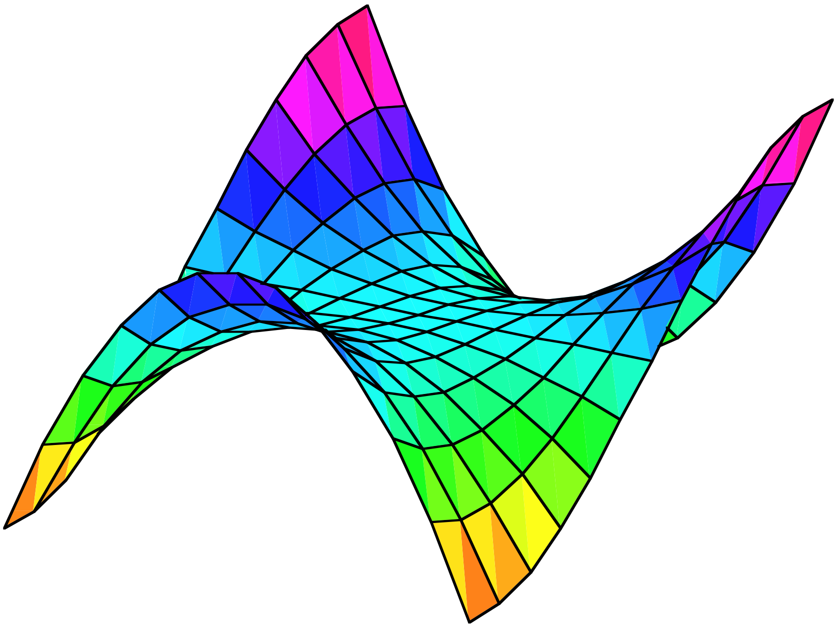
Hans Walser

Mathematik 1 für Naturwissenschaften



Modul 113
Funktionen mehrerer Variablen
Lernumgebung

UNI BASEL

Inhalt

1 Wasserhahn 1
2 Rechtecksumfang 1
3 Funktionsgraph 2
4 Gerade und ungerade Funktionen zweier Variablen 4
5 Niveaulinien 6
6 Niveaulinien 8
7 Niveaulinien 10
8 Niveaulinien 12
9 Niveaulinien 14
10 Kugel 15
11 Halbkugel 16
12 Halbkugel 17
13 Partielle Ableitungen 17
14 Partielle Ableitungen 18
15 Partielle Ableitungen 18
16 Partielle Ableitungen, Rechenbeispiele 18
17 Tangentialebene 18
18 Tangentialebene 20
19 Kettenregel 20
20 Kettenregel 21
21 Gradient 22
22 Nabla-Operator 22

Modul 113 für die Lehrveranstaltung *Mathematik 1 für Naturwissenschaften*

Winter 2003/04 Erstausgabe
Winter 2004/05 Überarbeitung
Winter 2005/06 Erweiterung. Geändertes Layout
Winter 2006/07 Erweiterung. MathType. Fehlerkorrekturen
Herbst 2007 Neue Kapiteleinteilung. Ergänzungen
Herbst 2008 Geändertes Layout
Herbst 2013 Straffung und Erweiterung

last modified: 30. November 2013

Hans Walser
Mathematisches Institut, Rheinsprung 21, 4051 Basel
www.walser-h-m.ch/hans

1 Wasserhahn

Wasserhahn

Funktion mehrerer Variablen?

Bearbeitung

Funktion zweier Variablen. Wir können die Wassertemperatur und die Stärke des Wasserstrahls einstellen.

2 Rechtecksumfang

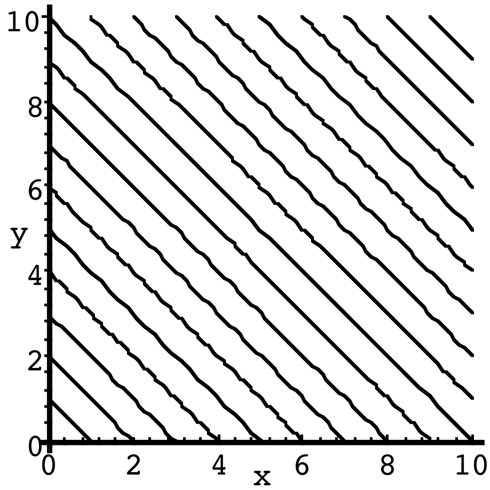
Ein Rechteck mit der Länge x und der Breite y hat den Umfang $f(x,y) = 2x + 2y$.

a) Skizzieren Sie die Niveaulinien dieser Funktion.

b) Machen Sie sich ein anschauliches Bild des Funktionsgraphen.

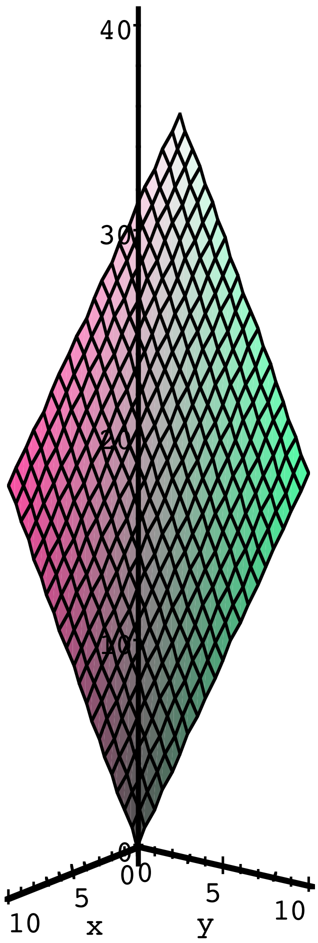
Ergebnis

a)



$f(x,y) = 2x + 2y$

b)



$f(x,y) = 2x + 2y$

3 Funktionsgraph

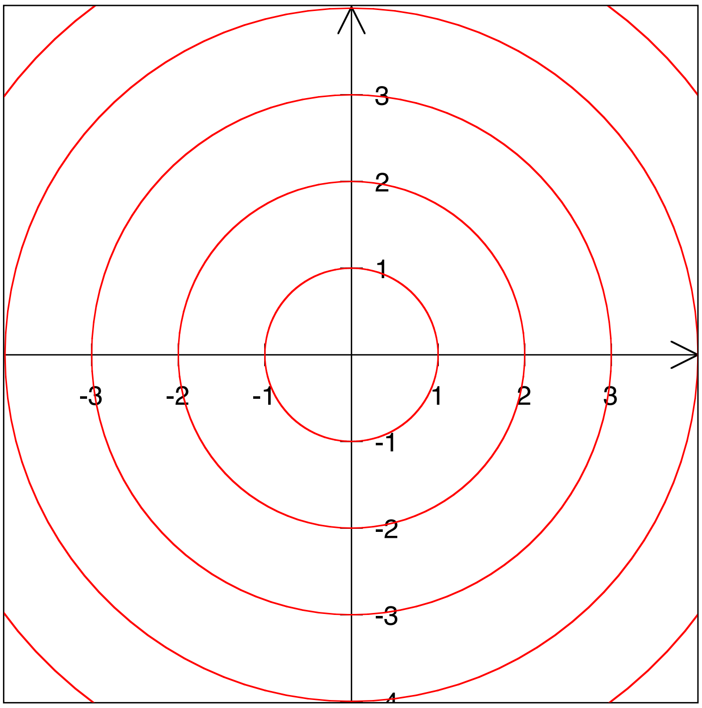
Skizzieren Sie den Funktionsgraphen von $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$.

a) Niveaulinien

b) Ansicht

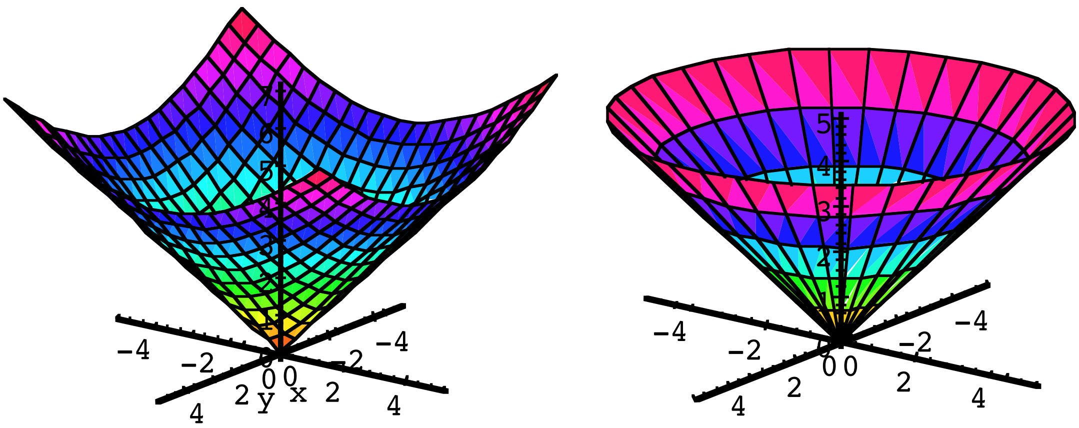
Ergebnis

a) konzentrische Kreise mit gleichen Abständen



Niveaulinien von $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$

b) Kegel



Ansichten von $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$

4 Gerade und ungerade Funktionen zweier Variablen

Eine *gerade* Funktion zweier Variablen erfüllt folgende Bedingung:

$$f(-x,-y) = f(x,y)$$

Eine *ungerade* Funktion zweier Variablen erfüllt folgende Bedingung:

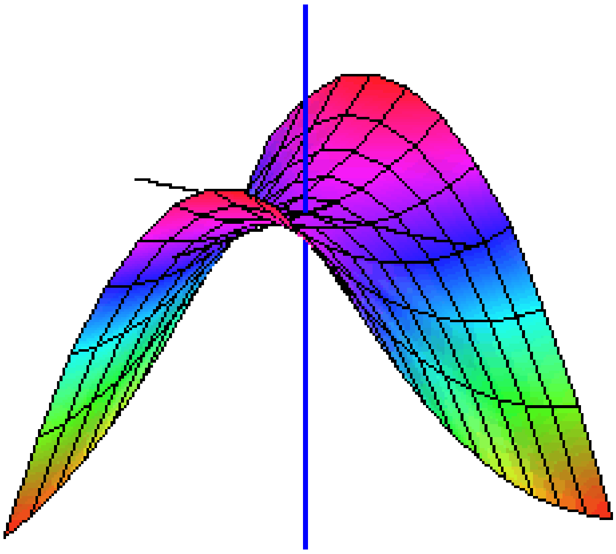
$$f(-x,-y) = -f(x,y)$$

Beispiele? Welche Symmetrieeigenschaften haben die Graphen gerader beziehungsweise ungerader Funktionen?

Bearbeitung

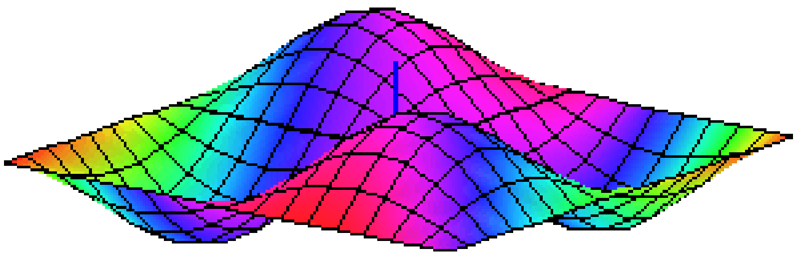
Gerade Funktionen: Der Graph kann um die z-Achse um 180° gedreht werden.

Beispiel: $f(x,y) = x^2 + 3xy - 4y^2$



$f(x,y) = x^2 + 3xy - 4y^2$

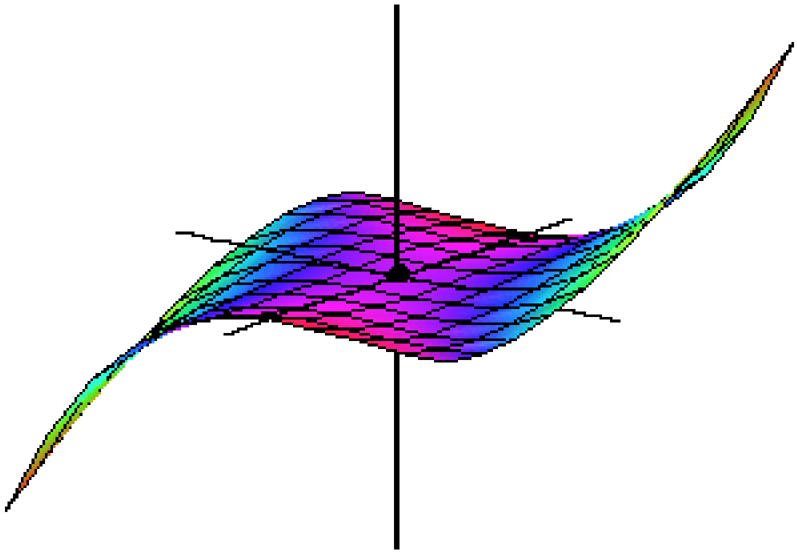
Beispiel: $f(x,y) = \sin(x)\sin(y)$



$f(x,y) = \sin(x)\sin(y)$

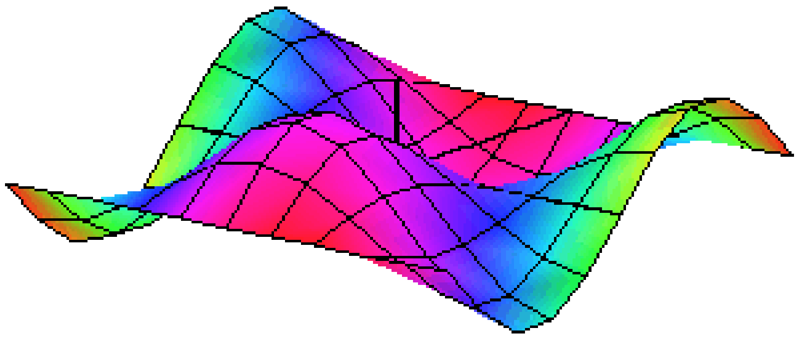
Ungerade Funktionen: Der Graph kann am Ursprung gespiegelt werden.

Beispiel: $f(x,y) = x^3 + 3x^2y - 7xy^2 + 4y^3$



$f(x,y) = x^3 + 3x^2y - 7xy^2 + 4y^3$

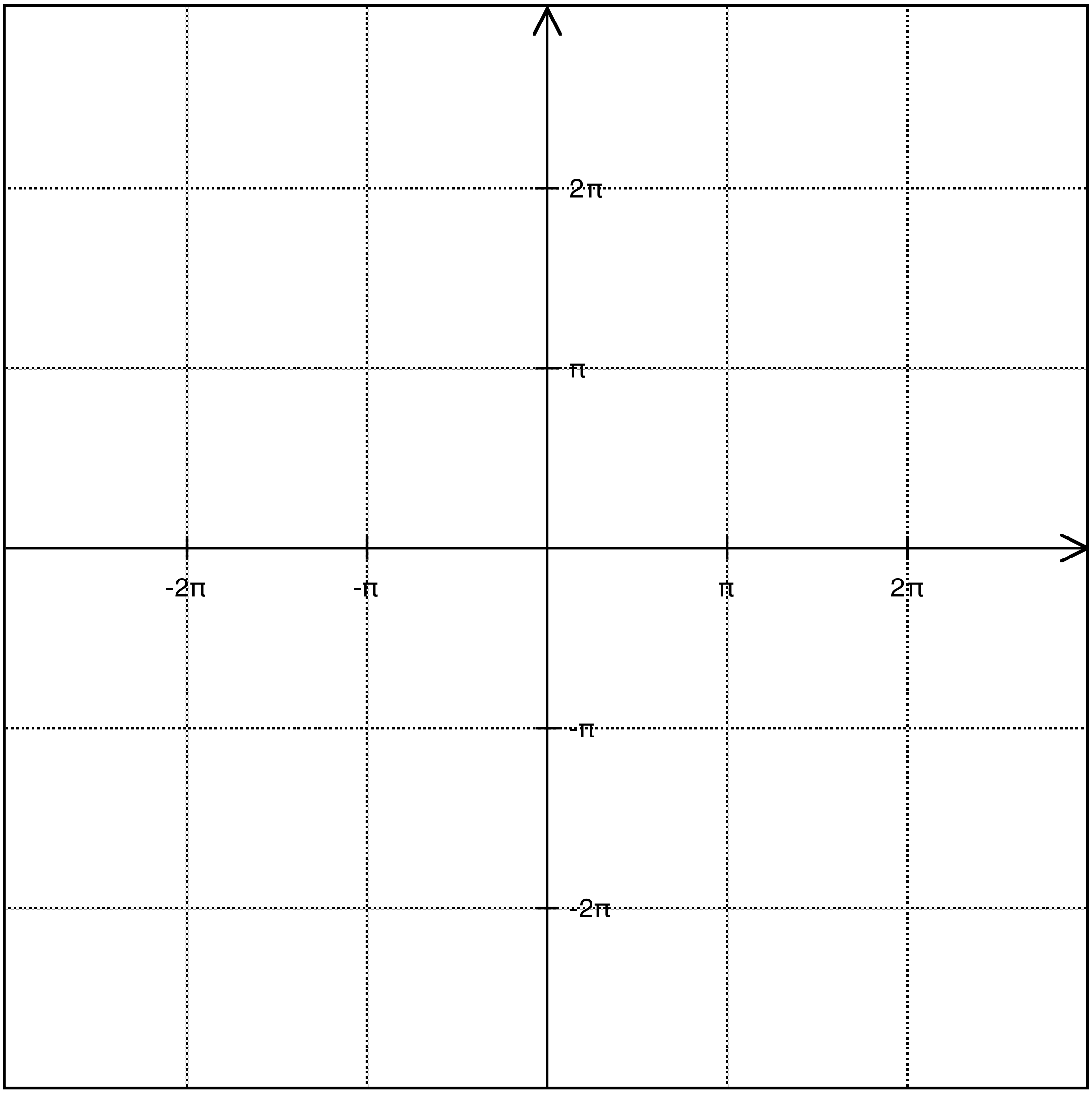
Beispiel: $f(x,y) = \sin(x)\cos(y)$



$f(x,y) = \sin(x)\cos(y)$

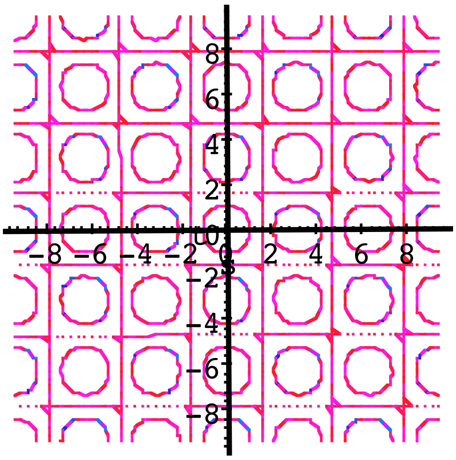
5 Niveaulinien

Skizzieren Sie die Niveaulinien von $f(x,y)=\cos(x)\cos(y)$ für die Niveaux -1, -0.5, 0, 0.5, 1.

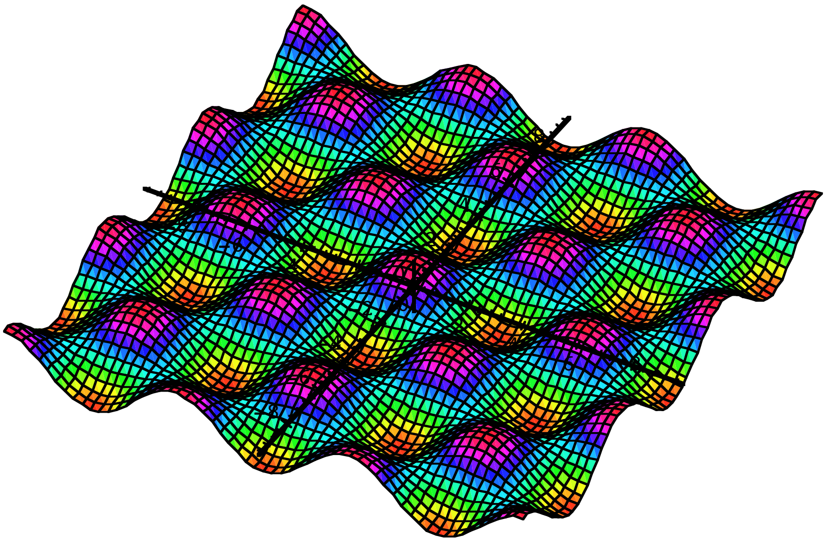


Niveaulinien von $f(x,y)=\cos(x)\cos(y)$

Ergebnis



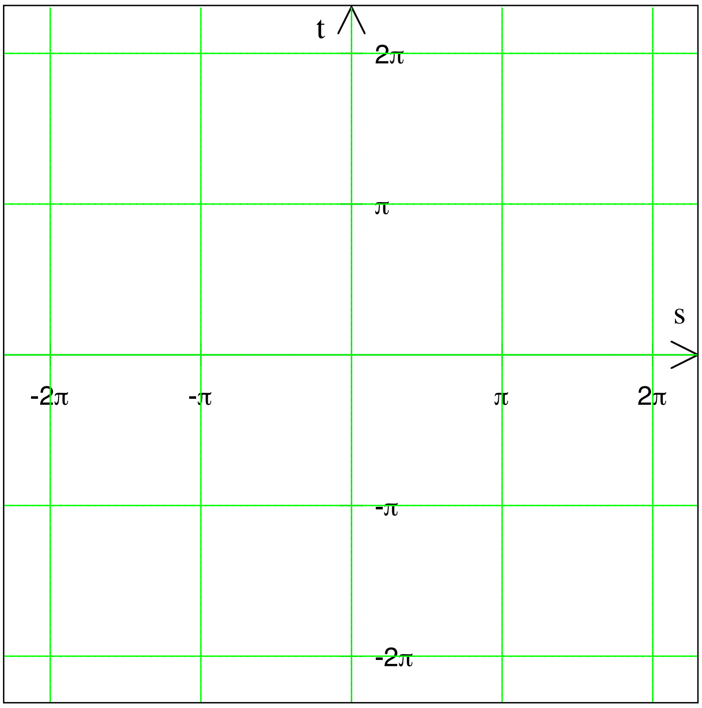
Niveaulinien von $f(x,y)=\cos(x)\cos(y)$



Ansicht von $f(x,y)=\cos(x)\cos(y)$

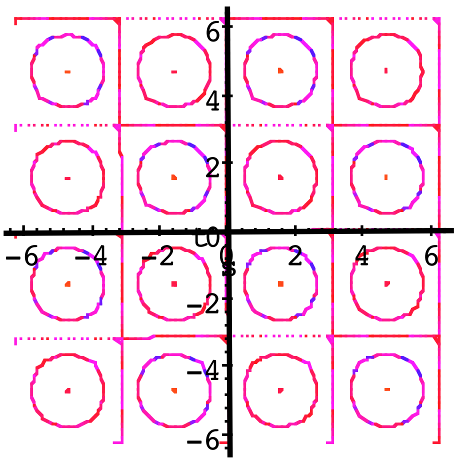
6 Niveaulinien

Skizzieren Sie die Niveaulinien von $f(s,t) = \sin(s)\sin(t)$ für die Niveaux -1, -0.5, 0, 0.5, 1.

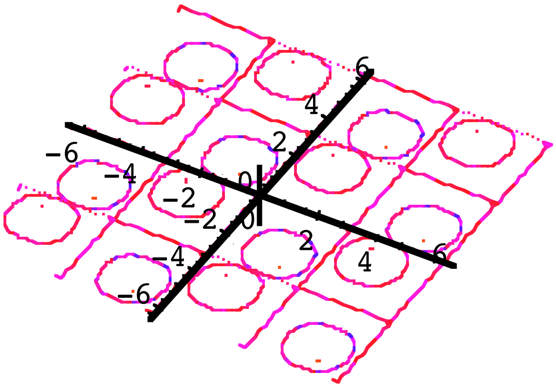


Niveaulinien von $f(s,t) = \sin(s)\sin(t)$

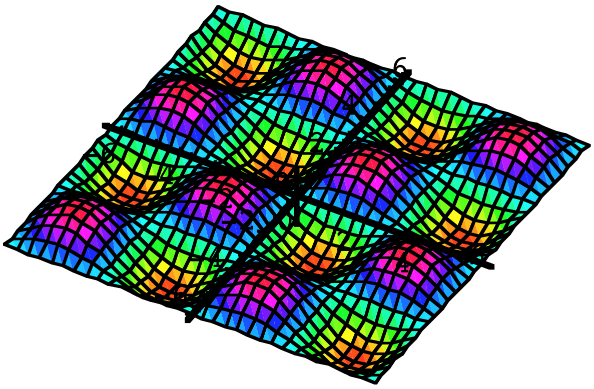
Ergebnis



Niveaulinien von $f(s,t) = \sin(s)\sin(t)$



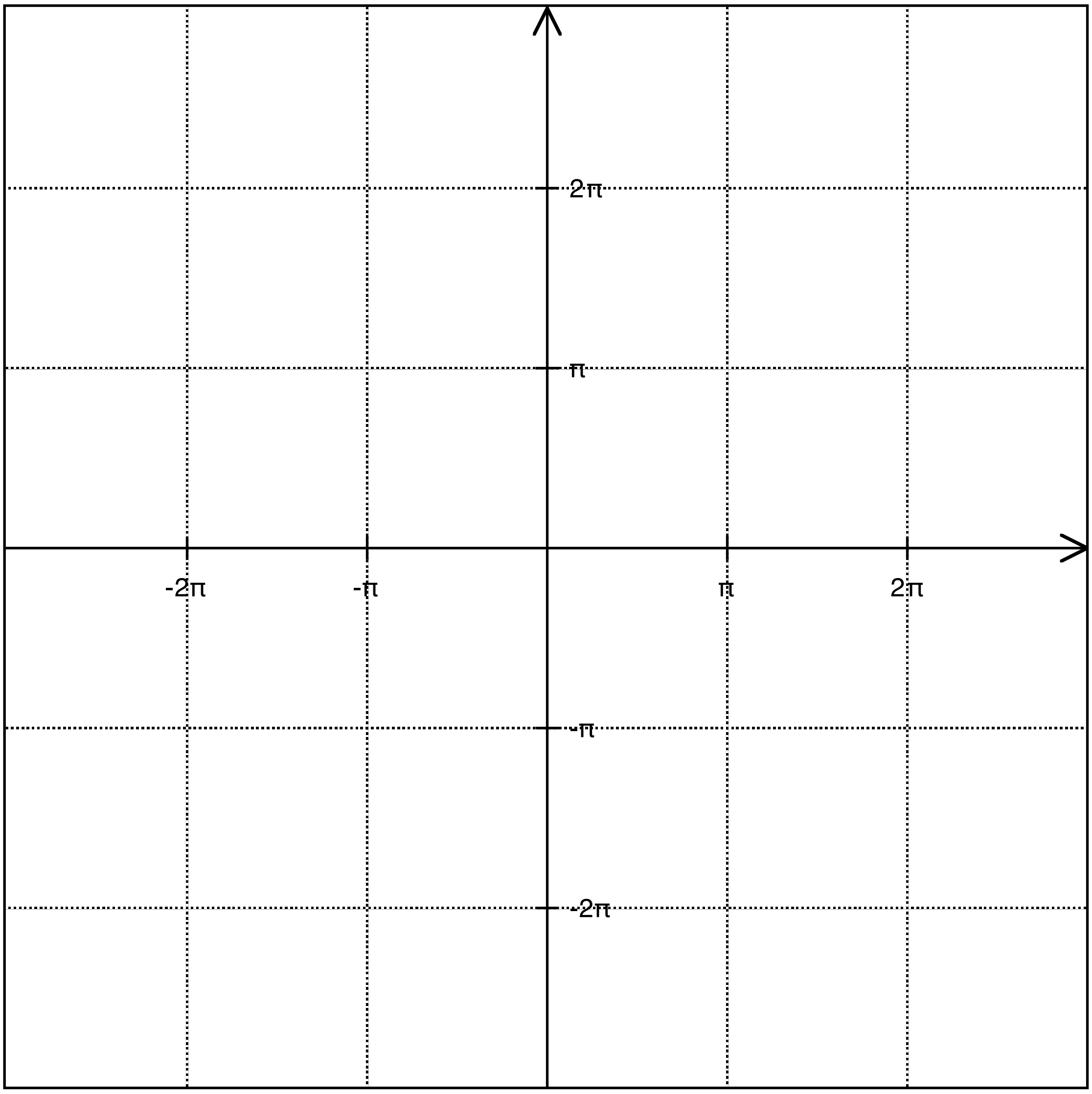
Ansicht der Niveaulinien von $f(s,t) = \sin(s)\sin(t)$



Ansicht von $f(s,t) = \sin(s)\sin(t)$

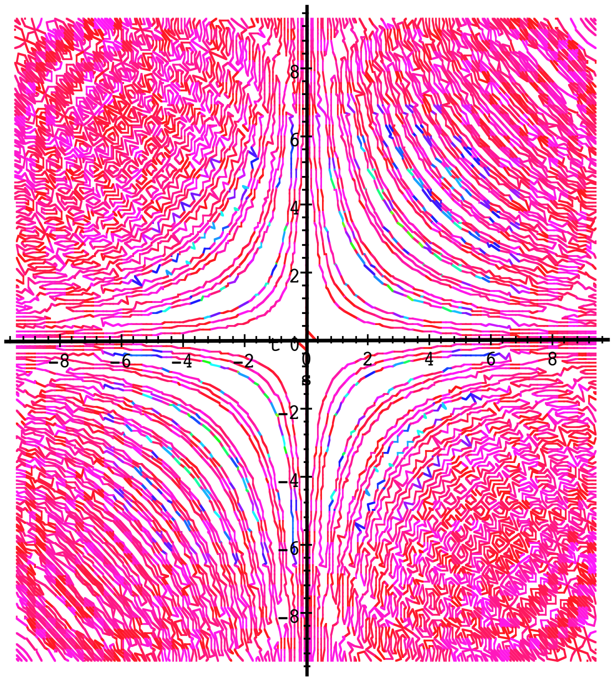
7 Niveaulinien

Skizzieren Sie die Niveaulinien von $f(x,y) = \cos(xy)$ für die Niveaux -1, -0.5, 0, 0.5, 1.

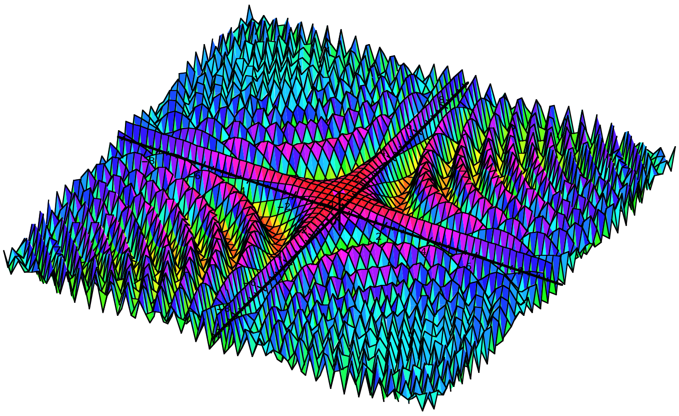


Niveaulinien von $f(x,y) = \cos(xy)$

Ergebnis



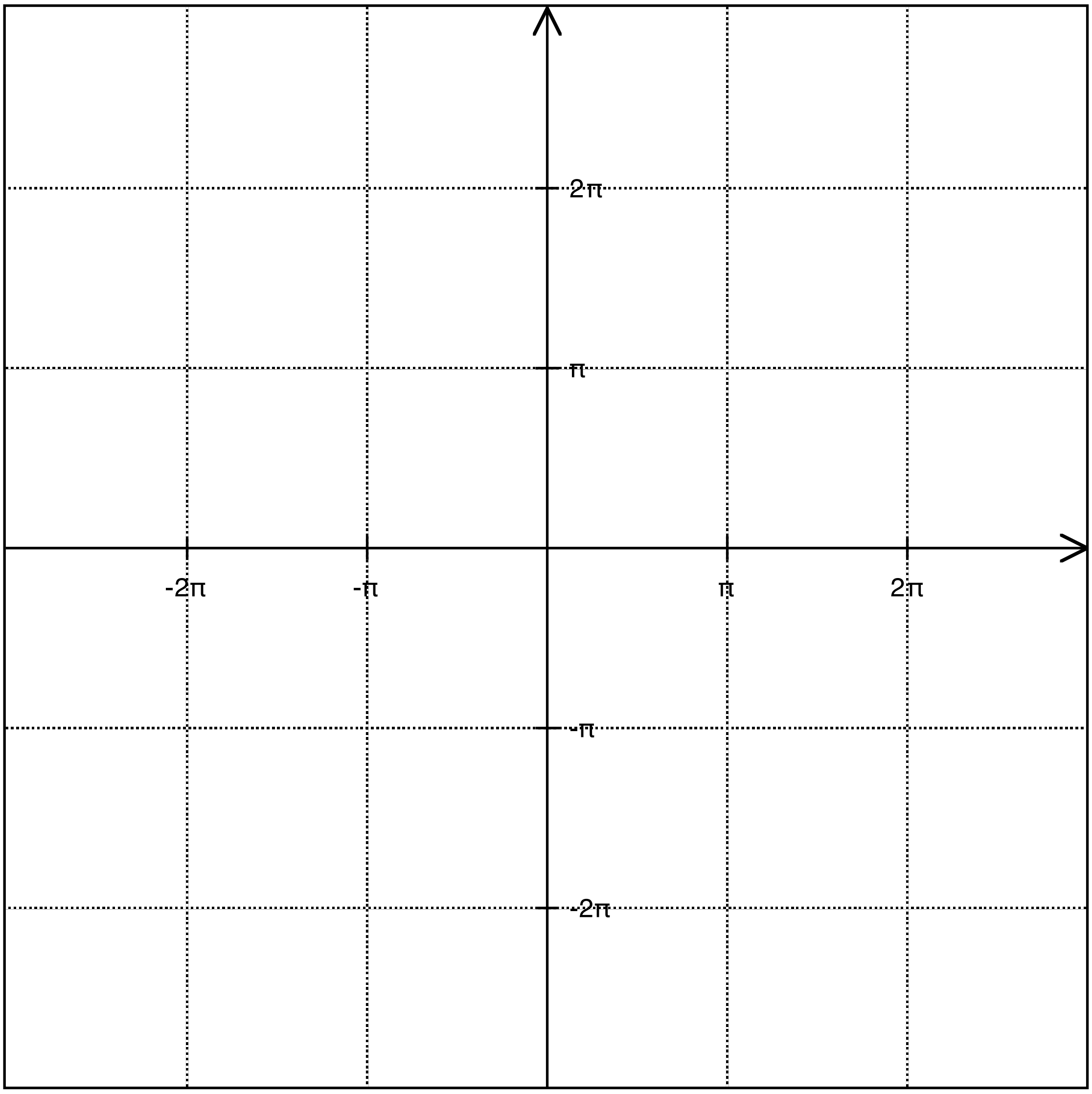
Niveaulinien von $f(x,y)=\cos(xy)$



Ansicht von $f(x,y)=\cos(xy)$

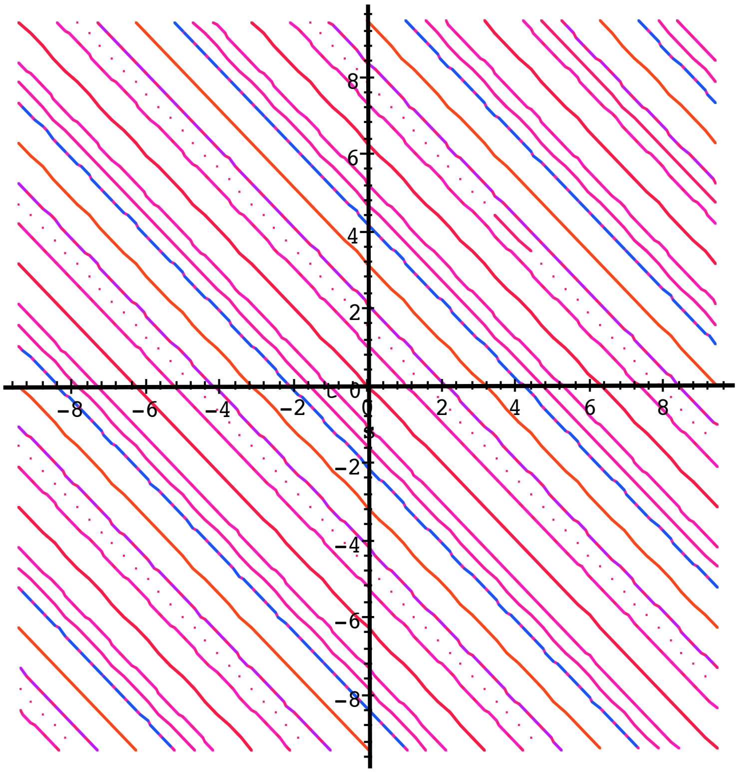
8 Niveaulinien

Skizzieren Sie die Niveaulinien von $f(x,y) = \cos(x+y)$ für die Niveaux -1, -0.5, 0, 0.5, 1.

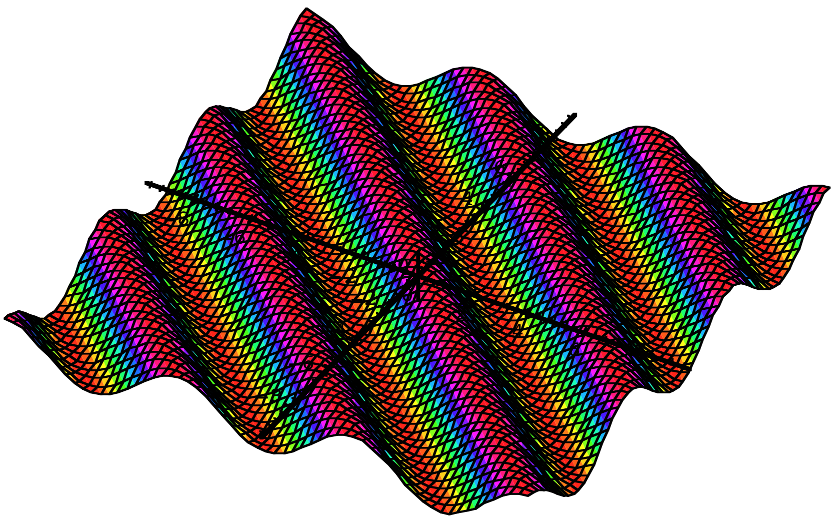


Niveaulinien von $f(x,y) = \cos(x+y)$

Ergebnis



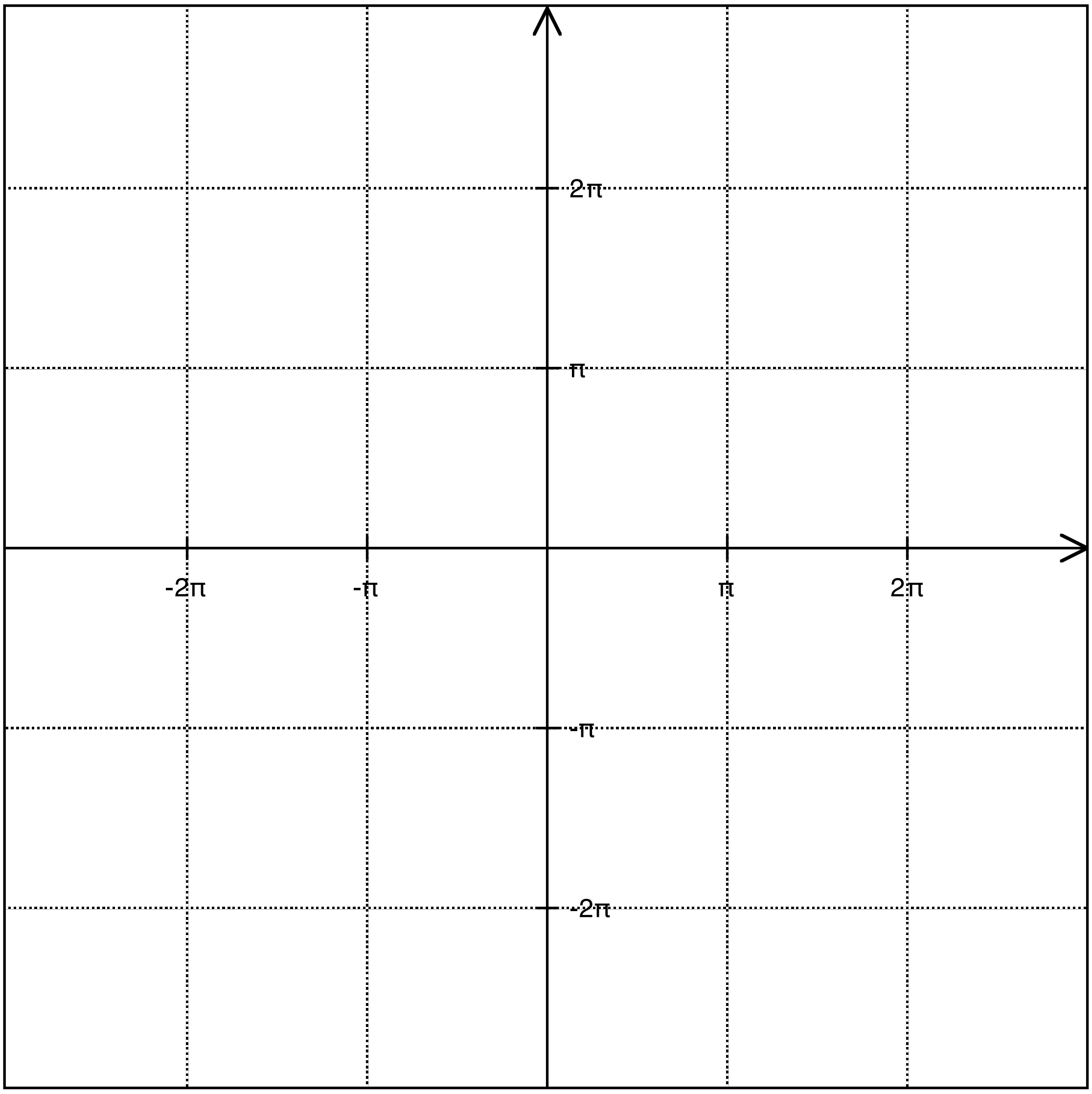
Niveaulinien von $f(x,y)=\cos(x+y)$



Ansicht von $f(x,y)=\cos(x+y)$

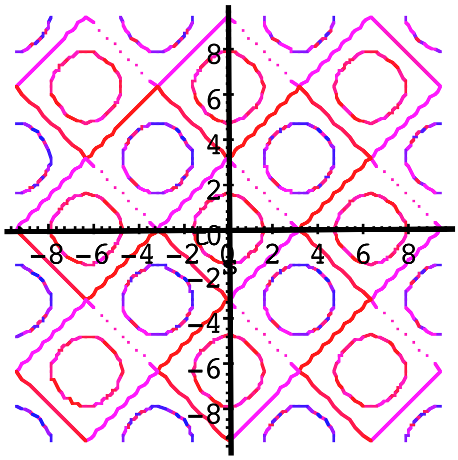
9 Niveaulinien

Skizzieren Sie die Niveaulinien von $f(x,y) = \cos(x) + \cos(y)$ für die Niveaux -2, -1, 0, 1, 2.

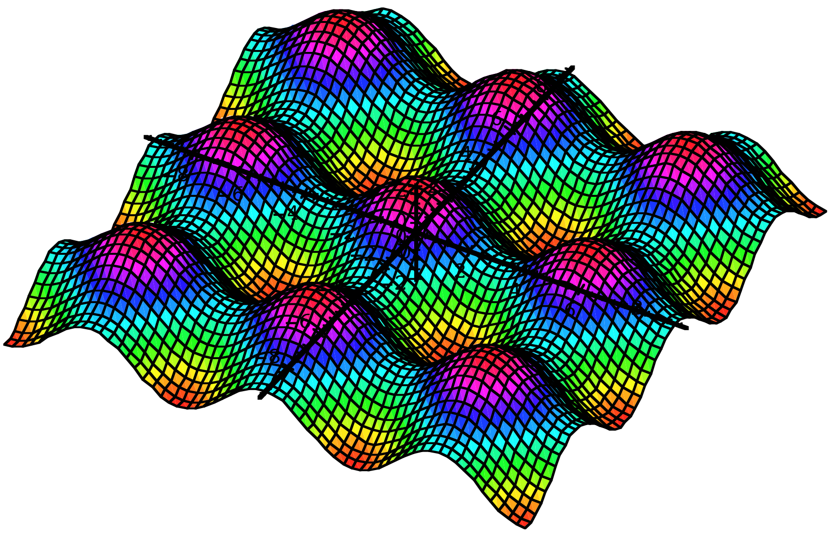


Niveaulinien von $f(x,y) = \cos(x) + \cos(y)$

Ergebnis



Niveaulinien von $f(x,y) = \cos(x) + \cos(y)$



Ansicht von $f(x,y) = \cos(x) + \cos(y)$

10 Kugel

Warum kann eine Kugel nicht durch eine Funktion $z = f(x,y)$ beschrieben werden?

Ergebnis

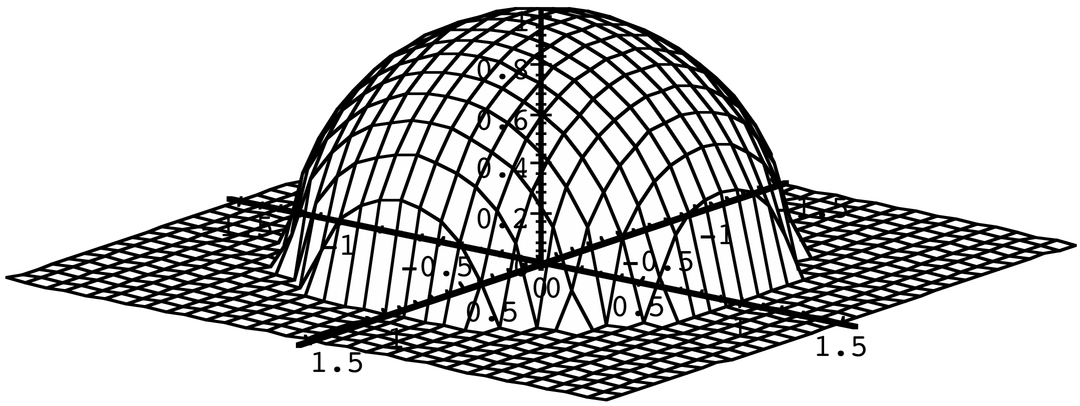
Keine eindeutig definierte Funktion.

11 Halbkugel

Die Grafik zeigt eine Halbkugel mit Radius 1 und dem Koordinatennullpunkt als Zentrum.

a) Gesucht ist eine Beschreibung dieser Halbkugel durch ein Funktion $z = f(x,y)$.

b) Gesucht ist die Gleichung der Tangentialebene, welche die durch $z = f(x,y)$ gegebene Fläche im Punkt $\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3},f\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)\right)$ berührt.



Halbkugel

Ergebnis

a) $z = f(x,y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$

b) $z = g(x,y) = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}x - y$

Bearbeitung

a) Aus der Kugelgleichung $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ folgt durch Auflösen nach z zunächst:

$$z = \pm\sqrt{1 - x^2 - y^2}$$

Für die obere Halbkugel ist das Pluszeichen zu nehmen.

b) Zunächst ist $f\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right) = \frac{2}{3}$. Weiter erhalten wir die partiellen Ableitungen:

$$f_x(x,y) = \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2-y^2}} = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2-y^2}} \qquad \Rightarrow \qquad f_x\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right) = -\frac{1}{2}$$

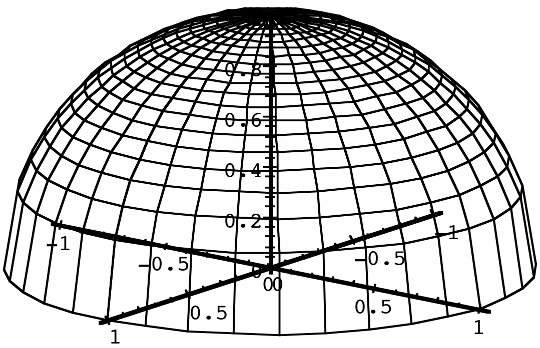
$$f_y(x,y) = \frac{-2y}{2\sqrt{1-x^2-y^2}} = \frac{-y}{\sqrt{1-x^2-y^2}} \qquad \Rightarrow \qquad f_y\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right) = -1$$

Somit ergibt sich für die gesuchte Tangentialebene:

$$z = g(x,y) = \tfrac{3}{2} - \tfrac{1}{2}x - y$$

12 Halbkugel

Die Grafik zeigt eine Halbkugel mit Radius 1 und dem Koordinatennullpunkt als Zentrum. Gesucht ist eine Beschreibung dieser Halbkugel durch ein Funktion $z = f(r,\phi)$, wobei r und ϕ die Polarkoordinaten in der x,y-Ebene sind.



Halbkugel

Ergebnis

$z = f(r,\phi) = \sqrt{1-r^2}$ (ϕ ist wegen Rotationssymmetrie belanglos)

13 Partielle Ableitungen

Gesucht sind jeweils f_x, f_y, f_{xy}, f_{yx}

a) $f(x,y) = \cos(x)\cos(y)$

b) $f(x,y) = \sin(x)\sqrt{y}$

Ergebnis

a)

$$f_x(x,y) = -\sin(x)\cos(y)$$
$$f_y(x,y) = -\cos(x)\sin(y)$$
$$f_{xy}(x,y) = \sin(x)\sin(y)$$
$$f_{yx}(x,y) = \sin(x)\sin(y)$$

b)

$f_x(x,y) = \cos(x)\sqrt{y}$

$f_y(x,y) = \frac{\sin(x)}{2\sqrt{y}}$

$f_{xy}(x,y) = \frac{\cos(x)}{2\sqrt{y}}$

$f_{yx}(x,y) = \frac{\cos(x)}{2\sqrt{y}}$

14 Partielle Ableitungen

$f(x,y) = \cos(x)\sin(y)$

Bei welchen mehrfachen (und allenfalls gemischten) partiellen Ableitungen tritt als Resultat zum ersten Mal wieder genau der Term $\cos(x)\sin(y)$ auf?

Ergebnis:

$f_{xxxx}(x,y) = \cos(x)\sin(y)$, $f_{xxyy}(x,y) = \cos(x)\sin(y)$, $f_{yyyy}(x,y) = \cos(x)\sin(y)$

15 Partielle Ableitungen

$f(x,y,\omega,\vartheta) = \cos(\omega x)\sin(\vartheta y)$

Gesucht sind: f_x, f_y, f_ω, f_ϑ, f_φ,

Ergebnis:

$f_x = -\omega\sin(\omega x)\sin(\vartheta y)$, $f_y = \vartheta\cos(\omega x)\cos(\vartheta y)$, $f_\omega = -x\sin(\omega x)\sin(\vartheta y)$,

$f_\vartheta = y\cos(\omega x)\cos(\vartheta y)$, $f_\varphi = 0$

16 Partielle Ableitungen, Rechenbeispiele

$f(a,b) = a^b$. Gesucht sind: f_{aa}, f_{ab}, f_{bb}

Ergebnis:

$f_{aa} = b(b-1)a^{b-2}$, $f_{ab} = a^{b-1} + b\ln(a)a^{b-1}$, $f_{bb} = (\ln(a))^2 a^b$.

17 Tangentialebene

Es sei $f(x,y) = x^3 - 3xy^2$. Gesucht ist die Gleichung der Tangentialebene, welche die durch $z = f(x,y)$ gegebene Fläche im Punkt $(1,2,f(1,2))$ berührt.

Ergebnis

$g(x,y) = 22 - 9x - 12y$

Bearbeitung

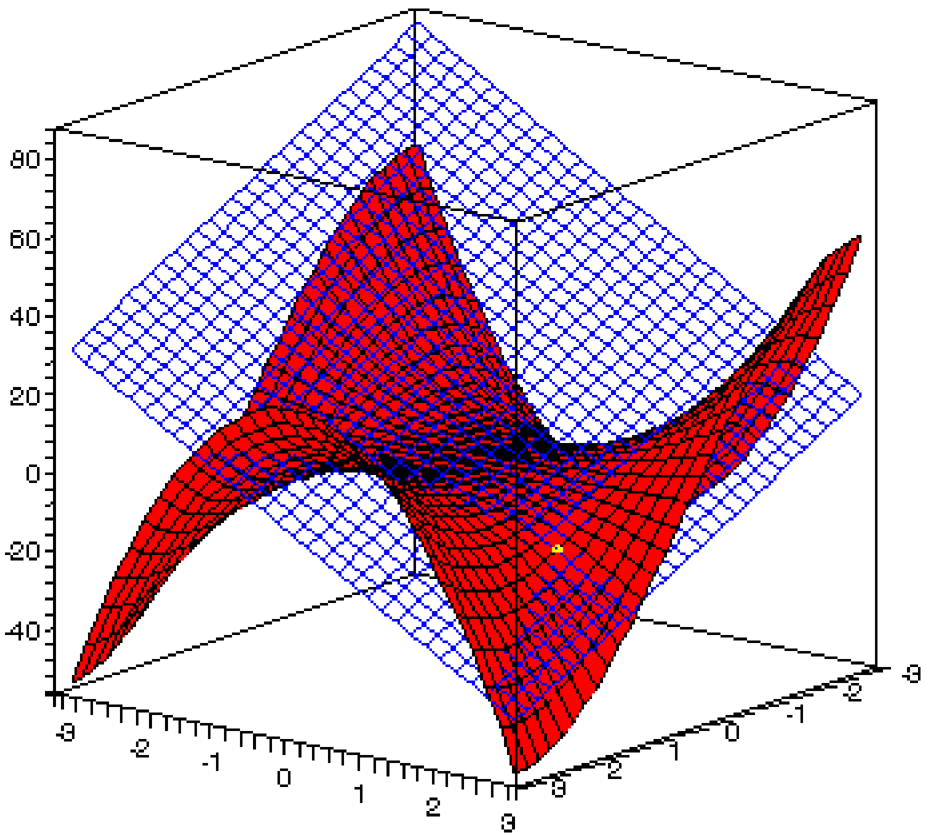
Zunächst ist $f(1,2) = -11$. Ferner ist:

$$f_x(x,y) = 3x^2 - 3y^2 \quad \Rightarrow \quad f_x(1,2) = -9$$
$$f_y(x,y) = -6xy \quad \Rightarrow \quad f_y(1,2) = -12$$

Für die Tangentialebene gilt:

$$\begin{aligned} g(x,y) &= f(1,2) + f_x(1,2)(x-1) + f_y(1,2)(y-2) \\ &= -11 - 9(x-1) - 12(y-2) = 22 - 9x - 12y \end{aligned}$$

Das Bild zeigt die Fläche (rot) und die Tangentialebene (blau) sowie den Berührungspunkt (gelb). Die Figur ist unterhöht gezeichnet.



Situation

18 Tangentialebene

Es sei $f(x,y) = \cos(x)\cos(y)$. Gesucht ist die Gleichung der Tangentialebene, welche die durch $z = f(x,y)$ gegebene Fläche im Punkt $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, f\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}\right)\right)$ berührt.

Ergebnis

$g(x,y) = \frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - \frac{\sqrt{6}}{4}\left(y - \frac{\pi}{3}\right)$

Bearbeitung

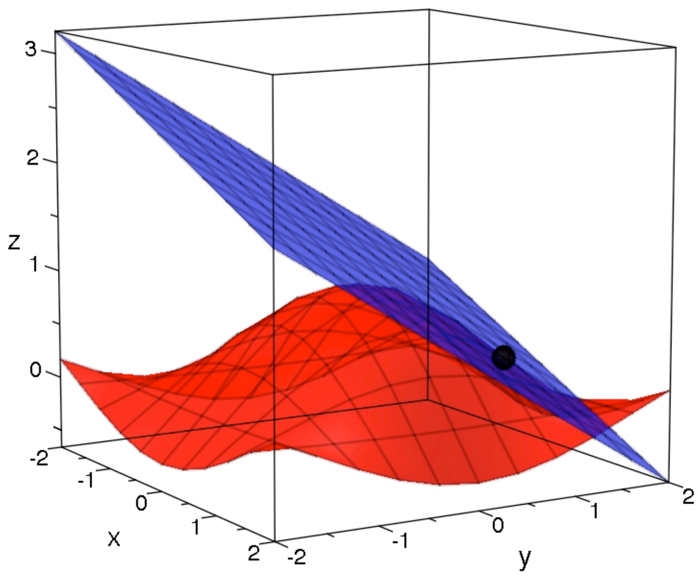
Zunächst ist $f\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{2}}{4}$. Ferner ist:

$$f_x(x,y) = -\sin(x)\cos(y) \quad \Rightarrow \quad f_x\left(\tfrac{\pi}{4}, \tfrac{\pi}{3}\right) = -\tfrac{\sqrt{2}}{4}$$
$$f_y(x,y) = -\cos(x)\sin(y) \quad \Rightarrow \quad f_y\left(\tfrac{\pi}{4}, \tfrac{\pi}{3}\right) = -\tfrac{\sqrt{6}}{4}$$

Für die Tangentialebene gilt:

$$\begin{aligned} g(x,y) &= f\left(\tfrac{\pi}{4}, \tfrac{\pi}{3}\right) + f_x\left(\tfrac{\pi}{4}, \tfrac{\pi}{3}\right)\left(x - \tfrac{\pi}{4}\right) + f_y\left(\tfrac{\pi}{4}, \tfrac{\pi}{3}\right)\left(y - \tfrac{\pi}{3}\right) \\ &= \tfrac{\sqrt{2}}{4} - \tfrac{\sqrt{2}}{4}\left(x - \tfrac{\pi}{4}\right) - \tfrac{\sqrt{6}}{4}\left(y - \tfrac{\pi}{3}\right) \end{aligned}$$

Das Bild zeigt die Fläche (rot) und die Tangentialebene (blau) sowie den Berührungspunkt.



Situation

19 Kettenregel

Es sei $f(x,y) = x^2 + y^2$ und weiter: $x(t) = \cos(t)$, $y(t) = \sin(t)$

Berechnen Sie $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}$ auf zwei verschiedene Arten.

Ergebnis

$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} = 0$

Erster Lösungsweg

Mit Kettenregel:

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 2x\left(-\sin(t)\right) + 2y\cos(t) = 2\cos(t)\left(-\sin(t)\right) + 2\sin(t)\cos(t) = 0$$

Zweiter Lösungsweg

Funktion direkt als Funktion von t schreiben, dann ableiten:

$$f(t) = f\left(x(t), y(t)\right) = \left(\cos(t)\right)^2 + \left(\sin(t)\right)^2 = 1$$

Ableitung einer konstanten Funktion ist Null.

20 Kettenregel

Es sei $f(x,y) = xy^2$ und weiter: $x(u,v) = u^3 - 3uv^2$, $y(u,v) = 3u^2v - v^3$

Berechnen Sie $\frac{\partial f}{\partial u}$ auf zwei verschiedene Arten.

Ergebnis

$\frac{\partial f}{\partial u} = 63u^6v^2 - 165u^4v^4 + 57u^2v^6 - 3v^8$

Erster Lösungsweg

Mit Kettenregel:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial u} &= \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} \\
&= y^2\left(3u^2 - 3v^2\right) + 2xy6uv \\
&= \left(3u^2v - v^3\right)^2\left(3u^2 - 3v^2\right) + 2\left(u^3 - 3uv^2\right)\left(3u^2v - v^3\right)6uv \\
&= 63u^6v^2 - 165u^4v^4 + 57u^2v^6 - 3v^8
\end{aligned}$$

Zweiter Lösungsweg

Funktion direkt als Funktion von u,v schreiben, dann ableiten:

$$\begin{aligned} f(u,v) &= f\left(x(u,v),y(u,v)\right) \\ &= x(u,v)\left(y(u,v)\right)^2 \\ &= \left(u^3 - 3uv^2\right)\left(3u^2v - v^3\right)^2 \\ &= 9u^7v^2 - 33u^5v^4 + 19u^3v^6 - 3uv^8 \end{aligned}$$

Partielle Ableitung nach u ergibt:

$$\frac{\partial f}{\partial u} = 63u^6v^2 - 165u^4v^4 + 57u^2v^6 - 3v^8$$

21 Gradient

a) $\operatorname{grad}\left(3x^2 - 7y\right)$ b) $\operatorname{grad}\left(21x^2y\right)$ c) $\operatorname{grad}\left(x^y\right)$ d) $\operatorname{grad}(ax + by)$

Ergebnis

a) $\operatorname{grad}\left(3x^2 - 7y\right) = \begin{bmatrix} 6x \\ -7 \end{bmatrix}$

b) $\operatorname{grad}\left(21x^2y\right) = \begin{bmatrix} 42xy \\ 21x^2 \end{bmatrix}$

c) $\operatorname{grad}\left(x^y\right) = \begin{bmatrix} yx^{y-1} \\ \ln(x)x^y \end{bmatrix}$

d) $\operatorname{grad}(ax + by) = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$

22 Nabla-Operator

a) Es sei $f(x,y)$ eine Funktion von zwei Variablen und $\lambda \in \mathbb{R}$. Wie lässt sich $\nabla(\lambda f)$ umformen?

b) Es seien $f(x,y)$ und $g(x,y)$ Funktionen von zwei Variablen. Wie lässt sich $\nabla(fg)$ umformen?

Ergebnis

a) $\nabla(\lambda f) = \lambda \nabla f$

b) $\nabla(fg) = (\nabla f)g + f\nabla g$

Es gelten Regeln wie beim gewöhnlichen Ableiten.