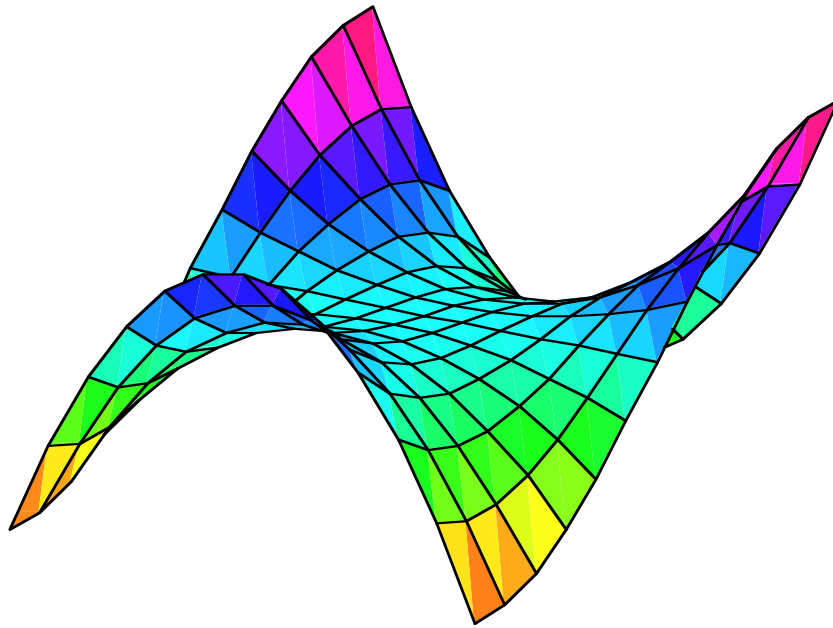


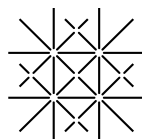
Hans Walser

Mathematik 1 für Naturwissenschaften



Modul 113

Funktionen mehrerer Variablen



UNI
BASEL

Modul 113 für die Lehrveranstaltung *Mathematik 1 für Naturwissenschaften*

Winter 2002/03 Erstausgabe, basierend auf einem Vorlesungsskript von H. Kraft

Winter 2003/04 Grafische Überarbeitung, kleine Ergänzungen

Winter 2004/05 Kleine Änderungen

Winter 2006/07 MathType. Erweiterung

Herbst 2013 Straffung

last modified: 5. Dezember 2013

Hans Walser

Mathematisches Institut, Rheinsprung 21, 4051 Basel

www.walser-h-m.ch/hans

Inhalt

1	Warum Funktionen mehrerer Variablen?	1
1.1	Beispiele	1
1.2	Problem der Darstellung	1
1.2.1	Ansicht, Schrägbild	2
1.2.2	Niveaulinien	3
1.3	Weitere Beispiele	4
1.3.1	Lineare Funktion in x und y	4
1.3.2	Sattelfläche	5
1.3.3	Affensattel	6
1.3.4	Beispiel im Raum	7
2	Ableitung bei mehreren Variablen. Partielle Ableitungen	8
2.1	Erinnerung	8
2.2	Analogie	8
2.3	Partielle Ableitungen	9
2.3.1	Beispiel	9
2.4	Tangentialebene	10
2.4.1	Erinnerung: Tangente	10
2.4.2	Analogie: Tangentialebene	10
2.4.3	Beispiel	10
2.5	Höhere partielle Ableitungen	11
2.5.1	Exzessives Beispiel	12
2.6	Differential	12
2.6.1	Erinnerung	12
2.6.2	Analogie, Kettenregel	13
3	Richtungsableitung	14
3.1	Nochmals Niveaulinien	14
3.2	Erinnerung, spezielle Richtungen	14
3.3	Beliebige Richtung	14
3.3.1	Beispiel	15
4	Der Gradient	16
4.1	Definition	16

4.2	Richtungsableitung mit Gradient	17
4.2.1	Erinnerung: Skalarprodukt	17
4.2.2	Richtungsableitung	17
4.2.3	Folgerungen	17
4.2.4	Beispiele	18
5	Der Nabla-Operator	20
6	Zusammenfassung	21
6.1	Funktionen zweier Variablen.....	21
6.2	Partielle Ableitungen	21
6.3	Gradient	21
6.4	Nabla Operator	21

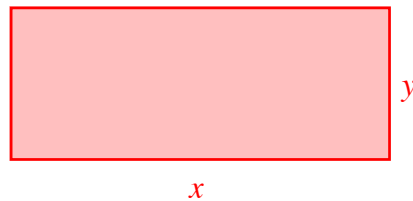
1 Warum Funktionen mehrerer Variablen?

Die meisten Funktionen in Naturwissenschaften und Technik hängen von mehreren Variablen ab.

1.1 Beispiele

1. Der Flächeninhalt eines Rechteckes hängt von Länge und Breite ab.

Rechtecksfläche = $f(x,y) = xy$

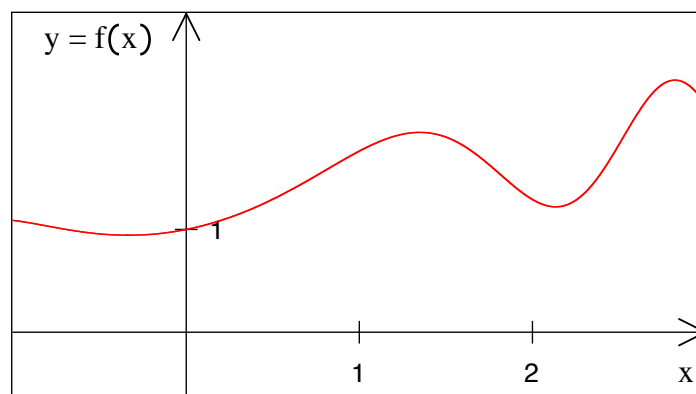


Rechtecksfläche

2. Die Temperatur in diesem Raum hängt von allen drei räumlichen Koordinaten ab, also $T(x,y,z)$.

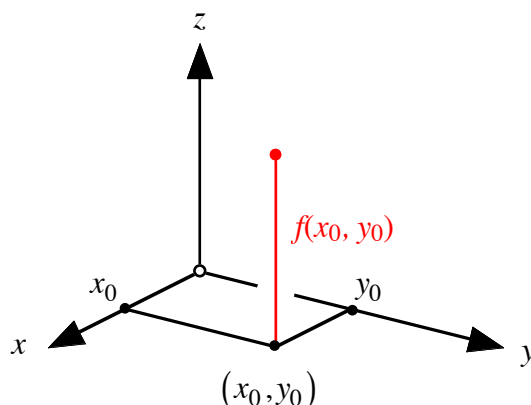
1.2 Problem der Darstellung

Eine Funktion *einer* Variablen, also $y = f(x)$, kann in einem x,y -Koordinatensystem dargestellt werden. Der Funktionsgraph ist in der Regel eine Kurvenstück über der x -Achse.



Funktion einer Variablen

Für eine Funktion zweier Variablen, also $z = f(x, y)$, brauchen wir bereits ein räumliches x, y, z -Koordinatensystem.



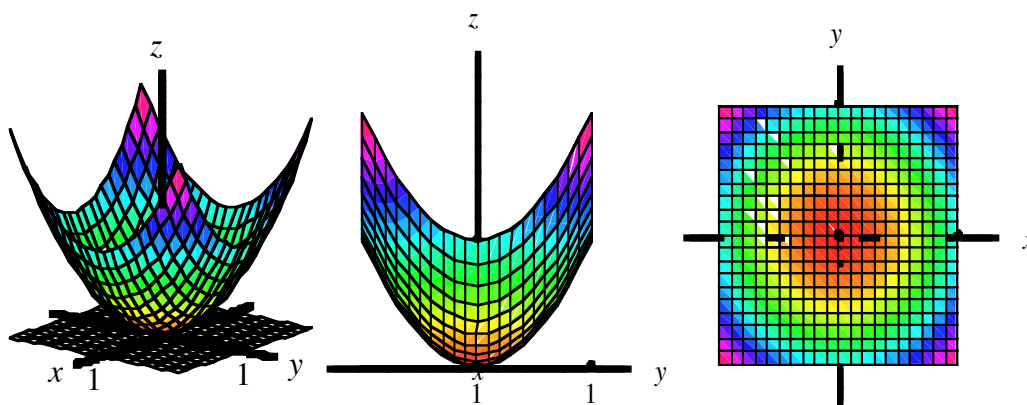
Räumliches Koordinatensystem

Der Funktionsgraf wird hier zu einem Flächenstück über der x, y -Ebene. Wie kann das auf dem Papier dargestellt werden?

Eine Funktion dreier Variablen bräuchte zu ihrer grafischen Darstellung einen vierdimensionalen Raum.

Wir studieren im Folgenden die Funktion $f(x, y) = x^2 + y^2$ in verschiedenen Darstellungsarten.

1.2.1 Ansicht, Schrägbild



$f(x, y) = x^2 + y^2$, **Schrägbild und Sicht von vorne und von oben**

Die hier auftretenden Netzlinien heißen:

x -Linie: x ist variabel, y ist fest

y -Linie: x ist fest, y ist variabel

In der Sicht von vorne sind die y -Linien unverzerrt erkennbar (Parabeln).

1.2.2 Niveaulinien

Niveaulinien (Höhenlinien) sind horizontale Schnitte auf bestimmten Höhen. Sie werden in der x,y -Ebene dargestellt.

Beispiel: $f(x,y) = x^2 + y^2$

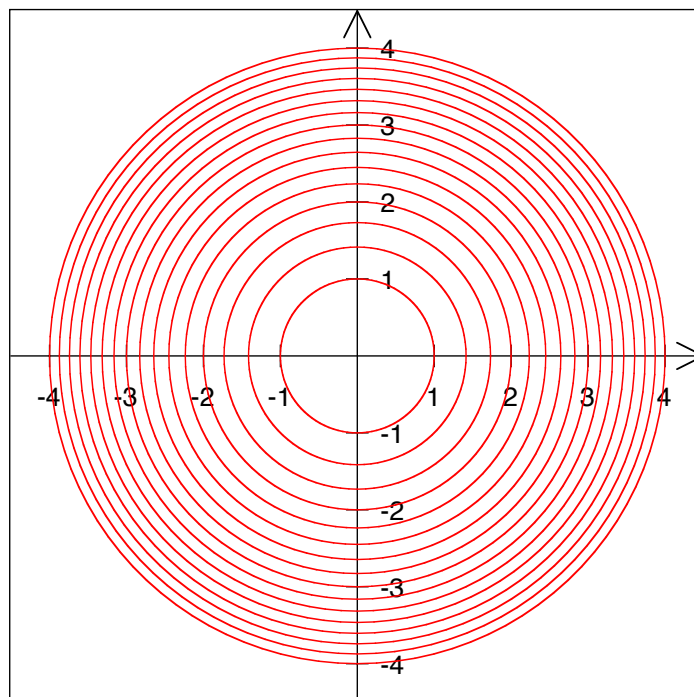
Niveau Null: $f(x,y) = x^2 + y^2 = 0$ Genau der Nullpunkt erfüllt diese Bedingung

Niveau Eins: $f(x,y) = x^2 + y^2 = 1$ Die Niveaulinie ist der Einheitskreis

Niveau Zwei: $f(x,y) = x^2 + y^2 = 2$ Die Niveaulinie ist der Kreis mit Radius $\sqrt{2}$

Allgemein:

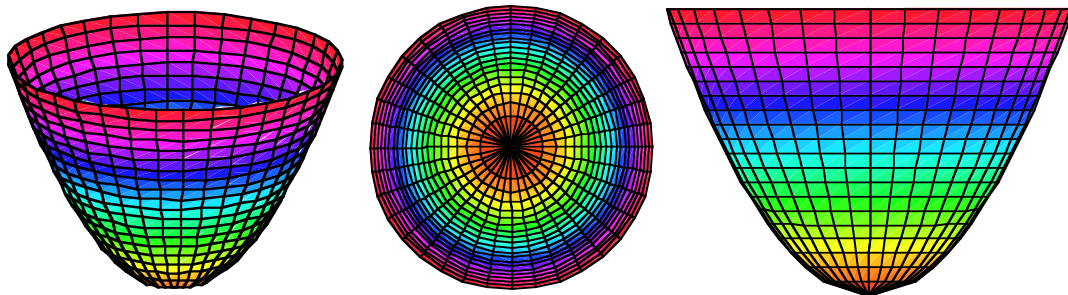
Niveau c : $f(x,y) = x^2 + y^2 = c$ Die Niveaulinie ist der Kreis mit Radius \sqrt{c}



$f(x,y) = x^2 + y^2$, **Niveaulinien für die Niveaus 0, 1, ..., 16**

Je dichter die Niveaulinien, um so steiler die Fläche. In unserem Beispiel sind alle Niveaulinien Kreise. Das heißt, dass die Fläche eine Rotationssymmetrie aufweist (Rotationsparaboloid, vgl. Parabolantenne oder Scheinwerferspiegel).

Die folgende Figur zeigt das Paraboloid mit Niveaulinien für die Niveaus 0, 1, ..., 16 in Schrägbild, Grund- und Aufriss. Im Grundriss sehen wir die Niveaulinien als Kreise, im Aufriss als äquidistante horizontale Geraden. (Aus softwaretechnischen Gründen hat das Paraboloid unten eine unschöne Spitze. Zwischen den Niveaus wird geradlinig gearbeitet.)



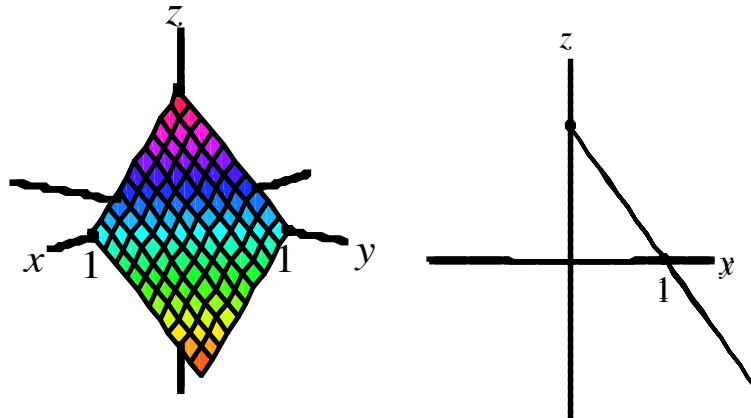
Paraboloid: Schrägbild, Grundriss, Aufriss

1.3 Weitere Beispiele

1.3.1 Lineare Funktion in x und y

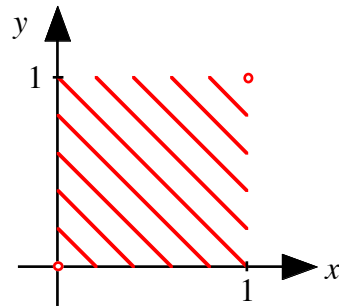
Beispiel: $f(x,y) = 1 - x - y$

Diese Funktion ist linear in x und in y . Die Fläche im Raum ist eine (schiefe) Ebene. Bei geeigneter Sicht sehen wir daher nur eine Gerade.



$f(x,y) = 1 - x - y$ in verschiedenen Ansichten (für $x \in [0,1]$ und $y \in [0,1]$)

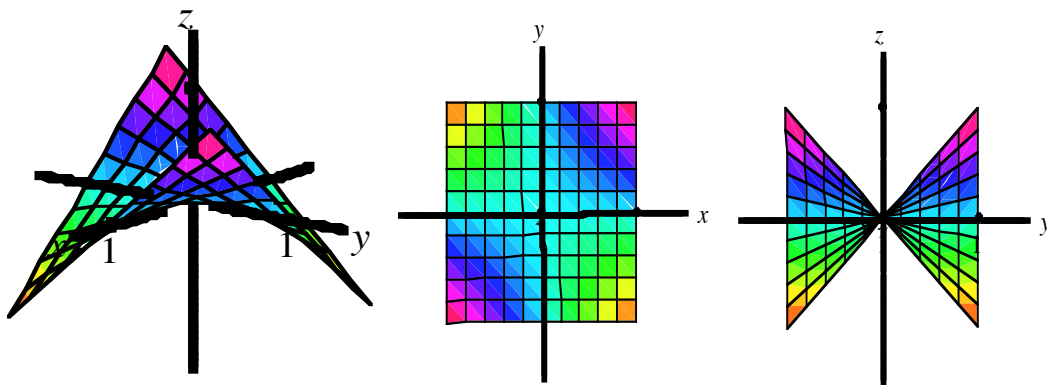
Die Niveaulinien sind parallele Geraden.



$$f(x,y) = 1 - x - y, \text{ Niveaulinien für die Niveaus } 0, 0.2, 0.4, \dots, 2$$

1.3.2 Sattelfläche

Beispiel: $f(x,y) = xy$. Diese Funktion ist uns schon bei der Rechtecksfläche begegnet. Für den Ausschnitt $x \in [-1,1], y \in [-1,1]$ erhalten wir die Ansicht:

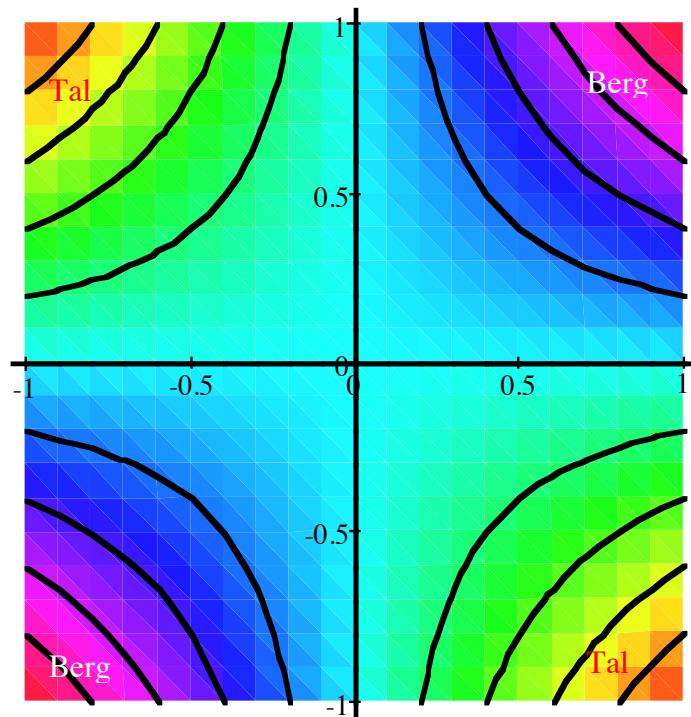


$$f(x,y) = xy, \text{ Ansicht, Sicht von oben, Sicht von vorne}$$

Für die Niveaulinien gilt:

Niveau Null: $f(x,y) = xy = 0$ dies ist für $x = 0$ oder $y = 0$ erfüllt (Achsen)

Niveau c : $f(x,y) = xy = c$ dies ist für $y = \frac{c}{x}$ erfüllt (Hyperbeln)



$$f(x,y) = xy, \text{ Niveaulinien für die Niveaus } -1, -0.9, \dots, 0.9, 1$$

Im ersten und dritten Quadranten haben wir positive Funktionswerte, im zweiten und vierten Quadranten negative Funktionswerte. Der Nullpunkt ist ein *Passpunkt* oder *Sattelpunkt*: in zwei Richtungen geht es hinauf, in zwei Richtungen hinunter.

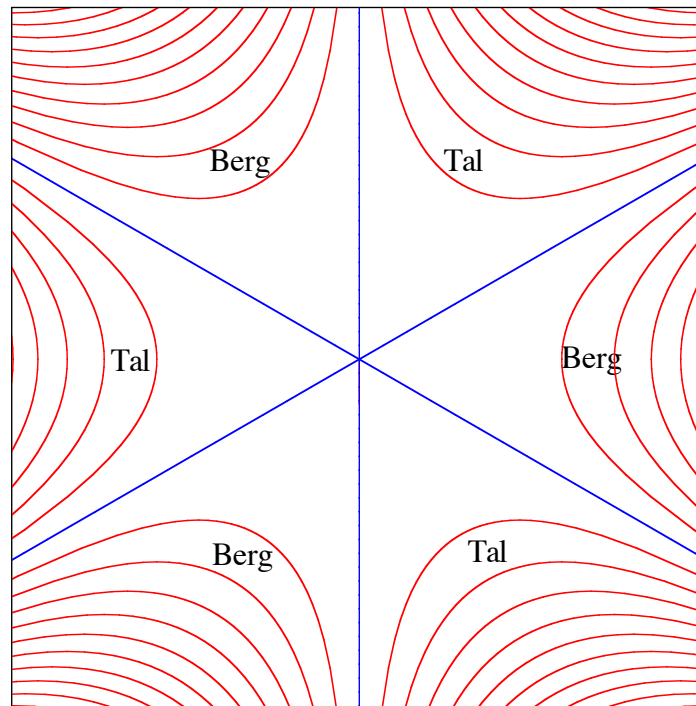
1.3.3 Affensattel

$$f(x,y) = x^3 - 3xy^2$$

Wo ist das Niveau Null?

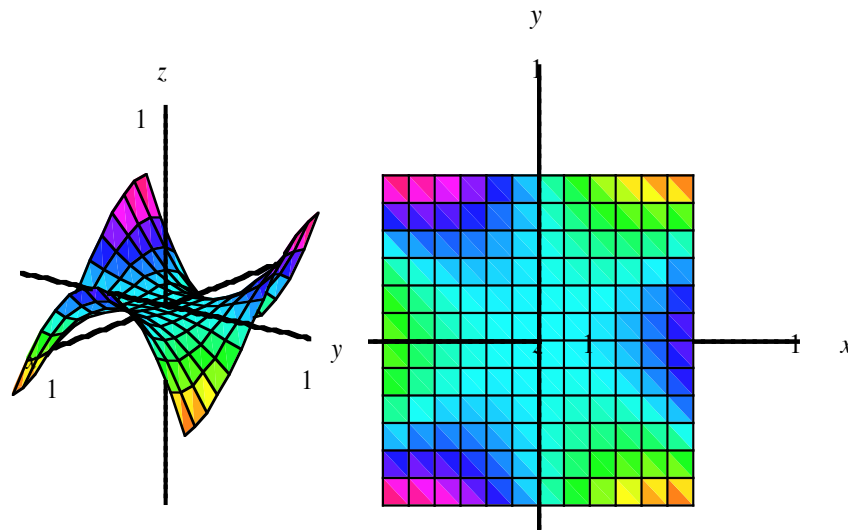
$$x^3 - 3xy^2 = 0$$

Der Computer liefert bei pfleglicher Behandlung folgende Niveaulinien:



Niveaulinien von $f(x,y) = x^3 - 3xy^2$

Wir haben drei Berge und drei Täler (Affensattel).



$f(x,y) = x^3 - 3xy^2$, Affensattel: Ansicht, Blick von oben

1.3.4 Beispiel im Raum

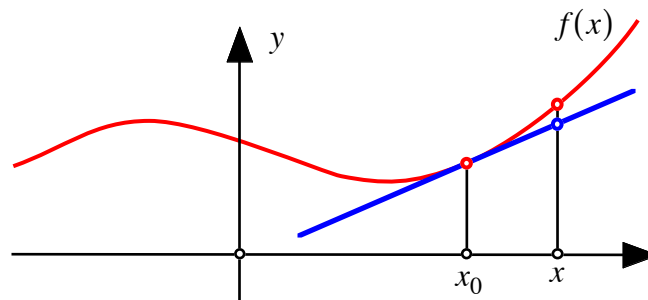
Temperatur = $T(x,y,z)$. Statt Niveaulinien haben wir hier Niveauflächen (Punkte gleicher Temperatur).

2 Ableitung bei mehreren Variablen. Partielle Ableitungen

2.1 Erinnerung

Lokale Linearisierung bei einer Funktion einer Variablen. Es ist:

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$



Lokale Linearisierung

2.2 Analogie

Lokale Linearisierung bei einer Funktion von zwei Variablen:

$$f(x, y) \approx f(x_0, y_0) + \underset{?}{a}(x - x_0) + \underset{?}{b}(y - y_0)$$

Berechnung von a

2.3 Partielle Ableitungen

Partielle Ableitung nach x:

$$f_x(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0}$$

Ableitung in x -Richtung

Steigung einer x -Linie

Partielle Ableitung nach y:

$$f_y(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{f(x_0, y) - f(x_0, y_0)}{y - y_0}$$

Ableitung in y -Richtung

Steigung einer y -Linie

Somit wird:

$$f(x, y) \approx f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

2.3.1 Beispiel

$$f(x, y) = x^2 + y^2$$

Damit wird:

$$f_x(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x$$

$$f_y(x, y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2y$$

Anwendung: $f(3.02, 7.1) = ?$

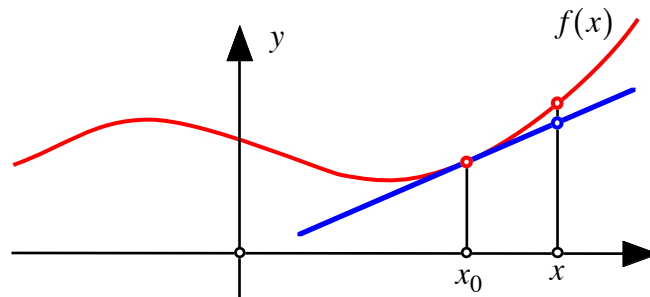
Exakte Berechnung mit dem Taschenrechner: $f(3.02, 7.1) = 3.02^2 + 7.1^2 = 59.5304$

Approximative Berechnung:

2.4 Tangentialebene

2.4.1 Erinnerung: Tangente

Bei einer Funktion einer Variablen liefert $g(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ die Gleichung der Tangente an der Berührungsstelle x_0 .



Tangente bei einer Funktion einer Variablen

2.4.2 Analogie: Tangentialebene

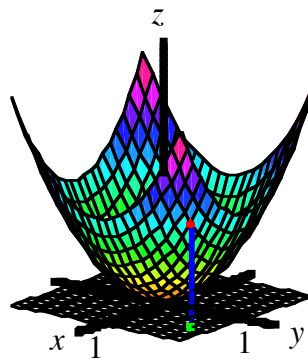
Eine Funktion zweier Variablen $f(x, y)$ hat als Graphen eine Fläche. Die Linearisierung:

$$g(x, y) = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

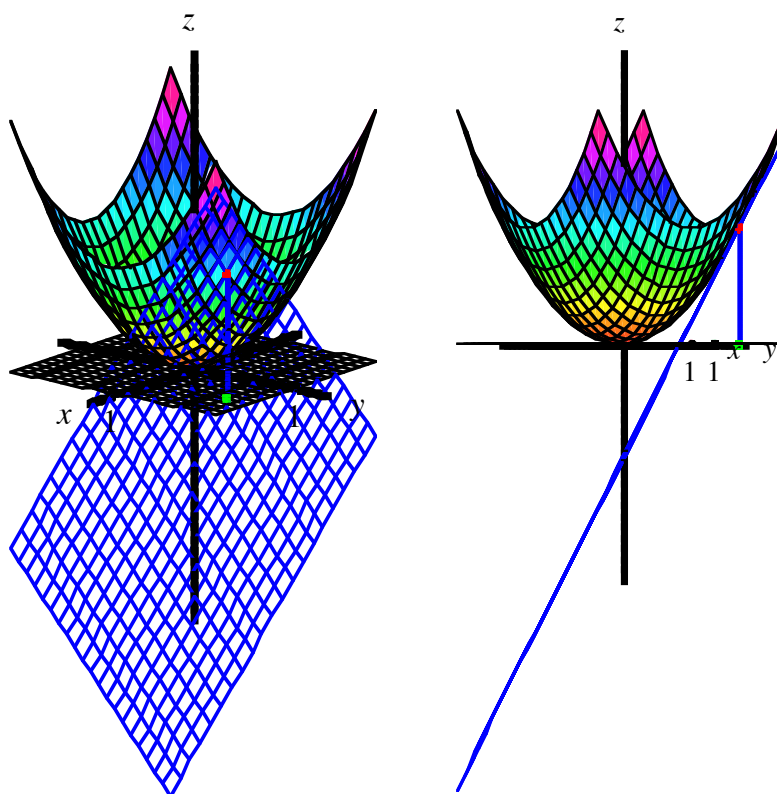
ergibt die Gleichung der Tangentialebene an der Stelle (x_0, y_0) .

2.4.3 Beispiel

Wir suchen die Tangentialebene an den Grafen der Funktion $f(x, y) = x^2 + y^2$ an der Stelle $(0.6, 0.8)$.



Fläche mit Berührungsstelle (0.6, 0.8) und Berührungspunkt (0.6, 0.8, 1)



Fläche mit Tangentialebene, verschiedene Ansichten

2.5 Höhere partielle Ableitungen

Zweimalige partielle Ableitung nach x : $f_{xx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$

Einmal nach x und einmal nach y abgeleitet: $f_{xy} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$

Zweimalige partielle Ableitung nach y : $f_{yy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$

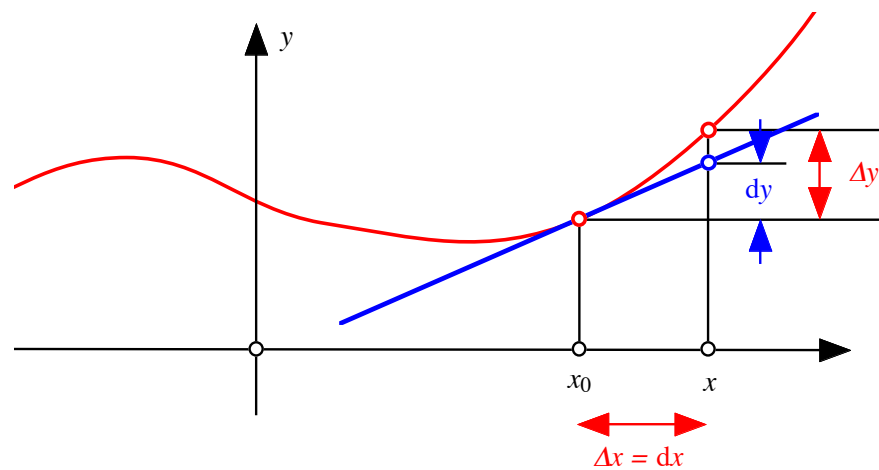
2.5.1 Exzessives Beispiel

$$f(x,y) = x^4 y^7$$

Feststellung: Die Reihenfolge der partiellen Ableitungen spielt keine Rolle.

2.6 Differential

2.6.1 Erinnerung



Echte Abweichung und Differential

Echte Abweichung: $\Delta y \approx f'(x_0) dx$

Differential: $dy = f'(x_0) dx$

Übergang zur Kettenregel: $y = f(x(t))$

$$\frac{dy}{dt} = f'(x(t)) \frac{dx}{dt}$$

2.6.2 Analogie, Kettenregel

$$\Delta f = f(x, y) - f(x_0, y_0) = f_x(x_0, y_0) \underbrace{(x - x_0)}_{dx \text{ oder } \Delta x} + f_y(x_0, y_0) \underbrace{(y - y_0)}_{dy \text{ oder } \Delta y} + r(x, y)$$

Echte Abweichung: $\Delta f \approx f_x dx + f_y dy$

Differenzial: $df = f_x dx + f_y dy$

Übergang zur Kettenregel: $f(x(t), y(t))$

$$\frac{df}{dt} = f_x \frac{dx}{dt} + f_y \frac{dy}{dt}$$

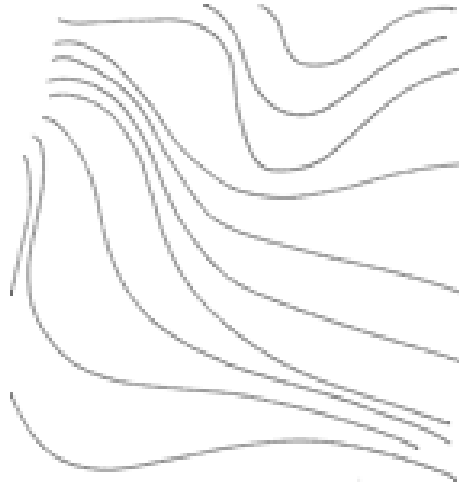
2.6.2.1 Beispiel

$$f(x, y) = xy^2$$

$$x(t) = e^{3t} \quad y(t) = \tan(t)$$

3 Richtungsableitung

3.1 Nochmals Niveaulinien



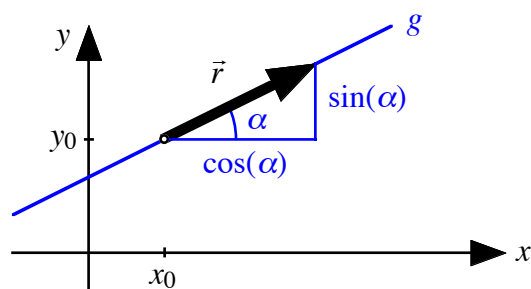
In welcher Richtung ist die Steigung am größten?

3.2 Erinnerung, spezielle Richtungen

$f_x = \frac{\partial f}{\partial x}$ Ableitung in x -Richtung, Steigung einer x -Linie

$f_y = \frac{\partial f}{\partial y}$ Ableitung in y -Richtung, Steigung einer y -Linie

3.3 Beliebige Richtung



Richtungsvektor \vec{r}

Wir geben eine beliebige Richtung durch einen Vektor $\vec{r} = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) \\ \sin(\alpha) \end{bmatrix}$ an. Es ist $|\vec{r}| = 1$.

Die Punkte auf der Geraden g können mit dem Parameter t durch

$$x(t) = x_0 + t \cos(\alpha)$$

$$y(t) = y_0 + t \sin(\alpha)$$

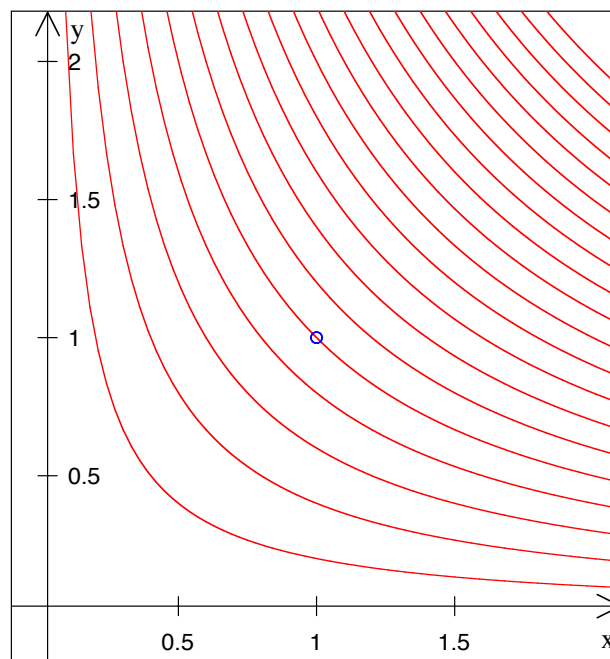
beschrieben werden.

Wir leiten nun an der Stelle (x_0, y_0) in Richtung \vec{r} ab. Dies bedeutet:

Somit gilt:
$$\frac{\partial f}{\partial \vec{r}}(x_0, y_0) = f_x(x_0, y_0) \cdot \cos(\alpha) + f_y(x_0, y_0) \cdot \sin(\alpha)$$

3.3.1 Beispiel

$f(x, y) = xy$. Die Niveaulinien kennen wir bereits:



Niveaulinien von $f(x, y) = xy$

Aus $f(x,y) = xy$ folgt $f_x = y$ und $f_y = x$. Wir leiten an der Stelle $(x_0, y_0) = (1, 1)$ in zwei verschiedenen Richtungen ab:

3.3.1.1 Rechtwinklig zu den Höhenlinien, steilster Anstieg.

Es ist $\alpha = 45^\circ = \frac{\pi}{4}$. Wir erhalten:

3.3.1.2 In Richtung der Höhenlinie, kein Anstieg

Es ist $\alpha = -45^\circ = -\frac{\pi}{4}$. Wir erhalten:

4 Der Gradient

4.1 Definition

Unter dem *Gradient* einer Funktion $f(x,y)$ verstehen wir folgenden *Vektor*:

$$\text{grad}(f)(x_0, y_0) = \begin{bmatrix} f_x(x_0, y_0) \\ f_y(x_0, y_0) \end{bmatrix}, \text{ einfacher: } \text{grad}(f) = \begin{bmatrix} f_x \\ f_y \end{bmatrix}$$

Unter dem *Gradient* einer Funktion $f(x,y,z)$ verstehen wir folgenden *Vektor*:

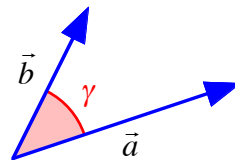
$$\text{grad}(f)(x_0, y_0, z_0) = \begin{bmatrix} f_x(x_0, y_0, z_0) \\ f_y(x_0, y_0, z_0) \\ f_z(x_0, y_0, z_0) \end{bmatrix}, \text{ einfacher: } \text{grad}(f) = \begin{bmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{bmatrix}$$

Für eine Funktion von n Variablen ist der Gradient entsprechend ein Vektor im n -dimensionalen Raum.

4.2 Richtungsableitung mit Gradient

4.2.1 Erinnerung: Skalarprodukt

$$\vec{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}, \vec{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$$



Vektoren mit Zwischenwinkel

Skalarprodukt:

$$\vec{a}\vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2$$

$$\vec{a}\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos(\gamma)$$

4.2.2 Richtungsableitung

Für die Ableitung einer Funktion $f(x,y)$ in Richtung des Vektors $\vec{r} = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) \\ \sin(\alpha) \end{bmatrix}$ fanden

wir die Formel: $\frac{\partial f}{\partial \vec{r}} = f_x \cdot \cos(\alpha) + f_y \cdot \sin(\alpha)$

Dies kann nun kürzer als Skalarprodukt der beiden Vektoren $\text{grad}(f) = \begin{bmatrix} f_x \\ f_y \end{bmatrix}$ und

$\vec{r} = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) \\ \sin(\alpha) \end{bmatrix}$ geschrieben werden:

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{r}} = f_x \cdot \cos(\alpha) + f_y \cdot \sin(\alpha) = \text{grad}(f) \cdot \vec{r}$$

4.2.3 Folgerungen

Ist γ der Winkel zwischen den Vektoren $\text{grad}(f)$ und \vec{r} , so gilt

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{r}} = \text{grad}(f) \cdot \vec{r} = |\text{grad}(f)| \cdot |\vec{r}| \cdot \cos(\gamma)$$

Daraus folgt:

$$\gamma = 0 \Rightarrow \cos(\gamma) = 1 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial \bar{r}} \text{ maximal}$$

$$\gamma = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos(\gamma) = 0 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial \bar{r}} = 0$$

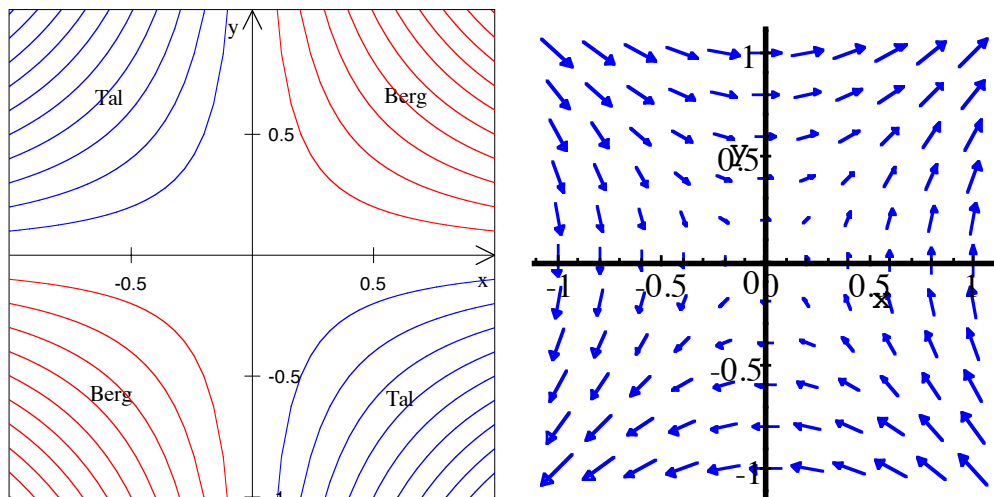
$$\gamma = \pi \Rightarrow \cos(\gamma) = -1 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial \bar{r}} \text{ minimal}$$

Der Gradient gibt also die Richtung des steilsten Anstieges an. Er steht rechtwinklig zu den Niveaulinien.

4.2.4 Beispiele

4.2.4.1 Beispiel: $f(x, y) = xy$

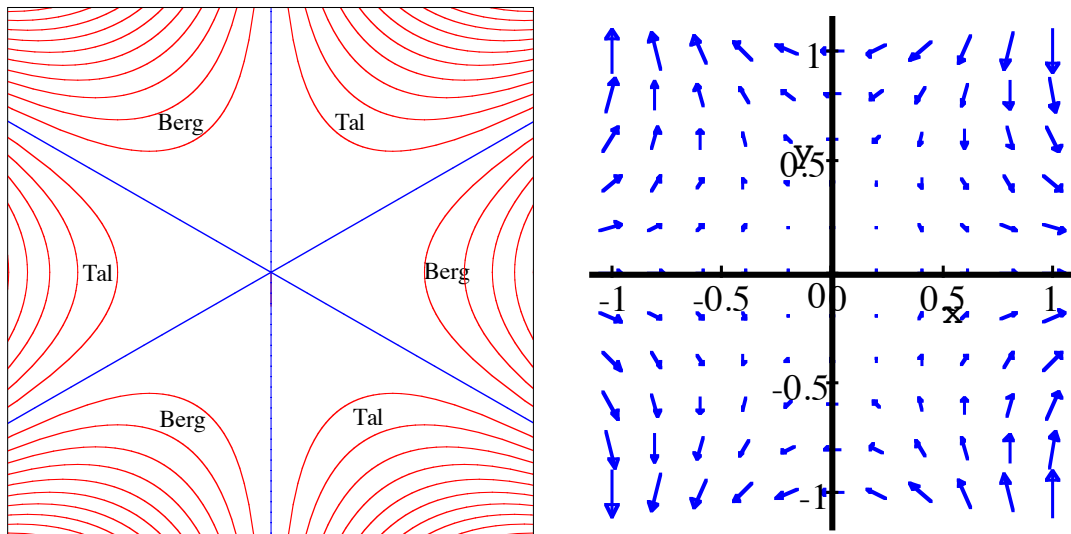
Die Grafik zeigt die Niveaulinien und die Gradientenrichtungen für die Funktion $f(x, y) = xy$. (Die Gradienten sind verkürzt gezeichnet, es stimmen nur die Richtungen.)



Niveaulinien und Gradientenrichtungen

4.2.4.2 Beispiel Affensattel

Die Grafik zeigt die Niveaulinien und die Gradientenrichtungen für den Affensattel. (Die Gradienten sind verkürzt gezeichnet, es stimmen nur die Richtungen.)



Niveaulinien und Gradientenrichtungen des Affensattels

Die Menge sämtlicher Gradienten einer Funktion wird als *Gradientenfeld* bezeichnet. Ein Gradientenfeld ist ein Sonderfall eines *Vektorfeldes*.

5 Der Nabla-Operator

Der Nabla-Operator dient einer kurzen Schreibweise, es gibt hier also nichts zu verstehen. Der Nabla-Operator ist ein „Pseudovektor“:

$$\nabla = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} \text{ oder } \nabla = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix}$$

Es sei nun $f(x,y)$ eine Funktion von zwei Variablen. Dann können wir schreiben:

$$\nabla f = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} f = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{bmatrix} = \text{grad}(f)$$

Wir tun so, wie wenn wir den Pseudovektor mit dem f multiplizieren.

Entsprechendes geht auch für eine Funktion von drei Variablen. Generell haben wir:

$$\nabla f = \text{grad}(f)$$

Wir werden später weitere Anwendungen dieser Schreibweise mit dem Nabla-Operator kennen lernen. Sein Name stammt von der Bezeichnung eines hebräischen Saiteninstruments, das in etwa die Form dieses Zeichens hatte.

Im Englischen wird für den Nabla-Operator auch die Bezeichnung Del-Operator verwendet (Del wie Delta).

6 Zusammenfassung

6.1 Funktionen zweier Variablen

Darstellung als Fläche im Raum. x -Linien und y -Linien. Niveaulinien (Höhenlinien)

6.2 Partielle Ableitungen

$$f_x(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0}$$

$$f_y(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{f(x_0, y) - f(x_0, y_0)}{y - y_0}$$

Tangentialebene an der Stelle (x_0, y_0) :

$$g(x, y) = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

Höhere partielle Ableitungen: $f_{xx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $f_{xy} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$, $f_{yy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$. Reihenfolge des Ableitens spielt keine Rolle.

Kettenregel: $\frac{df}{dt} = f_x \frac{dx}{dt} + f_y \frac{dy}{dt}$

6.3 Gradient

$$\text{grad}(f) = \begin{bmatrix} f_x \\ f_y \end{bmatrix}, \quad \text{grad}(f) = \begin{bmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{bmatrix}$$

Richtung des steilsten Anstieges. Orthogonal zu Niveaulinien oder Niveauflächen.

Richtungsableitung: $\frac{\partial f}{\partial \vec{r}} = \text{grad}(f) \cdot \vec{r}$

6.4 Nabla Operator

Pseudovektor: $\nabla = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix}$ oder $\nabla = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix}$

Anwendung: $\nabla f = \text{grad}(f)$