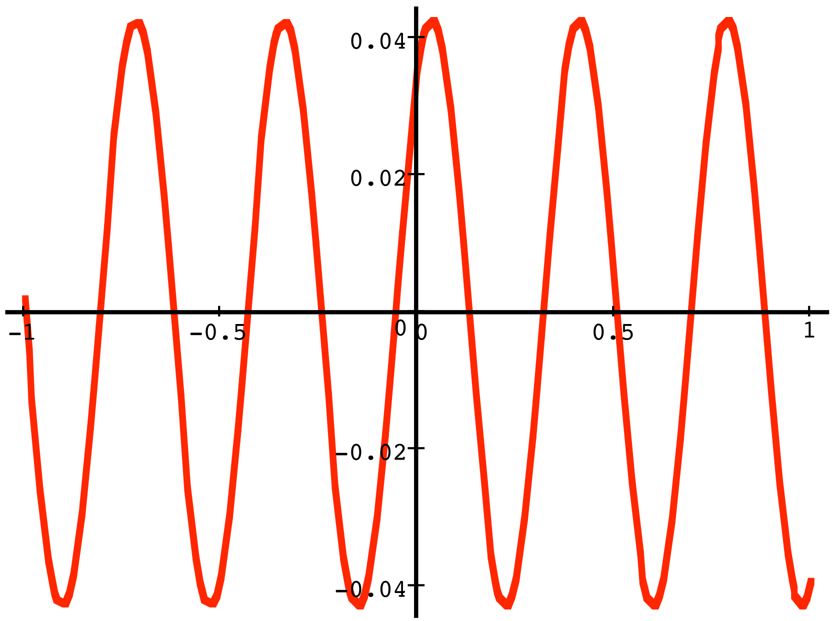
$$y(0) = 0.0354\ \mathrm{m} \qquad y'(0) = 0.4\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

$$y(t) = 0.0239\sin(16.7332t) + 0.0354\cos(16.7332t)$$

# Federpendel

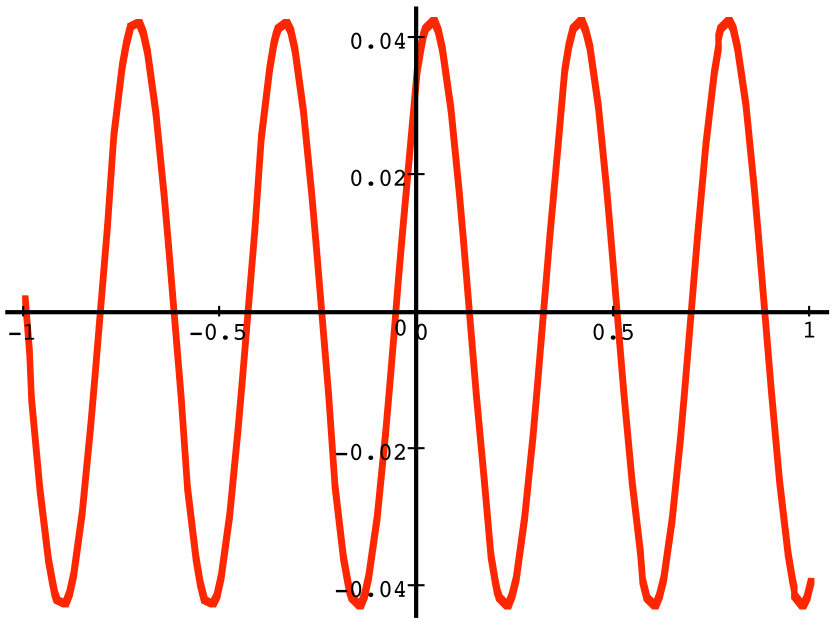
$$y(t) = 0.0239\sin(16.7332t) + 0.0354\cos(16.7332t)$$

$$y(t) = 0.0427\sin(16.7332t + 0.9769)$$

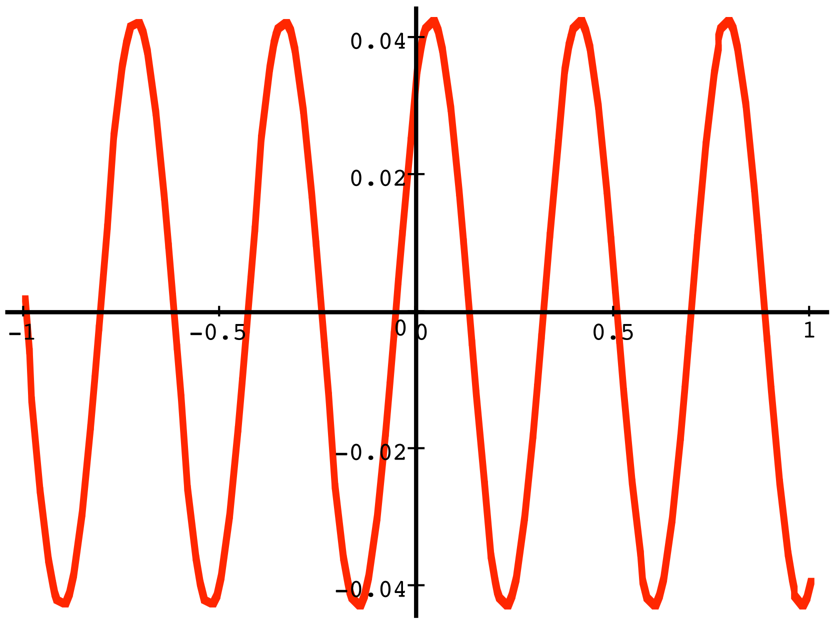


$\boxed{\text{Amplitude}}$

$$y(t) = 0.0427\sin(16.7332t + 0.9769)$$



$$y(t) = \overbrace{0.0427}^{\text{Amplitude}} \sin\big(\underbrace{16.7332}_{\text{Kreisfrequenz}}\,t + 0.9769\big)$$



$\boxed{\text{Amplitude}}$

$$y(t) = 0.0427 \sin(16.7332t + 0.9769)$$

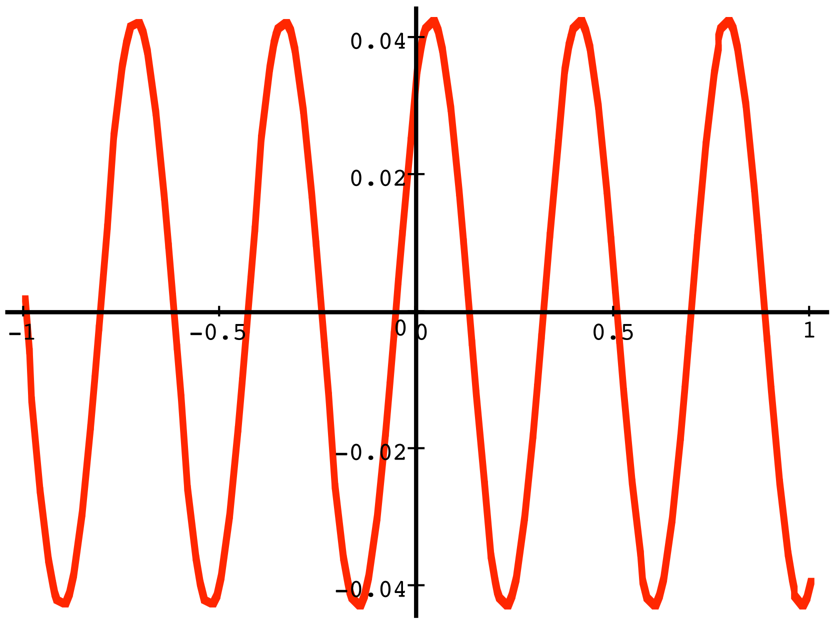
**Kreisfrequenz**

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{Kreisfrequenz} \\ \text{Winkel pro Sekunde}}}{\omega} = 2\pi \cdot \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Frequenz} \\ \text{Schwingungen} \\ \text{pro Sekunde}}}{f}$$

$$\text{Frequenz } f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{16.7332}{2\pi} = 2.66317 \ \frac{1}{\text{s}}$$

$$\text{Periodenlänge (Wellenlänge) } T = \frac{2\pi}{\omega} = 0.37549 \ \text{s}$$

$$y(t) = 0.0427\sin(16.7332t + 0.9769)$$



# Gedämpfte Schwingung: Bremswirkung durch Reibung

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{Masse}}}{m} \cdot \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Beschleunigung}}}{y''(t)} = - \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Federkonstante}}}{k} \cdot \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Auslenkung}}}{y(t)} - \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Reibungskoeffizient}}}{\rho} \cdot \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Geschwindigkeit}}}{y'(t)}$$

Gedämpfte Schwingung: Bremswirkung durch Reibung

$$\underset{\text{Masse}}{\underset{\uparrow}{m}} \cdot \underset{\text{Beschleunigung}}{\underset{\uparrow}{y''(t)}} = -\underset{\text{Federkonstante}}{\underset{\uparrow}{k}} \cdot \underset{\text{Auslenkung}}{\underset{\uparrow}{y(t)}} - \underset{\text{Reibungskoeffizient}}{\underset{\uparrow}{\rho}} \cdot \underset{\text{Geschwindigkeit}}{\underset{\uparrow}{y'(t)}}$$

Vorsicht: verschiedene Bedeutung von $\rho$

Physik: $\rho =$ Reibungskoeffizient

Mathematik: $\rho = \frac{-b}{2a}$

# Gedämpfte Schwingung: Bremswirkung durch Reibung

$$\underset{\text{Masse}}{\underset{\uparrow}{m}} \cdot \underset{\text{Beschleunigung}}{\underset{\uparrow}{y''(t)}} = -\underset{\text{Federkonstante}}{\underset{\uparrow}{k}} \cdot \underset{\text{Auslenkung}}{\underset{\uparrow}{y(t)}} - \underset{\text{Reibungskoeffizient}}{\underset{\uparrow}{\rho}} \cdot \underset{\text{Geschwindigkeit}}{\underset{\uparrow}{y'(t)}}$$

$$my'' = -ky - \rho y'$$

## Gedämpfte Schwingung: Bremswirkung durch Reibung

$$\underset{\substack{\uparrow\\ \text{Masse}}}{m} \cdot \underset{\substack{\uparrow\\ \text{Beschleunigung}}}{y''(t)} = -\underset{\substack{\uparrow\\ \text{Federkonstante}}}{k} \cdot \underset{\substack{\uparrow\\ \text{Auslenkung}}}{y(t)} - \underset{\substack{\uparrow\\ \text{Reibungskoeffizient}}}{\rho} \cdot \underset{\substack{\uparrow\\ \text{Geschwindigkeit}}}{y'(t)}$$

$$my'' = -ky - \rho y'$$

$$\boxed{my'' + \rho y' + ky = 0}$$

# Gedämpfte Schwingung: Bremswirkung durch Reibung

$$\underset{\substack{\uparrow\\ \text{Masse}}}{m} \cdot \underset{\substack{\uparrow\\ \text{Beschleunigung}}}{y''(t)} = -\underset{\substack{\uparrow\\ \text{Federkonstante}}}{k} \cdot \underset{\substack{\uparrow\\ \text{Auslenkung}}}{y(t)} - \underset{\substack{\uparrow\\ \text{Reibungskoeffizient}}}{\rho} \cdot \underset{\substack{\uparrow\\ \text{Geschwindigkeit}}}{y'(t)}$$

$$my'' = -ky - \rho y'$$

$$\boxed{my'' + \rho y' + ky = 0}$$

$$b^2 - 4ac = \rho^2 - 4mk \begin{cases} > 0 & ? \\ = 0 & ? \\ < 0 & ? \end{cases}$$

Drei Fälle möglich

## Bremswirkung durch Luftreibung

$m = 0.15\ \mathrm{kg}$ $\quad \rho = 0.1\ \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{s}}$ $\quad k = 42\ \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}} = 42\ \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{s}^2}$

$y(0) = 0.0354\ \mathrm{m}$ $\quad y'(0) = 0.4\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$

# Bremswirkung durch Luftreibung

$m = 0.15\ \text{kg}$ $\qquad \rho = 0.1\ \dfrac{\text{kg}}{\text{s}}$ $\qquad k = 42\ \dfrac{\text{N}}{\text{m}} = 42\ \dfrac{\text{kg}}{\text{s}^2}$

$y(0) = 0.0354\ \text{m}$ $\qquad y'(0) = 0.4\ \dfrac{\text{m}}{\text{s}}$

$b^2 - 4ac = \rho^2 - 4mk = -25.19 < 0$ Dritter Fall

## Bremswirkung durch Luftreibung

$$m = 0.15\ \text{kg} \qquad \rho = 0.1\ \frac{\text{kg}}{\text{s}} \qquad k = 42\ \frac{\text{N}}{\text{m}} = 42\ \frac{\text{kg}}{\text{s}^2}$$

$$y(0) = 0.0354\ \text{m} \qquad y'(0) = 0.4\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

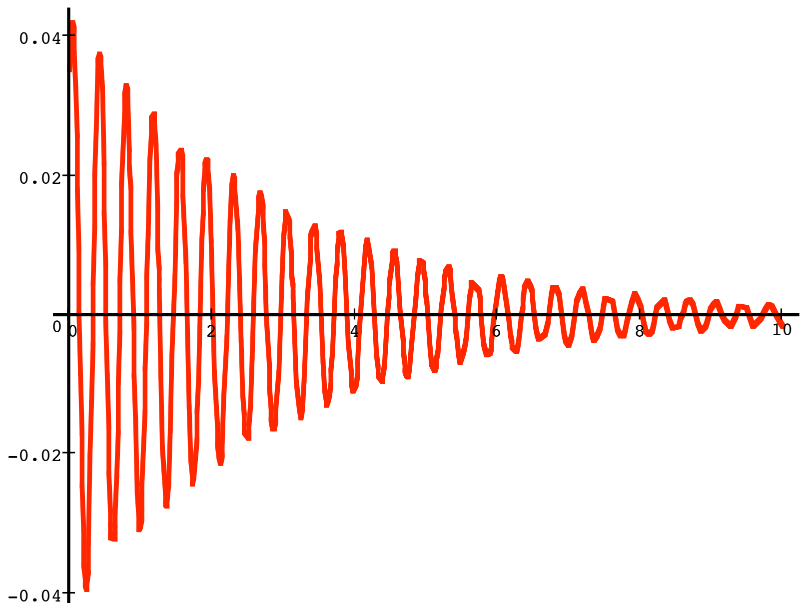
$$b^2 - 4ac = \rho^2 - 4mk = -25.19 < 0 \quad \text{Dritter Fall}$$

$$y(t) = \mathrm{e}^{-\frac{1}{3}t}\left(0.02459\sin(16.7299t) + 0.0354\cos(16.7299t)\right)$$

$$y(t) = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Dämpfung}}}{\mathrm{e}^{-\frac{1}{3}t}} \cdot \underbrace{0.04237 \cdot \sin(16.7299t + 0.9514)}_{\text{Schwingung}}$$

# Bremswirkung durch Luftreibung

$$y(t) = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Dämpfung}}}{e^{-\frac{1}{3}t}} \cdot \underbrace{0.04237 \cdot \sin(16.7299t + 0.9514)}_{\text{Schwingung}}$$



# Stoßdämpfer: Große Reibung

# Stoßdämpfer: Große Reibung

$$b^2 - 4ac = \rho^2 - 4mk > 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Erster Fall}$$

## Stoßdämpfer: Große Reibung

$$b^2 - 4ac = \rho^2 - 4mk > 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Erster Fall}$$

$$y(t) = A\mathrm{e}^{\lambda_1 t} + B\mathrm{e}^{\lambda_2 t}$$

# Stoßdämpfer: Große Reibung

$$b^2 - 4ac = \rho^2 - 4mk > 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Erster Fall}$$

$$y(t) = A\mathrm{e}^{\lambda_1 t} + B\mathrm{e}^{\lambda_2 t}$$

$m = 0.15\ \mathrm{kg}$ $\qquad \rho = 6\ \dfrac{\mathrm{kg}}{\mathrm{s}}$ $\qquad k = 42\ \dfrac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}} = 42\ \dfrac{\mathrm{kg}}{\mathrm{s}^2}$

$y(0) = 0\ \mathrm{m}$ $\qquad y'(0) = 0.4\ \dfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ $\qquad$ (Stoß aus Ruhelage)

# Stoßdämpfer: Große Reibung

$$b^2 - 4ac = \rho^2 - 4mk > 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Erster Fall}$$

$$y(t) = A\mathrm{e}^{\lambda_1 t} + B\mathrm{e}^{\lambda_2 t}$$

$$m = 0.15 \text{ kg} \qquad \rho = 6 \ \frac{\text{kg}}{\text{s}} \qquad k = 42 \ \frac{\text{N}}{\text{m}} = 42 \ \frac{\text{kg}}{\text{s}^2}$$

$$y(0) = 0 \text{ m} \qquad y'(0) = 0.4 \ \frac{\text{m}}{\text{s}} \qquad \text{(Stoß aus Ruhelage)}$$

$$y(t) = 0.01826\mathrm{e}^{-9.04554t} - 0.01826\mathrm{e}^{-30.95445t}$$

## Stoßdämpfer: Große Reibung

$$y(t) = 0.01826\mathrm{e}^{-9.04554t} - 0.01826\mathrm{e}^{-30.95445t}$$