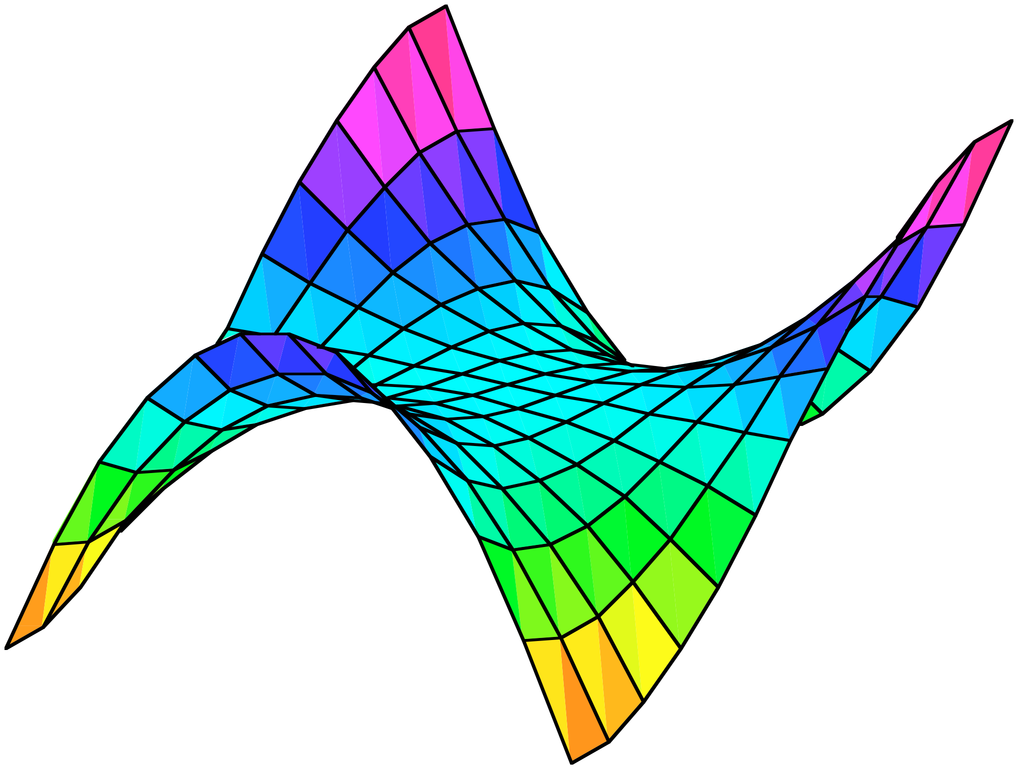
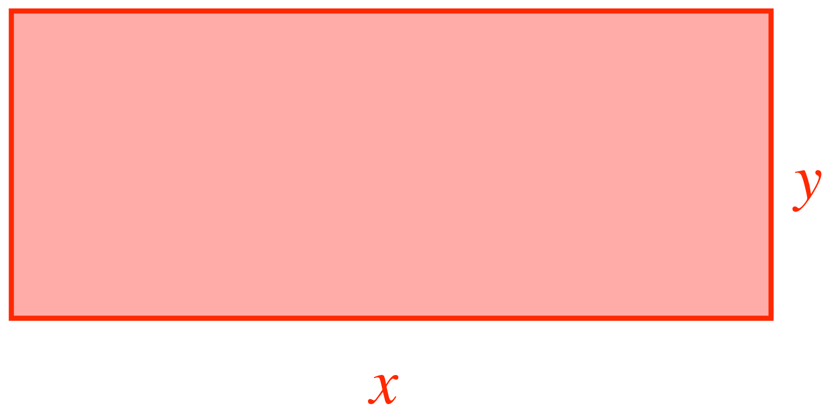


Modul 113 Funktionen mehrerer Variablen

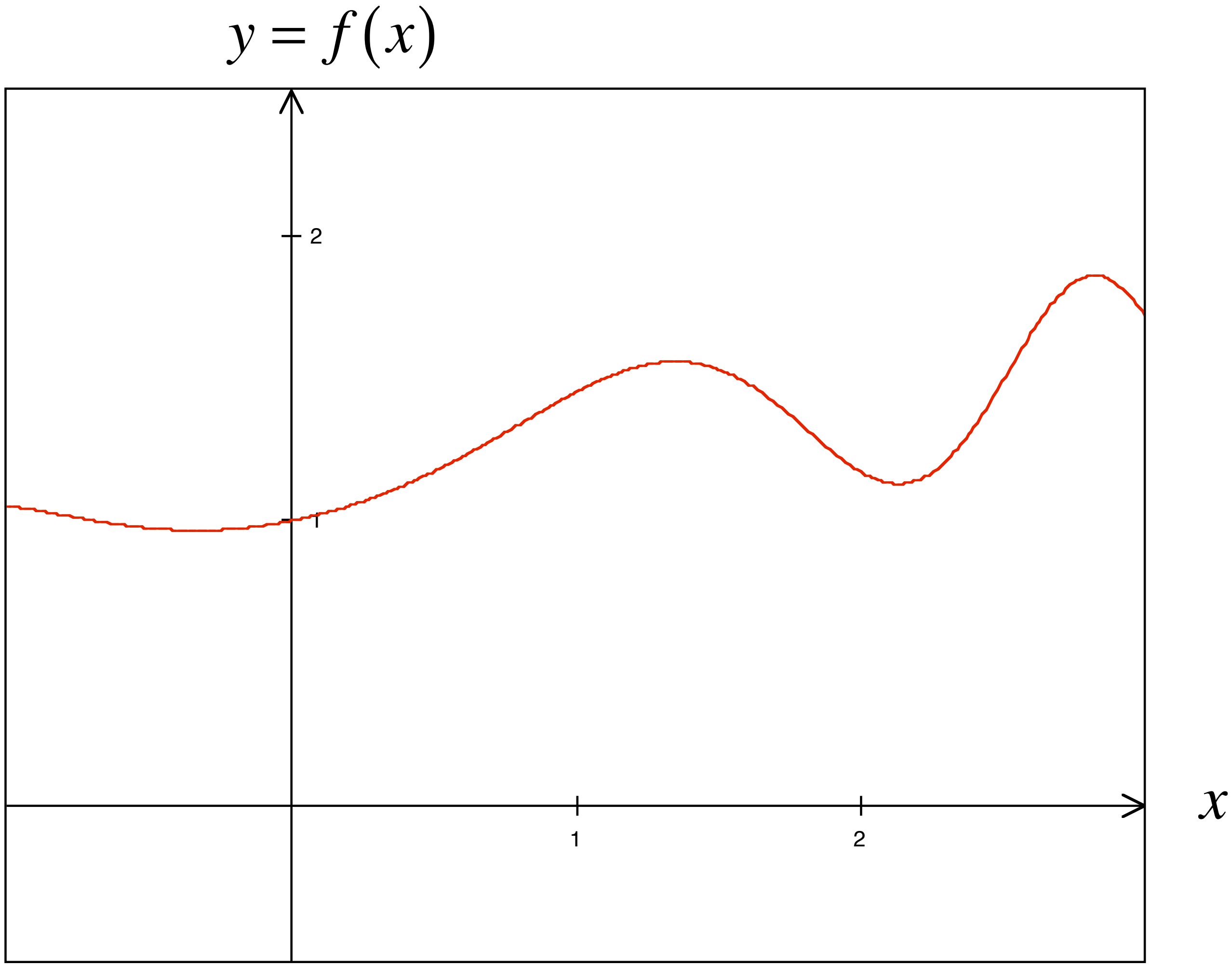
Warum Funktionen mehrerer Variablen?



Rechtecksfläche $= f(x, y) = xy$

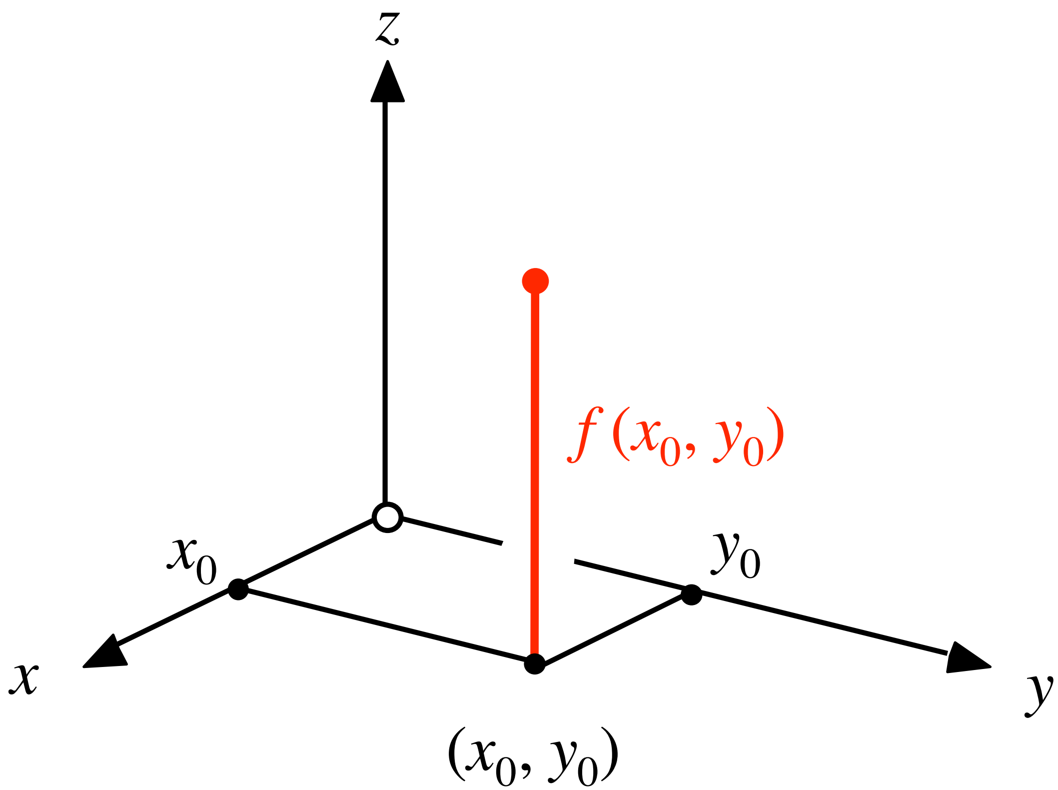
Warum Funktionen mehrerer Variablen?

$$\text{Raumtemperatur} = T(x, y, z)$$

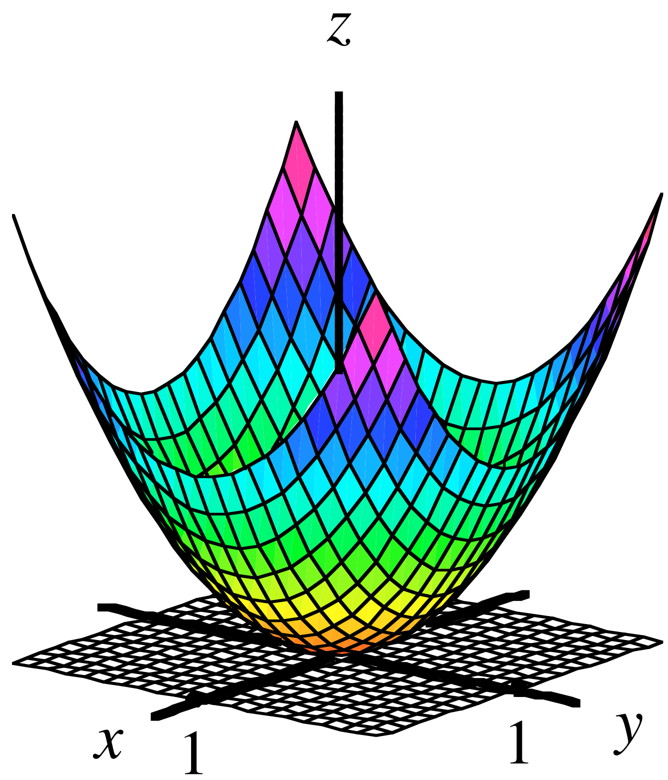


$y = f(x)$
2
1
1
2
x

$z = f(x, y)$

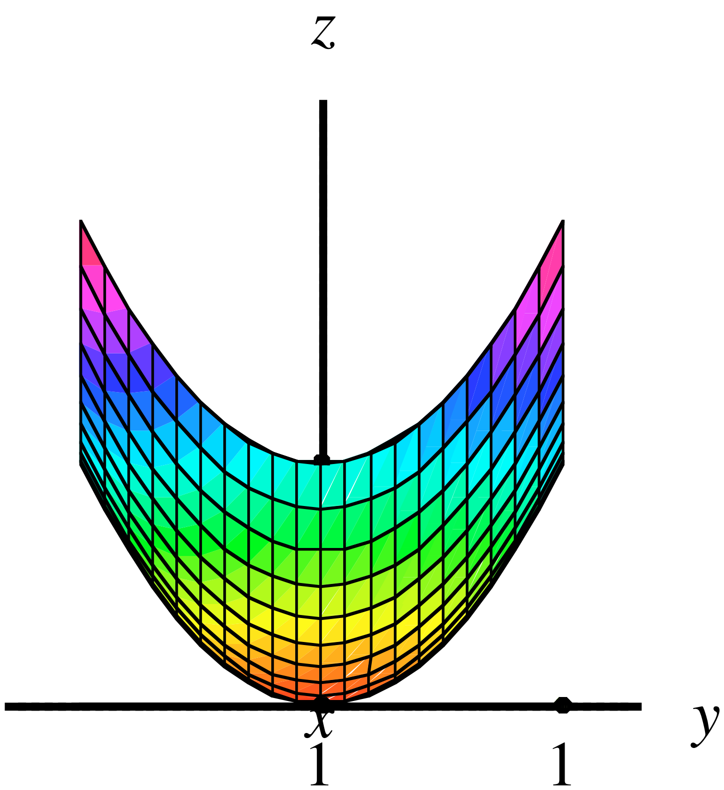


Beispiel: $f(x,y) = x^2 + y^2$



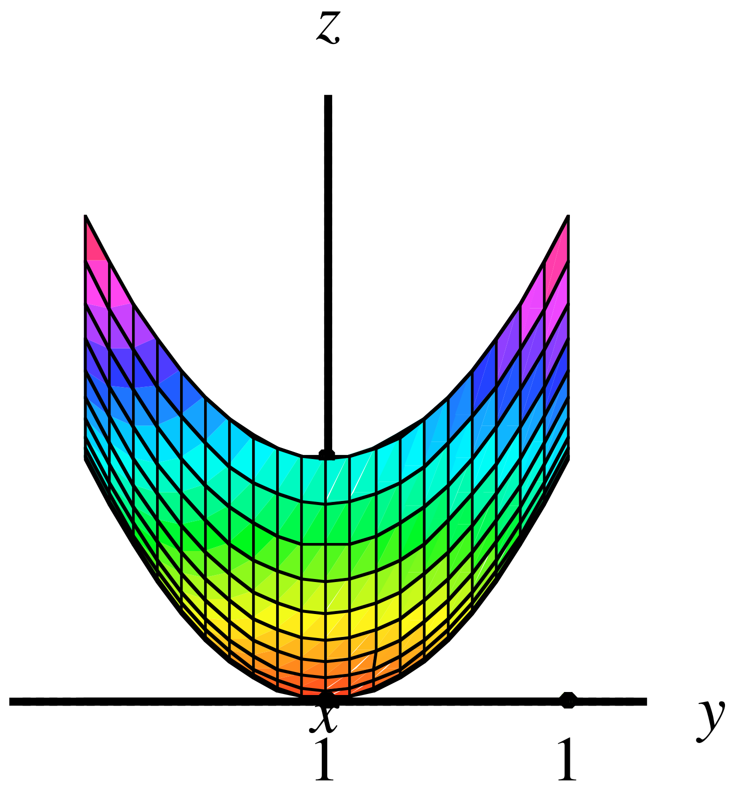
Ansicht

Beispiel: $f(x,y) = x^2 + y^2$

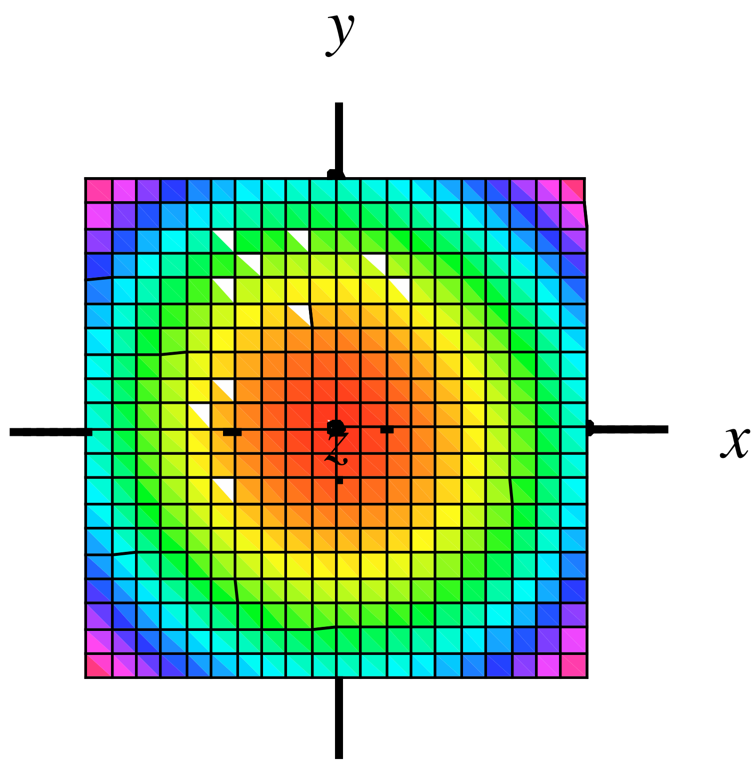


Von vorne

Beispiel: $f(x,y) = x^2 + y^2$

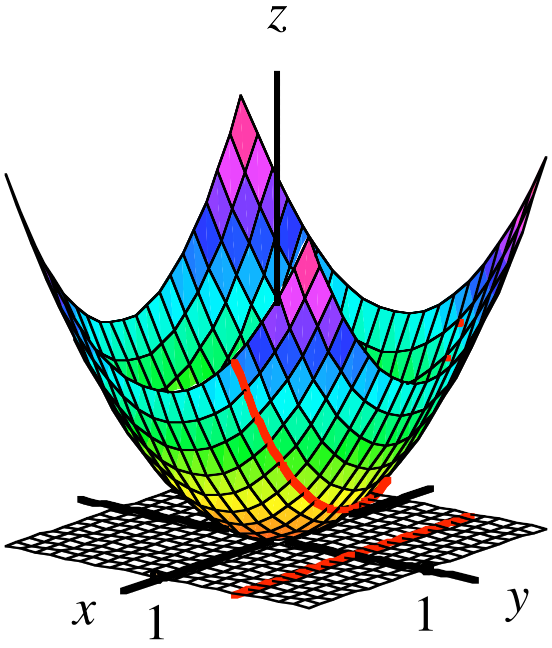


Von vorne



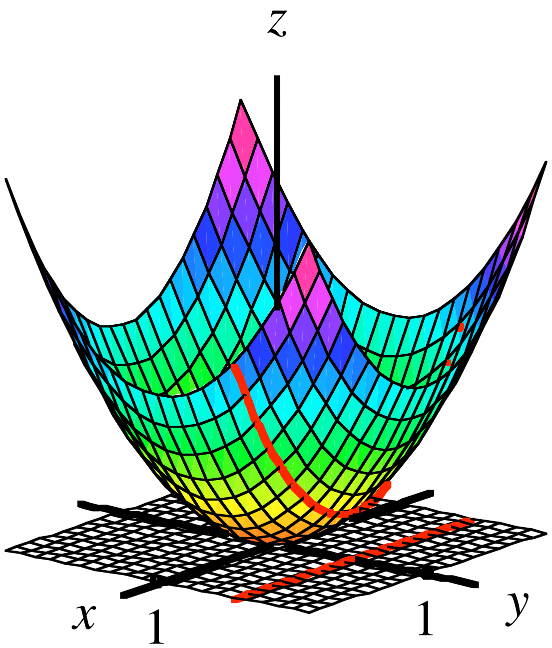
Von oben

Beispiel: $\quad f(x,y) = x^2 + y^2$



x-Linie

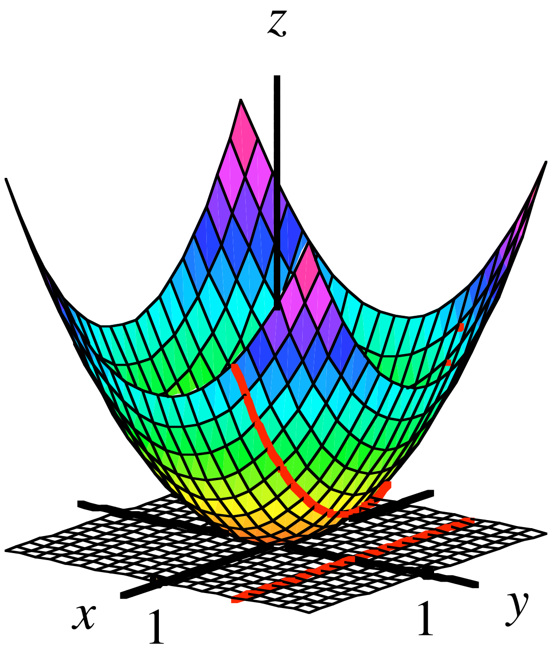
Beispiel: $\quad f(x,y) = x^2 + y^2$

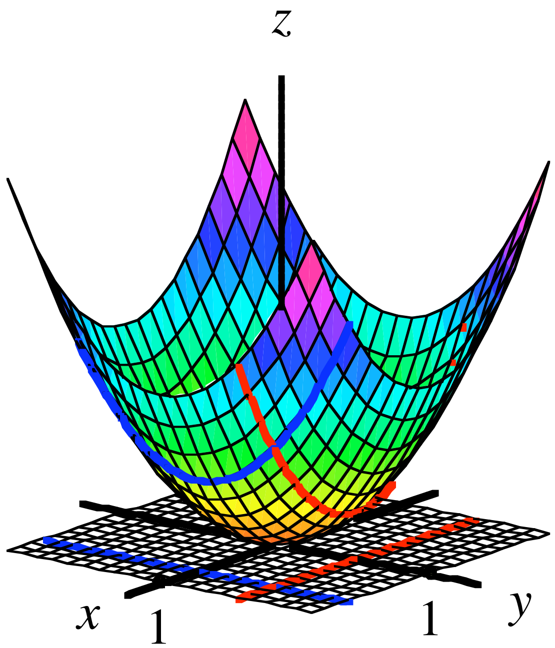


x-Linie

$$f\left(x, \frac{1}{2}\right) = x^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = x^2 + \frac{1}{4}$$

Beispiel: $\quad f(x,y) = x^2 + y^2$

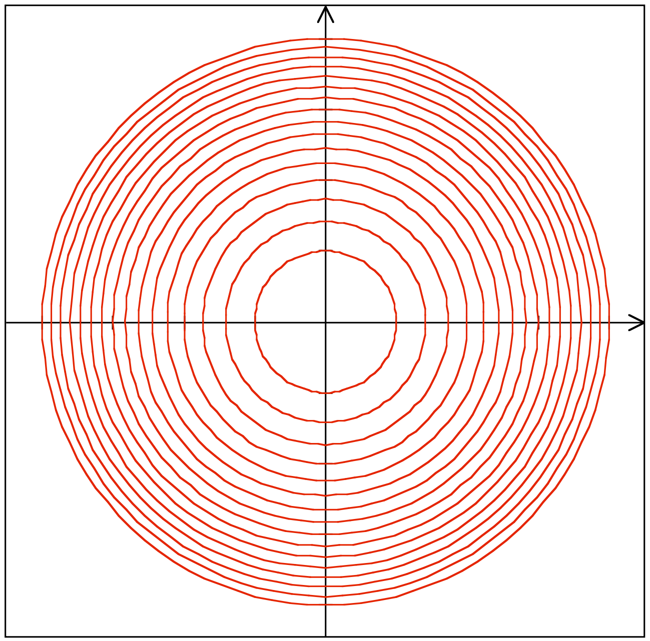


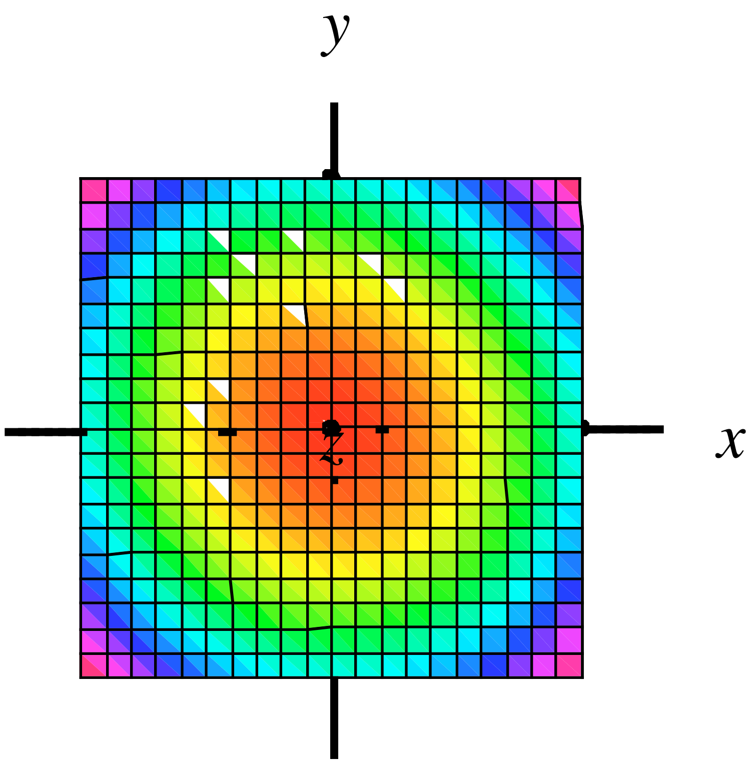


x-Linie $\qquad$ y-Linie

Netzlinien

Beispiel: $f(x,y) = x^2 + y^2$

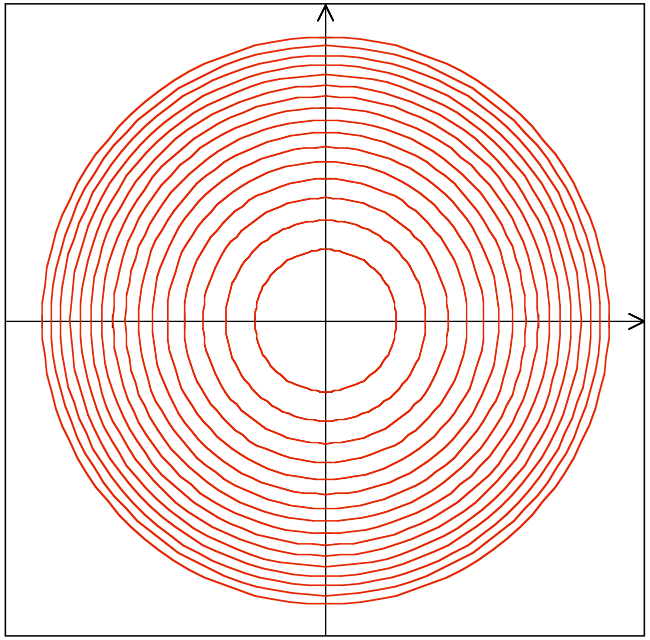




Niveaulinien

Von oben

Beispiel: $\quad f(x,y) = x^2 + y^2$

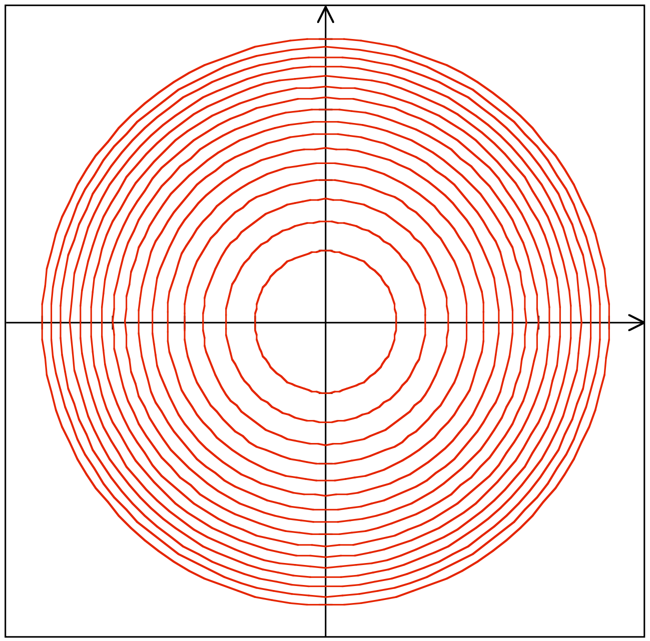


Niveaulinien

Niveau

$$f(x,y) = x^2 + y^2 = c$$

Beispiel: $\quad f(x,y)=x^2+y^2$



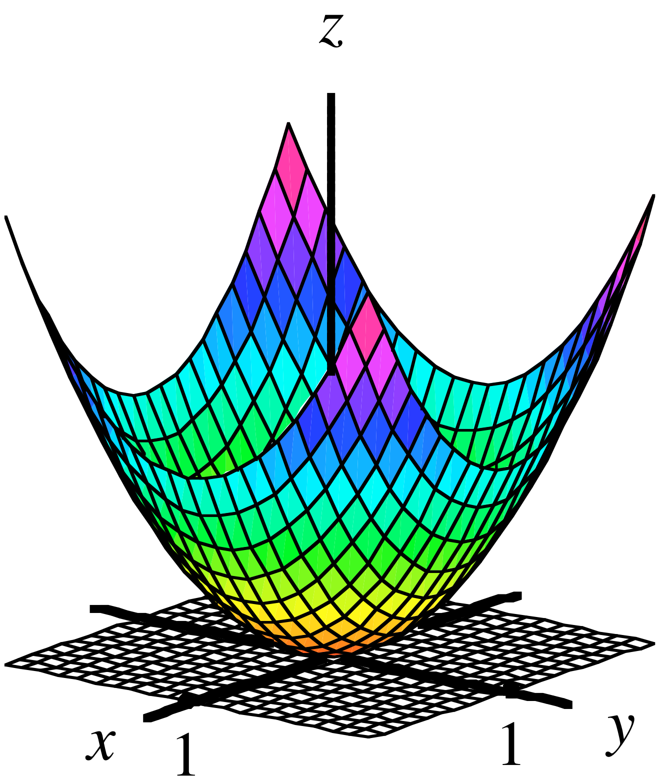
Niveau

$$f(x,y)=x^2+y^2=c$$

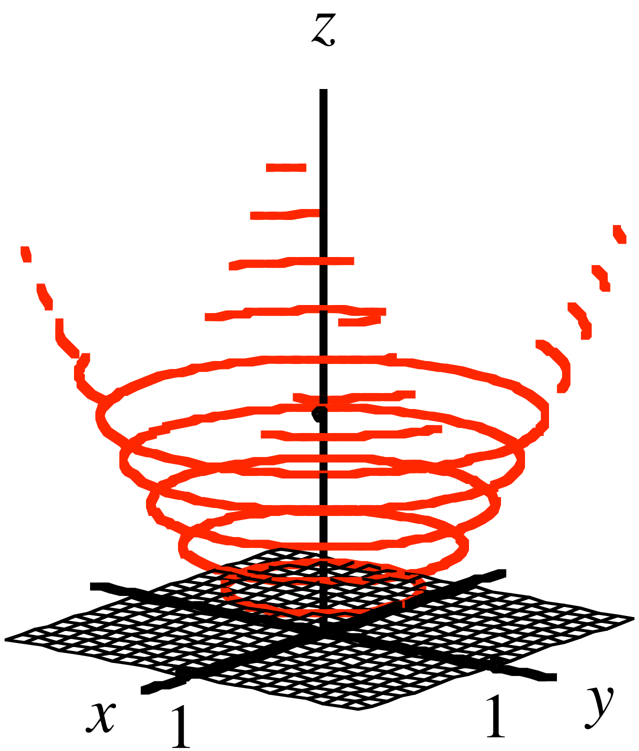
Kreis mit Radius $\sqrt{c}$

Niveaulinien

Beispiel: $f(x,y) = x^2 + y^2$

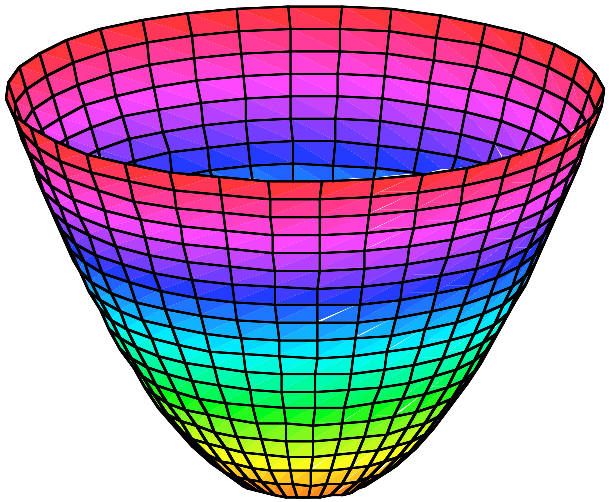


Ansicht

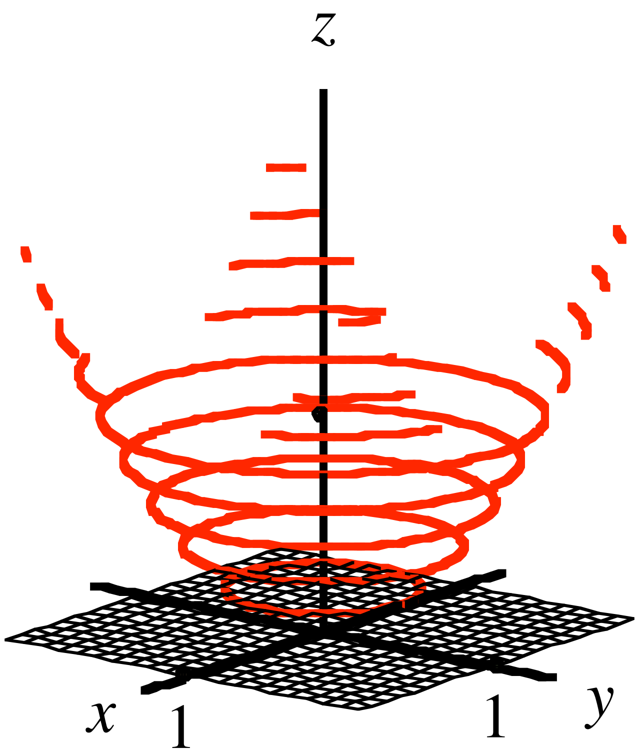


Niveaulinien
in Ansicht

Beispiel: $f(x,y) = x^2 + y^2$

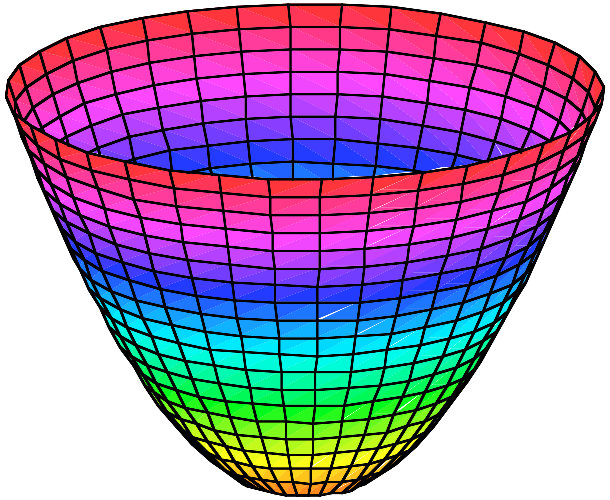


Rotationsparaboloid
in Ansicht



Niveaulinien
in Ansicht

Beispiel: $f(x,y) = x^2 + y^2$

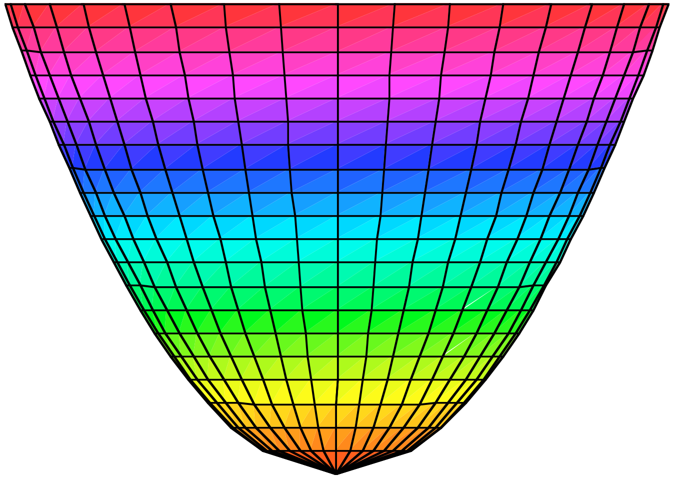


„Meridiane“:
Parabeln

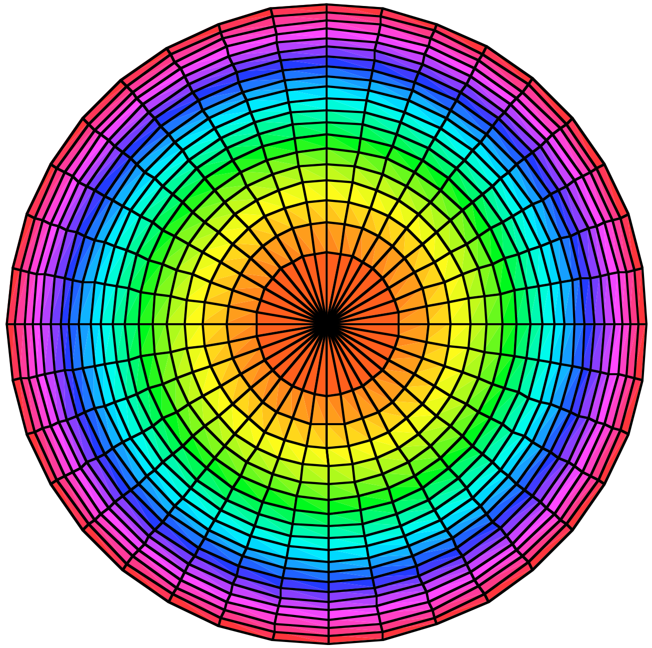
„Breitenkreise“:
Niveaulinien

Rotationsparaboloid
in Ansicht

Beispiel: $f(x,y) = x^2 + y^2$



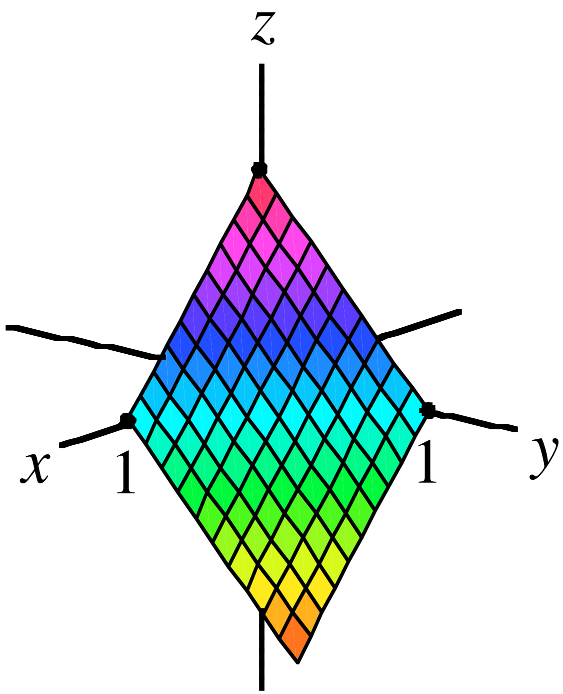
Von vorne



Von oben

$f(x,y) = 1 - x - y$

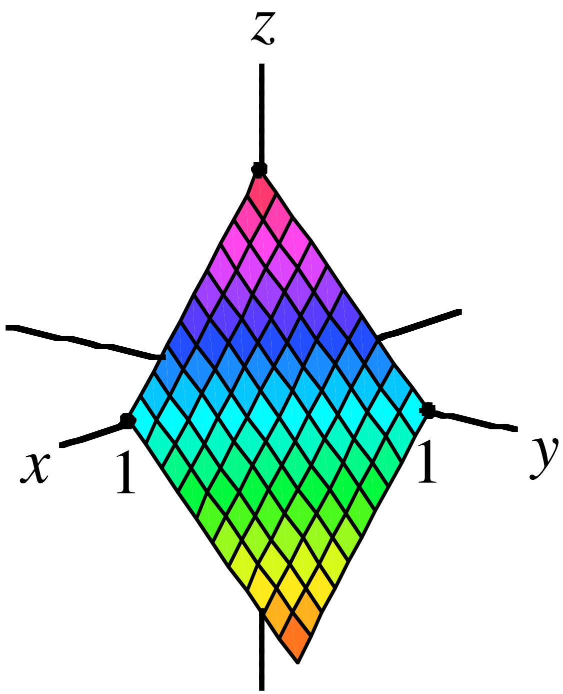
Lineare Funktion in x und y



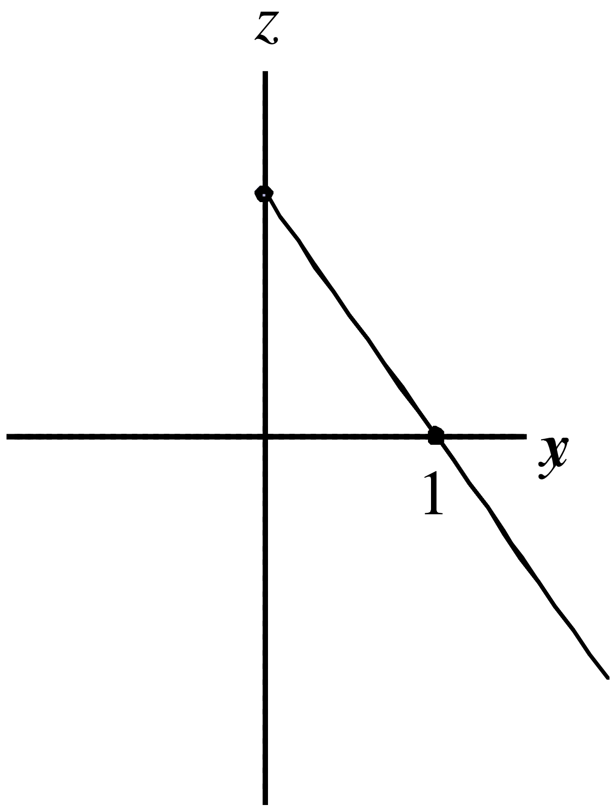
Ansicht

$f(x,y) = 1 - x - y$

Lineare Funktion in x und y



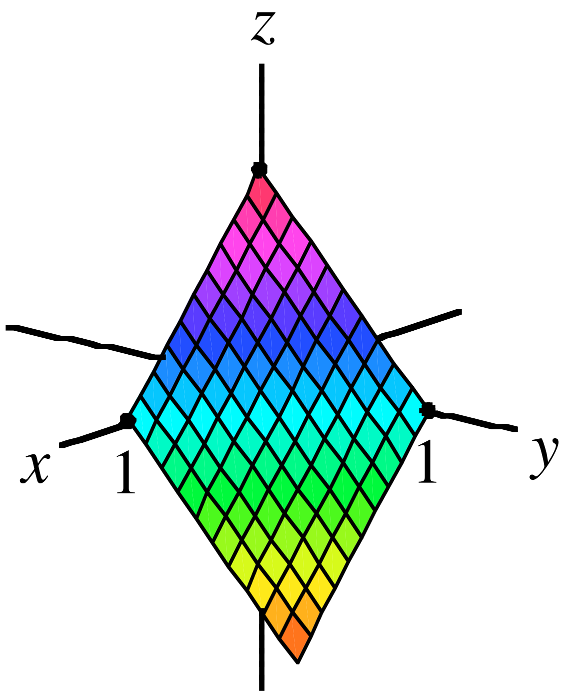
Ansicht



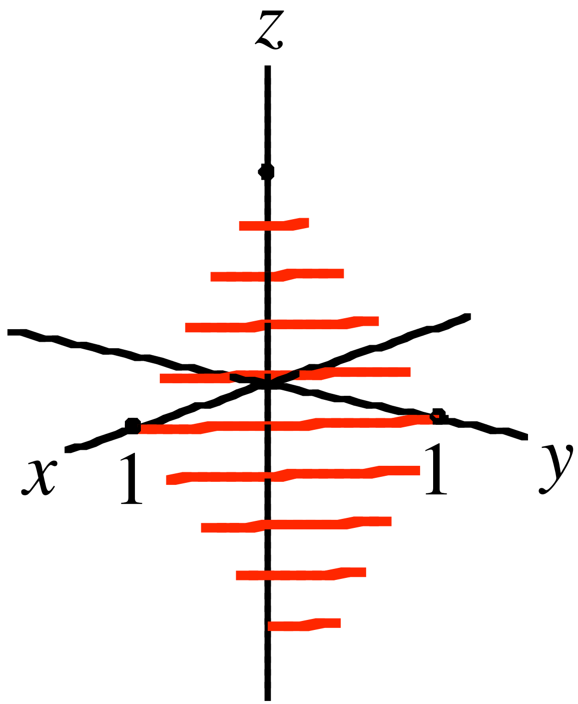
Da siehste nicht viel

$$f(x,y) = 1 - x - y$$

Lineare Funktion in x und y



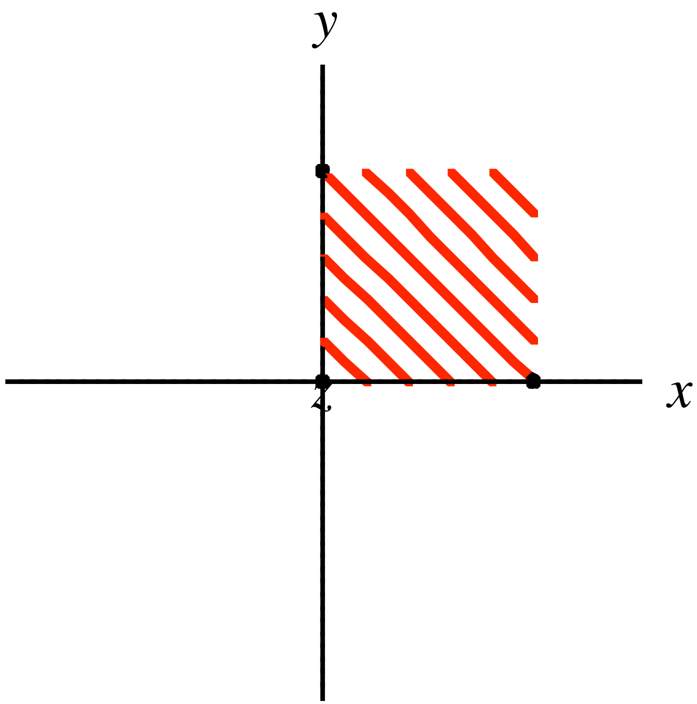
Ansicht

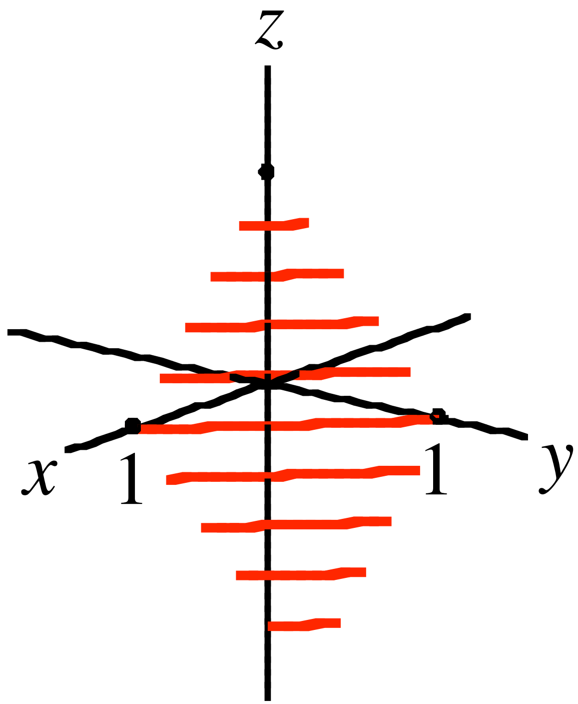


Niveaulinien
in Ansicht

$f(x,y) = 1 - x - y$

Lineare Funktion in x und y

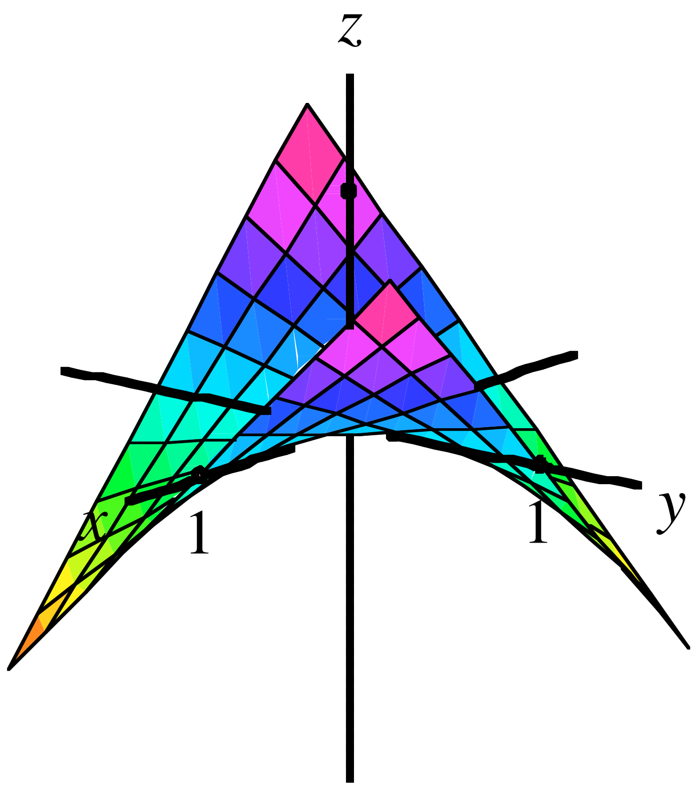




Niveaulinien

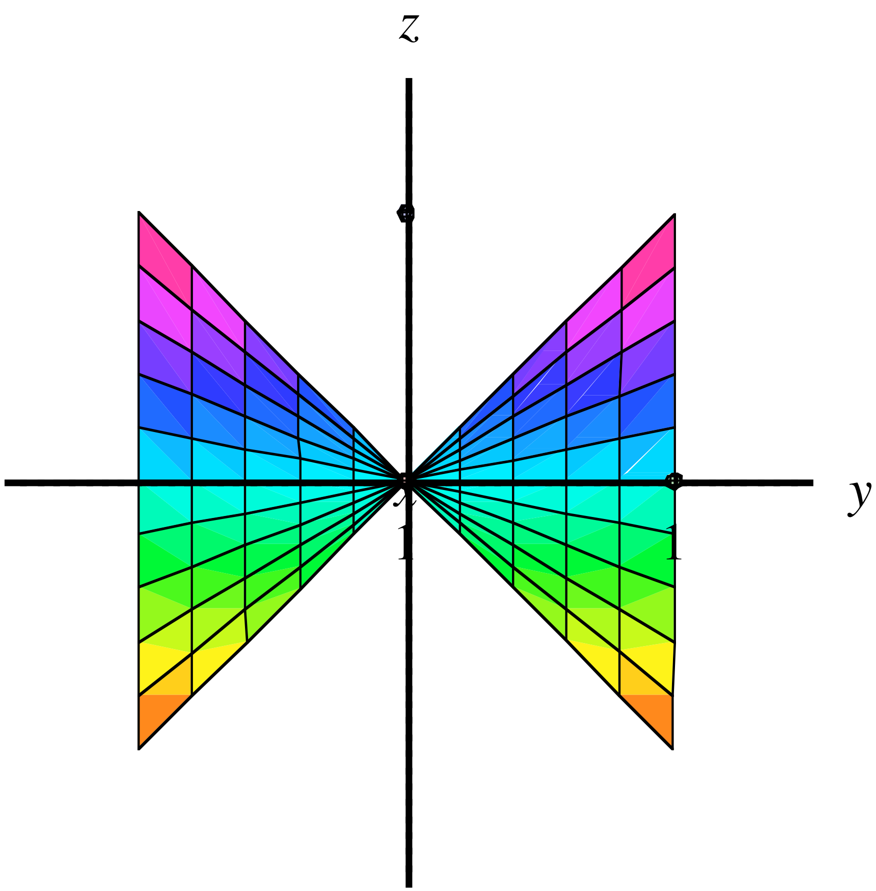
Niveaulinien
in Ansicht

$$f(x,y) = xy$$



Sattelfläche

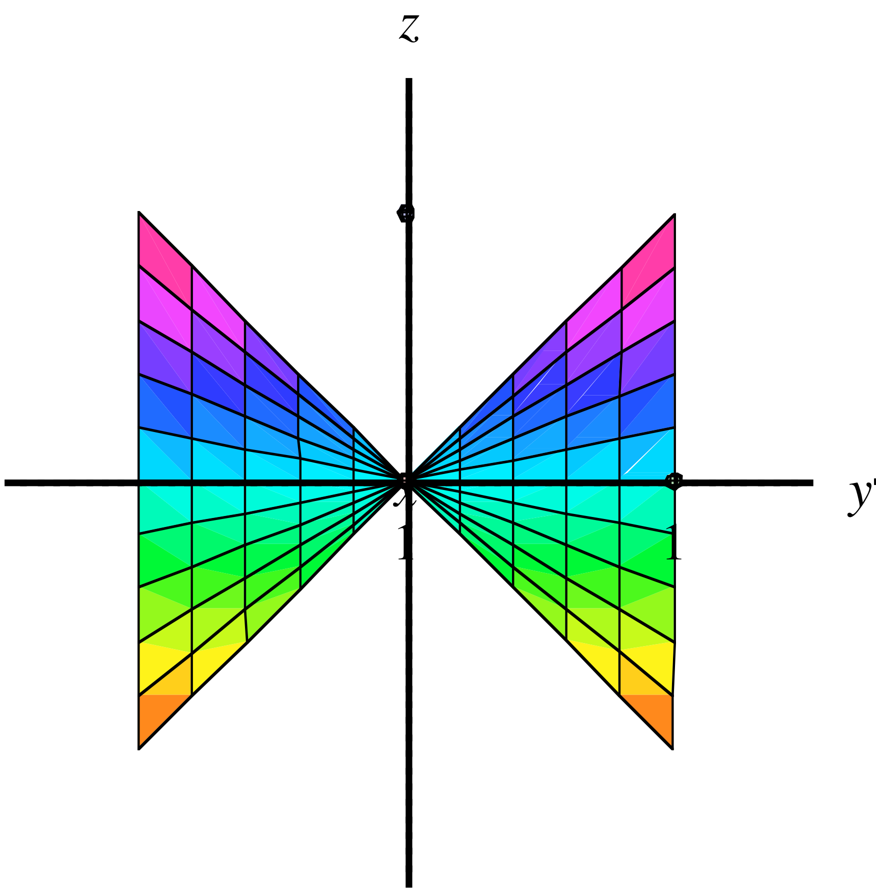
$$f(x,y) = xy$$



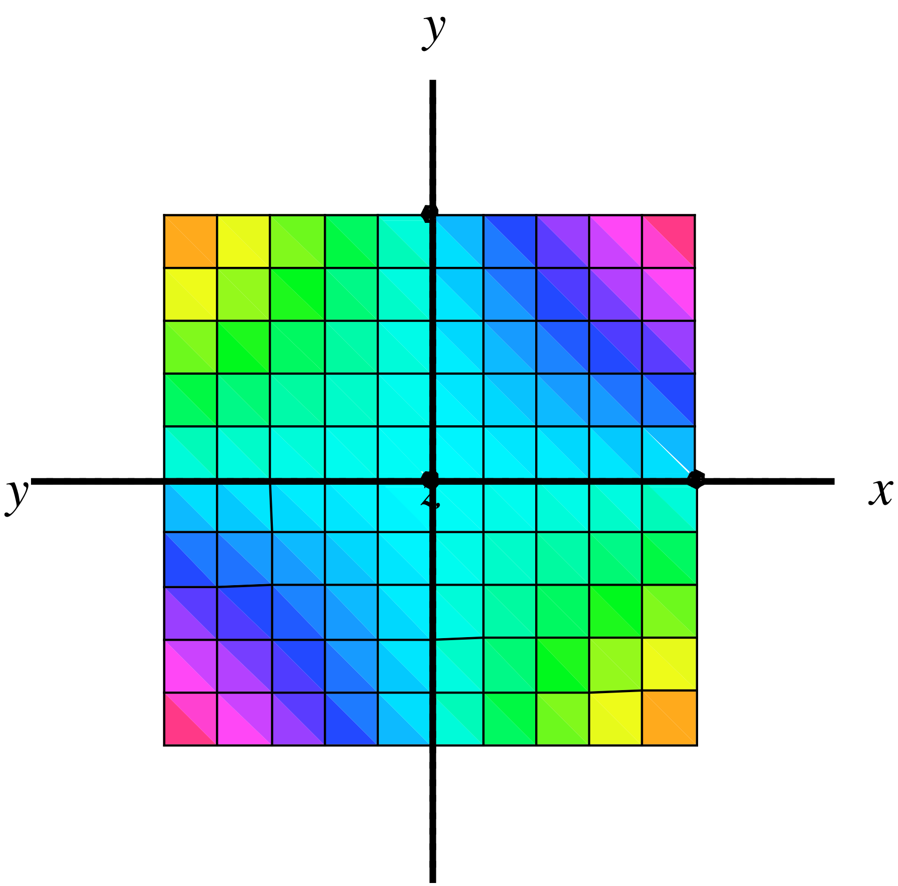
Von vorne

Problem der Tiefenwirkung

$$f(x,y) = xy$$

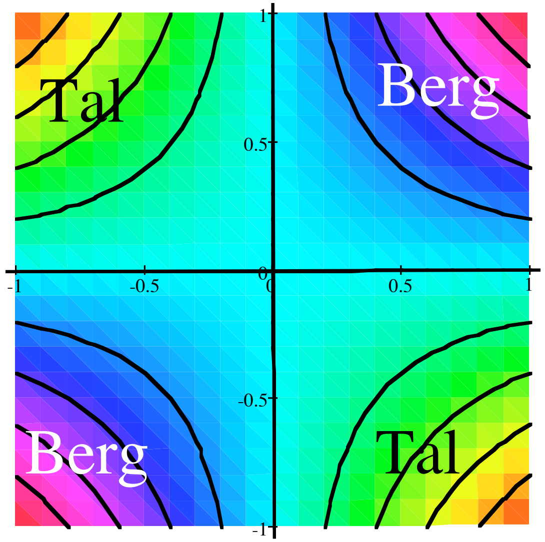


Von vorne

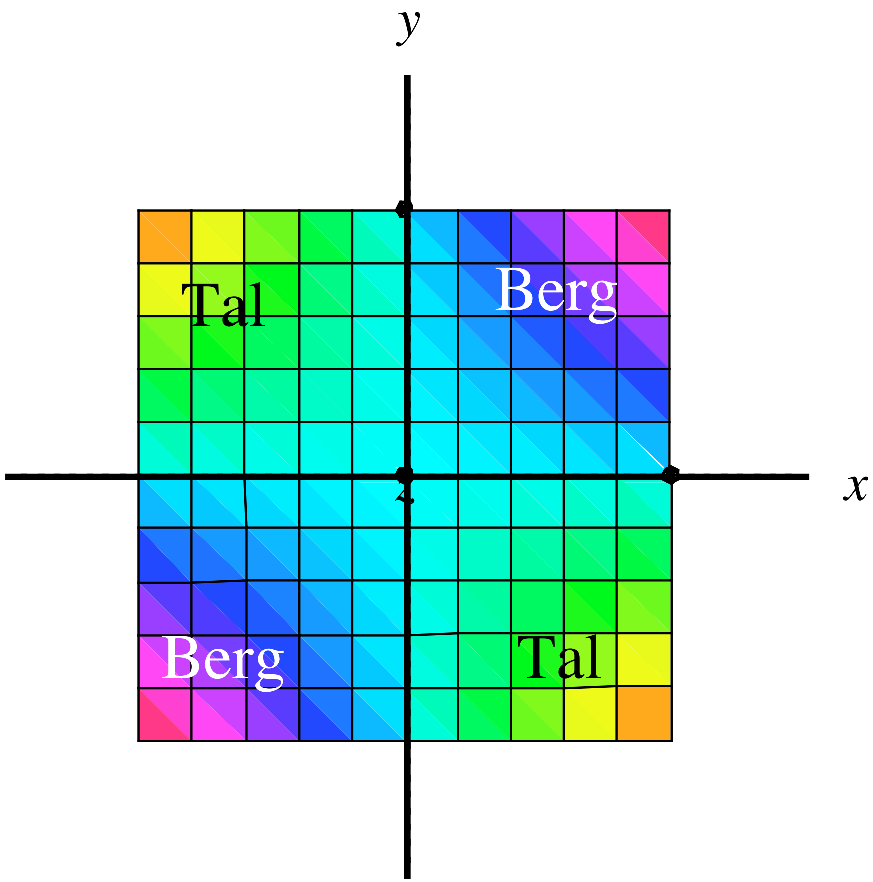


Von oben

$$f(x,y) = xy$$

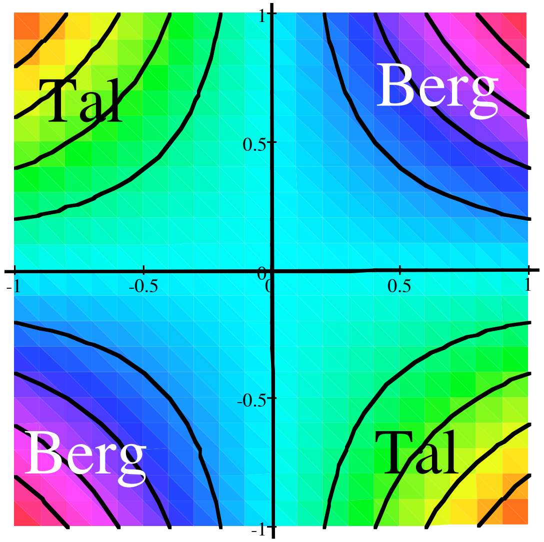


Niveaulinien



Von oben

$$f(x,y) = xy$$



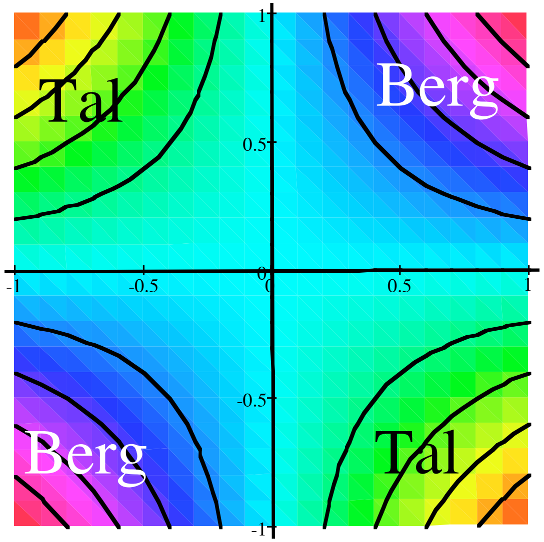
Niveaulinien

Niveau c:

$$f(x,y) = xy = c$$

$$y = \frac{c}{x} \quad \text{Hyperbeln}$$

$$f(x,y) = xy$$



Niveaulinien

Niveau c:

$$f(x,y) = xy = c$$

$$y = \frac{c}{x} \quad \text{Hyperbeln}$$

Niveau Null:

$$f(x,y) = xy = 0$$

$$x = 0 \quad \text{oder} \quad y = 0$$

Achsen

$$f(x, y) = x^3 - 3xy^2$$

$$f(x,y) = x^3 - 3xy^2$$

Wo ist das Niveau Null?

$$f(x,y) = x^3 - 3xy^2$$

Wo ist das Niveau Null?

$$x^3 - 3xy^2 = 0$$

$$f(x,y) = x^3 - 3xy^2$$

Wo ist das Niveau Null?

$$x^3 - 3xy^2 = 0$$

$$x\left(x^2 - 3y^2\right) = 0$$

$$f\left(x,y\right)=x^3-3xy^2$$

Wo ist das Niveau Null?

$$x^3-3xy^2=0$$
$$x\left(x^2-3y^2\right)=0$$

Erste Lösung: $x=0$ (y-Achse)

$$f(x,y) = x^3 - 3xy^2$$

Wo ist das Niveau Null?

$$x^3 - 3xy^2 = 0$$

$$x\left(x^2 - 3y^2\right) = 0$$

Erste Lösung: $x = 0$ (y-Achse)

Weitere Lösungen:

$$x^2 - 3y^2 = 0$$

$$f(x,y) = x^3 - 3xy^2$$

Wo ist das Niveau Null?

$$x^3 - 3xy^2 = 0$$

$$x\left(x^2 - 3y^2\right) = 0$$

Erste Lösung: $x = 0$ (y-Achse)

Weitere Lösungen:

$$x^2 - 3y^2 = 0$$

$$y^2 = \tfrac{1}{3}x^2$$

$$f\left(x,y\right)=x^3-3xy^2$$

Wo ist das Niveau Null?

$$x^3-3xy^2=0$$

$$x\left(x^2-3y^2\right)=0$$

Erste Lösung: $x=0$ (y-Achse)

Weitere Lösungen:

$$x^2-3y^2=0$$

$$y^2=\tfrac{1}{3}x^2$$

$$y=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}x$$

$$f(x,y) = x^3 - 3xy^2$$

Wo ist das Niveau Null?

$$x^3 - 3xy^2 = 0$$

$$x\left(x^2 - 3y^2\right) = 0$$

Erste Lösung: $x = 0$ (y-Achse)

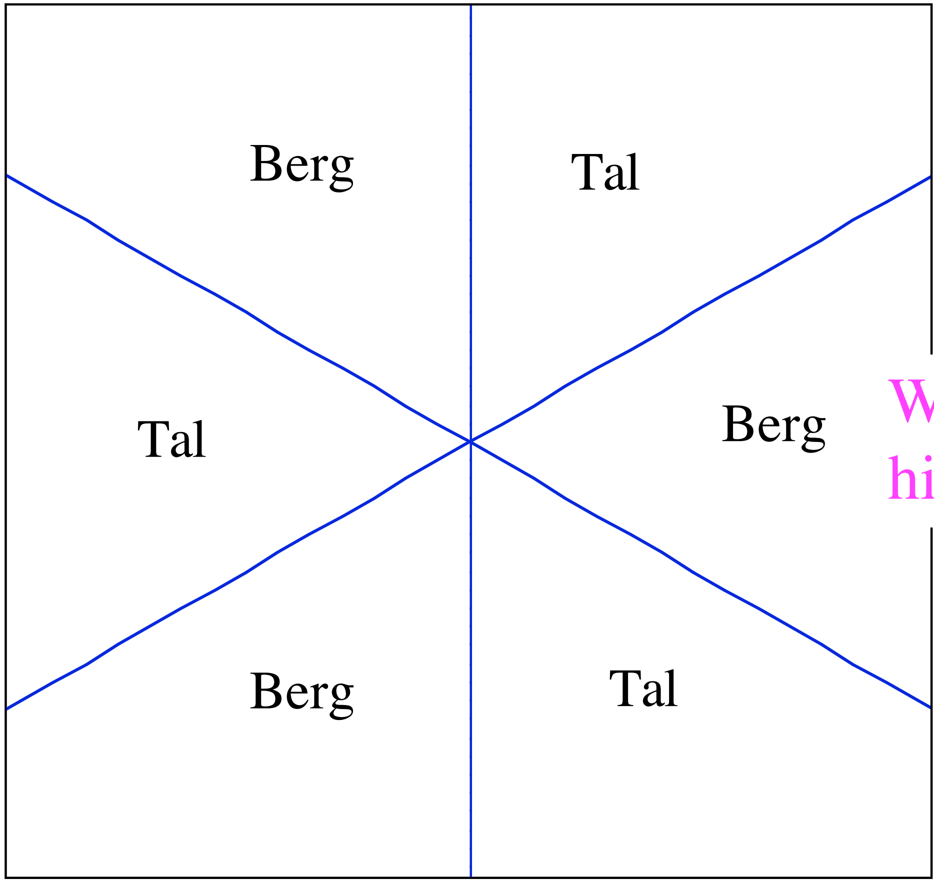
Weitere Lösungen:

$$x^2 - 3y^2 = 0$$

$$y^2 = \frac{1}{3}x^2$$

$y = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}x$ Geraden mit Steigung $\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$

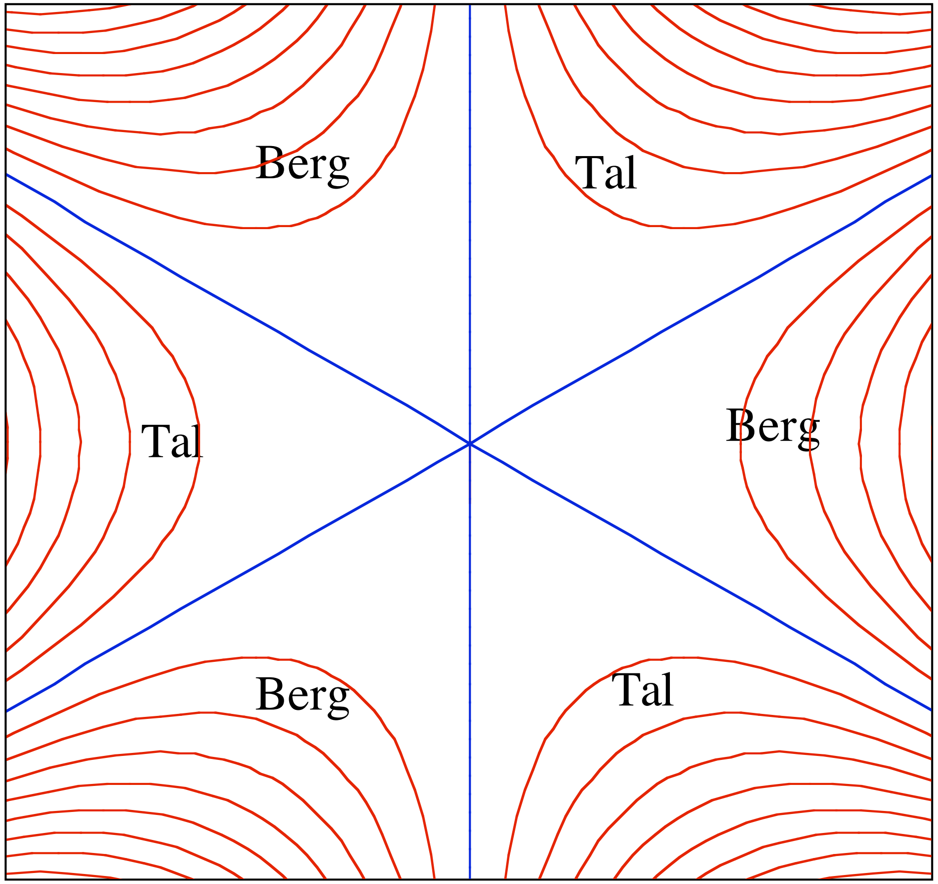
$$f(x,y) = x^3 - 3xy^2$$



Warum ist hier ein Berg?

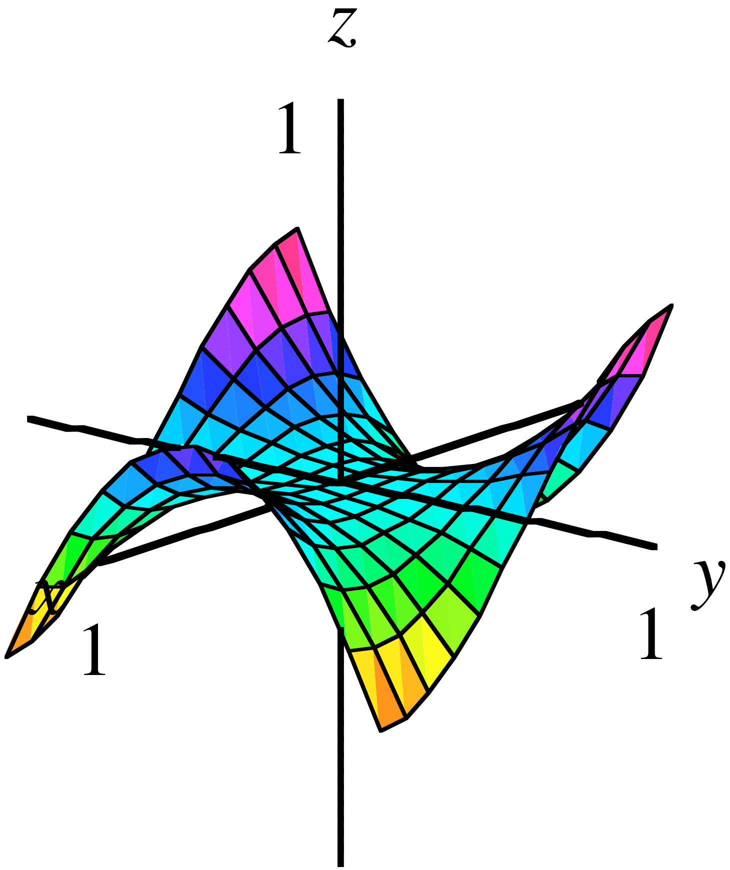
Nullniveaus

$$f(x,y) = x^3 - 3xy^2$$



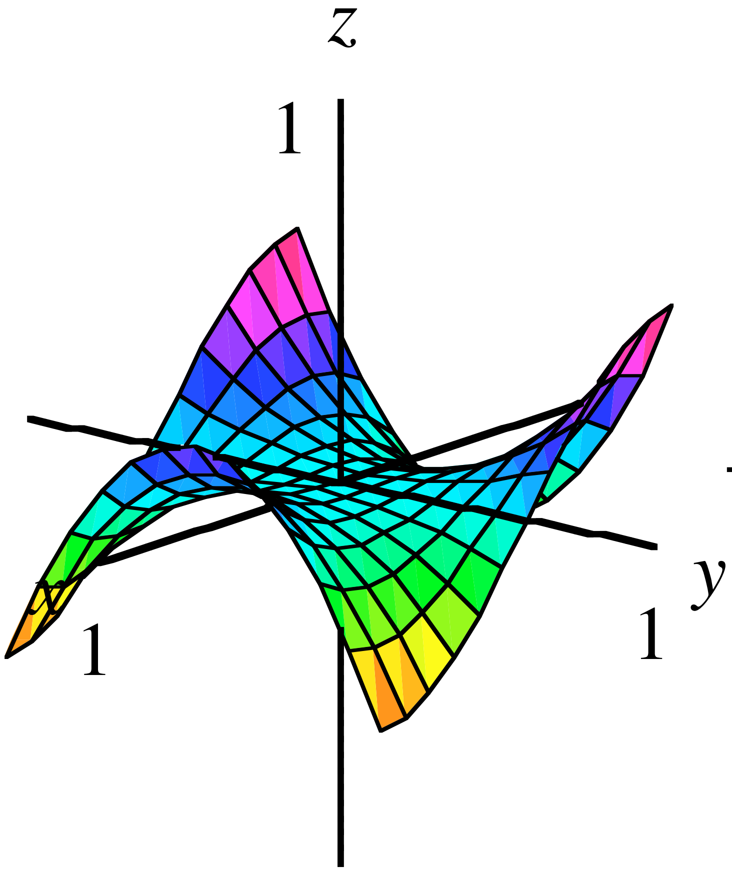
Niveaulinien

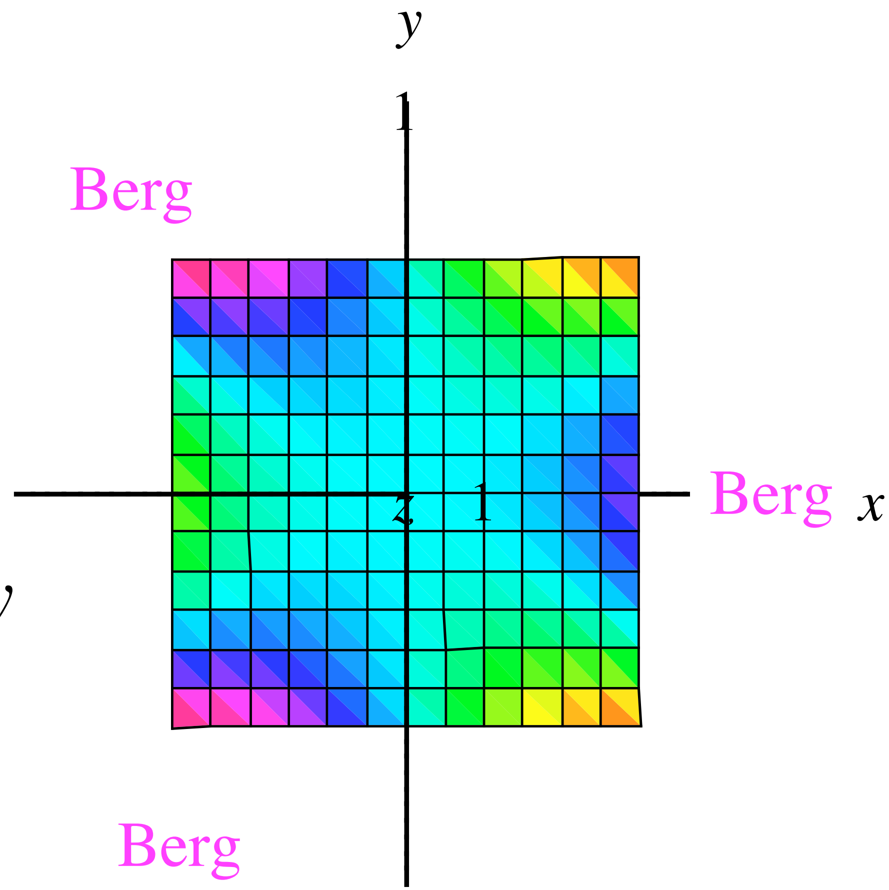
$$f(x,y) = x^3 - 3xy^2$$



Affensattel

$$f(x,y)=x^3-3xy^2$$

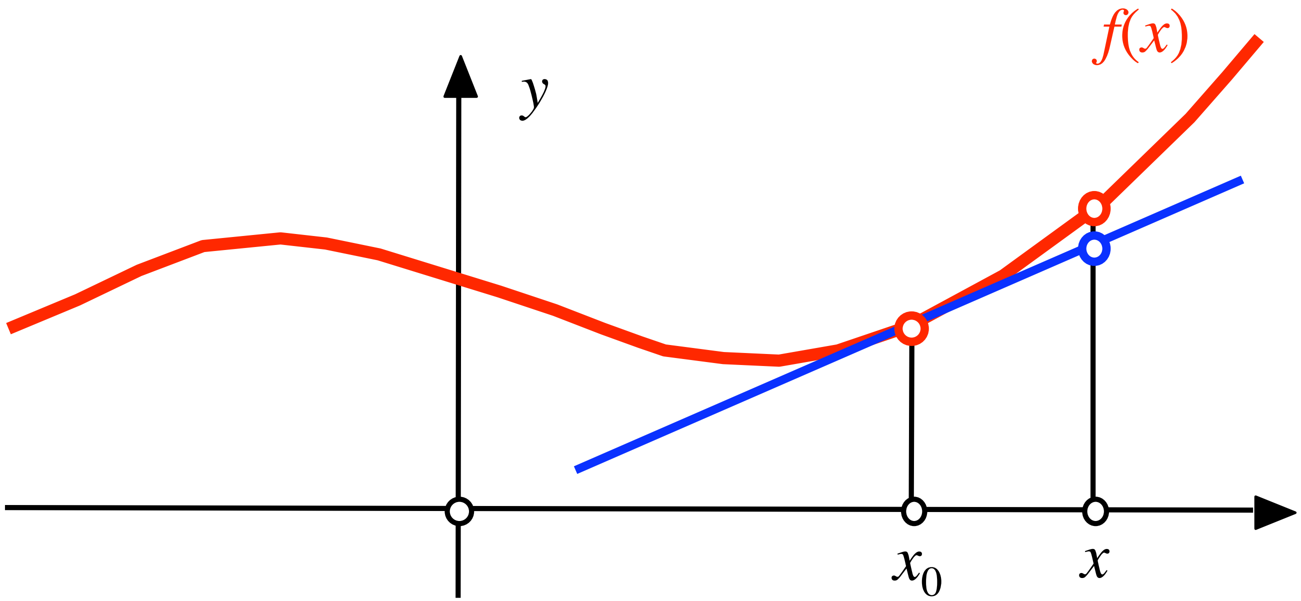




Ableitung bei mehreren Variablen. Partielle Ableitungen

Lokale Linearisierung bei einer Variablen

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$



Analog:

$$f(x,y) \approx f(x_0,y_0) + \underset{\substack{\uparrow \\ ?}}{a}(x - x_0) + \underset{\substack{\uparrow \\ ?}}{b}(y - y_0)$$

Analog:

$$f(x,y) \approx f(x_0,y_0) + \underset{?}{\underset{\uparrow}{a}}(x-x_0) + \underset{?}{\underset{\uparrow}{b}}(y-y_0)$$

Trick: $y = y_0$ setzen und einfrieren

Analog:

$$f(x,y) \approx f(x_0,y_0) + \underset{\substack{\uparrow \\ ?}}{a}(x-x_0) + \underset{\substack{\uparrow \\ ?}}{b}(y-y_0)$$

Trick: $y = y_0$ setzen und einfrieren

$$f(x,y_0) \approx f(x_0,y_0) + a(x-x_0) + \cancel{b\underbrace{(y_0-y_0)}_{0}}$$

Analog:

$$f(x,y) \approx f(x_0,y_0) + \underset{?}{\underset{\uparrow}{a}}(x-x_0) + \underset{?}{\underset{\uparrow}{b}}(y-y_0)$$

Trick: $y = y_0$ setzen und einfrieren

$$f(x,y_0) \approx f(x_0,y_0) + a(x-x_0) + \cancel{b\underbrace{(y_0-y_0)}_{0}}$$

Hängt nur von x ab

Analog:

$$f(x,y) \approx f(x_0,y_0) + \underset{\overset{\uparrow}{?}}{a}(x-x_0) + \underset{\overset{\uparrow}{?}}{b}(y-y_0)$$

Trick: $y = y_0$ setzen und einfrieren

$$f(x,y_0) \approx f(x_0,y_0) + a(x-x_0) + \cancel{b\underbrace{(y_0-y_0)}_{0}}$$

Hängt nur von x ab

$a =$ Ableitung von $f(x,y_0)$ bezüglich x an der Stelle (x_0,y_0)

Analog:

$$f(x,y) \approx f(x_0,y_0) + \underset{?}{\underset{\uparrow}{a}}(x-x_0) + \underset{?}{\underset{\uparrow}{b}}(y-y_0)$$

Trick: $y = y_0$ setzen und einfrieren

$$f(x,y_0) \approx f(x_0,y_0) + a(x-x_0) + \cancel{b\underbrace{(y_0-y_0)}_{0}}$$

Hängt nur von x ab

$a =$ Ableitung von $f(x,y_0)$ bezüglich x an der Stelle (x_0,y_0)

$$a = f_x(x_0,y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x,y_0) - f(x_0,y_0)}{x - x_0}$$

Partielle Ableitung nach x:

$$f_x(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0}$$

Ableitung in x-Richtung

Steigung einer x-Linie

Partielle Ableitung nach x:

$$f_x\left(x_0, y_0\right) = \frac{\partial f}{\partial x}\left(x_0, y_0\right) = \lim_{x \to x_0} \frac{f\left(x, y_0\right) - f\left(x_0, y_0\right)}{x - x_0}$$

Schreibweise Newton

Schreibweise Leibniz

Partielle Ableitung nach x:

$$f_x(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0}$$

Ableitung in x-Richtung

Steigung einer x-Linie

Partielle Ableitung nach y:

$$f_y(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \lim_{y \to y_0} \frac{f(x_0, y) - f(x_0, y_0)}{y - y_0}$$

Ableitung in y-Richtung

Steigung einer y-Linie

Beispiel: $f(x,y) = x^2 + y^2$

$$f_x(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x$$

$$f_y(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y$$

$$f(x,y) \approx f(x_0,y_0) + 2x_0(x - x_0) + 2y_0(y - y_0)$$

Beispiel: $f(x,y) = x^2 + y^2 \qquad f(3.02,\, 7.1) = ?$

Beispiel: $f(x,y) = x^2 + y^2$ $f(3.02, 7.1) = ?$

Exakt

$$f(3.02, 7.1) = 3.02^2 + 7.1^2 = 59.5304$$

Beispiel: $f(x,y) = x^2 + y^2 \qquad f(3.02, 7.1) = ?$

Exakt

$$f(3.02, 7.1) = 3.02^2 + 7.1^2 = 59.5304$$

Approximativ

$$f(x,y) \approx f(x_0, y_0) + 2x_0(x - x_0) + 2y_0(y - y_0)$$

Beispiel: $f(x,y) = x^2 + y^2 \qquad f(3.02, 7.1) = ?$

Exakt

$$f(3.02, 7.1) = 3.02^2 + 7.1^2 = 59.5304$$

Approximativ

$$f(x,y) \approx f(x_0, y_0) + 2x_0(x - x_0) + 2y_0(y - y_0)$$

$$f(3.02, 7.1) \approx 3^2 + 7^2 + 2 \cdot 3 \cdot 0.02 + 2 \cdot 7 \cdot 0.1$$

Beispiel: $f(x,y) = x^2 + y^2 \qquad f(3.02, 7.1) = ?$

Exakt

$$f(3.02, 7.1) = 3.02^2 + 7.1^2 = 59.5304$$

Approximativ

$$f(x,y) \approx f(x_0, y_0) + 2x_0(x - x_0) + 2y_0(y - y_0)$$

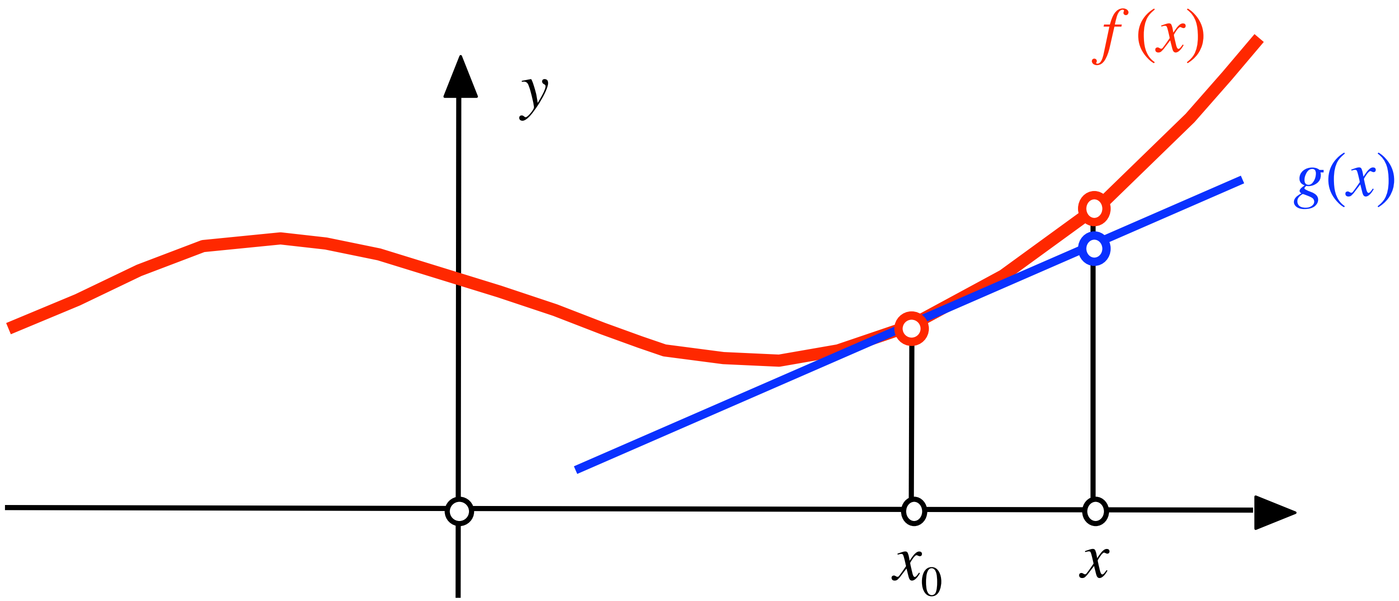
$$\begin{aligned} f(3.02, 7.1) &\approx 3^2 + 7^2 + 2 \cdot 3 \cdot 0.02 + 2 \cdot 7 \cdot 0.1 \\ &= 9 + 49 + 0.12 + 1.4 = 59.52 \end{aligned}$$

Tangentialebene

Erinnerung :

Tangente an Funktionskurve

$$g(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$



Erinnerung :

Tangente an Funktionskurve

$$g(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

Analogie: Tangentialebene

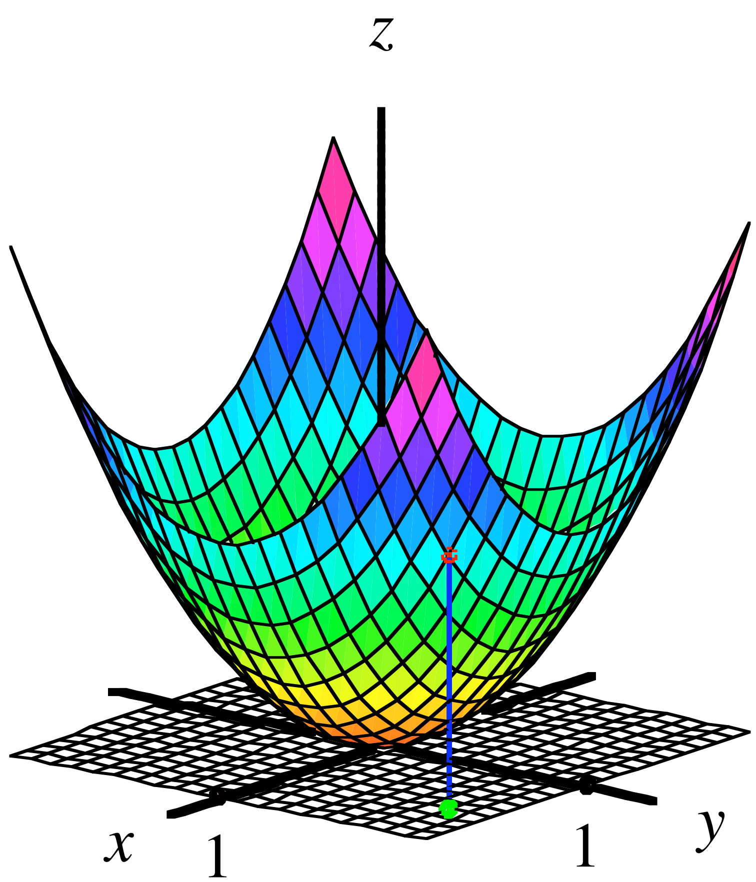
$$g(x,y) = f(x_0,y_0) + f_x(x_0,y_0)(x - x_0) + f_y(x_0,y_0)(y - y_0)$$

$f(x,y) = x^2 + y^2$

Tangentialebene an der Stelle (0.6,0.8)

$$f(x,y) = x^2 + y^2$$

Tangentialebene an der Stelle (0.6,0.8)



$f(x,y) = x^2 + y^2$

Tangentialebene an der Stelle (0.6,0.8)

$$g(x,y) = f(x_0,y_0) + f_x(x_0,y_0)(x - x_0) + f_y(x_0,y_0)(y - y_0)$$

$$f(x,y)=x^2+y^2$$

Tangentialebene an der Stelle (0.6,0.8)

$$g(x,y)=f(x_0,y_0)+f_x(x_0,y_0)(x-x_0)+f_y(x_0,y_0)(y-y_0)$$

$$g(x,y)=\underbrace{f(0.6,0.8)}_{0.36+0.64=1}+2\cdot 0.6(x-0.6)+2\cdot 0.8(y-0.8)$$

$$f(x,y) = x^2 + y^2$$

Tangentialebene an der Stelle (0.6,0.8)

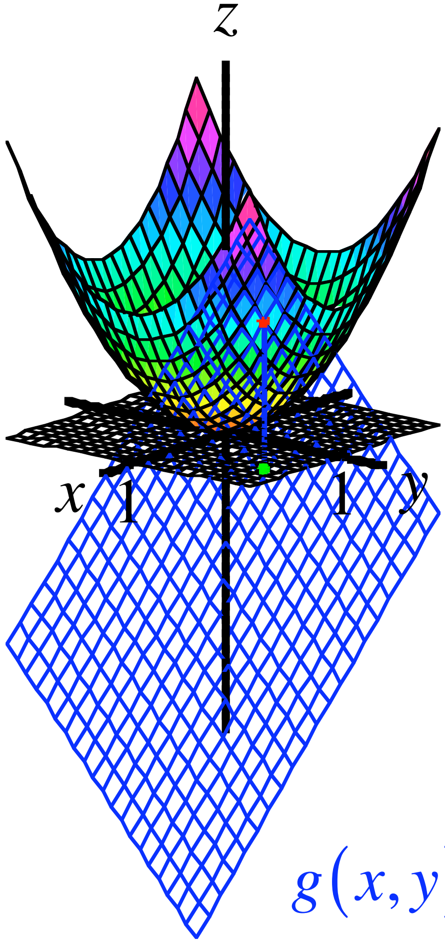
$$g(x,y) = f(x_0,y_0) + f_x(x_0,y_0)(x - x_0) + f_y(x_0,y_0)(y - y_0)$$

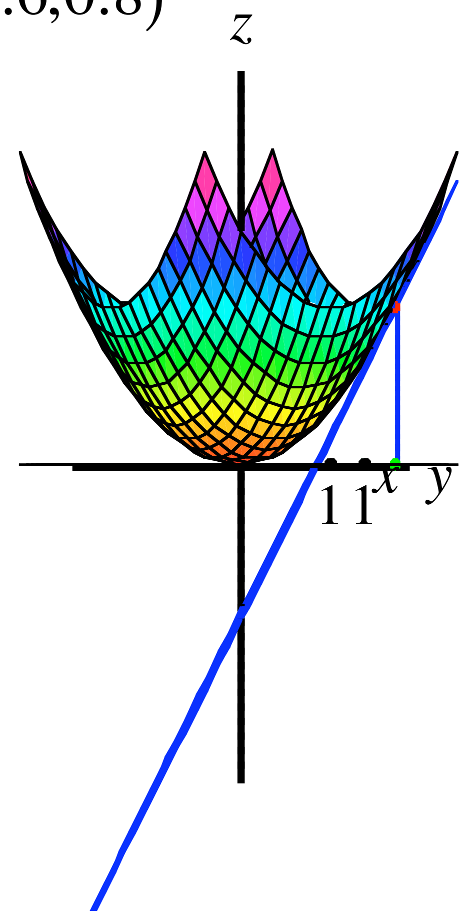
$$g(x,y) = \underbrace{f(0.6,0.8)}_{0.36+0.64=1} + 2 \cdot 0.6(x - 0.6) + 2 \cdot 0.8(y - 0.8)$$

$$g(x,y) = 1 + 1.2x - 0.72 + 1.6y - 1.28 = -1 + 1.2x + 1.6y$$

$$f(x,y) = x^2 + y^2$$

Tangentialebene an der Stelle (0.6,0.8)





$$g(x,y) = -1 + 1.2x + 1.6y$$

Höhere partielle Ableitungen

$$f_{xx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$$

$$f_{xy} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$$

$$f_{yy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

$$f(x,y)=x^4y^7$$

$$f(x,y) = x^4 y^7$$

$$f_x(x,y) = 4x^3 y^7$$

$$f(x,y) = x^4 y^7$$

$$f_x(x,y) = 4x^3 y^7 \qquad f_y(x,y) = 7x^4 y^6$$

$$f(x,y) = x^4 y^7$$

$$f_x(x,y) = 4x^3 y^7 \qquad f_y(x,y) = 7x^4 y^6$$

$$f_{xx}(x,y) = 12x^2 y^7$$

$$f(x,y) = x^4 y^7$$

$$f_x(x,y) = 4x^3 y^7 \qquad f_y(x,y) = 7x^4 y^6$$

$$f_{xx}(x,y) = 12x^2 y^7 \qquad f_{xy}(x,y) = 28x^3 y^6$$

$$f(x,y) = x^4 y^7$$

$$f_x(x,y) = 4x^3 y^7 \qquad f_y(x,y) = 7x^4 y^6$$

$$f_{xx}(x,y) = 12x^2 y^7 \qquad f_{xy}(x,y) = 28x^3 y^6$$

$$
\begin{tikzcd}
& & f(x,y)=x^4y^7 \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
& f_x(x,y)=4x^3y^7 \arrow[dl] \arrow[dr] & & f_y(x,y)=7x^4y^6 \arrow[dl] \\
f_{xx}(x,y)=12x^2y^7 & & f_{xy}(x,y)=28x^3y^6 &
\end{tikzcd}
$$

$$f_{xy} = f_{yx}$$

$$f(x,y) = x^4 y^7$$

$$f_x(x,y) = 4x^3 y^7 \qquad f_y(x,y) = 7x^4 y^6$$

$$f_{xx}(x,y) = 12x^2 y^7 \qquad f_{xy}(x,y) = 28x^3 y^6 \qquad f_{yy}(x,y) = 42x^4 y^5$$

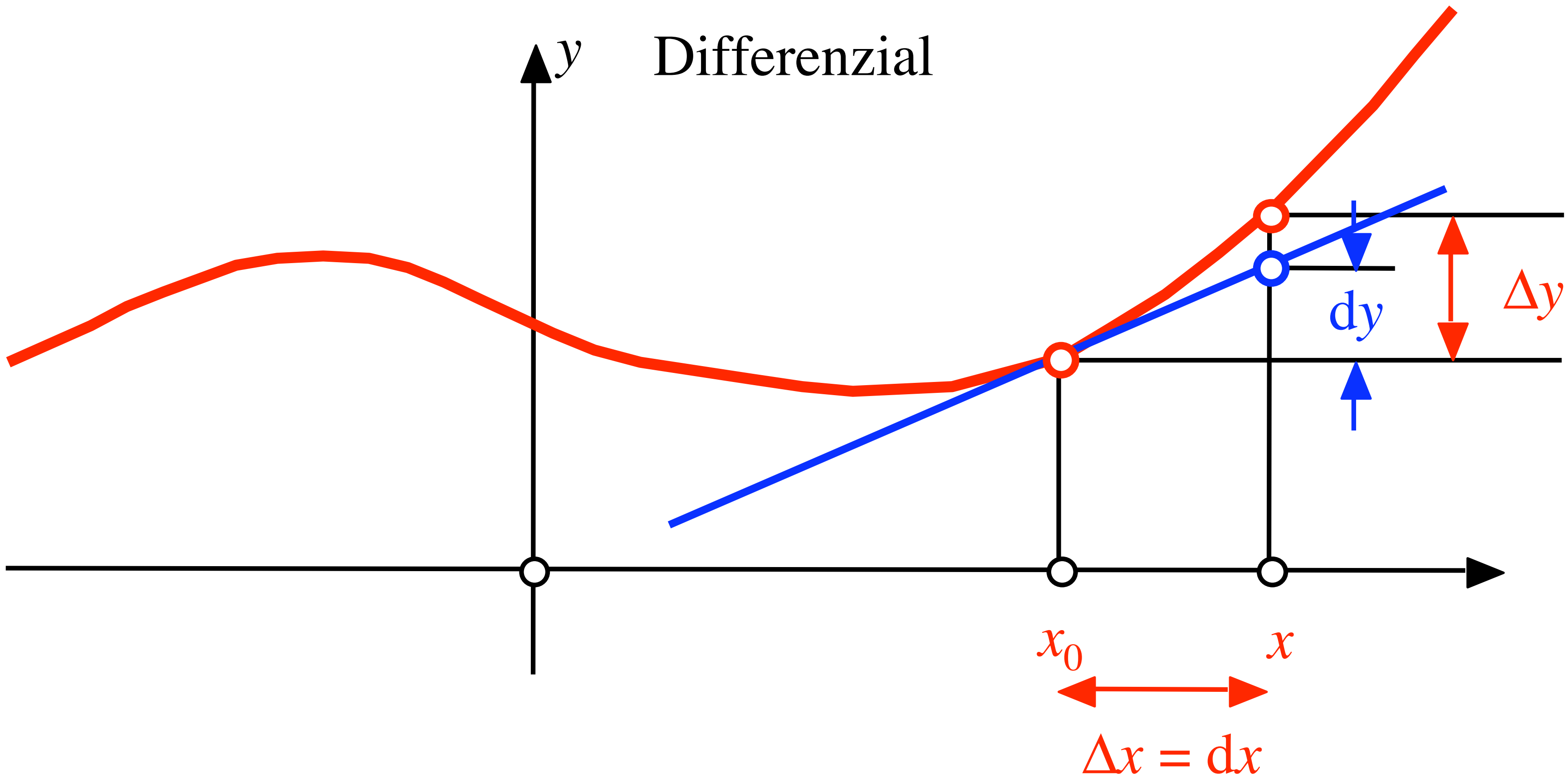
$$f_{xy} = f_{yx}$$

$$f(x,y) = x^4 y^7$$

$$f_x(x,y) = 4x^3 y^7 \quad f_y(x,y) = 7x^4 y^6$$

$$f_{xx}(x,y) = 12x^2 y^7 \quad f_{xy}(x,y) = 28x^3 y^6 \quad f_{yy}(x,y) = 42x^4 y^5$$

$$f_{xxx}(x,y) = 24xy^7 \quad f_{xxy}(x,y) = 84x^2 y^6 \quad f_{xyy}(x,y) = 168x^3 y^5 \quad f_{yyy}(x,y) = 210x^4 y^4$$



Echte Abweichung: $\Delta y \approx f'(x_0)\,\mathrm{d}x$

Differenzial: $\mathrm{d}y = f'(x_0)\,\mathrm{d}x$

Differenzial: $\mathrm{d}y = f'\left(x_0\right) \mathrm{d}x$

Übergang zur Kettenregel: $y = f\left(x\left(t\right)\right)$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = f'\left(x\left(t\right)\right) \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$$

Analogie, Kettenregel

$$\Delta f = f(x,y) - f(x_0,y_0) = f_x(x_0,y_0)\underbrace{(x-x_0)}_{\mathrm{d}x \text{ oder } \Delta x} + f_y(x_0,y_0)\underbrace{(y-y_0)}_{\mathrm{d}y \text{ oder } \Delta y} + \underbrace{r(x,y)}_{\text{Rest}}$$

Analogie, Kettenregel

$$\Delta f = f(x,y) - f(x_0,y_0) = f_x(x_0,y_0)\underbrace{(x-x_0)}_{\mathrm{d}x \text{ oder } \Delta x} + f_y(x_0,y_0)\underbrace{(y-y_0)}_{\mathrm{d}y \text{ oder } \Delta y} + \underbrace{r(x,y)}_{\text{Rest}}$$

Tangentialebene

$$g(x,y) = f(x_0,y_0) + f_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)(y-y_0)$$

Analogie, Kettenregel

$$\Delta f = f(x,y) - f(x_0,y_0) = f_x(x_0,y_0)\underbrace{(x-x_0)}_{\mathrm{d}x \text{ oder } \Delta x} + f_y(x_0,y_0)\underbrace{(y-y_0)}_{\mathrm{d}y \text{ oder } \Delta y} + \underbrace{r(x,y)}_{\text{Rest}}$$

Echte Abweichung: $\Delta f \approx f_x \,\mathrm{d}x + f_y \,\mathrm{d}y$

Differenzial: $\mathrm{d}f = f_x \,\mathrm{d}x + f_y \,\mathrm{d}y$

Analogie, Kettenregel

$$\Delta f = f(x,y) - f(x_0,y_0) = f_x(x_0,y_0)\underbrace{(x-x_0)}_{\mathrm{d}x \text{ oder } \Delta x} + f_y(x_0,y_0)\underbrace{(y-y_0)}_{\mathrm{d}y \text{ oder } \Delta y} + \underbrace{r(x,y)}_{\text{Rest}}$$

Echte Abweichung: $\Delta f \approx f_x \,\mathrm{d}x + f_y \,\mathrm{d}y$

Differenzial: $\mathrm{d}f = f_x \,\mathrm{d}x + f_y \,\mathrm{d}y$

Übergang zu Kettenregel: $f\big(x(t), y(t)\big)$

Analogie, Kettenregel

$$\Delta f = f(x,y) - f(x_0,y_0) = f_x(x_0,y_0)\underbrace{(x-x_0)}_{\mathrm{d}x \text{ oder } \Delta x} + f_y(x_0,y_0)\underbrace{(y-y_0)}_{\mathrm{d}y \text{ oder } \Delta y} + \underbrace{r(x,y)}_{\text{Rest}}$$

Echte Abweichung: $\Delta f \approx f_x\,\mathrm{d}x + f_y\,\mathrm{d}y$

Differenzial: $\mathrm{d}f = f_x\,\mathrm{d}x + f_y\,\mathrm{d}y$

Übergang zu Kettenregel: $f\big(x(t), y(t)\big)$

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} = f_x\,\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + f_y\,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$$

Analogie, Kettenregel

$$\Delta f = f(x,y) - f(x_0,y_0) = f_x(x_0,y_0)\underbrace{(x-x_0)}_{\mathrm{d}x \text{ oder } \Delta x} + f_y(x_0,y_0)\underbrace{(y-y_0)}_{\mathrm{d}y \text{ oder } \Delta y} + \underbrace{r(x,y)}_{\text{Rest}}$$

Echte Abweichung: $\Delta f \approx f_x \,\mathrm{d}x + f_y \,\mathrm{d}y$

Differenzial: $\mathrm{d}f = f_x \,\mathrm{d}x + f_y \,\mathrm{d}y$

Übergang zu Kettenregel: $f\big(x(t), y(t)\big)$

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} = f_x \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + f_y \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$$

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$$

Analogie, Kettenregel

$$\Delta f = f(x,y) - f(x_0,y_0) = f_x(x_0,y_0)\underbrace{(x-x_0)}_{\mathrm{d}x \text{ oder } \Delta x} + f_y(x_0,y_0)\underbrace{(y-y_0)}_{\mathrm{d}y \text{ oder } \Delta y} + \underbrace{r(x,y)}_{\text{Rest}}$$

Echte Abweichung: $\Delta f \approx f_x \,\mathrm{d}x + f_y \,\mathrm{d}y$

Differenzial: $\mathrm{d}f = f_x \,\mathrm{d}x + f_y \,\mathrm{d}y$

Übergang zu Kettenregel: $f\big(x(t), y(t)\big)$

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} &= f_x \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + f_y \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \\ \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} &= \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \end{aligned}}$$

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} = f_x \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + f_y \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}$$

Beispiel: $f(x,y) = xy^2$

$x(t) = \mathrm{e}^{3t}$ $\qquad$ $y(t) = \tan(t)$

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} = f_x \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + f_y \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}$$

Beispiel: $f(x,y) = xy^2 \quad \Rightarrow \quad f_x = y^2, \quad f_y = 2xy$

$$x(t) = \mathrm{e}^{3t} \qquad\qquad y(t) = \tan(t)$$

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} = f_x \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + f_y \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}$$

Beispiel: $f(x,y) = xy^2 \quad \Rightarrow \quad f_x = y^2, \quad f_y = 2xy$

$$x(t) = \mathrm{e}^{3t} \qquad\qquad y(t) = \tan(t)$$

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 3\mathrm{e}^{3t} \qquad\qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{(\cos(t))^2}$$

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} = f_x \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + f_y \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}$$

Beispiel: $\quad f(x,y) = xy^2 \quad \Rightarrow \quad f_x = y^2, \quad f_y = 2xy$

$$x(t) = \mathrm{e}^{3t} \qquad\qquad y(t) = \tan(t)$$

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 3\mathrm{e}^{3t} \qquad\qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{(\cos(t))^2}$$

$$f(t) = f(x(t), y(t)) = x(t)(y(t))^2 = \mathrm{e}^{3t}(\tan(t))^2$$

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} = f_x \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + f_y \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}$$

Beispiel: $\quad f(x,y) = xy^2 \quad \Rightarrow \quad f_x = y^2, \quad f_y = 2xy$

$$x(t) = \mathrm{e}^{3t} \qquad\qquad y(t) = \tan(t)$$

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 3\mathrm{e}^{3t} \qquad\qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{(\cos(t))^2}$$

$$f(t) = f(x(t), y(t)) = x(t)(y(t))^2 = \mathrm{e}^{3t}(\tan(t))^2$$

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} = f_x \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + f_y \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = (\tan(t))^2\, 3\mathrm{e}^{3t} + 2\mathrm{e}^{3t}\tan(t)\frac{1}{(\cos(t))^2}$$

$$f(t) = f\big(x(t), y(t)\big) = x(t)\big(y(t)\big)^2 = \mathrm{e}^{3t}\big(\tan(t)\big)^2$$

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} = f_x \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + f_y \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \big(\tan(t)\big)^2\, 3\mathrm{e}^{3t} + 2\mathrm{e}^{3t} \tan(t) \frac{1}{\big(\cos(t)\big)^2}$$

Direkt: $f(t) = \mathrm{e}^{3t}\big(\tan(t)\big)^2$

$$f(t) = f\big(x(t), y(t)\big) = x(t)\big(y(t)\big)^2 = \mathrm{e}^{3t}\big(\tan(t)\big)^2$$

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} = f_x \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + f_y \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \big(\tan(t)\big)^2\, 3\mathrm{e}^{3t} + 2\mathrm{e}^{3t} \tan(t) \frac{1}{\big(\cos(t)\big)^2}$$

Direkt: $f(t) = \mathrm{e}^{3t}\big(\tan(t)\big)^2$

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} = 3\mathrm{e}^{3t}\big(\tan(t)\big)^2 + \mathrm{e}^{3t}\, 2\tan(t) \frac{1}{\big(\cos(t)\big)^2}$$

Richtungsableitung

Niveaulinien

In welcher Richtung ist es am steilsten?

Niveaulinien

In welcher Richtung ist es am steilsten?
Auf der Karte?

Niveaulinien

In welcher Richtung ist es am steilsten?
Auf der Karte? — Im Gelände?

Spezielle Richtungen

$$f_x = \frac{\partial f}{\partial x} \quad \text{Ableitung in } x\text{-Richtung,}$$

Steigung einer x-Linie

$$f_y = \frac{\partial f}{\partial y} \quad \text{Ableitung in } y\text{-Richtung,}$$

Steigung einer y-Linie

Wie steil ist es schräg zu diesen Richtungen?

Spezielle Richtungen

$$f_x = \frac{\partial f}{\partial x} \quad \text{Ableitung in } x\text{-Richtung,}$$

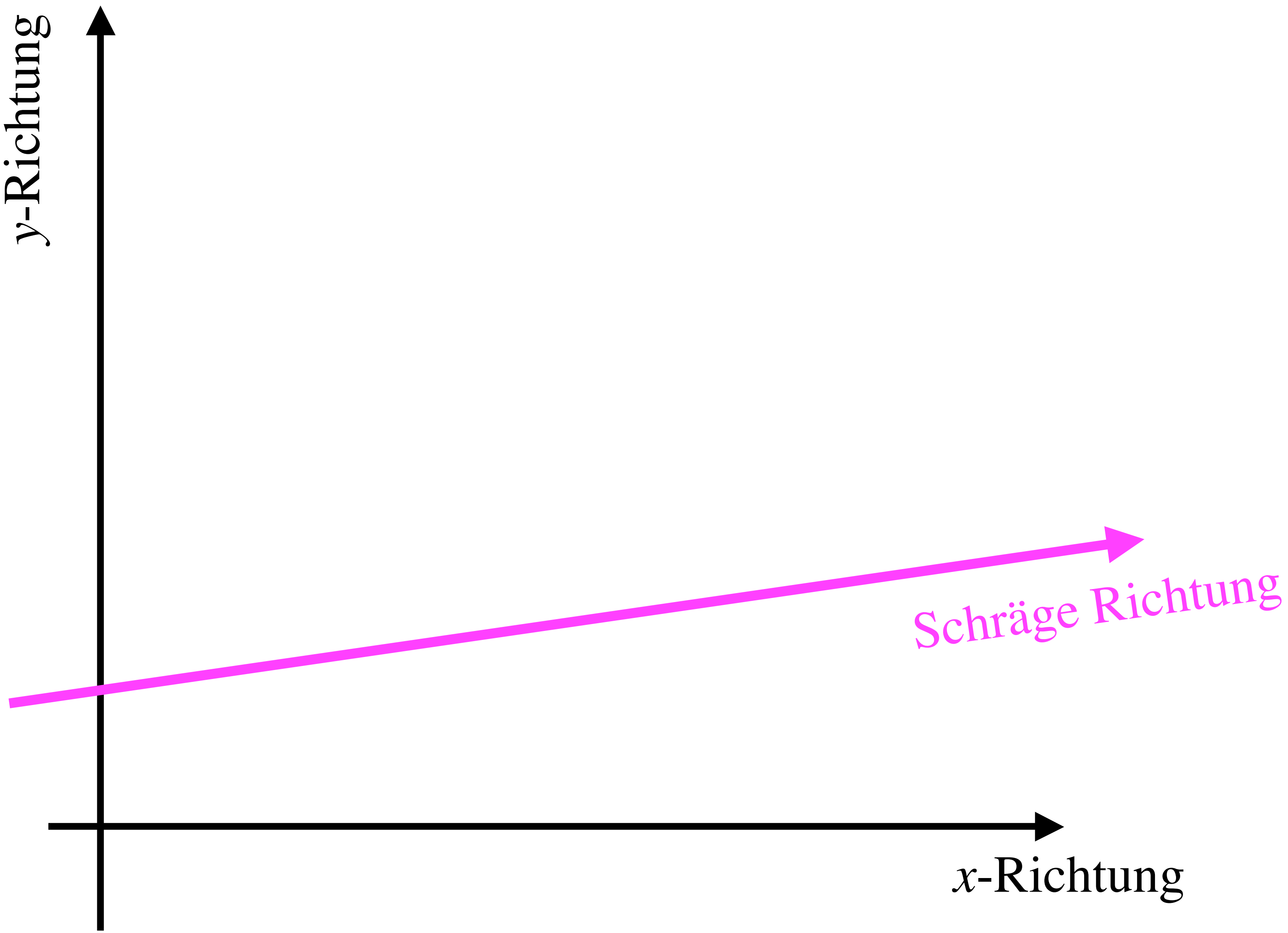
Steigung einer x-Linie

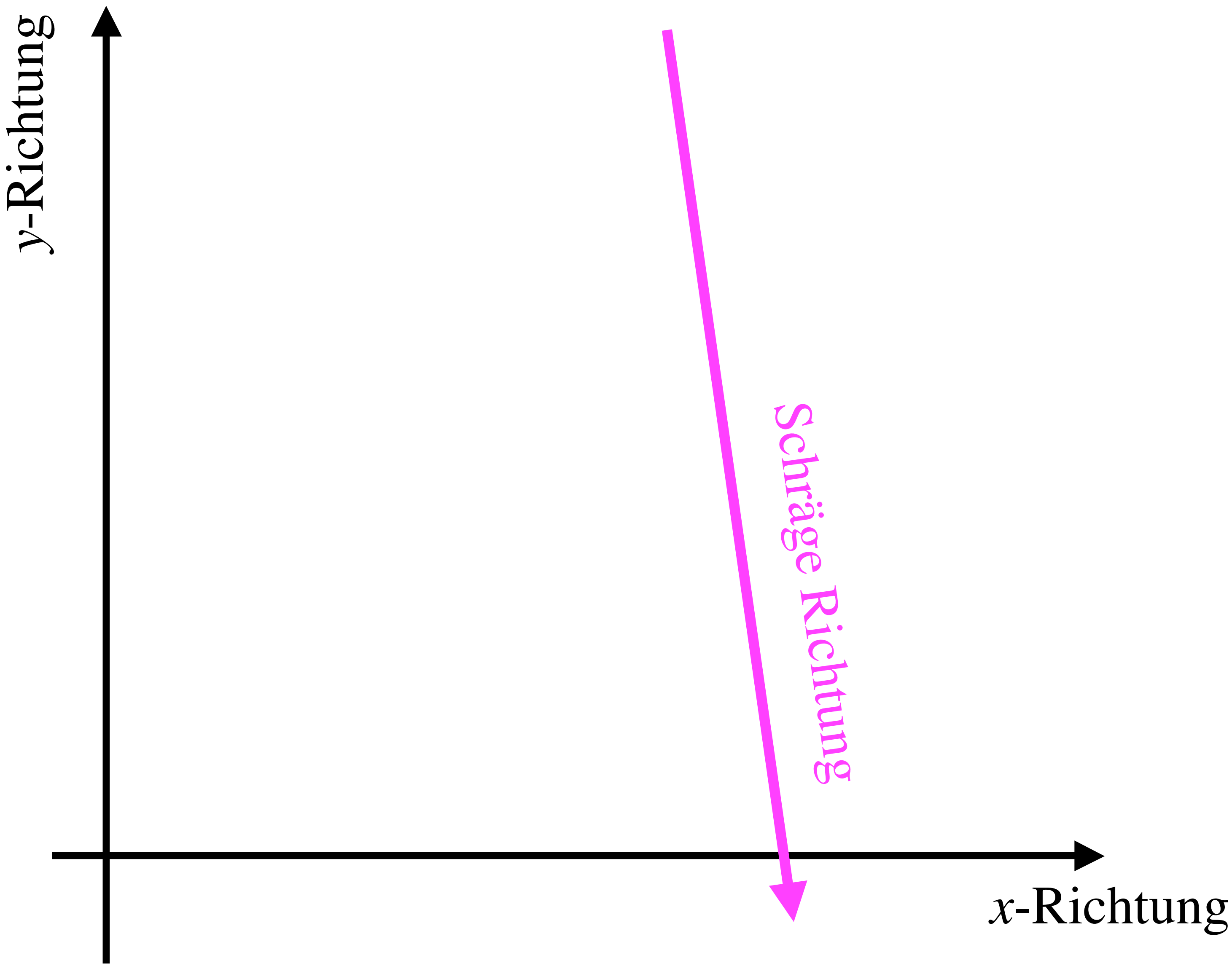
$$f_y = \frac{\partial f}{\partial y} \quad \text{Ableitung in } y\text{-Richtung,}$$

Steigung einer y-Linie

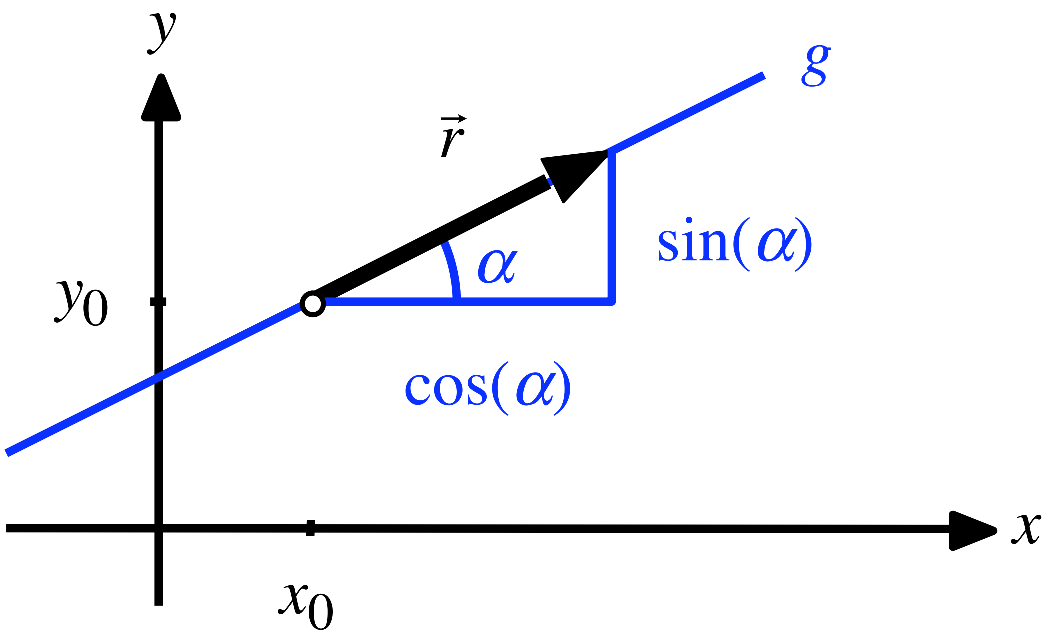
Wie steil ist es schräg zu diesen Richtungen?

Auf die Karte bezogen


y-Richtung
Schräge Richtung
x-Richtung


y-Richtung
Schräge Richtung
x-Richtung

Beliebige Richtung $\vec{r}$ (auf die Karte bezogen)



$$\vec{r} = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) \\ \sin(\alpha) \end{bmatrix} \Rightarrow |\vec{r}| = 1$$

$$x(t) = x_0 + t\cos(\alpha)$$
$$y(t) = y_0 + t\sin(\alpha)$$

Ableitung von $f(x,y)$ an der Stelle (x_0, y_0) in Richtung $\vec{r}$

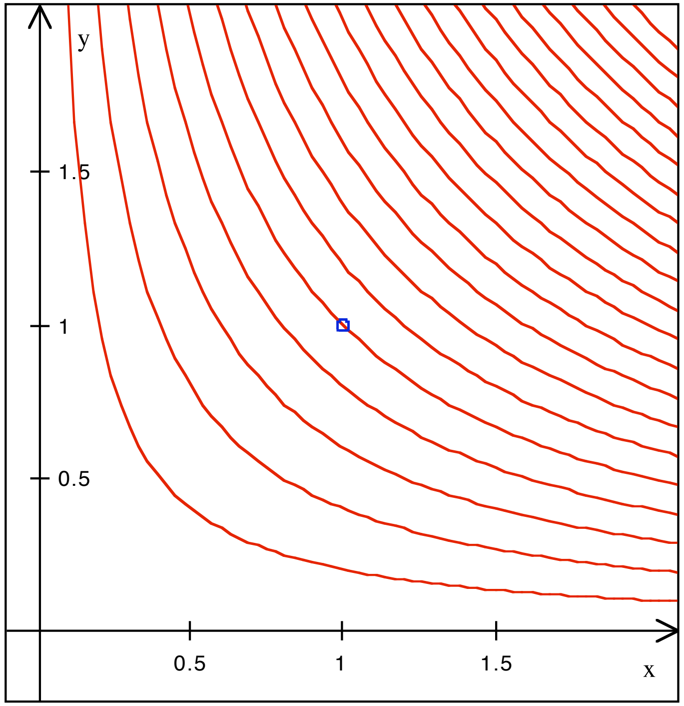
$$f\Big(\underbrace{x_0 + t\cos(\alpha)}_{x(t)}, \underbrace{y_0 + t\sin(\alpha)}_{y(t)}\Big)$$

als Funktion von t auffassen und mit Kettenregel nach t ableiten

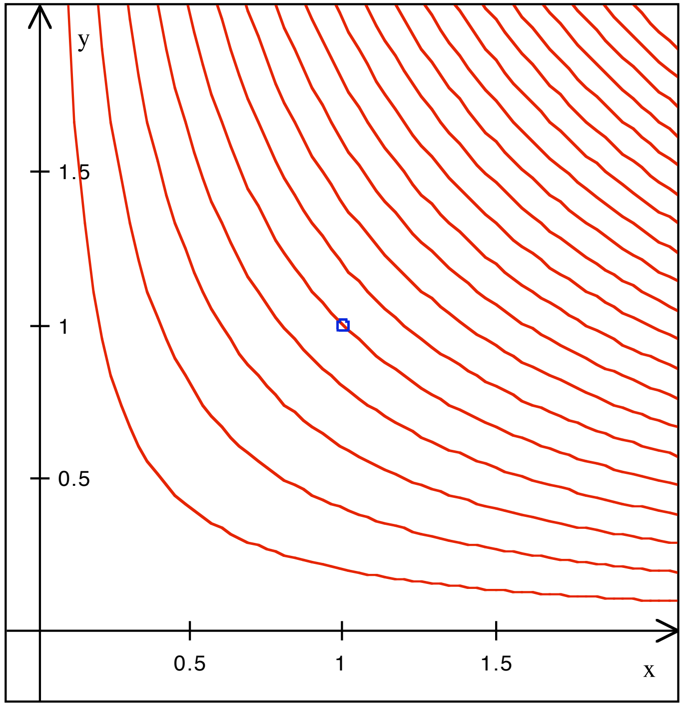
$$\begin{aligned}
&\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f\left(x_0 + t\cos(\alpha), y_0 + t\sin(\alpha)\right) \\
&\qquad = f_x \underbrace{\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(x_0 + t\cos(\alpha)\right)}_{\cos(\alpha)} + f_y \underbrace{\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(y_0 + t\sin(\alpha)\right)}_{\sin(\alpha)} \\
&\qquad = f_x \cos(\alpha) + f_y \sin(\alpha)
\end{aligned}$$

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial \vec{r}}\left(x_0, y_0\right) = f_x\left(x_0, y_0\right)\cdot\cos(\alpha) + f_y\left(x_0, y_0\right)\cdot\sin(\alpha)}$$

Beispiel: $f(x,y) = xy$



Beispiel: $\quad f(x,y) = xy$

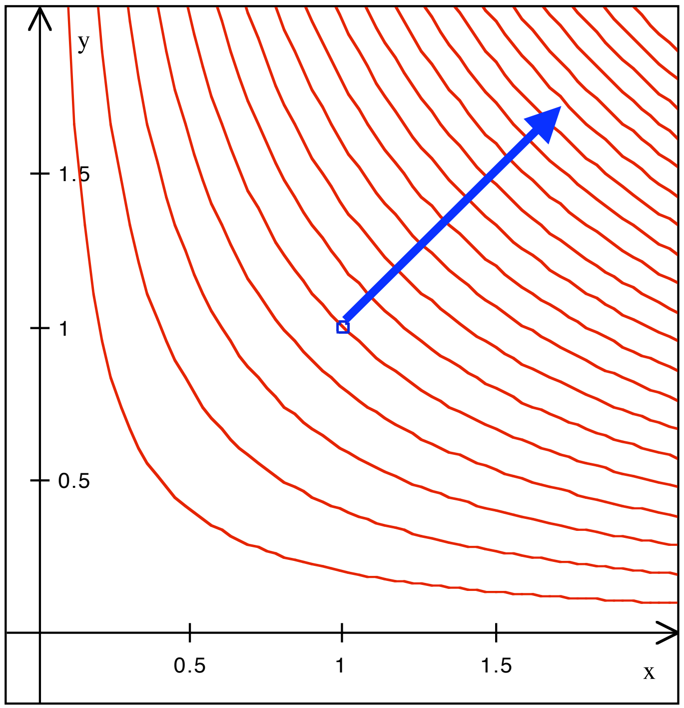


$$f(x,y) = xy$$

$$f_x = y$$
$$f_y = x$$

Ableiten an der Stelle
$(x_0, y_0) = (1,1)$

Beispiel: $f(x,y) = xy$



$$f(x,y) = xy$$

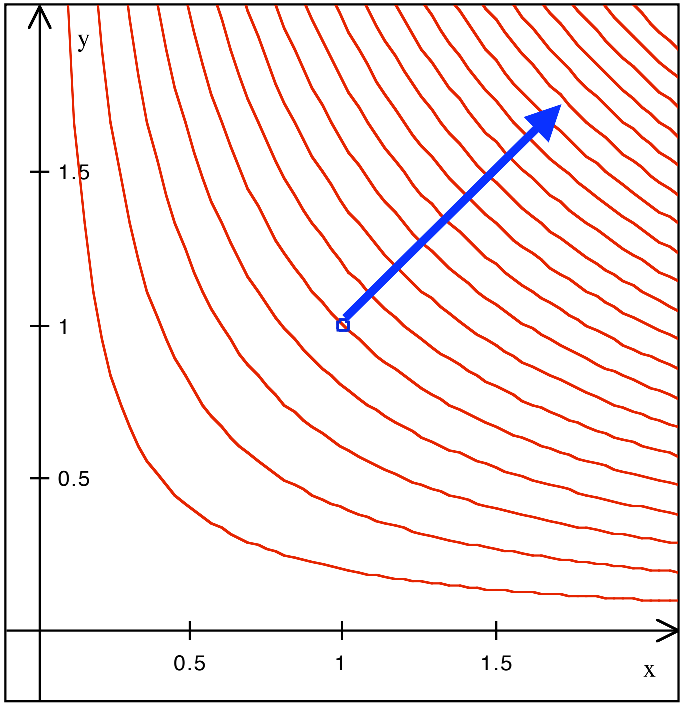
$$f_x = y$$
$$f_y = x$$

Ableiten an der Stelle

$$(x_0, y_0) = (1,1)$$

Rechtwinklig zu den Höhenlinien, steilster Anstieg, $\alpha = 45°$

Beispiel: $\quad f(x,y) = xy$



$$f(x,y) = xy$$

$$f_x = y$$
$$f_y = x$$

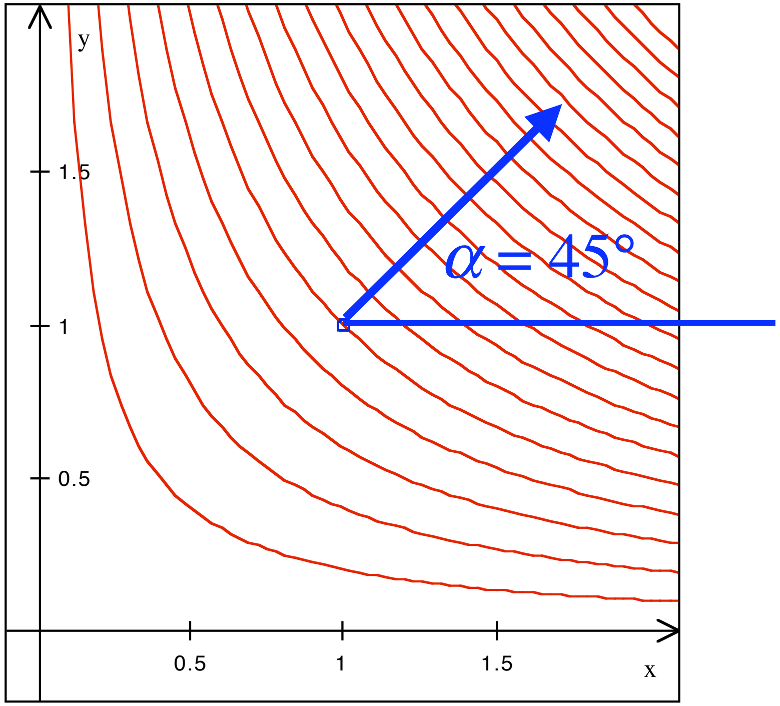
Ableiten an der Stelle

$$(x_0, y_0) = (1,1)$$

Rechtwinklig zu den Höhenlinien, steilster Anstieg, $\alpha = 45°$

$\boxed{\text{Im Gelände}}$

Beispiel: $\quad f(x,y) = xy$



$$f(x,y) = xy$$

$$f_x = y$$

$$f_y = x$$

Ableiten an der Stelle

$$(x_0, y_0) = (1,1)$$

Rechtwinklig zu den Höhenlinien, steilster Anstieg, $\alpha = 45°$

Im Gelände

auf Karte bezogen

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{r}}\left(x_0, y_0\right) = \underbrace{f_x\left(x_0, y_0\right)}_{y_0} \cdot \cos(\alpha) + \underbrace{f_y\left(x_0, y_0\right)}_{x_0} \cdot \sin(\alpha)$$

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{r}}\left(x_0, y_0\right) = \underbrace{f_x\left(x_0, y_0\right)}_{y_0} \cdot \cos(\alpha) + \underbrace{f_y\left(x_0, y_0\right)}_{x_0} \cdot \sin(\alpha)$$

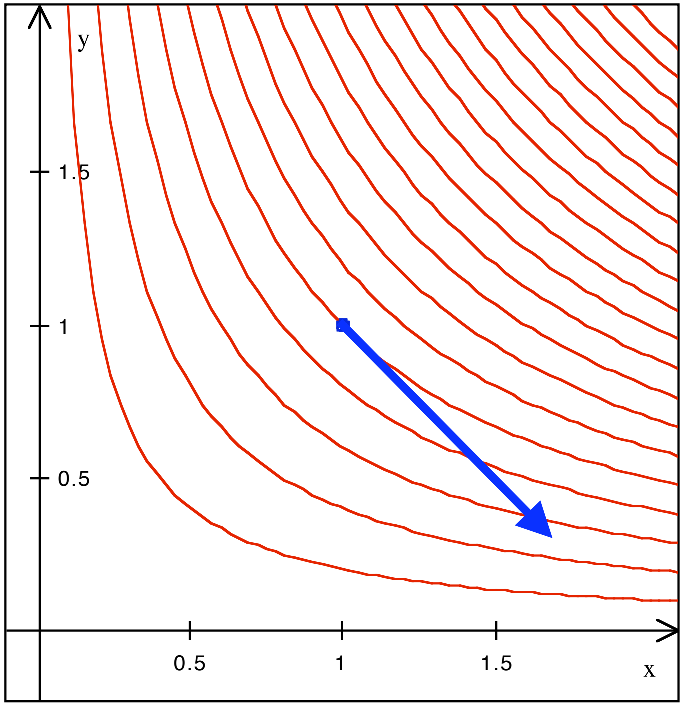
$$\frac{\partial f}{\partial \vec{r}}\left(x_0, y_0\right) = y_0 \cdot \cos\left(45^\circ\right) + x_0 \cdot \sin\left(45^\circ\right)$$

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{r}}\left(x_0, y_0\right) = \underbrace{f_x\left(x_0, y_0\right)}_{y_0} \cdot \cos(\alpha) + \underbrace{f_y\left(x_0, y_0\right)}_{x_0} \cdot \sin(\alpha)$$

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{r}}\left(x_0, y_0\right) = y_0 \cdot \cos\left(45^\circ\right) + x_0 \cdot \sin\left(45^\circ\right)$$

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{r}}(1,1) = 1 \cdot \underbrace{\cos\left(45^\circ\right)}_{\frac{\sqrt{2}}{2}} + 1 \cdot \underbrace{\sin\left(45^\circ\right)}_{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \sqrt{2}$$

Beispiel: $f(x,y) = xy$



$f(x,y) = xy$

$f_x = y$

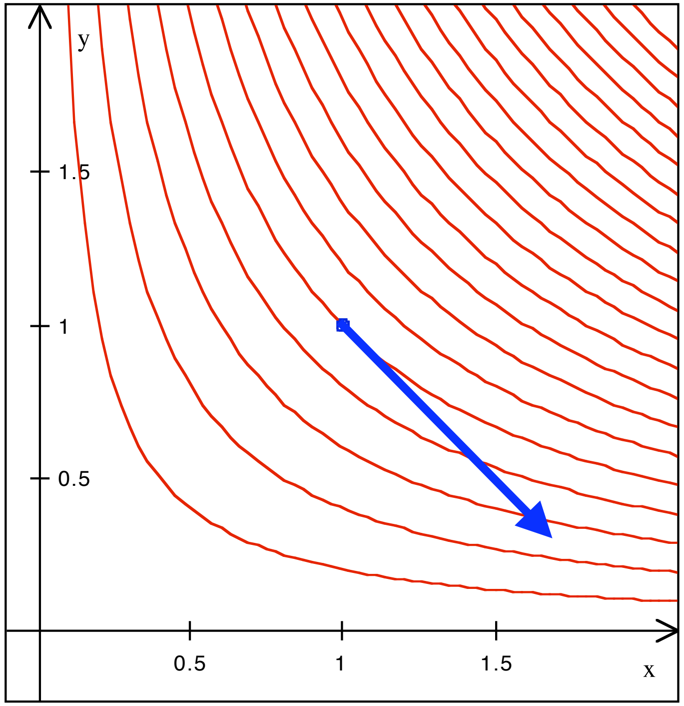
$f_y = x$

Ableiten an der Stelle

$(x_0, y_0) = (1,1)$

In Richtung der Höhenlinie, kein Anstieg, $\alpha = -45°$

Beispiel: $\quad f(x,y) = xy$



$$f(x,y) = xy$$

$$f_x = y$$
$$f_y = x$$

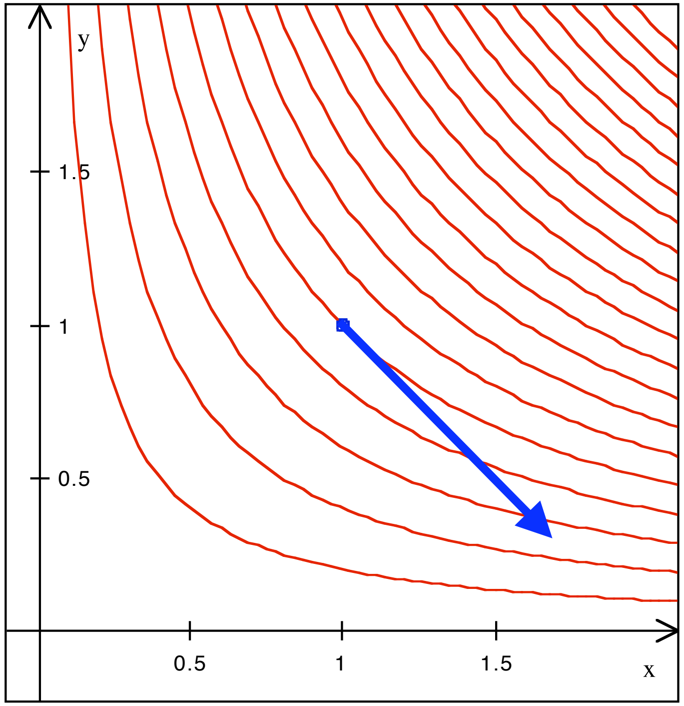
Ableiten an der Stelle

$$(x_0, y_0) = (1,1)$$

In Richtung der Höhenlinie, kein Anstieg, $\alpha = -45°$

Im Gelände

Beispiel: $f(x,y) = xy$



$$f(x,y) = xy$$

$$f_x = y$$
$$f_y = x$$

Ableiten an der Stelle

$$(x_0, y_0) = (1,1)$$

In Richtung der Höhenlinie, kein Anstieg, $\alpha = -45°$

Im Gelände

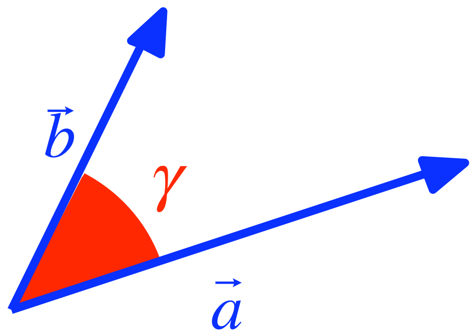
auf Karte bezogen

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{r}}\left(x_0, y_0\right) = \underbrace{f_x\left(x_0, y_0\right)}_{y_0} \cdot \cos\left(\alpha\right) + \underbrace{f_y\left(x_0, y_0\right)}_{x_0} \cdot \sin\left(\alpha\right)$$

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{r}}\left(x_0, y_0\right) = y_0 \cdot \cos\left(-45^\circ\right) + x_0 \cdot \sin\left(-45^\circ\right)$$

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{r}}\left(1,1\right) = 1 \cdot \underbrace{\cos\left(-45^\circ\right)}_{\frac{\sqrt{2}}{2}} + 1 \cdot \underbrace{\sin\left(-45^\circ\right)}_{-\frac{\sqrt{2}}{2}} = 0$$

Erinnerung: Skalarprodukt

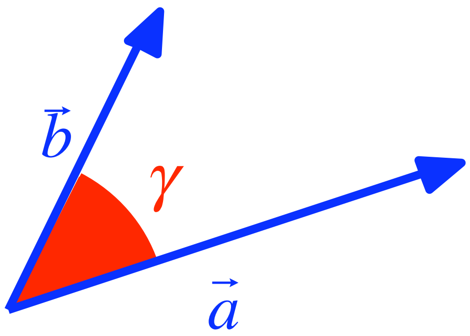


$$\vec{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$$

$$\vec{a}\vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2$$

$$\vec{a}\vec{b} = |\vec{a}| \left|\vec{b}\right| \cos(\gamma)$$

Erinnerung: Skalarprodukt



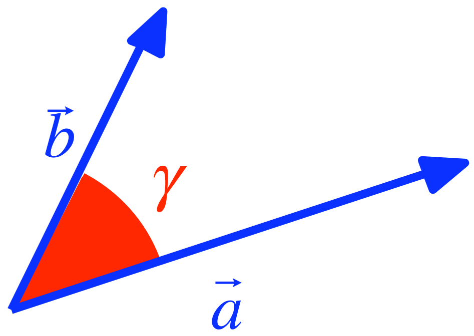
$$\vec{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$$

$$\vec{a}\vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2$$

$$\vec{a}\vec{b} = |\vec{a}|\,|\vec{b}|\cos(\gamma)$$

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{r}} = f_x \cdot \cos(\alpha) + f_y \cdot \sin(\alpha)$$

Erinnerung: Skalarprodukt



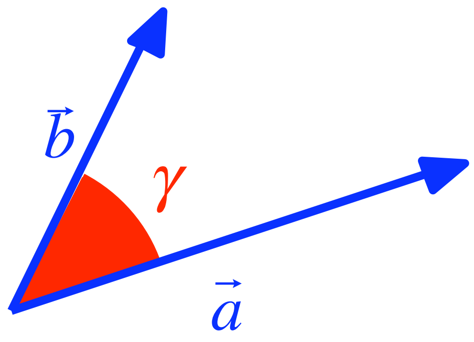
$$\vec{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$$

$$\vec{a}\vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2$$

$$\vec{a}\vec{b} = |\vec{a}| \left|\vec{b}\right| \cos(\gamma)$$

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{r}} = f_x \cdot \cos(\alpha) + f_y \cdot \sin(\alpha) = \begin{bmatrix} f_x \\ f_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(\alpha) \\ \sin(\alpha) \end{bmatrix}$$

Erinnerung: Skalarprodukt



$$\vec{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$$

$$\vec{a}\vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2$$

$$\vec{a}\vec{b} = |\vec{a}|\,|\vec{b}|\cos(\gamma)$$

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{r}} = f_x \cdot \cos(\alpha) + f_y \cdot \sin(\alpha) = \begin{bmatrix} f_x \\ f_y \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} \cos(\alpha) \\ \sin(\alpha) \end{bmatrix}}_{\uparrow \, \vec{r}}$$

Der Gradient

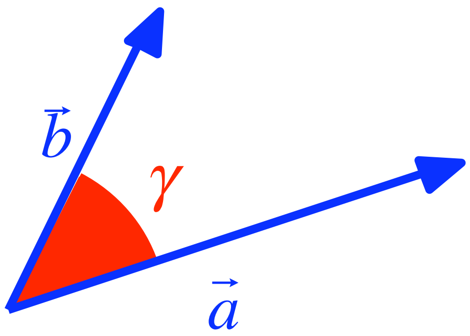
Funktion: $f(x,y)$

Gradient: $\operatorname{grad}(f)(x_0,y_0) = \begin{bmatrix} f_x(x_0,y_0) \\ f_y(x_0,y_0) \end{bmatrix}$

Der Gradient ist ein Vektor

Erinnerung: Skalarprodukt

$$\vec{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$$

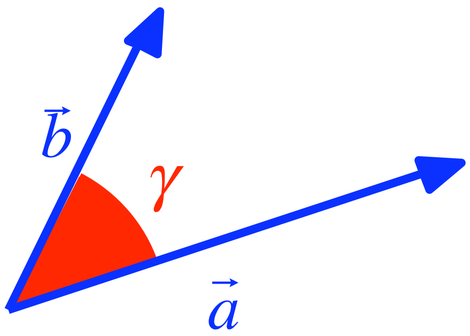


$$\vec{a}\vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2$$

$$\vec{a}\vec{b} = |\vec{a}|\,|\vec{b}|\cos(\gamma)$$

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{r}} = f_x \cdot \cos(\alpha) + f_y \cdot \sin(\alpha) = \underbrace{\begin{bmatrix} f_x \\ f_y \end{bmatrix}}_{\text{Gradient}} \underbrace{\begin{bmatrix} \cos(\alpha) \\ \sin(\alpha) \end{bmatrix}}_{\vec{r}}$$

Erinnerung: Skalarprodukt



$$\vec{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$$

$$\vec{a}\vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2$$

$$\vec{a}\vec{b} = |\vec{a}| \left|\vec{b}\right| \cos(\gamma)$$

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{r}} = f_x \cdot \cos(\alpha) + f_y \cdot \sin(\alpha) = \begin{bmatrix} f_x \\ f_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(\alpha) \\ \sin(\alpha) \end{bmatrix} = \operatorname{grad}(f) \cdot \vec{r}$$

Gradient

$\vec{r}$

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial \vec{r}} = \mathrm{grad}(f) \cdot \vec{r}}$$

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial \vec{r}} = \operatorname{grad}(f) \cdot \vec{r}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{r}} = \operatorname{grad}(f) \cdot \vec{r} = \left|\operatorname{grad}(f)\right| \cdot \left|\vec{r}\right| \cdot \cos(\gamma)$$

$$\gamma = 0 \quad \Rightarrow \quad \cos(\gamma) = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial \vec{r}} \text{ maximal}$$

Der Gradient hat die Richtung des steilsten Anstieges

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial \vec{r}} = \operatorname{grad}(f) \cdot \vec{r}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{r}} = \operatorname{grad}(f) \cdot \vec{r} = \left|\operatorname{grad}(f)\right| \cdot \left|\vec{r}\right| \cdot \cos(\gamma)$$

$$\gamma = 0 \quad \Rightarrow \quad \cos(\gamma) = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial \vec{r}} \text{ maximal}$$

Der Gradient hat die Richtung des steilsten Anstieges

Auf der Karte

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial \vec{r}} = \mathrm{grad}(f) \cdot \vec{r}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{r}} = \mathrm{grad}(f) \cdot \vec{r} = \left|\mathrm{grad}(f)\right| \cdot \left|\vec{r}\right| \cdot \cos(\gamma)$$

$$\gamma = 0 \quad \Rightarrow \quad \cos(\gamma) = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial \vec{r}} \text{ maximal}$$

Der Gradient hat die Richtung des steilsten Anstieges

Auf der Karte

Im Gelände

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial \vec{r}} = \operatorname{grad}(f) \cdot \vec{r}}$$

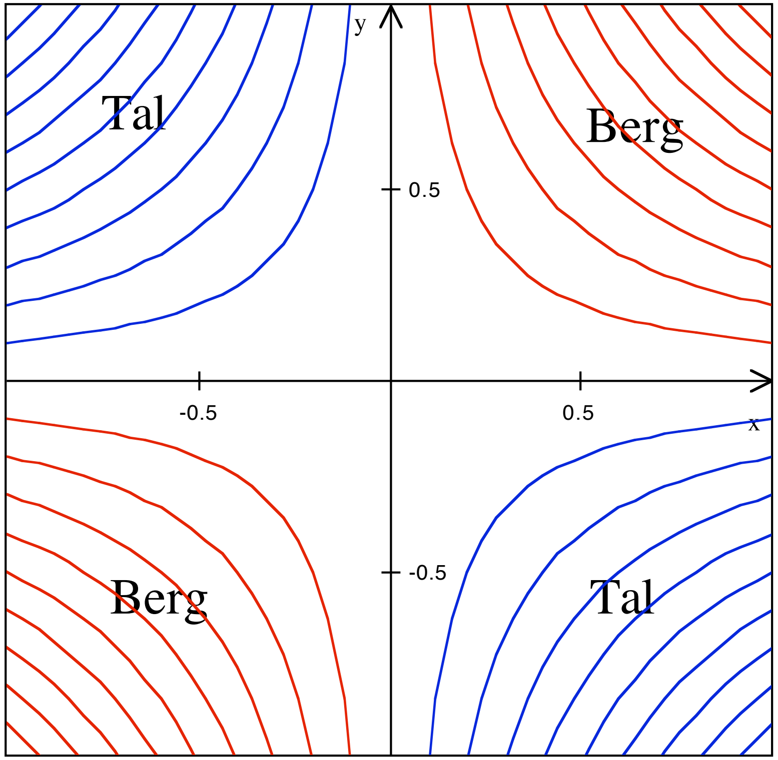
$$\frac{\partial f}{\partial \vec{r}} = \operatorname{grad}(f) \cdot \vec{r} = \left|\operatorname{grad}(f)\right| \cdot \left|\vec{r}\right| \cdot \cos(\gamma)$$

$$\gamma = 0 \quad \Rightarrow \quad \cos(\gamma) = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial \vec{r}} \text{ maximal}$$

$$\gamma = \frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad \cos(\gamma) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial \vec{r}} = 0$$

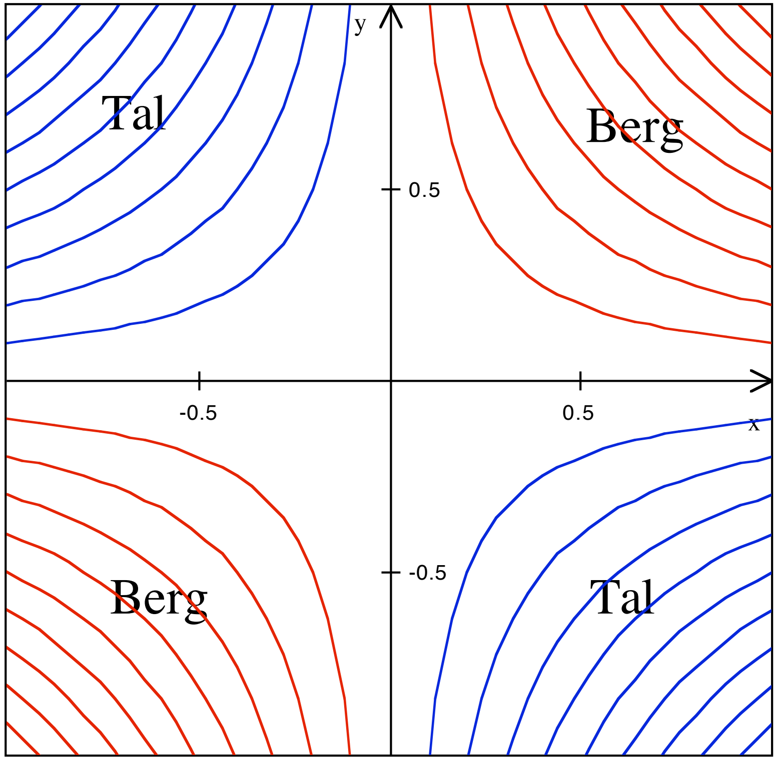
$$\gamma = \pi \quad \Rightarrow \quad \cos(\gamma) = -1 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial \vec{r}} \text{ minimal}$$

Beispiel: $\quad f(x,y) = xy$



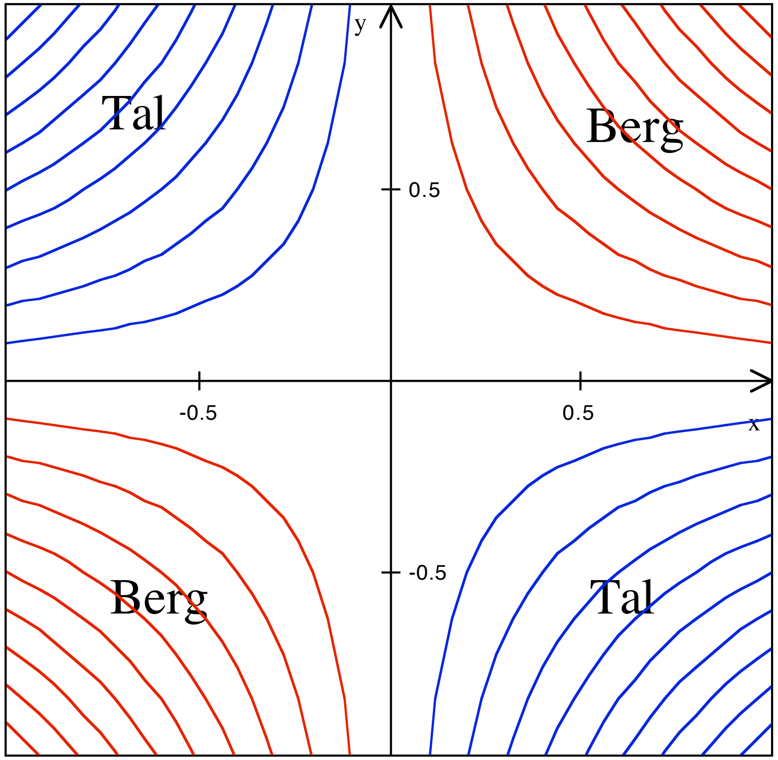
Niveaulinien

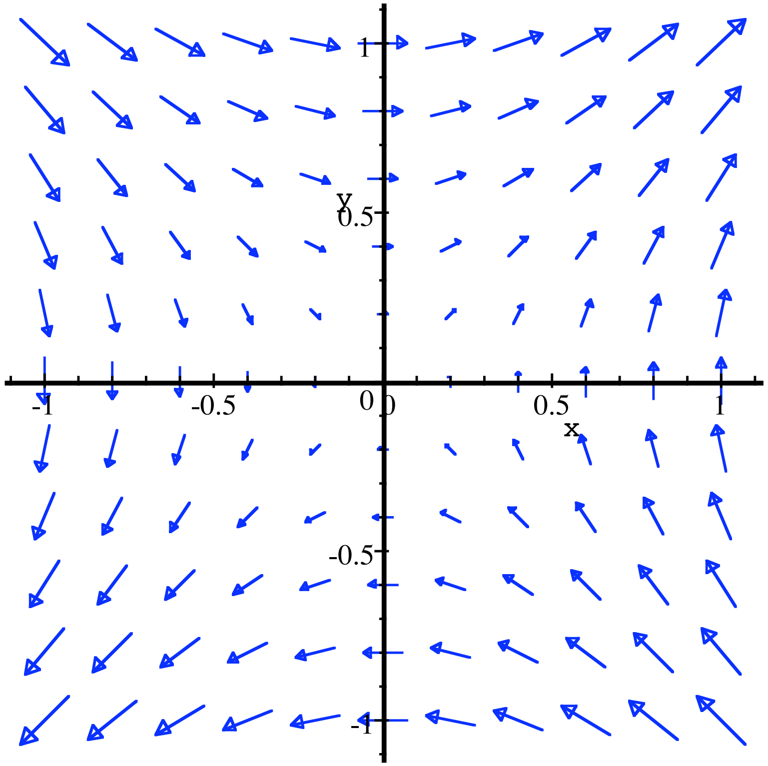
$$\text{Beispiel}: \quad f(x,y) = xy \qquad\qquad \operatorname{grad}(f) = \begin{bmatrix} f_x(x,y) \\ f_y(y,x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ x \end{bmatrix}$$



Niveaulinien

$$\text{Beispiel}: \quad f(x,y) = xy \qquad \operatorname{grad}(f) = \begin{bmatrix} f_x(x,y) \\ f_y(y,x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ x \end{bmatrix}$$

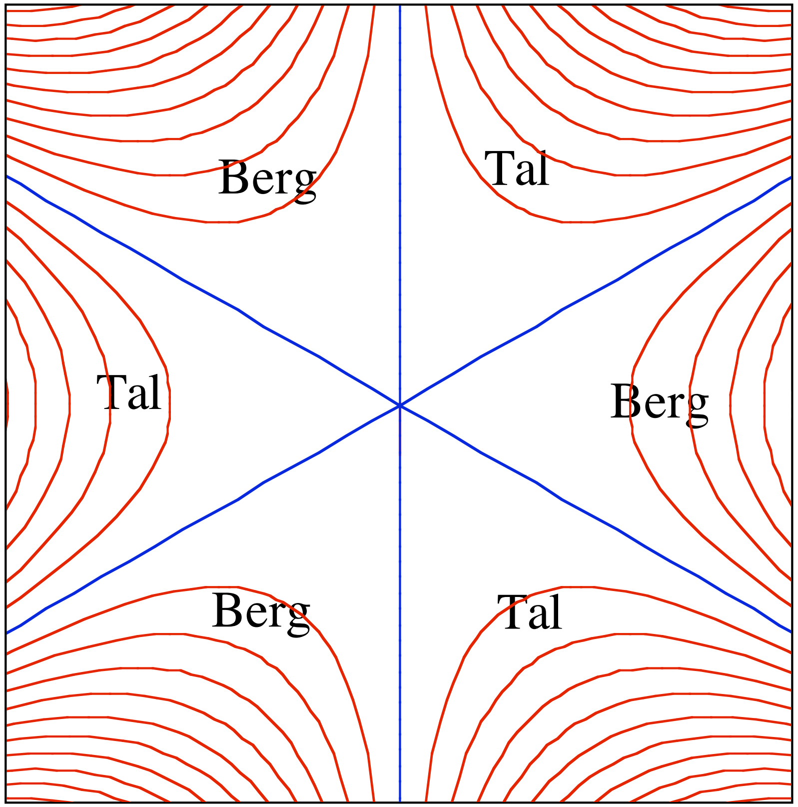




Niveaulinien

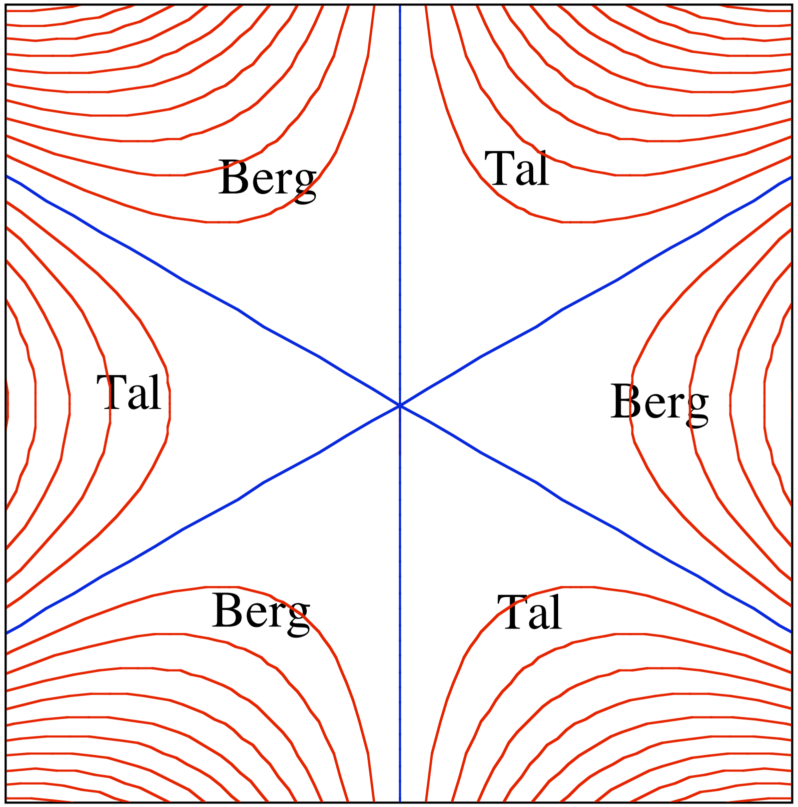
Gradientenrichtung

Beispiel: $f(x,y) = x^3 - 3xy^2$



Niveaulinien
Affensattel

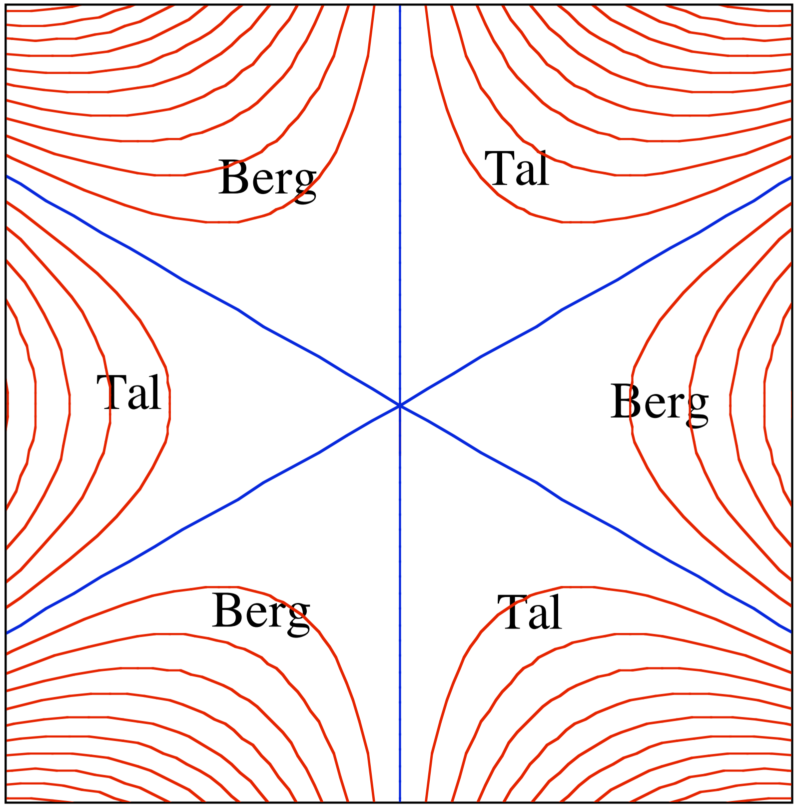
Beispiel: $f(x,y) = x^3 - 3xy^2$ $\quad$ $\operatorname{grad}(f) = \begin{bmatrix} f_x(x,y) \\ f_y(y,x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3x^2 - 3y^2 \\ -6xy \end{bmatrix}$



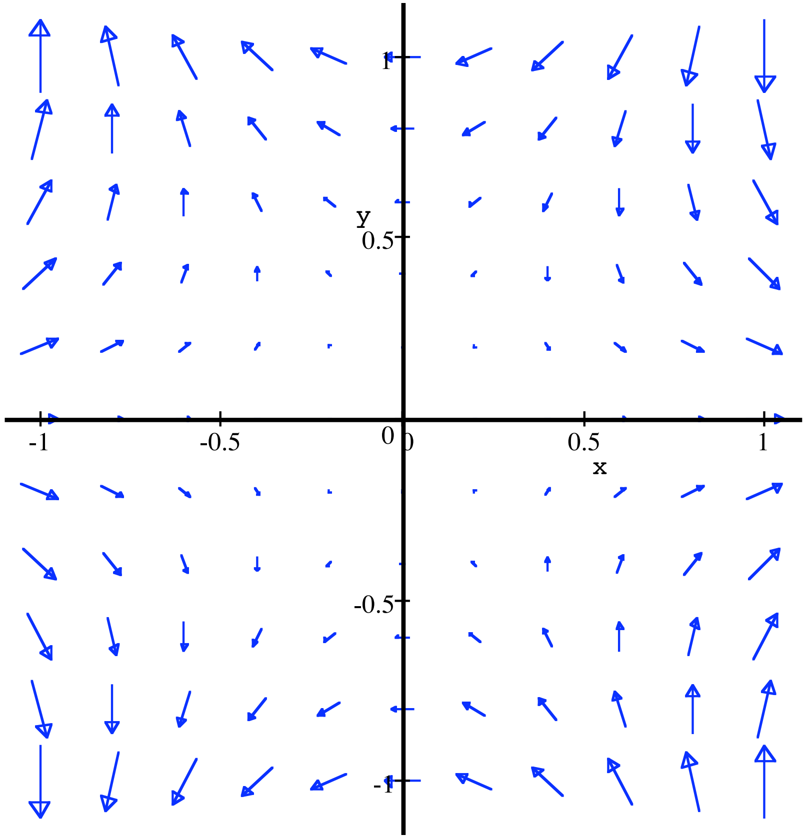
Niveaulinien
Affensattel

Beispiel: $f(x,y) = x^3 - 3xy^2$

$$\operatorname{grad}(f) = \begin{bmatrix} f_x(x,y) \\ f_y(y,x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3x^2 - 3y^2 \\ -6xy \end{bmatrix}$$



Niveaulinien
Affensattel



Gradientenrichtung

$$\text{Raumtemperatur} = T(x, y, z)$$

$$\text{Raumtemperatur } = T(x, y, z)$$

Gradient $$\operatorname{grad}(T) = \begin{bmatrix} T_x \\ T_y \\ T_z \end{bmatrix}$$

$$\text{Raumtemperatur } = T(x, y, z)$$

Gradient $$\operatorname{grad}(T) = \begin{bmatrix} T_x \\ T_y \\ T_z \end{bmatrix}$$ Raumvektor

$$\text{Raumtemperatur} = T(x,y,z)$$

Gradient $\quad \operatorname{grad}(T) = \begin{bmatrix} T_x \\ T_y \\ T_z \end{bmatrix} \quad$ Raumvektor

In Richtung des Gradienten nimmt die Temperatur am stärksten zu.

Raumtemperatur $= T(x, y, z)$

Gradient $\qquad \operatorname{grad}(T) = \begin{bmatrix} T_x \\ T_y \\ T_z \end{bmatrix} \qquad$ Raumvektor

In Richtung des Gradienten nimmt die Temperatur am stärksten zu.

Stärkster Anstieg der Temperatur.

$$\text{Raumtemperatur} = T(x,y,z)$$

Gradient $\quad \mathrm{grad}(T) = \begin{bmatrix} T_x \\ T_y \\ T_z \end{bmatrix} \quad$ Raumvektor

In Richtung des Gradienten nimmt die Temperatur am stärksten zu.

Stärkster Anstieg der Temperatur.

Kein geometrischer Anstieg mehr

heiß, ganz heiß, megaheiß

Der Nabla-Operator

nur eine Schreibweise!

$$\nabla = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} \\ \dfrac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} \qquad \nabla = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} \\ \dfrac{\partial}{\partial y} \\ \dfrac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix}$$

symbolischer Vektor

Der Nabla-Operator

$f(x, y)$ Funktion zweier Variablen

$$\boxed{\nabla f = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} \\ \dfrac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} f = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x} \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} \end{bmatrix} = \mathrm{grad}(f)}$$

Der Nabla-Operator

$$f(x,y) = x^3 - 3xy^2$$

$$\nabla\left(x^3 - 3xy^2\right) = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix}\left(x^3 - 3xy^2\right) = \begin{bmatrix} \frac{\partial\left(x^3 - 3xy^2\right)}{\partial x} \\ \frac{\partial\left(x^3 - 3xy^2\right)}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3x^2 - 3y^2 \\ -6xy \end{bmatrix}$$

Der Nabla-Operator

$f(x,y,z)$ Funktion dreier Variablen

$$\nabla f = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} \\ \dfrac{\partial}{\partial y} \\ \dfrac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} f = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x} \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} \\ \dfrac{\partial f}{\partial z} \end{bmatrix} = \operatorname{grad}(f)$$

Der Nabla-Operator

$T(x,y,z)$ Funktion dreier Variablen

$$\boxed{\nabla f = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} T = \begin{bmatrix} \frac{\partial T}{\partial x} \\ \frac{\partial T}{\partial y} \\ \frac{\partial T}{\partial z} \end{bmatrix} = \mathrm{grad}(T)}$$

Der Nabla-Operator

$T(x,y,z)$ Funktion dreier Variablen

$$\boxed{\nabla f = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} \\ \dfrac{\partial}{\partial y} \\ \dfrac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} T = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial T}{\partial x} \\ \dfrac{\partial T}{\partial y} \\ \dfrac{\partial T}{\partial z} \end{bmatrix} = \operatorname{grad}(T)}$$

Richtung des stärksten Temperaturanstieges

Der Nabla-Operator

$T(x,y,z)$ Funktion dreier Variablen

$$\nabla f = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} \\ \dfrac{\partial}{\partial y} \\ \dfrac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} T = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial T}{\partial x} \\ \dfrac{\partial T}{\partial y} \\ \dfrac{\partial T}{\partial z} \end{bmatrix} = \mathrm{grad}(T)$$

heiß, ganz heiß, megaheiß