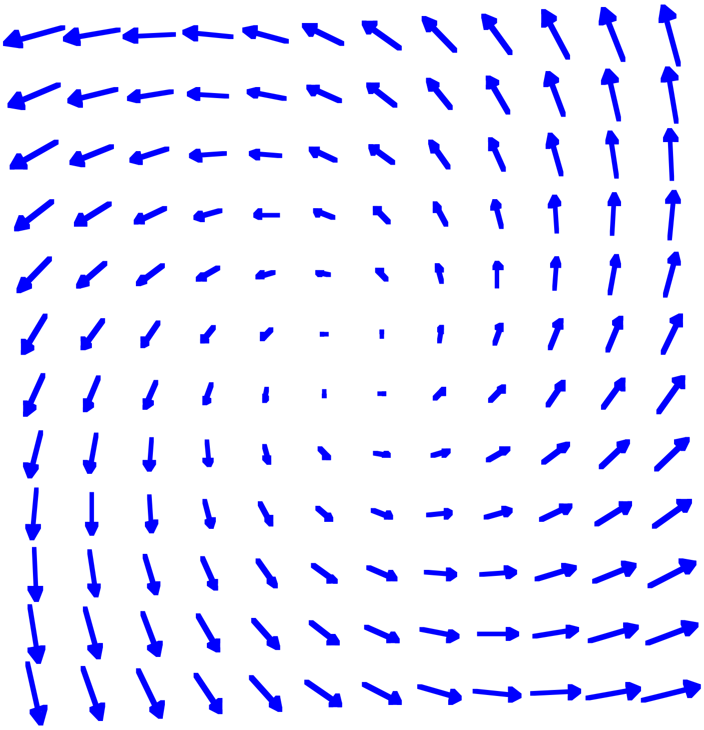
Hans Walser

Mathematik 1 für Naturwissenschaften



Modul 114

Vektorfelder und Wegintegrale

Lernumgebung. Teil 1

UNI BASEL

Modul 114 für die Lehrveranstaltung *Mathematik 1 für Naturwissenschaften*

Winter 2003/04	Erstausgabe
Winter 2004/05	Erweiterung
Winter 2005/06	Erweiterung. Geändertes Layout
Winter 2006/07	MathType. Ergänzungen. Fehlerkorrekturen
Herbst 2007	Erweiterungen
Herbst 2008	Erweiterung. Unterteilung in zwei Teile
Herbst 2012	Erweiterung
Herbst 2013	Erweiterung

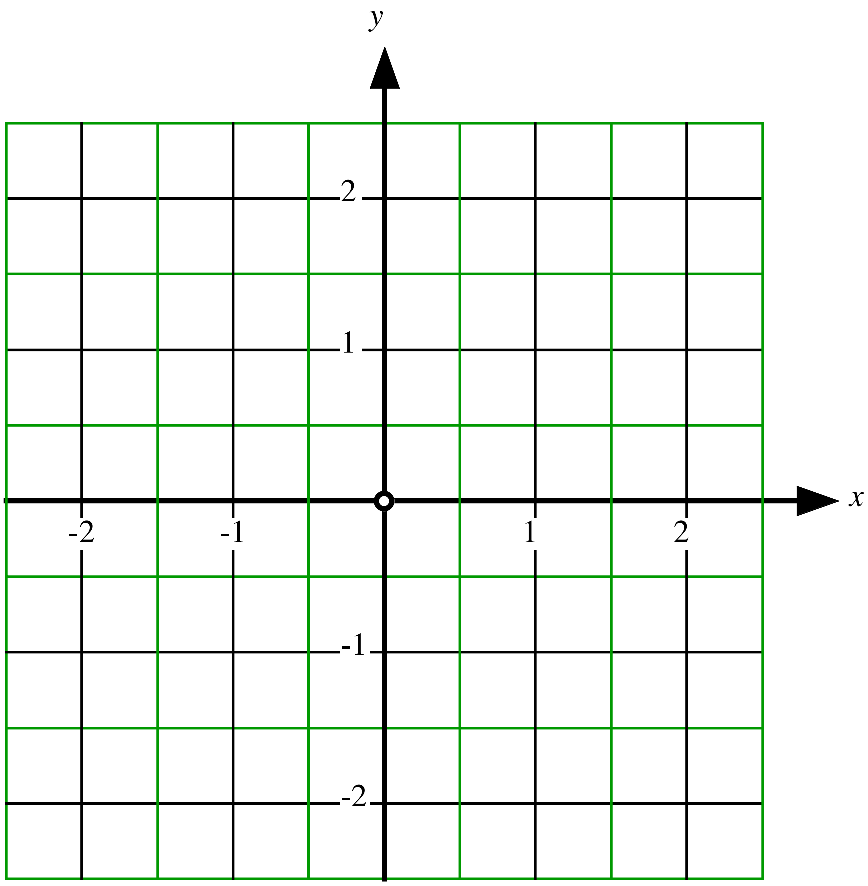
last modified: 17. November 2013

Hans Walser
Mathematisches Institut, Rheinsprung 21, 4051 Basel
www.walser-h-m.ch/hans

Inhalt

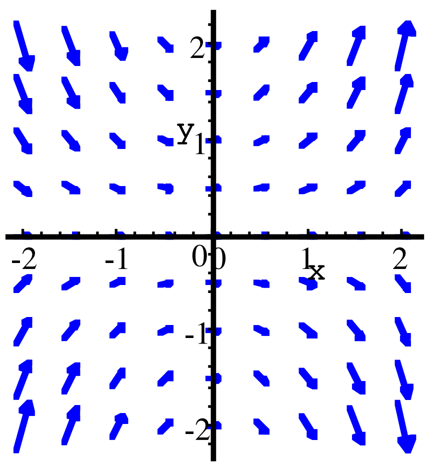
1 Vektorfeld

Skizzieren Sie das Vektorfeld $F(x,y)=\begin{bmatrix}1\\xy\end{bmatrix}$.



Vektorfeld?

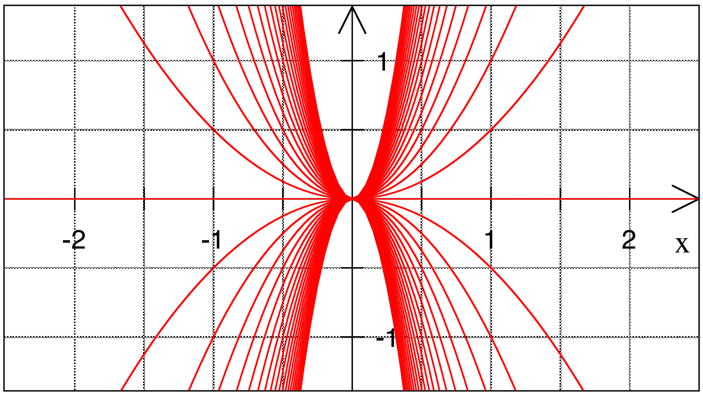
Ergebnis



Vektorfeld

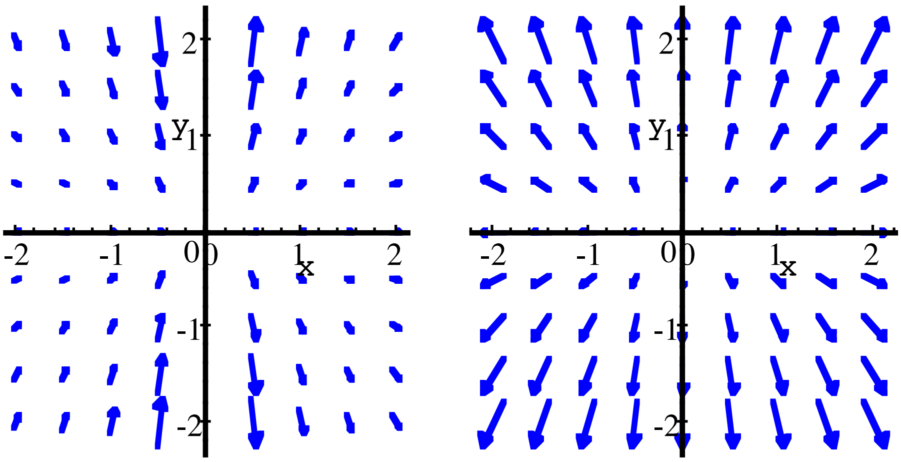
2 Vektorfeld

Die Figur zeigt die Parabelschar $y = ax^2$. Gesucht ist ein tangentiales Vektorfeld.



Tangentielles Vektorfeld?

Ergebnis



Ergebnisse, Beispiele

Lösungsweg

Ein beliebiger Parabelpunkt hat die Koordinaten $\left(x, ax^2\right)$. In diesem Punkt hat die Parabel die Steigung $y' = 2ax = 2\frac{ax^2}{x} = 2\frac{y}{x}$. Passende Vektorfelder sind daher zum Beispiel $F(x,y) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2\frac{y}{x} \end{bmatrix}$ (Figur oben links) oder $F(x,y) = \begin{bmatrix} x \\ 2y \end{bmatrix}$ (Figur oben rechts). Die beiden Vektorfelder unterscheiden sich nur in der Länge der Vektoren.

3 Gradientenfeld

Gegeben ist das Vektorfeld $F(x,y)=\begin{bmatrix}\frac{-2y}{(x-y)^2}\\ \frac{2x}{(x-y)^2}\end{bmatrix}$.

a) Ist die Integrabilitätsbedingung für ein Gradientenfeld erfüllt?

b) Falls es sich um ein Gradientenfeld handelt, ist die zugehörige Potenzialfunktion $f(x,y)$ mit $f(1,0)=0$ gesucht. Kontrolle durch Gradientenbildung.

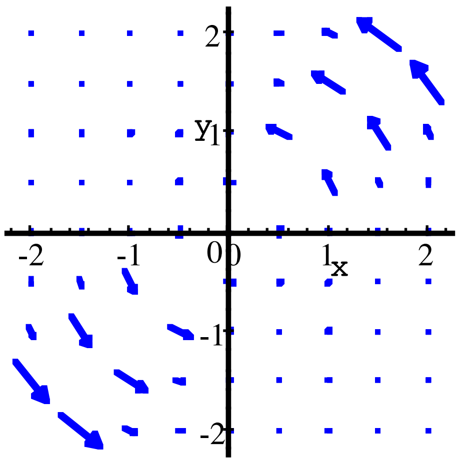
c) Skizze des Vektorfeldes

Ergebnis

a) Ja

b) $f(x,y)=\frac{2y}{x-y}$

c)



Vektorfeld

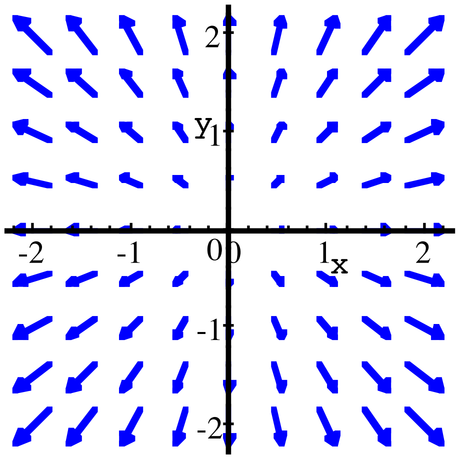
4 Gradientenfeld

a) Gesucht ist eine Funktion $f(x,y)$ mit $\operatorname{grad}(f)=\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}$.

b) Gesucht ist eine Funktion $f(x,y)$ mit $\operatorname{grad}(f)=\begin{bmatrix}y\\ x\end{bmatrix}$.

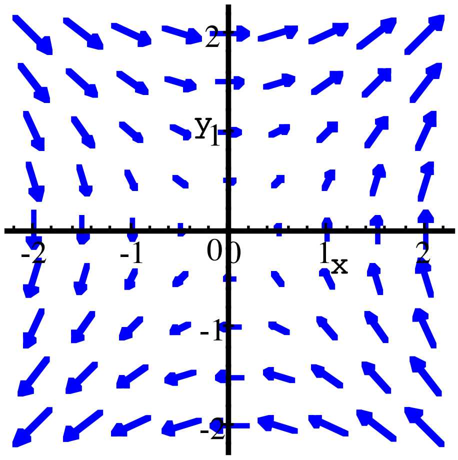
Ergebnis

a) $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \operatorname{grad}\left(\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2 + C\right)$. Die Figur zeigt das Gradientenfeld. Die Niveaulinien der Potenzialfunktion sind konzentrische Kreise.



Gradientenfeld

b) $\begin{bmatrix} y \\ x \end{bmatrix} = \operatorname{grad}(xy + C)$. Die Figur zeigt das Gradientenfeld. Die Niveaulinien der Potenzialfunktion sind Hyperbeln von der Art $y = \frac{k}{x}$.



Gradientenfeld

5 Gradientenfeld

a) Gibt es eine Funktion $f(x,y)$ mit $\operatorname{grad}(f) = \begin{bmatrix} 2x \\ y \end{bmatrix}$?

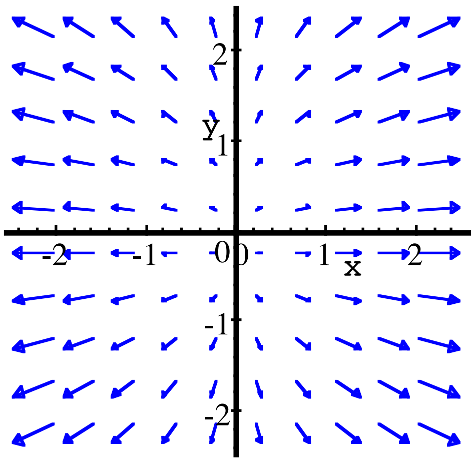
b) Gibt es eine Funktion $f(x,y)$ mit $\operatorname{grad}(f) = \begin{bmatrix} y \\ 2x \end{bmatrix}$?

c) Gibt es eine Funktion $f(x,y)$ mit $\operatorname{grad}(f)=\begin{bmatrix}\cos(x)\cosh(y)\\ \sin(x)\sinh(y)\end{bmatrix}$?

Ergebnis

a) Ja, Integrabilitätsbedingung erfüllt: $\frac{\partial(2x)}{\partial y}=0$ und $\frac{\partial(y)}{\partial x}=0$.

$f(x,y)=x^2+\frac{1}{2}y^2+C$. Die Figur zeigt das Gradientenfeld. Die Niveaulinien der Potenzialfunktion sind Ellipsen.



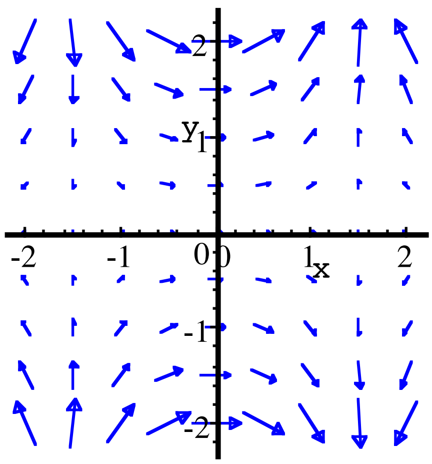
Gradientenfeld von $f(x,y)=x^2+\frac{1}{2}y^2+C$

b) Nein, Integrabilitätsbedingung verletzt: $\frac{\partial(y)}{\partial y}=1$, aber $\frac{\partial(2x)}{\partial x}=2\neq 1$,

c) Ja, Integrabilitätsbedingung erfüllt:

$\frac{\partial(\cos(x)\cosh(y))}{\partial y}=\cos(x)\sinh(y)$ und $\frac{\partial(\sin(x)\sinh(y))}{\partial x}=\cos(x)\sinh(y)$.

$f(x,y)=\sin(x)\cosh(y)+C$. Die Figur zeigt das Gradientenfeld.



Gradientenfeld von $f(x,y)=\sin(x)\cosh(y)+C$

6 Gradientenfeld

$$F(x,y) = \begin{bmatrix} \dfrac{-x}{\left(x^2+y^2\right)^{\frac{3}{2}}} \\[2ex] \dfrac{-y}{\left(x^2+y^2\right)^{\frac{3}{2}}} \end{bmatrix}$$

a) Ist die Integrabilitätsbedingung erfüllt?

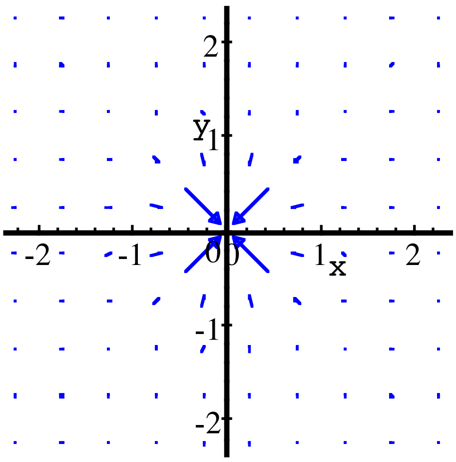
b) Falls ja, $f(x,y) = ?$

Ergebnis

a) Ja

b) $f(x,y) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$

Die Figur zeigt das Gradientenfeld. Die Niveaulinien der Potenzialfunktion sind konzentrische Kreise.



Gradientenfeld von $f(x,y) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$

7 Gradientenfeld

Im Raum sei ein Vektorfeld $K(x,y,z) = \begin{bmatrix} u(x,y,z) \\ v(x,y,z) \\ w(x,y,z) \end{bmatrix}$ mit $\operatorname{rot}(K) = 0$ gegeben. Dann ist K ein Gradientenfeld, also $K = \operatorname{grad}(f)$. Wie finden wir f?

Tipp: Analogie zur Formel in der Ebene finden: $f(x,y) = \int_{x_0}^{x} u(t,y_0)dt + \int_{y_0}^{y} v(x,s)ds$

Ergebnis

$$f(x,y,z) = \int_{x_0}^{x} u(r,y_0,z_0)\mathrm{d}r + \int_{y_0}^{y} v(x,s,z_0)\mathrm{d}s + \int_{z_0}^{z} w(x,y,t)\mathrm{d}t + C$$

8 Gradientenfeld

$$F(x,y,z) = \begin{bmatrix} 6xy \\ 3x^2 \\ -4z \end{bmatrix}$$

a) Ist dieses Vektorfeld konservativ?

b) Falls ja, welches ist die Potenzialfunktion $f(x,y,z)$?

Ergebnis

a) Ja

b) $f(x,y,z) = 3x^2y - 2z^2 + C$

Lösungsweg

a) $\mathrm{rot}(F) = \begin{bmatrix} \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0-0 \\ 0-0 \\ 6x-6x \end{bmatrix} = \vec{0}$

b) Potenzialfunktion

$$\begin{aligned} f(x,y,z) - f(x_0,y_0,z_0) &= \int_{x_0}^{x} 6ry_0\mathrm{d}r + \int_{y_0}^{y} 3x^2\mathrm{d}s + \int_{z_0}^{z} -4t\mathrm{d}t \\ &= 3r^2y_0\Big|_{x_0}^{x} + 3x^2s\Big|_{y_0}^{y} - 2t^2\Big|_{z_0}^{z} \\ &= 3x^2y_0 - 3x_0^2y_0 + 3x^2y - 3x^2y_0 - 2z^2 + 2z_0^2 \\ &= \underbrace{3x^2y - 2z^2}_{=f(x,y,z)} - \underbrace{\left(3x_0^2y_0 - 2z_0^2\right)}_{=f(x_0,y_0,z_0)} \end{aligned}$$

Somit ist $f(x,y,z) = 3x^2y - 2z^2 + C$.

9 Gradientenfeld

$$F(x,y,z)=\begin{bmatrix} 6xyz^3 \\ 3x^2z^3-8yz \\ 9x^2yz^2-4y^2 \end{bmatrix}$$

a) Ist dieses Vektorfeld konservativ?

b) Falls ja, welches ist die Potenzialfunktion $f(x,y,z)$?

Ergebnis

a) Ja

b) $f(x,y,z)=3x^2yz^3-4y^2z+C$

Lösungsweg

a) $\operatorname{rot}(F)=\begin{bmatrix} \frac{\partial w}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial u}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 9x^2z^2-9x^2z^2 \\ 18xyz^2-18xyz^2 \\ 6xz^3-6xz^3 \end{bmatrix}=\vec{0}$

b) Potenzialfunktion

$$f(x,y,z)-f(x_0,y_0,z_0)=\int_{x_0}^{x} 6ry_0z_0^3\mathrm{d}r+\int_{y_0}^{y}\left(3x^2z_0^3-8sz_0\right)\mathrm{d}s+\int_{z_0}^{z}\left(9x^2yt^2-4y^2\right)\mathrm{d}t$$

$$=3r^2y_0z_0^3\Big|_{x_0}^{x}+\left(3x^2sz_0^3-4s^2z_0\right)\Big|_{y_0}^{y}+\left(3x^2yt^3-4y^2t\right)\Big|_{z_0}^{z}$$

$$=3x^2y_0z_0^3-3x_0^2y_0z_0^3+3x^2yz_0^3-4y^2z_0-3x^2y_0z_0^3+4y_0^2z_0+3x^2yz^3-4y^2z-3x^2yz_0^3+4y^2z_0$$

$$=\underbrace{3x^2yz^3-4y^2z}_{=f(x,y,z)}-\underbrace{\left(3x_0^2y_0z_0^3-4y_0^2z_0\right)}_{=f(x_0,y_0,z_0)}$$

Somit ist $f(x,y,z)=3x^2yz^3-4y^2z+C$.

10 Gradientenfeld

$$F(x,y,z)=\begin{bmatrix} -\sin(x)\sin(y)\tan(z) \\ \cos(x)\cos(y)\tan(z) \\ \cos(x)\sin(y)\frac{1}{\cos^2(z)} \end{bmatrix}$$

a) Ist dieses Vektorfeld konservativ?

b) Falls ja, welches ist die Potenzialfunktion $f(x,y,z)$ mit $f(0,0,0)=15$?

Ergebnis

a) Ja

b) $f(x,y,z)=\cos(x)\sin(y)\tan(z)+15$

Lösungsweg

a) $\operatorname{rot}(F)=\begin{bmatrix}\frac{\partial w}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial z}\\ \frac{\partial u}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial x}\\ \frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos(x)\cos(y)\frac{1}{\cos^2(z)}-\cos(x)\cos(y)\frac{1}{\cos^2(z)}\\ -\sin(x)\sin(y)\frac{1}{\cos^2(z)}+\sin(x)\sin(y)\frac{1}{\cos^2(z)}\\ -\sin(x)\cos(y)\tan(z)+\sin(x)\cos(y)\tan(z)\end{bmatrix}=\vec{0}$

b) Potenzialfunktion

$$f(x,y,z)-\underbrace{f(0,0,0)}_{=15}=$$

$$=\int_0^x -\sin(r)\underbrace{\sin(0)}_{0}\underbrace{\tan(0)}_{0}\mathrm{d}r+\int_0^y\cos(x)\cos(s)\underbrace{\tan(0)}_{0}\mathrm{d}s+\int_0^z\cos(x)\sin(\mathrm{y})\frac{1}{\cos^2(t)}\mathrm{d}t$$

$$=\cos(x)\sin(y)\tan(t)\big|_0^z=\cos(x)\sin(y)\tan(t)$$

Somit ist $f(x,y,z)=\cos(x)\sin(y)\tan(z)+15$.

11 Gradientenfeld

$$F(x,y,z)=\begin{bmatrix}6x\mathrm{e}^y\cos(z)\\ 3x^2\mathrm{e}^y\cos(z)-1\\ -3x^2\mathrm{e}^y\sin(z)\end{bmatrix}$$

a) Ist dieses Vektorfeld konservativ?

b) Falls ja, welches ist die Potenzialfunktion $f(x,y,z)$ mit $f(7,0,0)=200$?

Ergebnis

a) Ja

b) $f(x,y,z)=3x^2\mathrm{e}^y\cos(z)-y+53$

Lösungsweg

a) $$\operatorname{rot}(F)=\begin{bmatrix}\frac{\partial w}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial z}\\ \frac{\partial u}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial x}\\ \frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-3x^2e^y\sin(z)+3x^2e^y\sin(z)\\ -6xe^y\sin(z)+6xe^y\sin(z)\\ 6xe^y\cos(z)-6xe^y\cos(z)\end{bmatrix}=\vec{0}$$

b) Potenzialfunktion

$$f(x,y,z)-\underbrace{f(7,0,0)}_{200}=$$

$$=\int_7^x 6r\underbrace{e^0}_{1}\underbrace{\cos(0)}_{1}dr+\int_0^y\left(3x^2e^s\underbrace{\cos(0)}_{1}-1\right)ds+\int_0^z -3x^2e^y\sin(t)dt$$

$$=3r^2\Big|_7^x+\left(3x^2e^s-s\right)\Big|_0^y+3x^2e^y\cos(t)\Big|_0^z$$

$$=3x^2-\underbrace{3\cdot 7^2}_{147}+3x^2e^y-y-3x^2e^0+0+3x^2e^y\cos(z)-3x^2e^y\underbrace{\cos(0)}_{1}$$

$$=-147+3x^2e^y\cos(z)-y$$

Daraus ergibt sich: $f(x,y,z)=3x^2e^y\cos(z)-y+53$

12 Gradientenfeld

$$F(w,x,y,z)=\begin{bmatrix}1\\2\\3\\4\end{bmatrix}$$

a) Ist dieses Vektorfeld konservativ?

b) Falls ja, welches ist die Potenzialfunktion $f(x,y,z)$?

Ergebnis

a) Ja

b) $f(w,x,y,z)=w+2x+3y+4z+C$

13 Konservatives Vektorfeld

Wir haben in der Vorlesung gesehen, dass für ein konservatives Vektorfeld die Rotation verschwindet. Stellen Sie diesen Sachverhalt mit Hilfe des Nabla-Operators dar.

Bearbeitung

Ein konservatives Vektorfeld F ist ein Gradientenfeld, also: $F = \operatorname{grad}(f) = \nabla f$. Die Rotation davon verschwindet, also:

$$\operatorname{rot}(F) = \nabla \times F = \nabla \times \operatorname{grad}(f) = \nabla \times \nabla f = \vec{0}$$

Direkte Herleitung:

$$\nabla f = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{bmatrix}$$

Damit wird:

$$\nabla \times \nabla f = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \vec{0}$$

Die Nullen ergeben sich wegen der Vertauschbarkeit der partiellen Ableitungen.

14 Konstantes Vektorfeld

a) Ist ein konstantes Vektorfeld konservativ?

b) Falls ja, welches ist die Potenzialfunktion?

Ergebnis

a) Ja

b)

Zu $F(x_1, \ldots, x_n) = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$ gehört die lineare Potenzialfunktion

$$f(x_1, \ldots, x_n) = c_1 x_1 + \cdots + c_n x_n + C$$

15 Wege und Kurven

Skizzieren/plotten Sie:

a) $y = f(x) = x^2,\ x \in [-1,1]$

b) $\vec{x}(t) = \begin{bmatrix} t \\ t^2 \end{bmatrix},\ t \in [-1,1]$

c) $\vec{x}(t)=\begin{bmatrix}\sqrt{t}\\ t\end{bmatrix}, t\in[0,1]$

d) $\vec{x}(t)=\begin{bmatrix}t^2\\ t^4\end{bmatrix}, t\in[-1,1]$

e) $\vec{x}(t)=\begin{bmatrix}t^3\\ t^6\end{bmatrix}, t\in[-1,1]$

f) $\vec{x}(t)=\begin{bmatrix}\cos(t)\\ \cos^2(t)\end{bmatrix}, t\in[0,2\pi]$

g) $\vec{x}(t)=\begin{bmatrix}\cos(t)\\ \cos^2(t)\end{bmatrix}, t\in[0,\pi]$

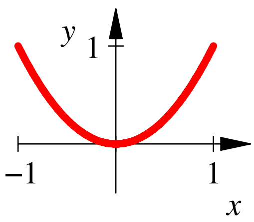
h) $\vec{x}(t)=\begin{bmatrix}\sin(t)\\ \sin^2(t)\end{bmatrix}, t\in[0,\pi]$

i) $\vec{x}(t)=\begin{bmatrix}e^t\\ e^{2t}\end{bmatrix}, t\in\,]-\infty,0]$

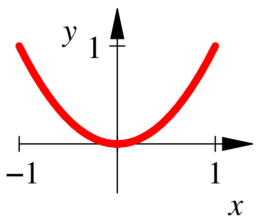
Ergebnisse

rot: einfach durchlaufene Kurve

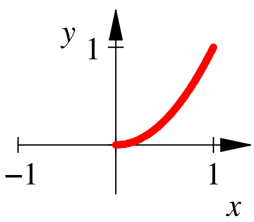
blau: doppelt durchlaufene Kurve



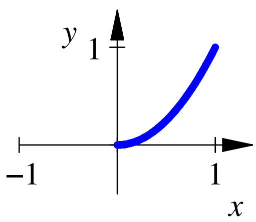
a)



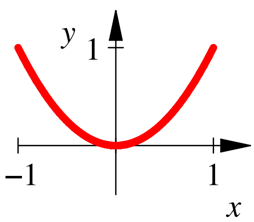
b)



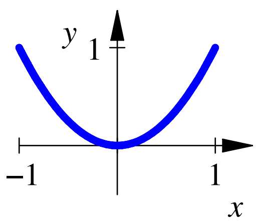
c)



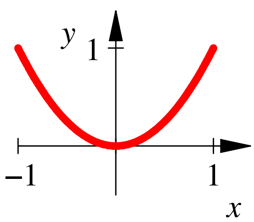
d)



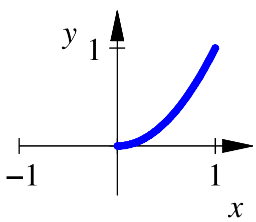
e)



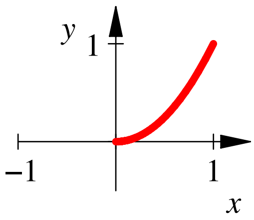
f)



g)



h)

i) 

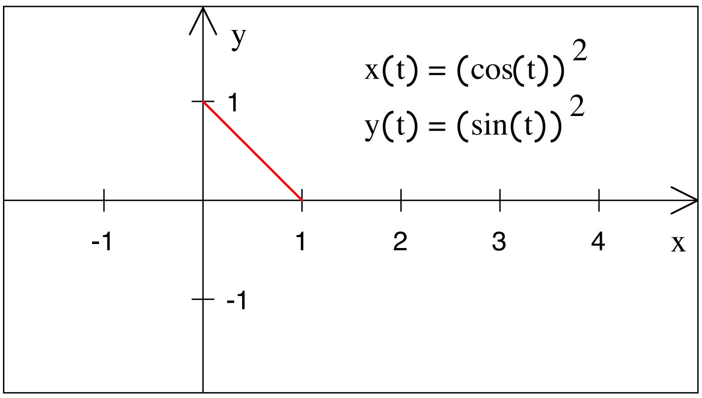
16 Parameterdarstellung

a) Welche Kurve wird durch $\vec{x}(t)=\begin{bmatrix}\cos^2(t)\\ \sin^2(t)\end{bmatrix}$; $t\in[0,2\pi]$ durchlaufen?

b) Welche Kurve wird durch $\vec{x}(t)=\begin{bmatrix}\frac{1-t^2}{1+t^2}\\ \\ \frac{2t}{1+t^2}\end{bmatrix}$; $t\in\mathbb{R}$ durchlaufen?

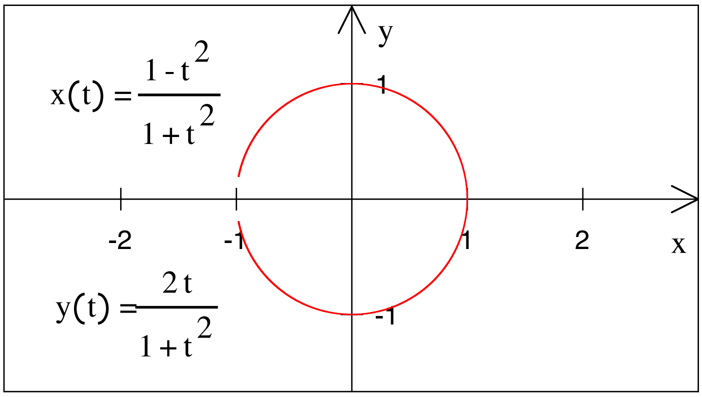
Ergebnis

a) Wegen $(\cos(t))^2+(\sin(t))^2=1$ muss die „Kurve" die Gleichung $x+y=1$ erfüllen. Da aber (wegen den Quadraten) sowohl x wie auch y nicht negativ sein können, kommt nur der Abschnitt im ersten Quadranten in Frage. Dieser Abschnitt wird vier Mal durchlaufen.



„Kurve"

b) Wegen $\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)^2+\left(\frac{2t}{1+t^2}\right)^2=1$ liegt die Kurve auf dem Einheitskreis. Allerdings wird der Punkt $(-1,0)$ nicht erreicht; t müsste dazu ∞ sein.



Einheitskreis

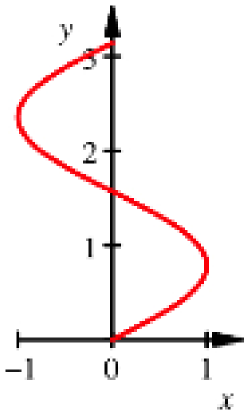
17 Parameterdarstellung

Was ergibt die Parameterdarstellung:

$$\vec{x}(t) = \begin{bmatrix} \sin(t) \\ \frac{t}{2} \end{bmatrix}, \quad t \in [0, 2\pi]$$

Bearbeitung

Wir erhalten eine „stehende“ Sinuskurve, die aber auf die Hälfte gestaucht ist.



Stehende Sinuskurve

18 Unterschied?

Worin unterscheiden sich die Kurven mit den Parameterdarstellungen:

$$\vec{x}_1(t) = \begin{bmatrix} f(t) \\ g(t) \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{x}_2(t) = \begin{bmatrix} g(t) \\ f(t) \end{bmatrix}$$

Bearbeitung

Die beiden Kurven sind an der Geraden $y = x$ gespiegelt.

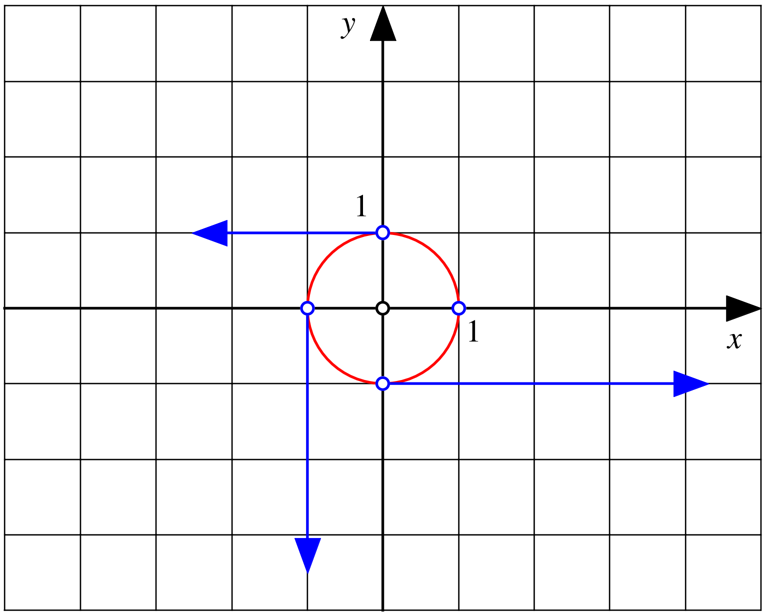
19 Parameterdarstellung

$$\vec{x}(t) = \begin{bmatrix} \cos(t^2) \\ \sin(t^2) \end{bmatrix}; \quad t \in \left[0, \sqrt{2\pi}\right]$$

Zeichnen Sie den Kreis (Radius 1 cm) mit den Tangentialvektoren für

$t = 0, \sqrt{\frac{\pi}{2}}, \sqrt{\pi}, \sqrt{\frac{3}{2}\pi}$

Ergebnis



Tangentialvektoren

Lösungsweg

Aus $\vec{x}(t) = \begin{bmatrix} \cos(t^2) \\ \sin(t^2) \end{bmatrix}$ ergibt sich $\dot{\vec{x}}(t) = \begin{bmatrix} -2t\sin(t^2) \\ 2t\cos(t^2) \end{bmatrix}$ und $\left|\dot{\vec{x}}(t)\right| = 2t$.

20 Kurvenlänge

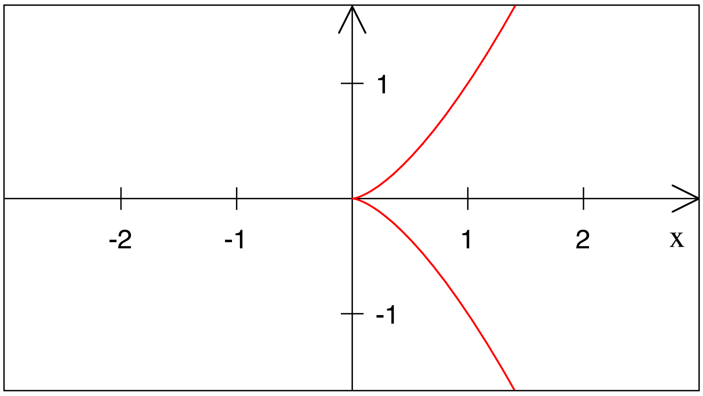
Die durch $\vec{x}(t) = \begin{bmatrix} t^2 \\ t^3 \end{bmatrix}$ gegebene Kurve heißt *Neilesche Parabel* (William Neile, 1637 - 1670).

a) Skizzieren Sie diese Kurve für $t \in [0,1]$ und vergleichen Sie mit $y = x$ und $y = x^2$.

b) Kurvenlänge für $t \in [0,1]$?

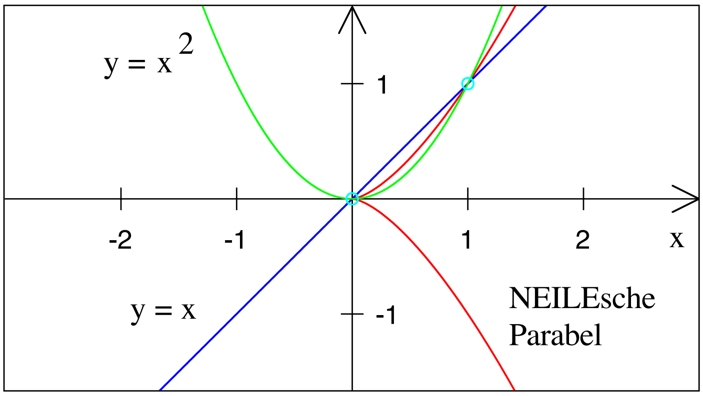
Ergebnis

a)



Neilesche Parabel

Vergleich mit $y = x$ und $y = x^2$:



Vergleich

b) Die Kurvenlänge für $t \in [0,1]$ beträgt $\frac{1}{27}\left(13^{\frac{3}{2}} - 4^{\frac{3}{2}}\right) \approx 1.4397$

Lösungsweg

Aus $\vec{x}(t) = \begin{bmatrix} t^2 \\ t^3 \end{bmatrix}$ folgt $\dot{\vec{x}}(t) = \begin{bmatrix} 2t \\ 3t^2 \end{bmatrix}$ und $\left|\dot{\vec{x}}(t)\right| = \sqrt{4t^2 + 9t^4} = t\sqrt{4 + 9t^2}$. Somit ist:

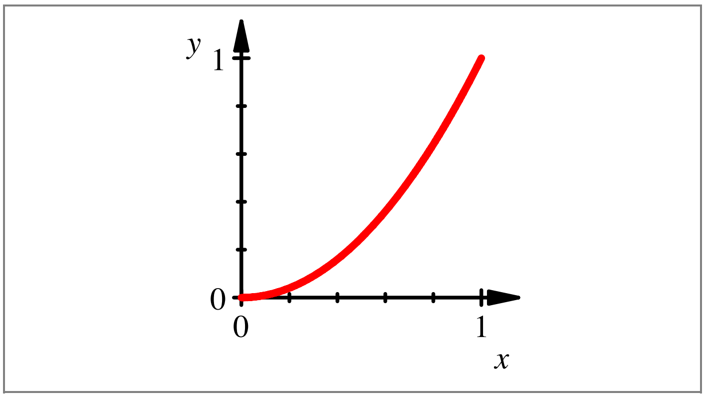
$$s = \int_0^1 t\sqrt{4 + 9t^2}\,\mathrm{d}t$$

Mit der Substitution $u = 4 + 9t^2$ folgt $\mathrm{d}u = 18t\mathrm{d}t$ und:

$$s = \int_0^1 t\sqrt{4 + 9t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{18}\int_4^{13} \sqrt{u}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{27}u^{\frac{3}{2}}\Big|_4^{13} = \frac{1}{27}\left(13^{\frac{3}{2}} - 4^{\frac{3}{2}}\right) \approx 1.4397$$

21 Kurvenlänge

Berechnen Sie die Länge des Parabelbogens $y = x^2$ für $x \in [0,1]$.



Parabelbogen

Tipp: Parabel in Parameterform bringen.

Lösungsweg

Der Parabelbogen kann durch $\vec{x}(t) = \begin{bmatrix} t \\ t^2 \end{bmatrix}$, $t \in [0,1]$ parametrisiert werden. Daraus folgt $\dot{\vec{x}}(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2t \end{bmatrix}$ und $|\dot{\vec{x}}(t)| = \sqrt{1+4t^2}$. Somit ist:

$$s = \int_0^1 \sqrt{1+4t^2}\,\mathrm{d}t$$

Mit der Substitution $u = 2t$ ergibt sich:

$$s = \int_0^1 \sqrt{1+4t^2}\,\mathrm{d}t = \tfrac{1}{2}\int_0^2 \sqrt{1+u^2}\,\mathrm{d}u$$

In der Formelsammlung finden wir:

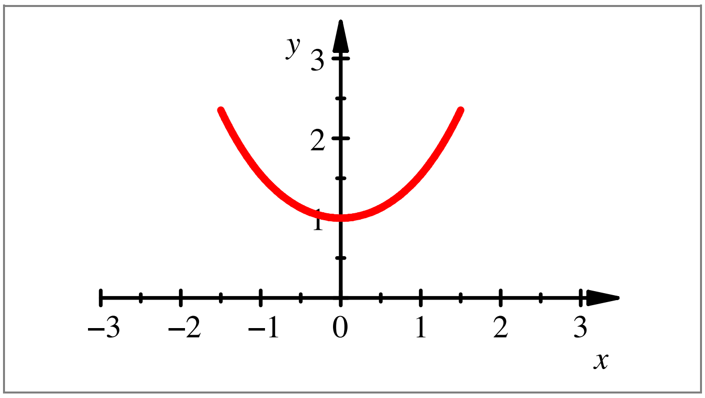
$$\int \sqrt{a^2+x^2}\,\mathrm{d}x = \tfrac{x}{2}\sqrt{a^2+x^2} + \tfrac{a^2}{2}\ln\left(x+\sqrt{a^2+x^2}\right)$$

Damit ergibt sich in unserem Fall:

$$\begin{aligned} s &= \tfrac{1}{2}\int_0^2 \sqrt{1+u^2}\,\mathrm{d}u = \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{x}{2}\sqrt{1+x^2} + \tfrac{1}{2}\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\right)\Bigg|_0^2 \\ &= \tfrac{1}{2}\left(\sqrt{5} + \tfrac{1}{2}\ln\left(2+\sqrt{5}\right)\right) \approx 1.4789 \end{aligned}$$

22 Länge der Kettenlinie

Die Funktion $y = \cosh(t)$ beschreibt die so genannte Kettenlinie, weil eine durchhängende Kette diese Form hat. Wie lang ist die Kettenlinie für $x \in [-1.5, 1.5]$?



Kettenlinie

Bearbeitung

Parametrisierung:

$$\vec{x}(t) = \begin{bmatrix} t \\ \cosh(t) \end{bmatrix}; \quad t \in [-1.5, 1.5]$$

Damit wird:

$$\dot{\vec{x}}(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ \sinh(t) \end{bmatrix}$$

$$\left|\dot{\vec{x}}(t)\right| = \sqrt{1 + \sinh^2(t)} = \cosh(t)$$

$$s = \int_{-1.5}^{1.5} \cosh(t)\,\mathrm{d}t = \sinh(t)\Big|_{-1.5}^{1.5} = 2\sinh(1.5) \approx 4.25855891019$$

23 Wäscheklammer

Hat die Spiralfeder in einer Wäscheklammer ein Rechtsgewinde oder ein Linksgewinde?

Wäscheklammer

Antwort

Linksgewinde. Warum das bei den Wäscheklammern so ist, weiß ich auch nicht.

24 Kurvenlänge

Gesucht ist die Länge der Schraubenlinie $\vec{x}(t)=\begin{bmatrix} r\cos(t) \\ r\sin(t) \\ pt \end{bmatrix};\ t\in[0,2\pi]$

a) rechnerisch,

b) durch eine geometrische Überlegung.

Ergebnis

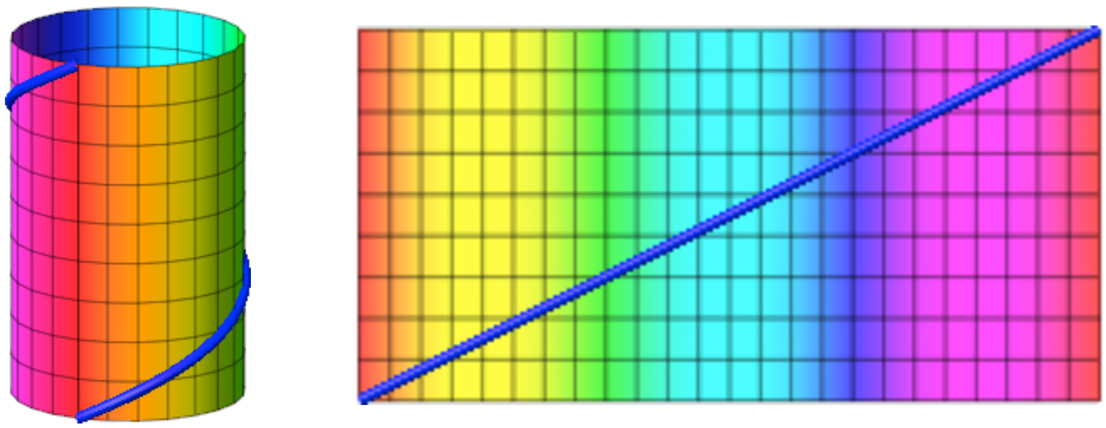
$s=2\pi\sqrt{r^2+p^2}$

Lösungsweg

a) Aus $\vec{x}(t)=\begin{bmatrix} r\cos(t) \\ r\sin(t) \\ pt \end{bmatrix}$ folgt $\dot{\vec{x}}(t)=\begin{bmatrix} -r\sin(t) \\ r\cos(t) \\ p \end{bmatrix}$ und $\left|\dot{\vec{x}}(t)\right|=\sqrt{r^2+p^2}$. Somit ist

$$s = \int_0^{2\pi} \sqrt{r^2 + p^2}\,\mathrm{d}t = 2\pi\sqrt{r^2 + p^2}$$

b) Abwickeln des Trägerzylinders ergibt ein Rechteck der Länge $2\pi r$ und der Höhe $2\pi p$. Seine Diagonale ist das längentreue Bild der Schraubenlinie.



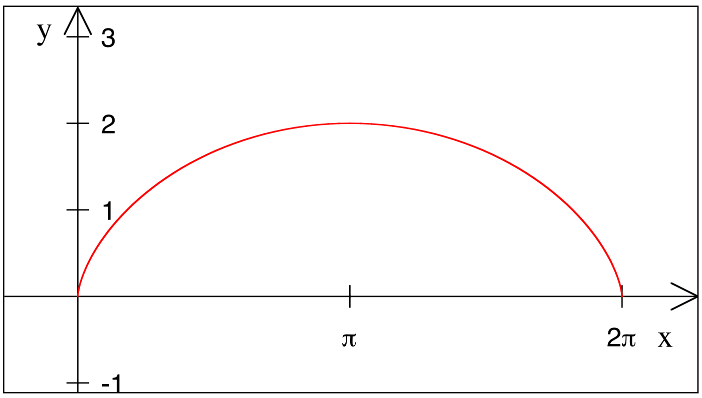
Schraubenlinie auf Zylinder

25 Kurvenlänge

Wie lang ist die durch $x(t) = \begin{bmatrix} t - \sin(t) \\ 1 - \cos(t) \end{bmatrix}$; $t \in [0, 2\pi]$ beschriebene Kurve?

Ergebnis

Es handelt sich um die so genannte Zykloide. Ihre Länge ist 8.



Zykloide

Lösungsweg

Aus $\vec{x}(t) = \begin{bmatrix} t - \sin(t) \\ 1 - \cos(t) \end{bmatrix}$ folgt $\dot{\vec{x}}(t) = \begin{bmatrix} 1 - \cos(t) \\ \sin(t) \end{bmatrix}$ und:

$$\left|\dot{\vec{x}}(t)\right| = \sqrt{\left(1 - \cos(t)\right)^2 + \left(\sin(t)\right)^2} = \sqrt{2}\sqrt{1 - \cos(t)}$$

Somit ist:

$$s = \sqrt{2}\int_0^{2\pi}\sqrt{1-\cos(t)}\,\mathrm{d}t$$

Mit der Substitution $t = 2\vartheta$ ergibt sich $\mathrm{d}t = 2\mathrm{d}\vartheta$ und weiter:

$$\sqrt{1-\cos(t)} = \sqrt{1-\cos(2\vartheta)} = \sqrt{1-\left(2\left(\cos(\vartheta)\right)^2-1\right)} = \sqrt{2}\sqrt{1-\left(\cos(\vartheta)\right)^2} = \sqrt{2}\sin(\vartheta)$$

Damit erhalten wir:

$$s = \sqrt{2}\int_0^{2\pi}\sqrt{1-\cos(t)}\,\mathrm{d}t = \sqrt{2}\cdot 2\cdot\sqrt{2}\underbrace{\int_0^{\pi}\sin(\vartheta)\,\mathrm{d}\vartheta}_{2} = 8$$

Das Bemerkenswerte an diesem Resultat ist die Ganzzahligkeit; obwohl es sich um die Länge einer krummlinigen Kurve handelt, kommt die Kreiszahl π darin nicht vor. Diese Bogenlänge wurde von WREN (1632 - 1723) berechnet; damals knüpfte man an dieses Resultat noch die (falsche) Hoffnung, dass die Kreiszahl π doch rational sein könnte.

26 Kurvenlänge

Eine logarithmische Spirale ist gegeben durch:

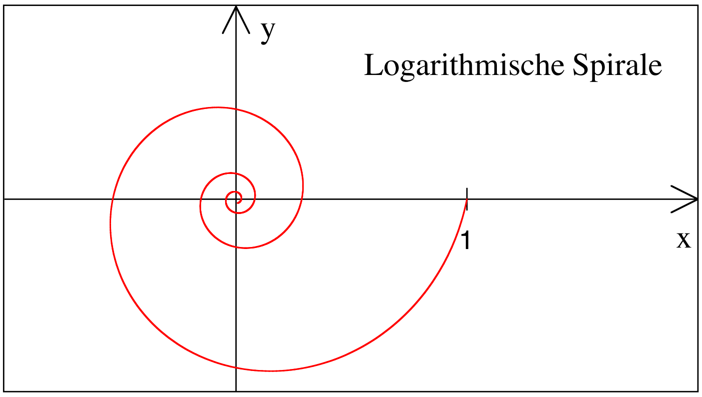
$$\vec{x}(t) = \begin{bmatrix} e^{\frac{t}{5}}\cos(t) \\ e^{\frac{t}{5}}\cos(t) \end{bmatrix},\ t\in(-\infty,0]$$

a) Skizze?

b) Länge der Spirale?

Ergebnis

a)



Logarithmische Spirale

b) Spiralenlänge = $5\sqrt{1.04} \approx 5.0990$

Lösungsweg

Aus $\vec{x}(t) = \begin{bmatrix} e^{\frac{t}{5}} \cos(t) \\ e^{\frac{t}{5}} \cos(t) \end{bmatrix}$ folgt $\dot{\vec{x}}(t) = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} e^{\frac{t}{5}} \cos(t) - e^{\frac{t}{5}} \sin(t) \\ \frac{1}{5} e^{\frac{t}{5}} si(t) + e^{\frac{t}{5}} \cos(t) \end{bmatrix}$ und $\left|\dot{\vec{x}}(t)\right| = e^{\frac{t}{5}} \sqrt{\frac{1}{25} + 1}$.

Daraus ergibt sich:

$$s = \int_{-\infty}^{0} e^{\frac{t}{5}} \sqrt{\frac{1}{25} + 1}\, dt = 5\sqrt{\frac{1}{25} + 1}\, e^{\frac{t}{5}} \Big|_{-\infty}^{0} = 5\sqrt{\frac{1}{25} + 1} \approx 5.0990$$