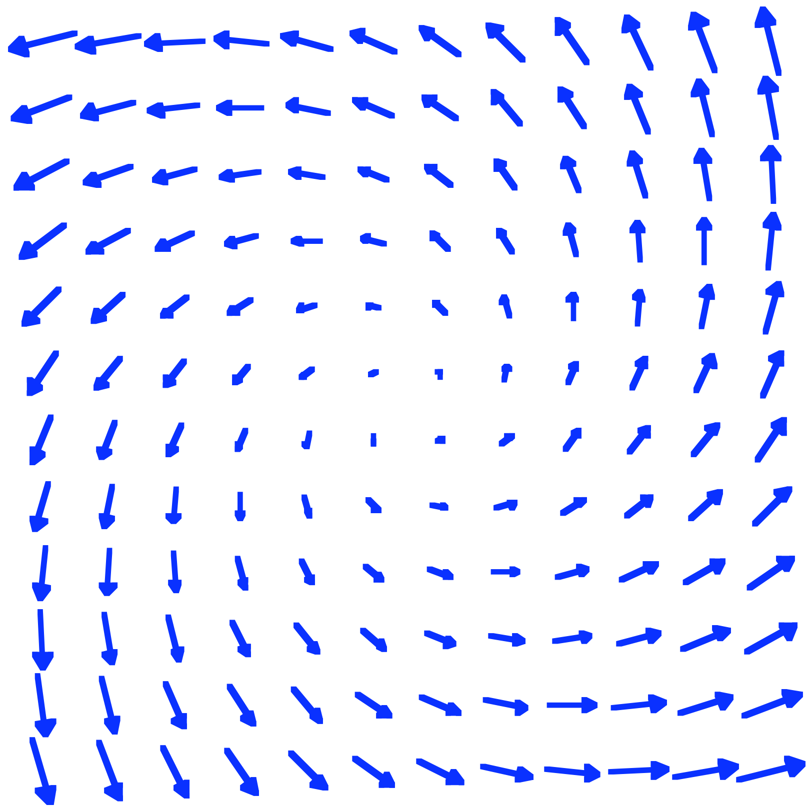


Modul 114 Vektorfelder und Wegintegrale

Vektorfeld

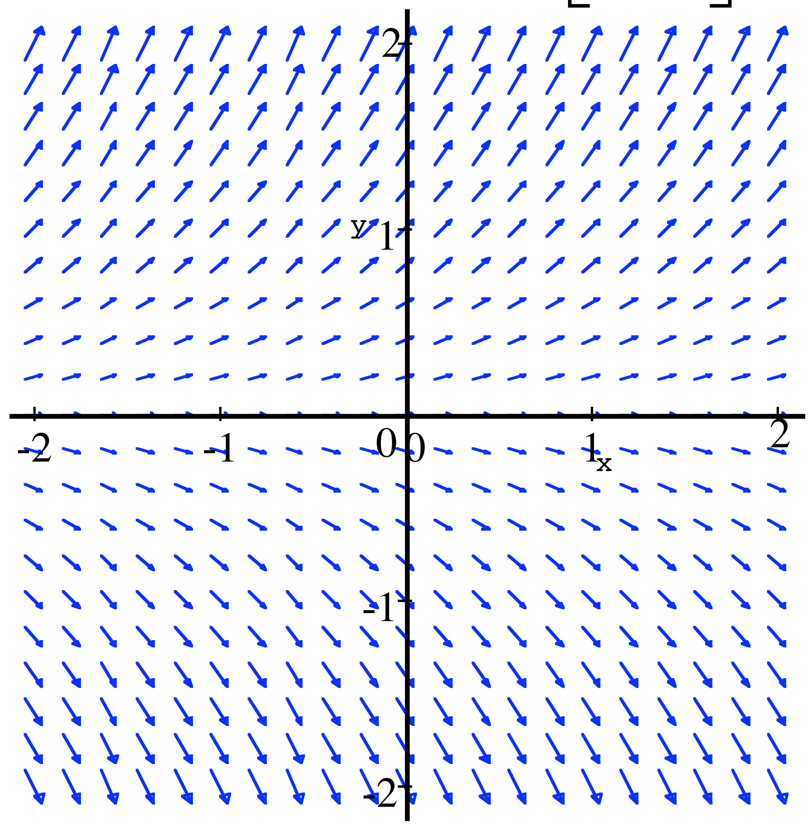
Zu jedem Punkt *(x, y)* gehört ein *Vektor*

$$F(x,y)=\begin{bmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{bmatrix}$$

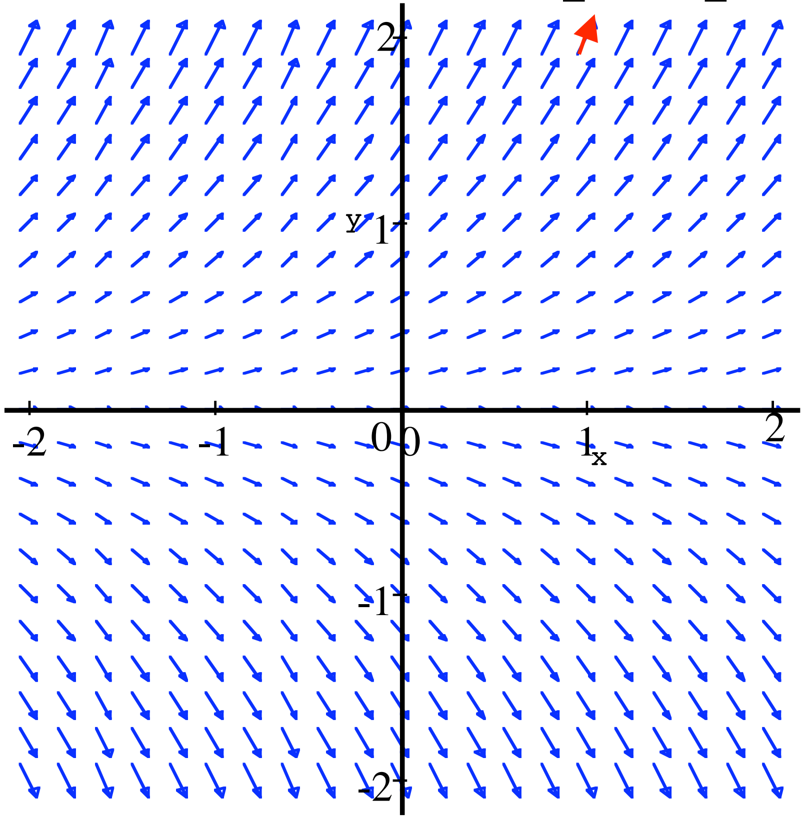
Beispiel:

Jedes Gradientenfeld ist ein Vektorfeld.

Beispiel: $F(x,y) = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.1y \end{bmatrix}$

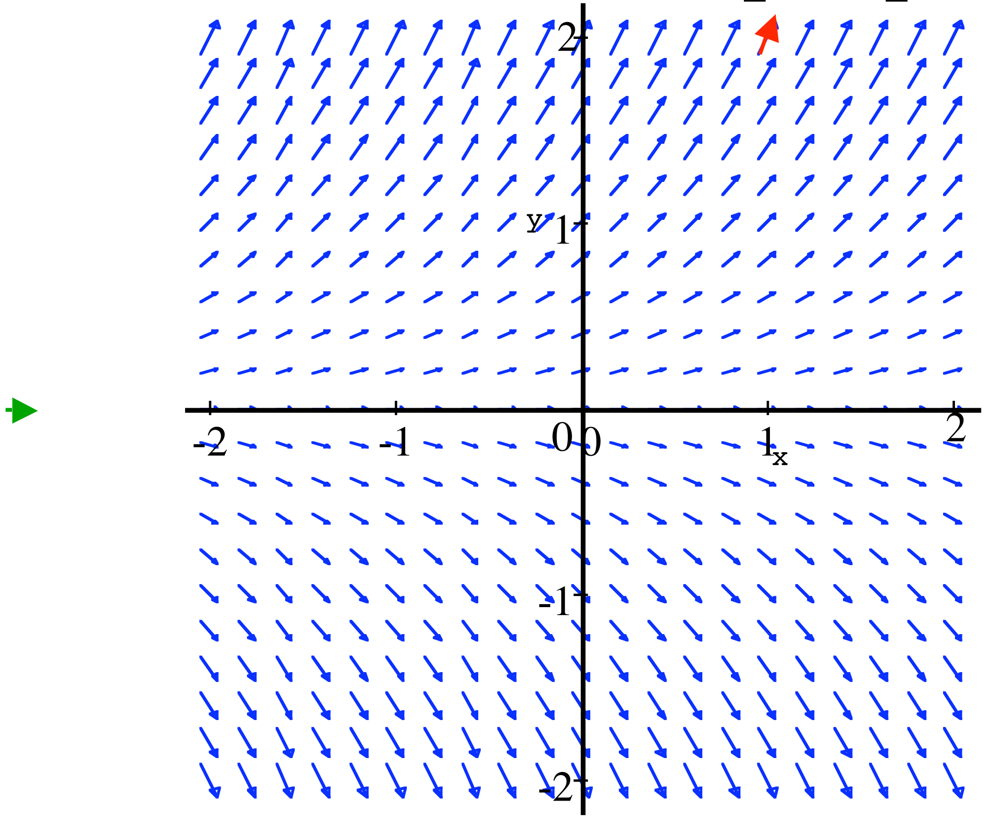


Beispiel: $F(x,y)=\begin{bmatrix}0.1\\0.1y\end{bmatrix}$



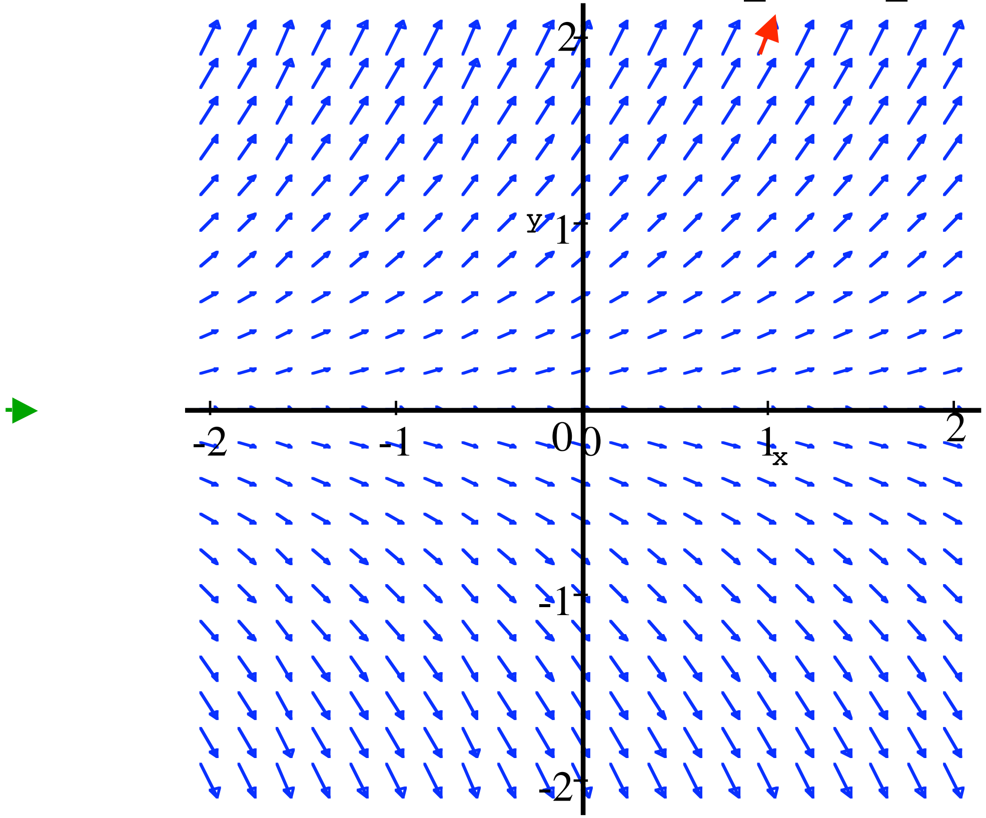
$F(1,2)=\begin{bmatrix}0.1\\0.2\end{bmatrix}$,

Beispiel: $F(x,y)=\begin{bmatrix}0.1\\0.1y\end{bmatrix}$



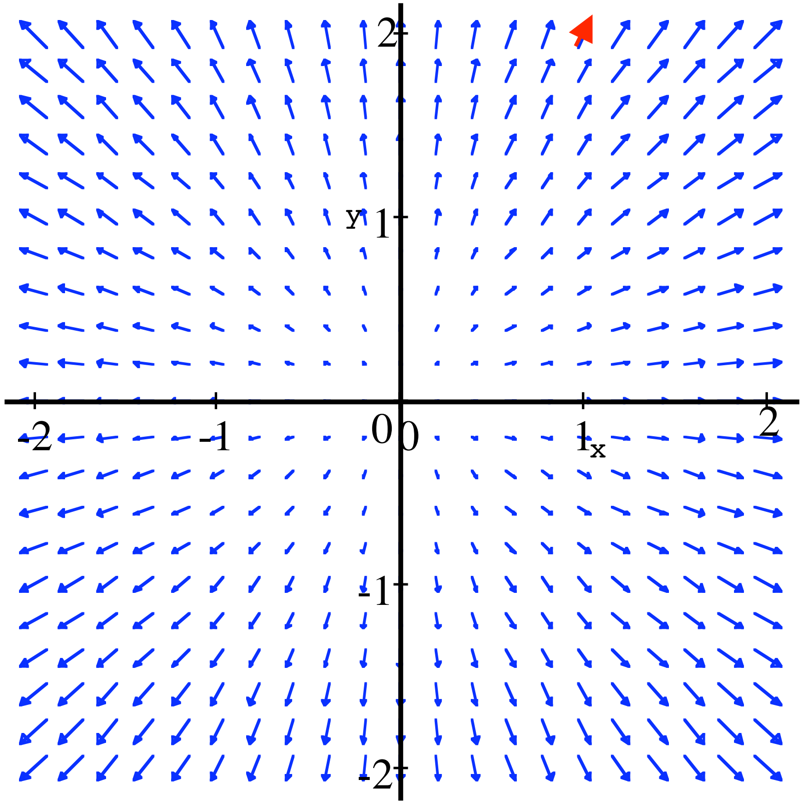
$F(1,2)=\begin{bmatrix}0.1\\0.2\end{bmatrix}$, $F(-3,0)=\begin{bmatrix}0.1\\0\end{bmatrix}$,

Beispiel: $F(x,y)=\begin{bmatrix}0.1\\0.1y\end{bmatrix}$



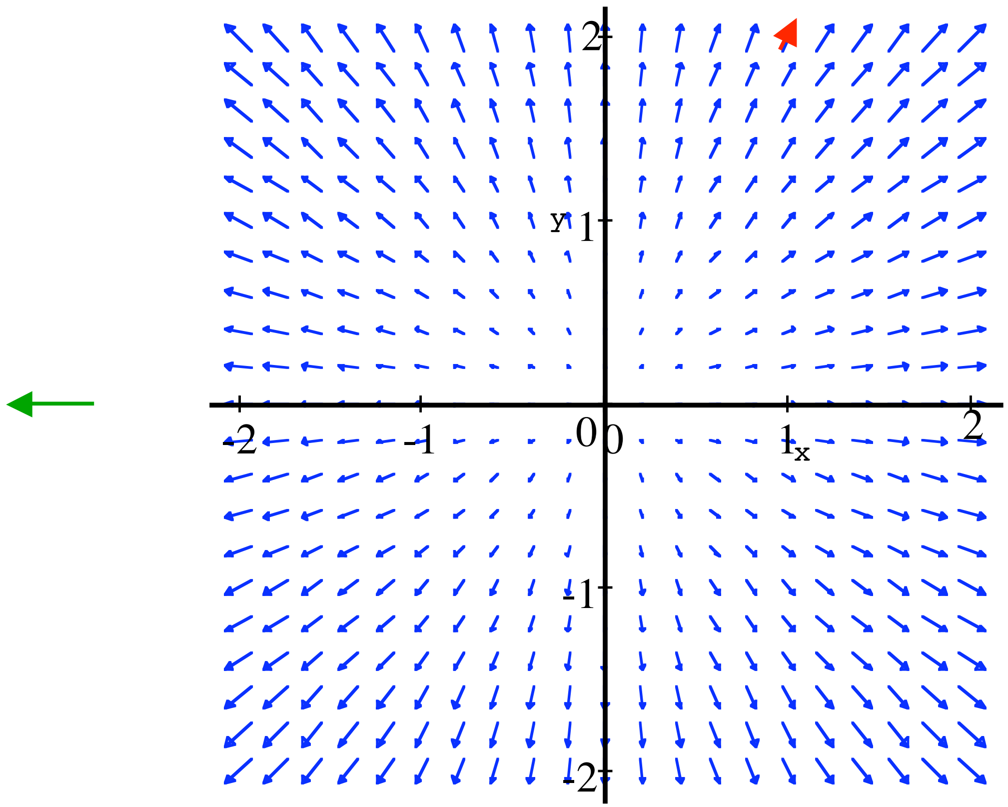
$F(1,2)=\begin{bmatrix}0.1\\0.2\end{bmatrix},\quad F(-3,0)=\begin{bmatrix}0.1\\0\end{bmatrix},\quad F(100,30)=\begin{bmatrix}0.1\\3\end{bmatrix}$

Beispiel: $F(x,y) = \begin{bmatrix} 0.1x \\ 0.1y \end{bmatrix}$



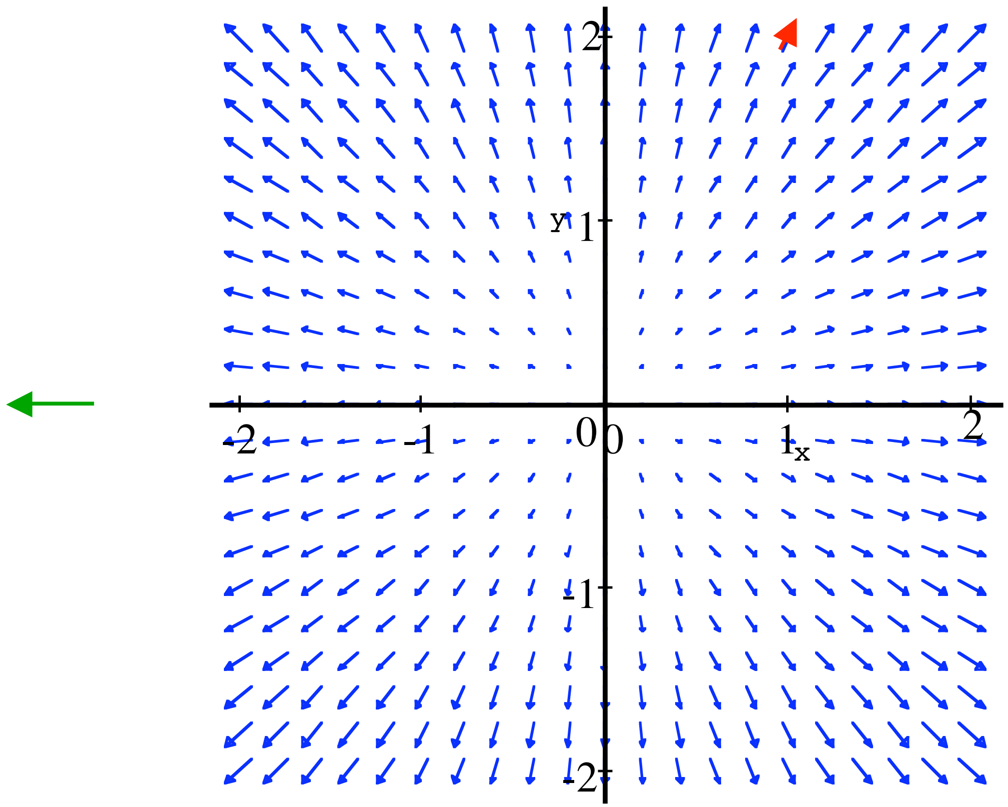
$F(1,2) = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.2 \end{bmatrix}$

Beispiel: $F(x,y)=\begin{bmatrix}0.1x\\0.1y\end{bmatrix}$



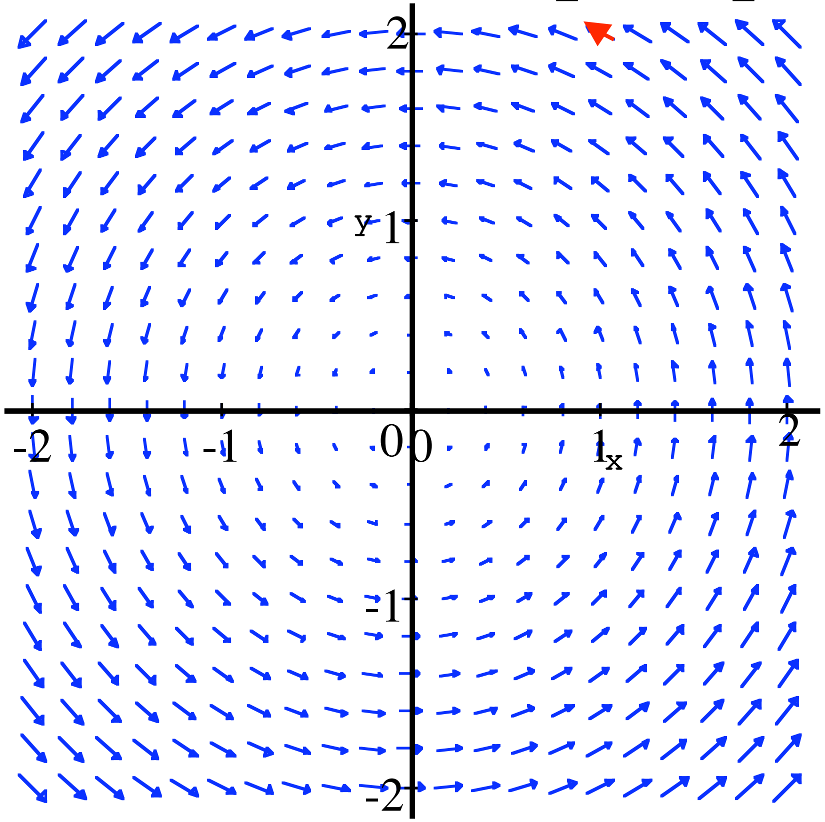
$F(1,2)=\begin{bmatrix}0.1\\0.2\end{bmatrix}, \quad F(-3,0)=\begin{bmatrix}-0.3\\0\end{bmatrix}$

Beispiel: $F(x,y) = \begin{bmatrix} 0.1x \\ 0.1y \end{bmatrix}$



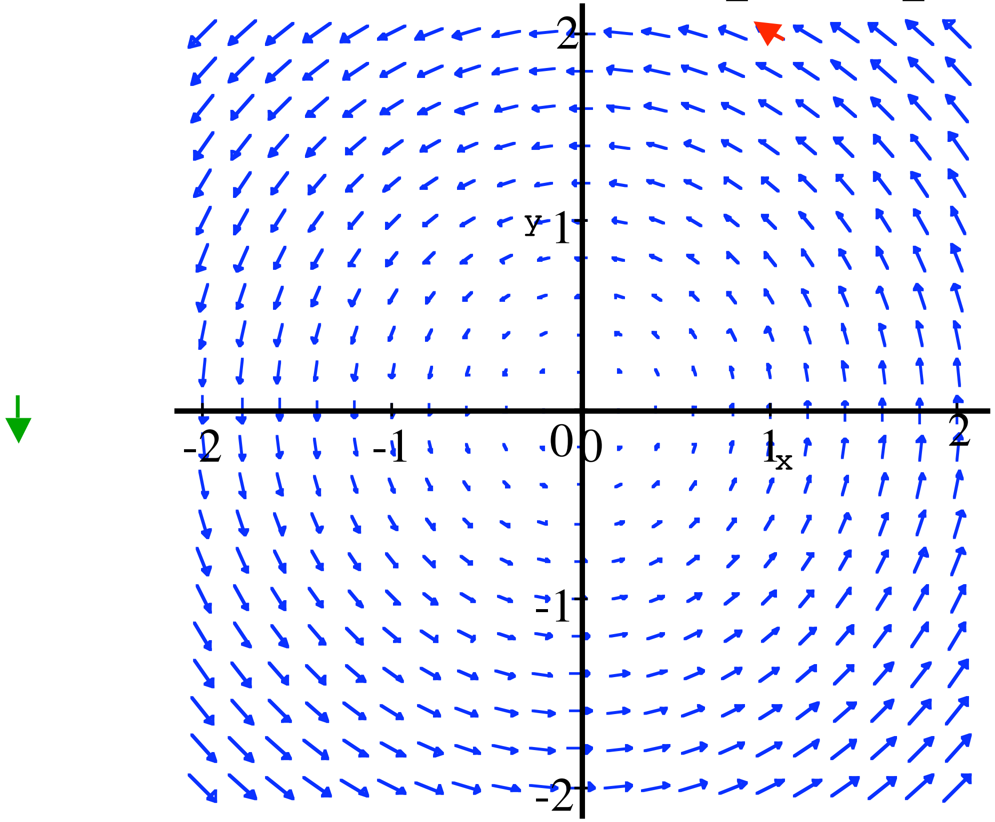
$F(1,2) = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.2 \end{bmatrix}$, $F(-3,0) = \begin{bmatrix} -0.3 \\ 0 \end{bmatrix}$, $F(100,30) = \begin{bmatrix} 10 \\ 3 \end{bmatrix}$

Beispiel: $F(x,y) = \begin{bmatrix} -0.1y \\ 0.1x \end{bmatrix}$



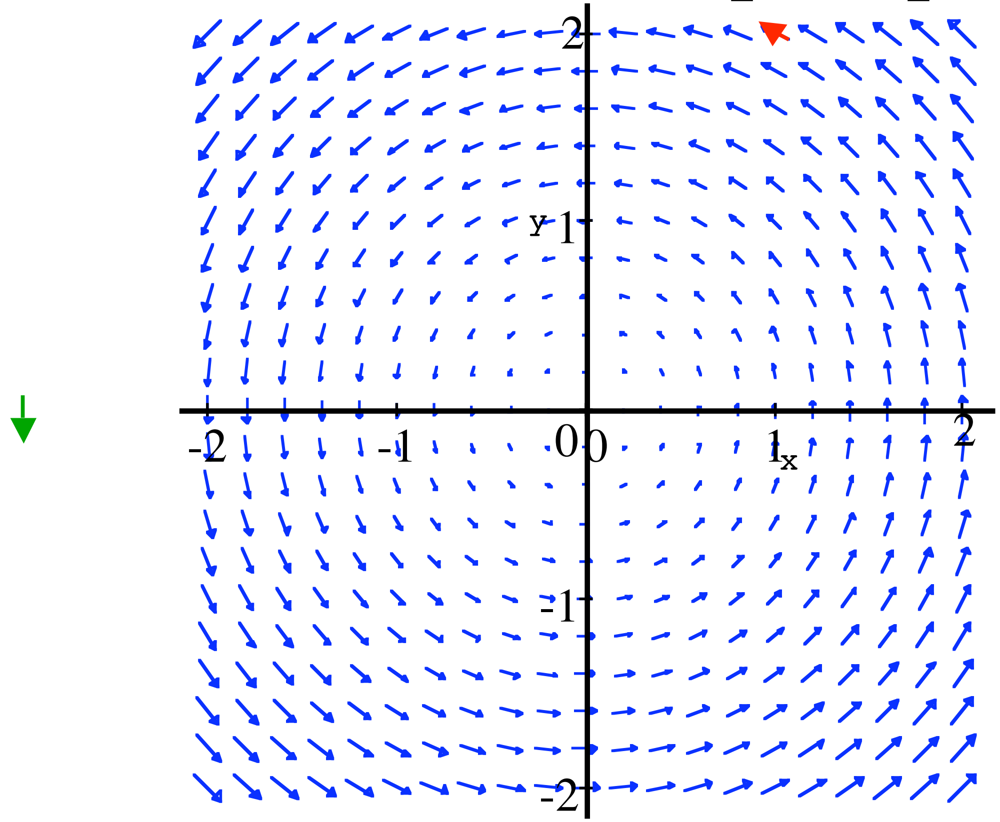
$F(1,2) = \begin{bmatrix} -0.2 \\ 0.1 \end{bmatrix}$

Beispiel: $F(x,y)=\begin{bmatrix}-0.1y\\0.1x\end{bmatrix}$



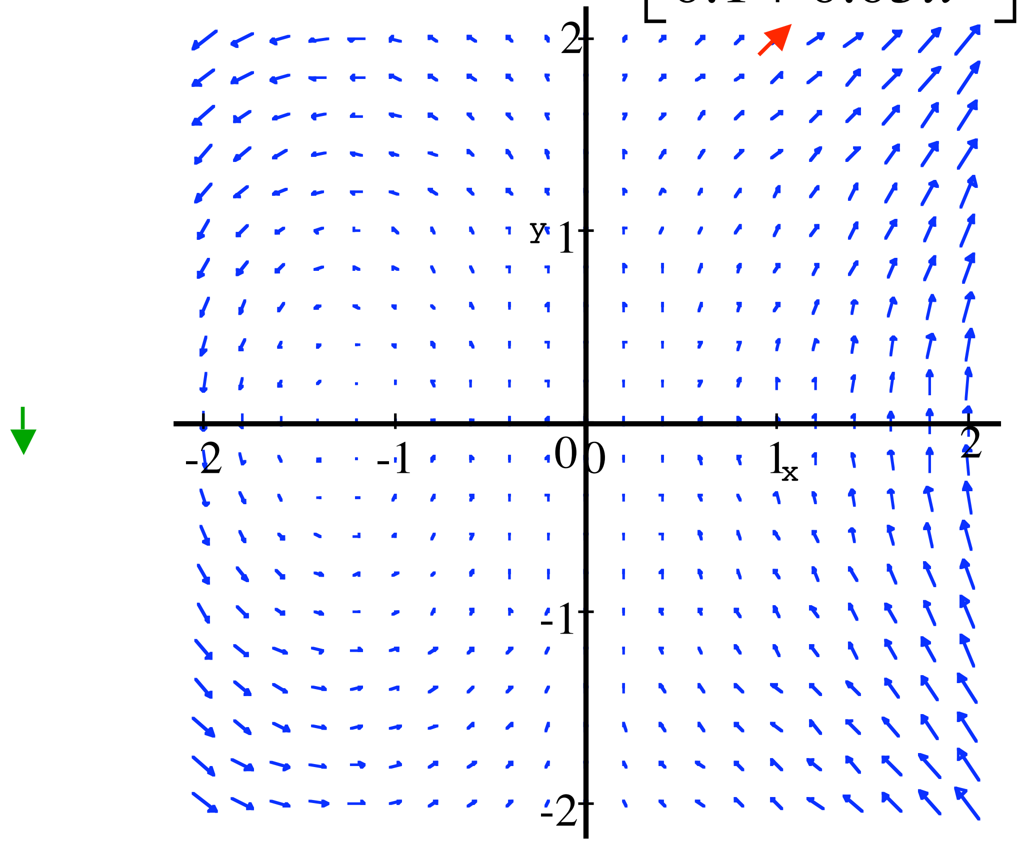
$F(1,2)=\begin{bmatrix}-0.2\\0.1\end{bmatrix}$, $F(-3,0)=\begin{bmatrix}0\\-0.3\end{bmatrix}$

Beispiel: $F(x,y)=\begin{bmatrix}-0.1y\\0.1x\end{bmatrix}$



$F(1,2)=\begin{bmatrix}-0.2\\0.1\end{bmatrix}$, $F(-3,0)=\begin{bmatrix}0\\-0.3\end{bmatrix}$, $F(100,30)=\begin{bmatrix}-3\\10\end{bmatrix}$

Beispiel: $F(x,y) = \begin{bmatrix} 0.1xy \\ 0.1 + 0.05x^3 \end{bmatrix}$



$F(1,2) = \begin{bmatrix} 0.2 \\ 0.15 \end{bmatrix}$, $F(-3,0) = \begin{bmatrix} 0 \\ -1.25 \end{bmatrix}$, $F(100,30) = \begin{bmatrix} 300 \\ 50000.1 \end{bmatrix}$

Jedes Gradientenfeld ist ein Vektorfeld.

Jedes Gradientenfeld ist ein Vektorfeld.

Nicht jedes Vektorfeld ist ein Gradientenfeld.

Jedes Gradientenfeld ist ein Vektorfeld.

Nicht jedes Vektorfeld ist ein Gradientenfeld.

Wie können wir bei einem gegebenen Vektorfeld prüfen,
ob es auch ein Gradientenfeld ist?

Beispiel: $f(x,y)=x^4y^7$

Beispiel: $f(x,y) = x^4 y^7$

$$\operatorname{grad}(f) = \begin{bmatrix} f_x \\ f_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4x^3y^7 \\ 7x^4y^6 \end{bmatrix}$$

Beispiel: $f(x,y)=x^4y^7$

$$\operatorname{grad}(f)=\begin{bmatrix} f_x \\ f_y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 4x^3y^7 \\ 7x^4y^6 \end{bmatrix} \begin{matrix} \Rightarrow & f_{xy}=28x^3y^6 \\ \Rightarrow & f_{yx}=28x^3y^6 \end{matrix}$$

Beispiel: $f(x,y) = x^4 y^7$

$$\text{grad}(f) = \begin{bmatrix} f_x \\ f_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4x^3y^7 \\ 7x^4y^6 \end{bmatrix} \begin{matrix} \Rightarrow & f_{xy} = 28x^3y^6 \\ \Rightarrow & f_{yx} = 28x^3y^6 \end{matrix}$$

Gegenbeispiel: $F(x,y) = \begin{bmatrix} -0.1y \\ 0.1x \end{bmatrix}$

Beispiel: $f(x,y) = x^4 y^7$

$$\operatorname{grad}(f) = \begin{bmatrix} f_x \\ f_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4x^3y^7 \\ 7x^4y^6 \end{bmatrix} \begin{matrix} \Rightarrow & f_{xy} = 28x^3y^6 \\ \Rightarrow & f_{yx} = 28x^3y^6 \end{matrix}$$

Gegenbeispiel: $F(x,y) = \begin{bmatrix} -0.1y \\ 0.1x \end{bmatrix}$

$$F(x,y) = \begin{bmatrix} -0.1y \\ 0.1x \end{bmatrix} \stackrel{?}{=} \begin{bmatrix} f_x \\ f_y \end{bmatrix}$$

Beispiel: $f(x,y) = x^4 y^7$

$$\operatorname{grad}(f) = \begin{bmatrix} f_x \\ f_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4x^3y^7 \\ 7x^4y^6 \end{bmatrix} \begin{matrix} \Rightarrow \quad f_{xy} = 28x^3y^6 \\ \Rightarrow \quad f_{yx} = 28x^3y^6 \end{matrix}$$

Gegenbeispiel: $F(x,y) = \begin{bmatrix} -0.1y \\ 0.1x \end{bmatrix}$

$$F(x,y) = \begin{bmatrix} -0.1y \\ 0.1x \end{bmatrix} \overset{?}{=} \begin{bmatrix} f_x \\ f_y \end{bmatrix} \begin{matrix} \Rightarrow \quad f_{xy} = -0.1 \\ \Rightarrow \quad f_{yx} = +0.1 \end{matrix} \quad \lightning$$

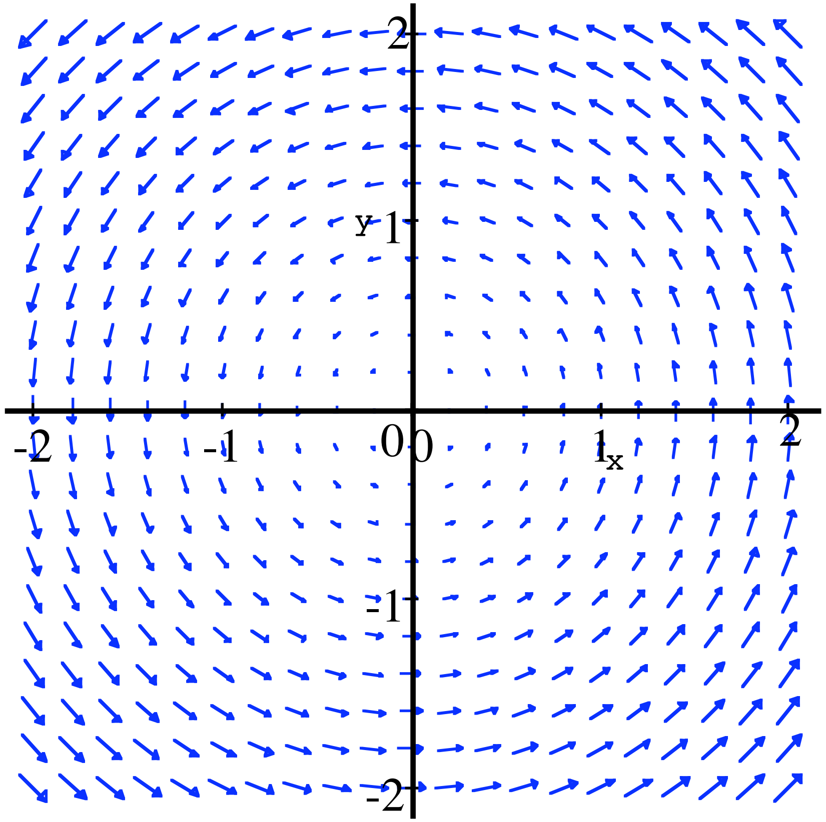
Beispiel: $f(x,y) = x^4 y^7$

$$\operatorname{grad}(f) = \begin{bmatrix} f_x \\ f_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4x^3y^7 \\ 7x^4y^6 \end{bmatrix} \begin{matrix} \Rightarrow & f_{xy} = 28x^3y^6 \\ \Rightarrow & f_{yx} = 28x^3y^6 \end{matrix}$$

Gegenbeispiel: $F(x,y) = \begin{bmatrix} -0.1y \\ 0.1x \end{bmatrix}$

$$F(x,y) = \begin{bmatrix} -0.1y \\ 0.1x \end{bmatrix} \overset{?}{=} \begin{bmatrix} f_x \\ f_y \end{bmatrix} \begin{matrix} \Rightarrow & f_{xy} = -0.1 \\ \Rightarrow & f_{yx} = +0.1 \end{matrix}$$

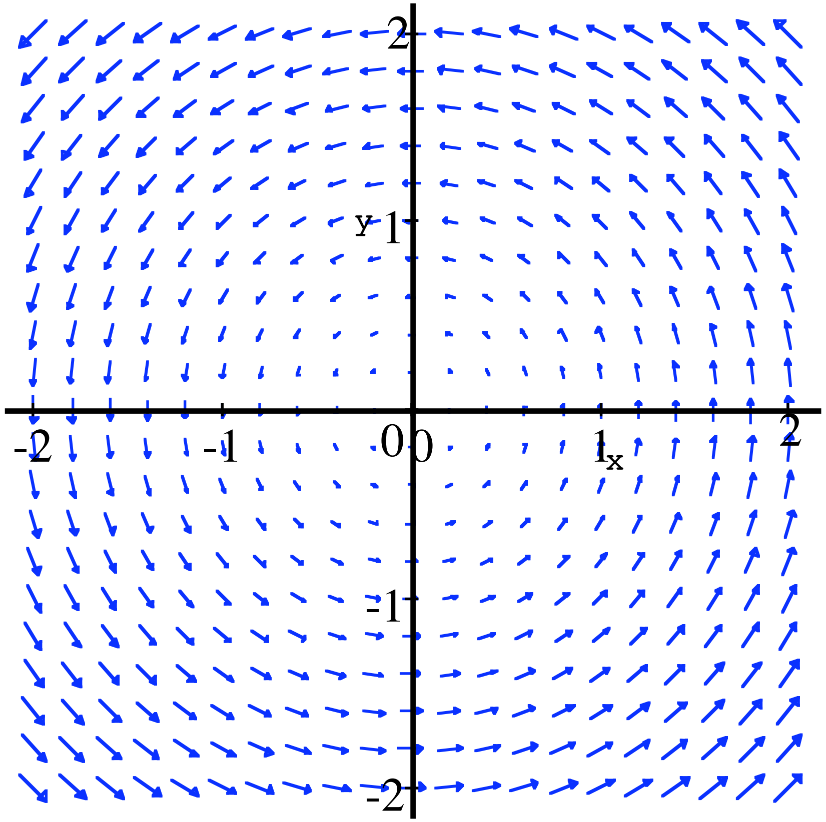
↯ Widerspruch!



Das Vektorfeld

$$F(x,y) = \begin{bmatrix} -0.1y \\ 0.1x \end{bmatrix}$$

ist kein Gradientenfeld.



Das Vektorfeld

$$F(x,y)=\begin{bmatrix}-0.1y\\0.1x\end{bmatrix}$$

ist kein Gradientenfeld.

Wachstum in Pfeilrichtung?

Konservatives Vektorfeld F

$$F = \text{grad}(f) = \nabla f$$

Konservatives Vektorfeld F

$$F = \text{grad}(f) = \nabla f$$

Die Funktion f heißt Potenzialfunktion von F

Konservatives Vektorfeld F

$$F = \operatorname{grad}(f) = \nabla f$$

Notwendige Bedingung für konservatives Vektorfeld:

$$F(x,y) = \begin{bmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{bmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned} u_y &= v_x \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \text{alles dasselbe!}$$

Notwendige Bedingung

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x}$$

Notwendig; ohne geht's nicht

Die Bedingung ist zwar notwendig,
aber nicht hinreichend.

Name: Integrabilitätsbedingung

S‘muess eine sy
gar hübsch und fy...

S‘muess eine sy
gar hübsch und fy…

logisches *und*
AND
sowohl … als auch

hübsch: notwendige Bedingung

keine hinreichende Bedingung

Beispiel:

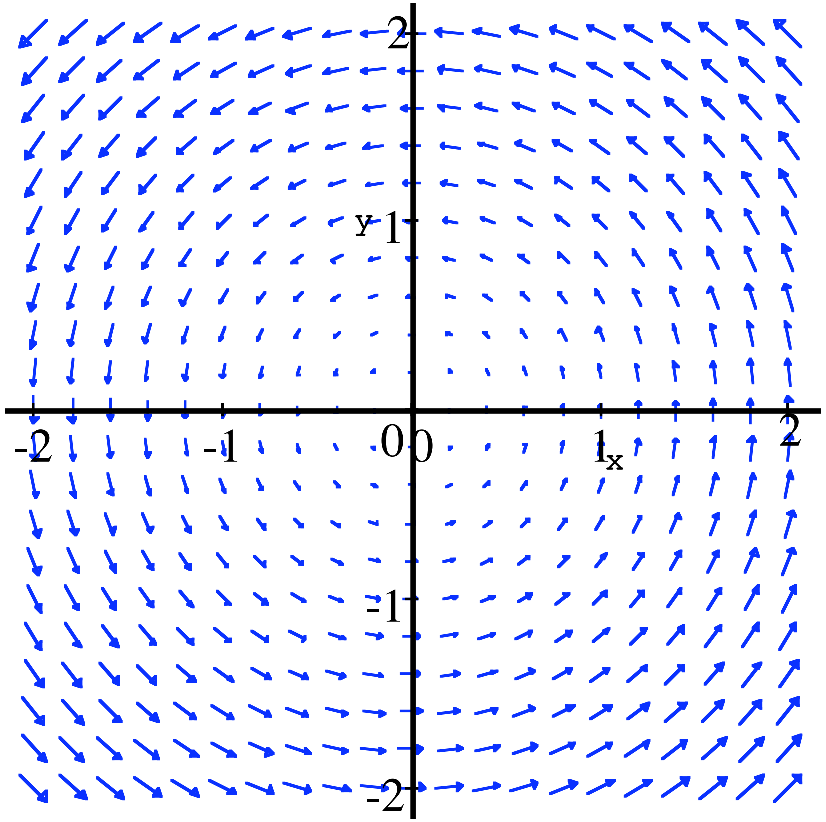
$$F(x,y) = \begin{bmatrix} 4x^3y^7 \\ 7x^4y^6 \end{bmatrix}$$

konservativ, da

$$F(x,y) = \begin{bmatrix} 4x^3y^7 \\ 7x^4y^6 \end{bmatrix} = \operatorname{grad}\left(x^4y^7\right)$$

Potenzialfunktion:

$$f(x,y) = x^4y^7 + C$$



Gegenbeispiel

$$F(x,y) = \begin{bmatrix} -0.1y \\ 0.1x \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -0.1, \quad \text{aber } \frac{\partial v}{\partial x} = +0.1$$

Also: $\frac{\partial u}{\partial y} \neq \frac{\partial v}{\partial x}$

Das Vektorfeld ist *nicht* konservativ,
es gibt *keine* passende Potenzialfunktion.

Im Raum

$$f(x, y, z) \qquad \operatorname{grad}(f) = \nabla f = \begin{bmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{bmatrix}$$

$$f_{yz} = f_{zy} \qquad f_{zx} = f_{xz} \qquad f_{xy} = f_{yx}$$

Im Raum

Vektorfeld: $F(x,y,z)=\begin{bmatrix} u(x,y,z) \\ v(x,y,z) \\ w(x,y,z) \end{bmatrix}$

3-dim „Feld“

Im Raum

Vektorfeld: $F(x,y,z) = \begin{bmatrix} u(x,y,z) \\ v(x,y,z) \\ w(x,y,z) \end{bmatrix}$

Notwendige Bedingung

für konservatives Vektorfeld F

$$\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

Im Raum

Vektorfeld: $F(x,y,z) = \begin{bmatrix} u(x,y,z) \\ v(x,y,z) \\ w(x,y,z) \end{bmatrix}$

Rotation von F:

$$\mathrm{rot}(F) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial w}{\partial y} - \dfrac{\partial v}{\partial z} \\[2ex] \dfrac{\partial u}{\partial z} - \dfrac{\partial w}{\partial x} \\[2ex] \dfrac{\partial v}{\partial x} - \dfrac{\partial u}{\partial y} \end{bmatrix}$$

Im Raum

Vektorfeld: $F(x,y,z) = \begin{bmatrix} u(x,y,z) \\ v(x,y,z) \\ w(x,y,z) \end{bmatrix}$

Rotation von F:

$$\nabla \times F = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} u(x,y,z) \\ v(x,y,z) \\ w(x,y,z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \end{bmatrix} = \operatorname{rot}(F)$$

Folgerung $\left.\begin{matrix} F \text{ konservativ} \\ F \text{ Gradientenfeld} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \quad \operatorname{rot}(F) = \nabla \times F = \vec{0}$

Im Raum

Vektorfeld: $F(x,y,z)=\begin{bmatrix} u(x,y,z) \\ v(x,y,z) \\ w(x,y,z) \end{bmatrix}$

Rotation von F:

$$\nabla \times F = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} u(x,y,z) \\ v(x,y,z) \\ w(x,y,z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \end{bmatrix} = \mathrm{rot}(F)$$

Nullvektor

Folgerung F konservativ, F Gradientenfeld $\Rightarrow \mathrm{rot}(F) = \nabla \times F = \vec{0}$

Gradient: $\begin{bmatrix} f_x \\ f_y \end{bmatrix}$ Ableitung

Umkehrung: Integration

Gradient: $\begin{bmatrix} f_x \\ f_y \end{bmatrix}$ Ableitung

Umkehrung: Integration

äquivalente Formulierungen:

(1) u, v gegeben. Gesucht f so, dass $f_x = u$ und $f_y = v$

Gradient: $\begin{bmatrix} f_x \\ f_y \end{bmatrix}$ Ableitung

Umkehrung: Integration

äquivalente Formulierungen:

(1) u, v gegeben. Gesucht f so, dass $f_x = u$ und $f_y = v$

Potenzialfunktion

Gradient: $\begin{bmatrix} f_x \\ f_y \end{bmatrix}$ Ableitung

Umkehrung: Integration

äquivalente Formulierungen:

(1) u, v gegeben. Gesucht f so, dass $f_x = u$ und $f_y = v$

(2) Vektorfeld F gegeben. Gesucht f so, dass $\text{grad}(f) = F$

Potenzialfunktion

Beispiel

$$F(x,y)=\begin{bmatrix} 12xy^3 \\ 18x^2y^2+7y^6 \end{bmatrix}$$

Beispiel

$$F(x,y) = \begin{bmatrix} 12xy^3 \\ 18x^2y^2 + 7y^6 \end{bmatrix}$$

Gradientenfeld?
Falls ja: Potenzialfunktion f ?

Beispiel

$$F(x,y) = \begin{bmatrix} 12xy^3 \\ 18x^2y^2 + 7y^6 \end{bmatrix}$$

Gradientenfeld?
Falls ja: Potenzialfunktion f ?

Integrabilitätsbedingung (nur notwendige Bedingung):

$$\left.\begin{aligned} \left(12xy^3\right)_y &= 36xy^2 \\ \left(18x^2y^2 + 7y^6\right)_x &= 36xy^2 \end{aligned}\right\} \text{ ok}$$

Beispiel

$$F(x,y) = \begin{bmatrix} 12xy^3 \\ 18x^2y^2 + 7y^6 \end{bmatrix}$$

Gradientenfeld?
Falls ja: Potenzialfunktion f?

Heuristisches Vorgehen (Probieren geht über Studieren)

$$\int 12xy^3 \mathrm{d}x = 6x^2y^3 + \text{ Integrationskonstante}$$

Integration
bezüglich x

Beispiel

$$F(x,y)=\begin{bmatrix} 12xy^3 \\ 18x^2y^2+7y^6 \end{bmatrix}$$

Gradientenfeld?
Falls ja: Potenzialfunktion f ?

Heuristisches Vorgehen (Probieren geht über Studieren)

$$\int 12xy^3\,\mathrm{d}x = 6x^2y^3 + p(y) + C_1$$

Integration bezüglich x

Subtile „Integrationskonstante“

Beispiel

$$F(x,y)=\begin{bmatrix} 12xy^3 \\ 18x^2y^2+7y^6 \end{bmatrix}$$

Gradientenfeld?
Falls ja: Potenzialfunktion f?

Heuristisches Vorgehen (Probieren geht über Studieren)

$$\int 12xy^3\,\mathrm{d}x = 6x^2y^3 + p(y) + C_1$$

$$\int\left(18x^2y^2+7y^6\right)\mathrm{d}y = 6x^2y^3 + y^7 + q(x) + C_2$$

Integration bezüglich y

Subtile „Integrationskonstante“

Beispiel

$$F(x,y)=\begin{bmatrix} 12xy^3 \\ 18x^2y^2+7y^6 \end{bmatrix}$$

Gradientenfeld?
Falls ja: Potenzialfunktion f ?

Heuristisches Vorgehen (Probieren geht über Studieren)

$$\int 12xy^3\,\mathrm{d}x = 6x^2y^3 + p(y) + C_1$$

$$\int\left(18x^2y^2+7y^6\right)\mathrm{d}y = 6x^2y^3 + y^7 + q(x) + C_2$$

Vergleich:

$$f(x,y) = 6x^2y^3 + y^7 + C$$

Beispiel

$$F(x,y)=\begin{bmatrix} 12xy^3 \\ 18x^2y^2+7y^6 \end{bmatrix}$$

Gradientenfeld?
Falls ja: Potenzialfunktion f ?

Heuristisches Vorgehen (Probieren geht über Studieren)

$$\int 12xy^3 \mathrm{d}x = 6x^2y^3 + p(y) + C_1$$

$$\int \left(18x^2y^2 + 7y^6\right) \mathrm{d}y = 6x^2y^3 + y^7 + q(x) + C_2$$

Vergleich:

$$f(x,y) = 6x^2y^3 + y^7 + C$$

Kontrolle: ok

Eindeutigkeitssatz:

$$\operatorname{grad}(f) = \operatorname{grad}(g) \quad \Leftrightarrow \quad f = g + C$$

Konstante

Beweis

$f_x = g_x$ und $f_y = g_y$

Beweis

$$f_x = g_x \quad \text{und} \quad f_y = g_y$$

$$f_x = g_x \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}f(x, y_0)}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}g(x, y_0)}{\mathrm{d}x} \quad \Rightarrow \quad f(x, y_0) = g(x, y_0) + C_1$$

Beweis

$f_x = g_x$ und $f_y = g_y$

$$f_x = g_x \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}f(x,y_0)}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}g(x,y_0)}{\mathrm{d}x} \quad \Rightarrow \quad f(x,y_0) = g(x,y_0) + C_1$$

$$f_y = g_y \quad \Rightarrow \quad f(x_0,y) = g(x_0,y) + C_2$$

Beweis

$f_x = g_x$ und $f_y = g_y$

$$f_x = g_x \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}f(x, y_0)}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}g(x, y_0)}{\mathrm{d}x} \quad \Rightarrow \quad f(x, y_0) = g(x, y_0) + C_1$$

$$f_y = g_y \quad \Rightarrow \quad f(x_0, y) = g(x_0, y) + C_2$$

Im "Kreuzungspunkt" (x_0, y_0) ist $C_1 = C_2$

Beweis

$f_x = g_x$ und $f_y = g_y$

$$f_x = g_x \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}f(x,y_0)}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}g(x,y_0)}{\mathrm{d}x} \quad \Rightarrow \quad f(x,y_0) = g(x,y_0) + C_1$$

$$f_y = g_y \quad \Rightarrow \quad f(x_0,y) = g(x_0,y) + C_2$$

Im "Kreuzungspunkt" (x_0, y_0) ist $C_1 = C_2$

Somit $f = g + \underset{C=C_1=C_2}{\underset{\uparrow}{C}}$ $\square$

Beweis

$f_x = g_x$ und $f_y = g_y$

$$f_x = g_x \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}f(x,y_0)}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}g(x,y_0)}{\mathrm{d}x} \quad \Rightarrow \quad f(x,y_0) = g(x,y_0) + C_1$$

$$f_y = g_y \quad \Rightarrow \quad f(x_0,y) = g(x_0,y) + C_2$$

Im "Kreuzungspunkt" (x_0, y_0) ist $C_1 = C_2$

Somit $f = g + \underset{C=C_1=C_2}{\underset{\uparrow}{C}}$ $\square$ Quod erat demonstrandum.
Was zu beweisen war.

Beweis

$f_x = g_x$ und $f_y = g_y$

$$f_x = g_x \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}f(x, y_0)}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}g(x, y_0)}{\mathrm{d}x} \quad \Rightarrow \quad f(x, y_0) = g(x, y_0) + C_1$$

$$f_y = g_y \quad \Rightarrow \quad f(x_0, y) = g(x_0, y) + C_2$$

Im "Kreuzungspunkt" (x_0, y_0) ist $C_1 = C_2$

Somit $f = g + \underset{C = C_1 = C_2}{\underset{\uparrow}{C}}$ $\square$ ⇐ Halmos

Wie finden wir die Potenzialfunktion?

Erinnerung

$$h(x) - h(x_0) = \int_{x_0}^{x} h'(s)\, \mathrm{d}s$$

(Hauptsatz)

Erinnerung

Integrationsvariable s

$$h(x) - h(x_0) = \int_{x_0}^{x} h'(s)\, \mathrm{d}s$$

(Hauptsatz)

Neu

$$f(x,y) - f(x_0,y_0) =$$

Neu

$$f(x,y)-f(x_0,y_0)=$$
$$=\left(f(x,y_0)-f(x_0,y_0)\right)+\left(f(x,y)-f(x,y_0)\right)$$

Neu

$$f(x,y) - f(x_0,y_0) =$$

$$= \underbrace{\big(f(x,y_0) - f(x_0,y_0)\big)}_{\int\limits_{x_0}^{x} f_x(s,y_0)\,\mathrm{d}s} + \big(f(x,y) - f(x,y_0)\big)$$

Neu

$$f(x,y) - f(x_0,y_0) =$$

$$= \underbrace{\left(f(x,y_0) - f(x_0,y_0)\right)}_{\int_{x_0}^{x} f_x(s,y_0)\,\mathrm{d}s} + \left(f(x,y) - f(x,y_0)\right)$$

Integrationsvariable s

Neu

$$f(x,y) - f(x_0,y_0) =$$

$$= \underbrace{\left(f(x,y_0) - f(x_0,y_0) \right)}_{\displaystyle \int_{x_0}^{x} f_x(s,y_0)\,\mathrm{d}s} + \underbrace{\left(f(x,y) - f(x,y_0) \right)}_{\displaystyle \int_{y_0}^{y} f_y(x,t)\,\mathrm{d}t}$$

Integrationsvariable s

Integrationsvariable t

Neu

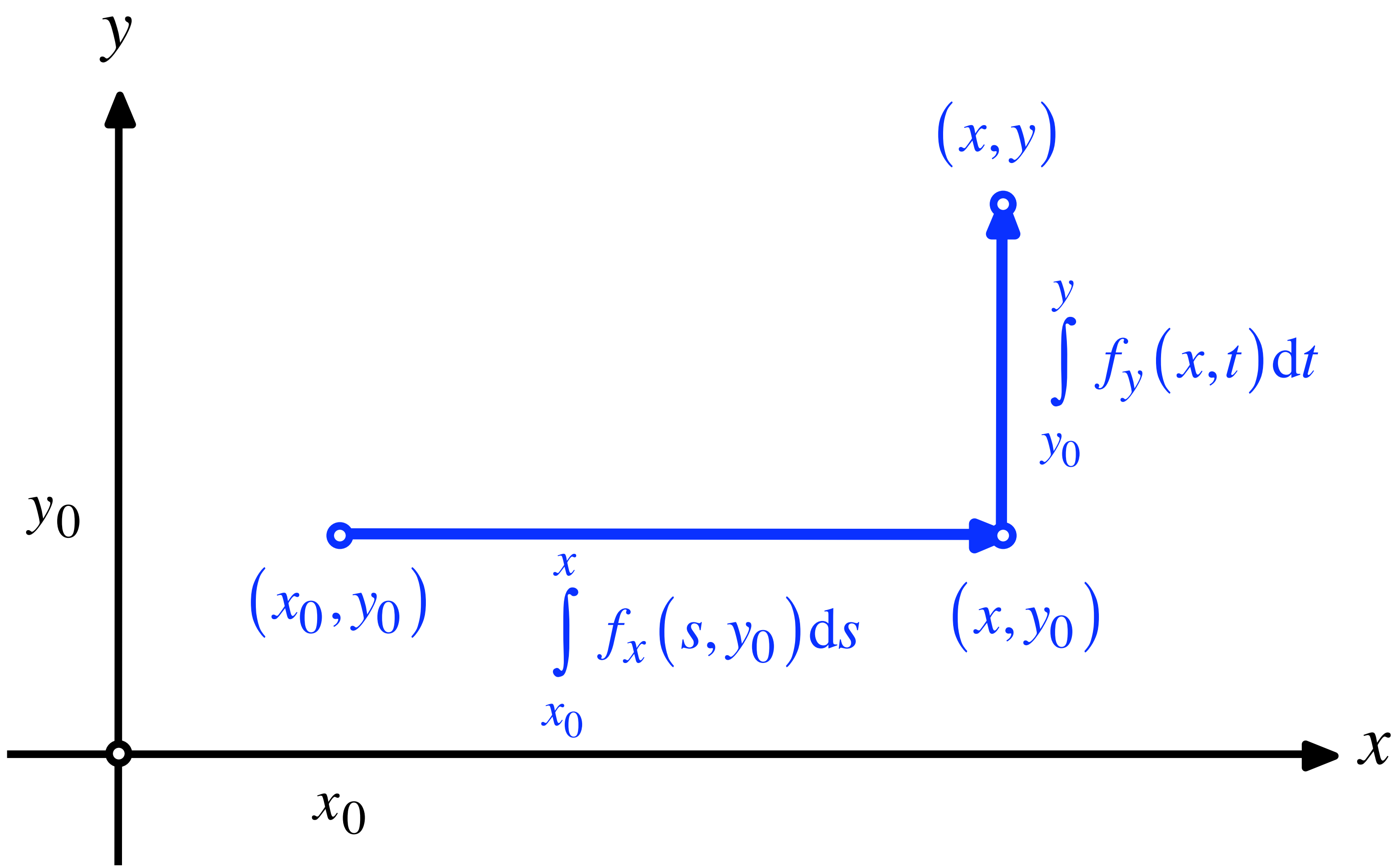
$$f(x,y) - f(x_0,y_0) =$$

$$= \underbrace{\Big(f(x,y_0) - f(x_0,y_0)\Big)}_{\int\limits_{x_0}^{x} f_x(s,y_0)\,\mathrm{d}s} + \underbrace{\Big(f(x,y) - f(x,y_0)\Big)}_{\int\limits_{y_0}^{y} f_y(x,t)\,\mathrm{d}t}$$

Also

$$f(x,y) = \int\limits_{x_0}^{x} f_x(s,y_0)\,\mathrm{d}s + \int\limits_{y_0}^{y} f_y(x,t)\,\mathrm{d}t + \underbrace{f(x_0,y_0)}_{\text{Integrations-konstante}}$$

Brav um die Ecke



Existenzsatz (ohne Beweis)

$F(x,y) = \begin{bmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{bmatrix}$ auf $\mathbb{R}^2$ gegeben,

stetig differenzierbar (das heißt u_x, u_y, v_x, v_y stetig)

und $u_y = v_x$

$\Rightarrow \quad F = \mathrm{grad}(f)$ mit $f(x,y) = \int_{x_0}^{x} u(s, y_0)\,\mathrm{d}s + \int_{y_0}^{y} v(x,t)\,\mathrm{d}t + C$

Existenzsatz (ohne Beweis)

$F(x,y) = \begin{bmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{bmatrix}$ auf $\mathbb{R}^2$ gegeben,

stetig differenzierbar (das heißt u_x, u_y, v_x, v_y stetig)

und $u_y = v_x$

Integrabilitätsbedingung

$\Rightarrow \quad F = \operatorname{grad}(f)$ mit $f(x,y) = \int_{x_0}^{x} u(s, y_0)\,\mathrm{d}s + \int_{y_0}^{y} v(x,t)\,\mathrm{d}t + C$

Existenzsatz (ohne Beweis)

$F(x,y) = \begin{bmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{bmatrix}$ auf $\mathbb{R}^2$ gegeben,

stetig differenzierbar (das heißt u_x, u_y, v_x, v_y stetig)

und $u_y = v_x$

Integrabilitätsbedingung

$$\Rightarrow \quad F = \operatorname{grad}(f) \quad \text{mit} \quad f(x,y) = \int_{x_0}^{x} u(s, y_0)\,\mathrm{d}s + \int_{y_0}^{y} v(x,t)\,\mathrm{d}t + C$$

F ein konservatives Vektorfeld

Existenzsatz (ohne Beweis)

$F(x,y) = \begin{bmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{bmatrix}$ auf $\mathbb{R}^2$ gegeben,

stetig differenzierbar (das heißt u_x, u_y, v_x, v_y stetig)

und $u_y = v_x$

Integrabilitätsbedingung

$$\Rightarrow \quad F = \operatorname{grad}(f) \quad \text{mit} \quad f(x,y) = \int_{x_0}^{x} u(s, y_0)\,\mathrm{d}s + \int_{y_0}^{y} v(x,t)\,\mathrm{d}t + C$$

F ein konservatives Vektorfeld

f die zugehörige Potenzialfunktion

Beispiel

$$u(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}$$

$$v(x,y) = \frac{y}{x^2+y^2}$$

$$F(x,y) = \begin{bmatrix} \frac{x}{x^2+y^2} \\ \frac{y}{x^2+y^2} \end{bmatrix}$$

Beispiel

$$u(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}$$

$$v(x,y) = \frac{y}{x^2+y^2}$$

$$F(x,y) = \begin{bmatrix} \dfrac{x}{x^2+y^2} \\ \dfrac{y}{x^2+y^2} \end{bmatrix}$$

Integrabilitätsbedingung? $u_y \overset{?}{=} v_x$

Beispiel

$$u(x,y)=\frac{x}{x^2+y^2}$$

$$v(x,y)=\frac{y}{x^2+y^2}$$

$$F(x,y)=\begin{bmatrix}\dfrac{x}{x^2+y^2}\\[2ex]\dfrac{y}{x^2+y^2}\end{bmatrix}$$

Integrabilitätsbedingung? $u_y \overset{?}{=} v_x$

$$u_y=\frac{-x\cdot 2y}{\left(x^2+y^2\right)^2}$$

Beispiel

$$u(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}$$

$$v(x,y) = \frac{y}{x^2+y^2}$$

$$F(x,y) = \begin{bmatrix} \frac{x}{x^2+y^2} \\ \frac{y}{x^2+y^2} \end{bmatrix}$$

Integrabilitätsbedingung? $u_y \overset{?}{=} v_x$

$$u_y = \frac{-x \cdot 2y}{\left(x^2+y^2\right)^2}$$

$$v_x = \frac{-y \cdot 2x}{\left(x^2+y^2\right)^2}$$

Beispiel

$$u(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}$$

$$v(x,y) = \frac{y}{x^2+y^2}$$

$$F(x,y) = \begin{bmatrix} \frac{x}{x^2+y^2} \\ \frac{y}{x^2+y^2} \end{bmatrix}$$

Integrabilitätsbedingung? $u_y \overset{?}{=} v_x$

$$u_y = \frac{-x \cdot 2y}{\left(x^2+y^2\right)^2}$$

$$v_x = \frac{-y \cdot 2x}{\left(x^2+y^2\right)^2}$$

Integrabilitätsbedingung erfüllt

$$u(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}$$

$$v(x,y) = \frac{y}{x^2+y^2}$$

$$f(x,y) = \int_{x_0}^{x} u(s,y_0)\,\mathrm{d}s + \int_{y_0}^{y} v(x,t)\,\mathrm{d}t + C$$

$$f(x,y) = \underbrace{\int_{x_0}^{x} \frac{s}{s^2+y_0^2}\,\mathrm{d}s}_{I_1} + \underbrace{\int_{y_0}^{y} \frac{t}{x^2+t^2}\,\mathrm{d}t}_{I_2} + C$$

$$I_1 = \int_{x_0}^{x} \frac{s}{s^2 + y_0^2}\, \mathrm{d}s =$$

$$I_1 = \int_{x_0}^{x} \frac{s}{s^2 + y_0^2} \, \mathrm{d}s =$$

$$\int \frac{s}{s^2 + y_0^2} \, \mathrm{d}s = \frac{1}{2} \int \frac{1}{u} \, \mathrm{d}u = \frac{1}{2} \ln\left(|u|\right)$$

$$u = s^2 + y_0^2 \qquad \mathrm{d}u = 2s \, \mathrm{d}s$$

Substitution

$$I_1 = \int_{x_0}^{x} \frac{s}{s^2 + y_0^2}\, \mathrm{d}s = \frac{1}{2} \ln\left(s^2 + y_0^2\right) \Big|_{x_0}^{x}$$

$$\int \frac{s}{s^2 + y_0^2}\, \mathrm{d}s = \frac{1}{2} \int \frac{1}{u}\, \mathrm{d}u = \frac{1}{2} \ln\left(|u|\right)$$

$$u = s^2 + y_0^2 \qquad \mathrm{d}u = 2s\, \mathrm{d}s$$

Substitution

$$I_1 = \int_{x_0}^{x} \frac{s}{s^2+y_0^2}\,\mathrm{d}s = \frac{1}{2}\ln\left(s^2+y_0^2\right)\Big|_{x_0}^{x} = \frac{1}{2}\ln\left(x^2+y_0^2\right) - \frac{1}{2}\ln\left(x_0^2+y_0^2\right)$$

$$\int \frac{s}{s^2+y_0^2}\,\mathrm{d}s = \frac{1}{2}\int \frac{1}{u}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{2}\ln\left(|u|\right)$$

$$u = s^2 + y_0^2 \qquad \mathrm{d}u = 2s\,\mathrm{d}s$$

Substitution

$$I_1 = \int_{x_0}^{x} \frac{s}{s^2 + y_0^2}\,\mathrm{d}s = \frac{1}{2}\ln\left(s^2 + y_0^2\right)\Big|_{x_0}^{x} = \frac{1}{2}\ln\left(x^2 + y_0^2\right) - \frac{1}{2}\ln\left(x_0^2 + y_0^2\right)$$

$$\int \frac{s}{s^2 + y_0^2}\,\mathrm{d}s = \frac{1}{2}\int \frac{1}{u}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{2}\ln\left(|u|\right)$$

$$u = s^2 + y_0^2 \qquad \mathrm{d}u = 2s\,\mathrm{d}s$$

Analog

$$I_2 = \int_{y_0}^{y} \frac{t}{x^2 + t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\ln\left(x^2 + y^2\right) - \frac{1}{2}\ln\left(x^2 + y_0^2\right)$$

$$I_1 = \int_{x_0}^{x} \frac{s}{s^2 + y_0^2}\, \mathrm{d}s = \frac{1}{2}\ln\left(x^2 + y_0^2\right) - \frac{1}{2}\ln\left(x_0^2 + y_0^2\right)$$

$$I_2 = \int_{y_0}^{y} \frac{t}{x^2 + t^2}\, \mathrm{d}t = \frac{1}{2}\ln\left(x^2 + y^2\right) - \frac{1}{2}\ln\left(x^2 + y_0^2\right)$$

$$I_1 = \int_{x_0}^{x} \frac{s}{s^2 + y_0^2} \, \mathrm{d}s = \frac{1}{2} \ln\left(x^2 + y_0^2\right) - \frac{1}{2} \ln\left(x_0^2 + y_0^2\right)$$

$$I_2 = \int_{y_0}^{y} \frac{t}{x^2 + t^2} \, \mathrm{d}t = \frac{1}{2} \ln\left(x^2 + y^2\right) - \frac{1}{2} \ln\left(x^2 + y_0^2\right)$$

$$f(x, y) = \underbrace{\int_{x_0}^{x} \frac{s}{s^2 + y_0^2} \, \mathrm{d}s}_{I_1} + \underbrace{\int_{y_0}^{y} \frac{t}{x^2 + t^2} \, \mathrm{d}t}_{I_2} + C$$

$$I_1 = \int_{x_0}^{x} \frac{s}{s^2+y_0^2}\,\mathrm{d}s = \underline{\frac{1}{2}\ln\left(x^2+y_0^2\right)} - \frac{1}{2}\ln\left(x_0^2+y_0^2\right)$$

$$I_2 = \int_{y_0}^{y} \frac{t}{x^2+t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\ln\left(x^2+y^2\right) - \underline{\frac{1}{2}\ln\left(x^2+y_0^2\right)}$$

$$f(x,y) = \underbrace{\int_{x_0}^{x} \frac{s}{s^2+y_0^2}\,\mathrm{d}s}_{I_1} + \underbrace{\int_{y_0}^{y} \frac{t}{x^2+t^2}\,\mathrm{d}t}_{I_2} + C$$

$$I_1 = \int_{x_0}^{x} \frac{s}{s^2 + y_0^2}\,\mathrm{d}s = \underline{\frac{1}{2}\ln\left(x^2 + y_0^2\right)} - \frac{1}{2}\ln\left(x_0^2 + y_0^2\right)$$

$$I_2 = \int_{y_0}^{y} \frac{t}{x^2 + t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\ln\left(x^2 + y^2\right) - \underline{\frac{1}{2}\ln\left(x^2 + y_0^2\right)}$$

$$f(x, y) = \underbrace{\int_{x_0}^{x} \frac{s}{s^2 + y_0^2}\,\mathrm{d}s}_{I_1} + \underbrace{\int_{y_0}^{y} \frac{t}{x^2 + t^2}\,\mathrm{d}t}_{I_2} + C = \frac{1}{2}\ln\left(x^2 + y^2\right) \underbrace{- \frac{1}{2}\ln\left(x_0^2 + y_0^2\right) + C}_{C*}$$

$$I_1 = \int_{x_0}^{x} \frac{s}{s^2+y_0^2}\,\mathrm{d}s = \underline{\frac{1}{2}\ln\left(x^2+y_0^2\right)} - \frac{1}{2}\ln\left(x_0^2+y_0^2\right)$$

$$I_2 = \int_{y_0}^{y} \frac{t}{x^2+t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\ln\left(x^2+y^2\right) - \underline{\frac{1}{2}\ln\left(x^2+y_0^2\right)}$$

$$f(x,y) = \underbrace{\int_{x_0}^{x} \frac{s}{s^2+y_0^2}\,\mathrm{d}s}_{I_1} + \underbrace{\int_{y_0}^{y} \frac{t}{x^2+t^2}\,\mathrm{d}t}_{I_2} + C = \frac{1}{2}\ln\left(x^2+y^2\right) \underbrace{- \frac{1}{2}\ln\left(x_0^2+y_0^2\right) + C}_{C^*}$$

$$f(x,y) = \frac{1}{2}\ln\left(x^2+y^2\right) + C^* = \ln\left(\sqrt{x^2+y^2}\right) + C^*$$

$$f(x,y)=\ln\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)+C^* \qquad \Leftrightarrow \qquad \operatorname{grad}(f)=\begin{bmatrix}\dfrac{x}{x^2+y^2}\\[2ex]\dfrac{y}{x^2+y^2}\end{bmatrix}$$

$$f(x,y) = \ln\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right) + C^* \qquad \Leftrightarrow \qquad \operatorname{grad}(f) = \begin{bmatrix} \dfrac{x}{x^2+y^2} \\ \dfrac{y}{x^2+y^2} \end{bmatrix}$$

Kontrolle:

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x,y) = \frac{\partial}{\partial x} \ln\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \cdot \frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{x}{x^2+y^2}$$

$$f(x,y) = \ln\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right) + C^* \qquad \Leftrightarrow \qquad \operatorname{grad}(f) = \begin{bmatrix} \dfrac{x}{x^2+y^2} \\ \dfrac{y}{x^2+y^2} \end{bmatrix}$$

Kontrolle:

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x,y) = \frac{\partial}{\partial x} \ln\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \cdot \frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{x}{x^2+y^2}$$

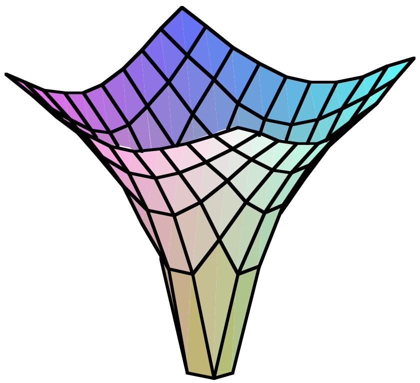
$$f(x,y) = \ln\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right) + C^* \qquad \Leftrightarrow \qquad \operatorname{grad}(f) = \begin{bmatrix} \frac{x}{x^2+y^2} \\ \frac{y}{x^2+y^2} \end{bmatrix}$$

Kontrolle:

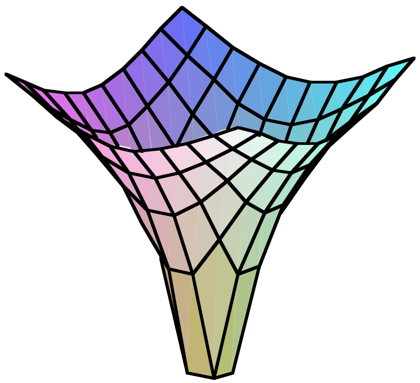
$$\frac{\partial}{\partial x} f(x,y) = \frac{\partial}{\partial x} \ln\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \cdot \frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{x}{x^2+y^2}$$

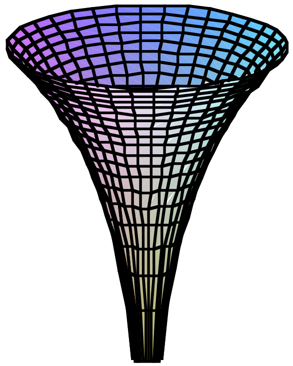
$$\frac{\partial}{\partial y} f(x,y) = \frac{\partial}{\partial y} \ln\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \cdot \frac{2y}{2\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{y}{x^2+y^2}$$

$$f(x,y) = \ln\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right) + C^* \qquad \Leftrightarrow \qquad \operatorname{grad}(f) = \begin{bmatrix} \dfrac{x}{x^2+y^2} \\ \dfrac{y}{x^2+y^2} \end{bmatrix}$$

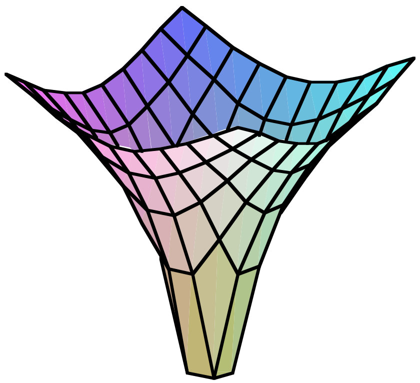


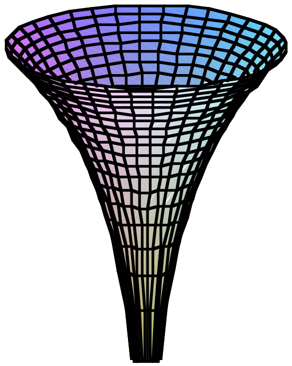
$$f(x,y) = \ln\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right) + C^* \qquad \Leftrightarrow \qquad \text{grad}(f) = \begin{bmatrix} \dfrac{x}{x^2+y^2} \\ \dfrac{y}{x^2+y^2} \end{bmatrix}$$

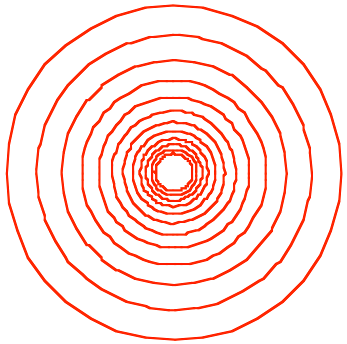




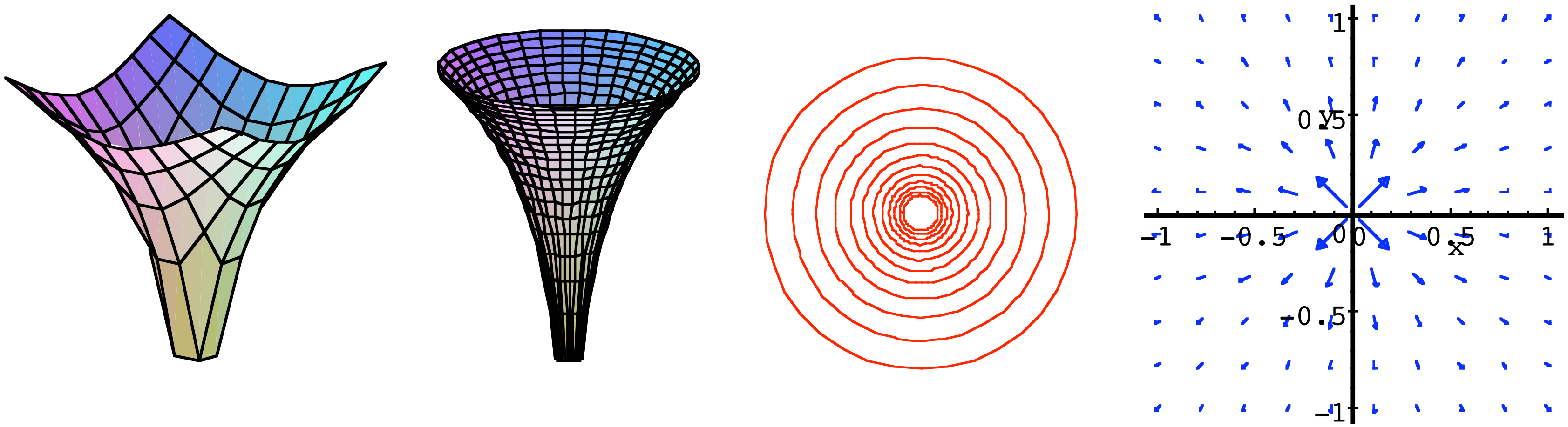
$$f(x,y)=\ln\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)+C^* \quad \Leftrightarrow \quad \operatorname{grad}(f)=\begin{bmatrix} \dfrac{x}{x^2+y^2} \\ \dfrac{y}{x^2+y^2} \end{bmatrix}$$







$$f(x,y) = \ln\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right) + C^* \qquad \Leftrightarrow \qquad \operatorname{grad}(f) = \begin{bmatrix} \dfrac{x}{x^2+y^2} \\[2ex] \dfrac{y}{x^2+y^2} \end{bmatrix}$$



Weg und Wegintegral

Assoziationen
zu *Weg* ?

Weg und Wegintegral

Assoziationen
zu *Weg* ?

Nel mezzo del cammin di nostra vita
mi ritrovai per una selva oscura
ché la diritta via era smarrita.

Weg und Wegintegral

Assoziationen
zu *Weg* ?

Nel mezzo del cammin di nostra vita — Lebensweg
mi ritrovai per una selva oscura
ché la diritta via era smarrita.

LA DIVINA COMMEDIA
di Dante Alighieri
INFERNO
Canto I

Beispiel:

Weg: Wanderung in Schottland

Wegintegral: (Beispiel im Beispiel)

$$\text{totale Regenmenge} = \int_{\text{Start}}^{\text{Ziel}} \text{Regendichte}\, \mathrm{d}s$$

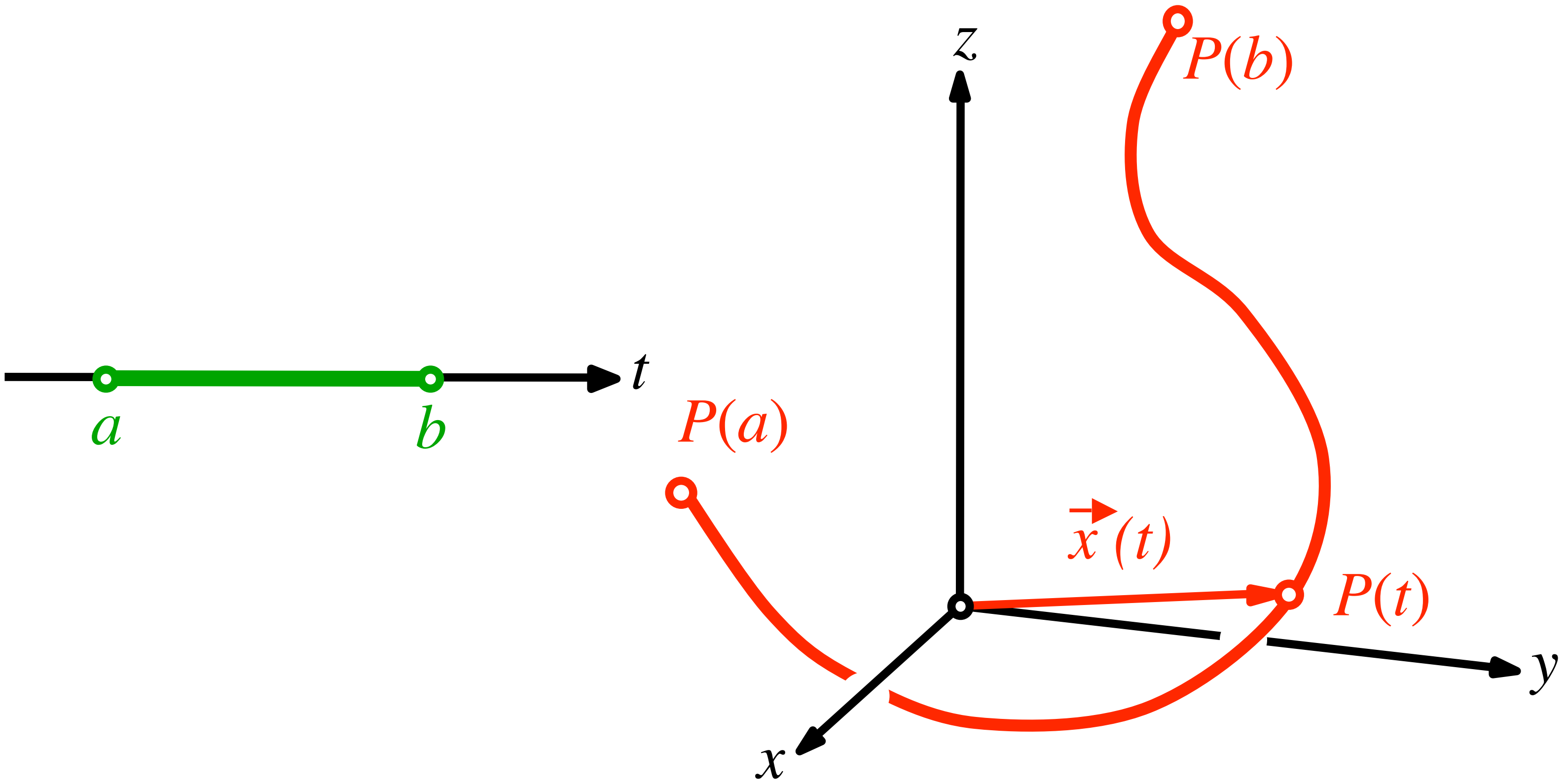
Beispiel:

Weg: Wanderung in Schottland
(Atomkraftwerk in der Nähe)

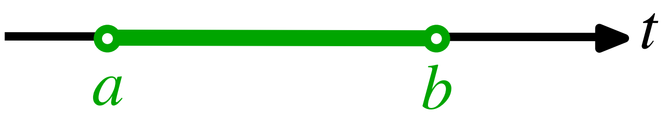
Wegintegral: (Beispiel im Beispiel)

$$\text{totale aufgenommene Strahlung} = \int_{\text{Start}}^{\text{Ziel}} \text{Strahlungsintensität}\, \mathrm{d}s$$

Parameterdarstellung eines Weges (einer Kurve)



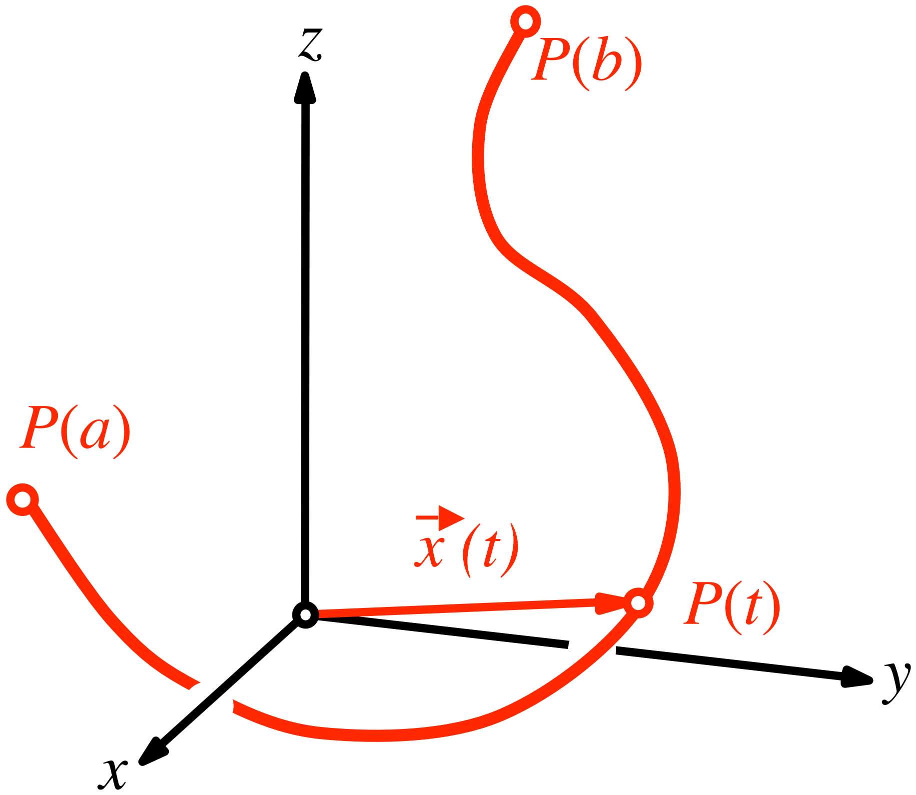
Parameterdarstellung eines Weges (einer Kurve)



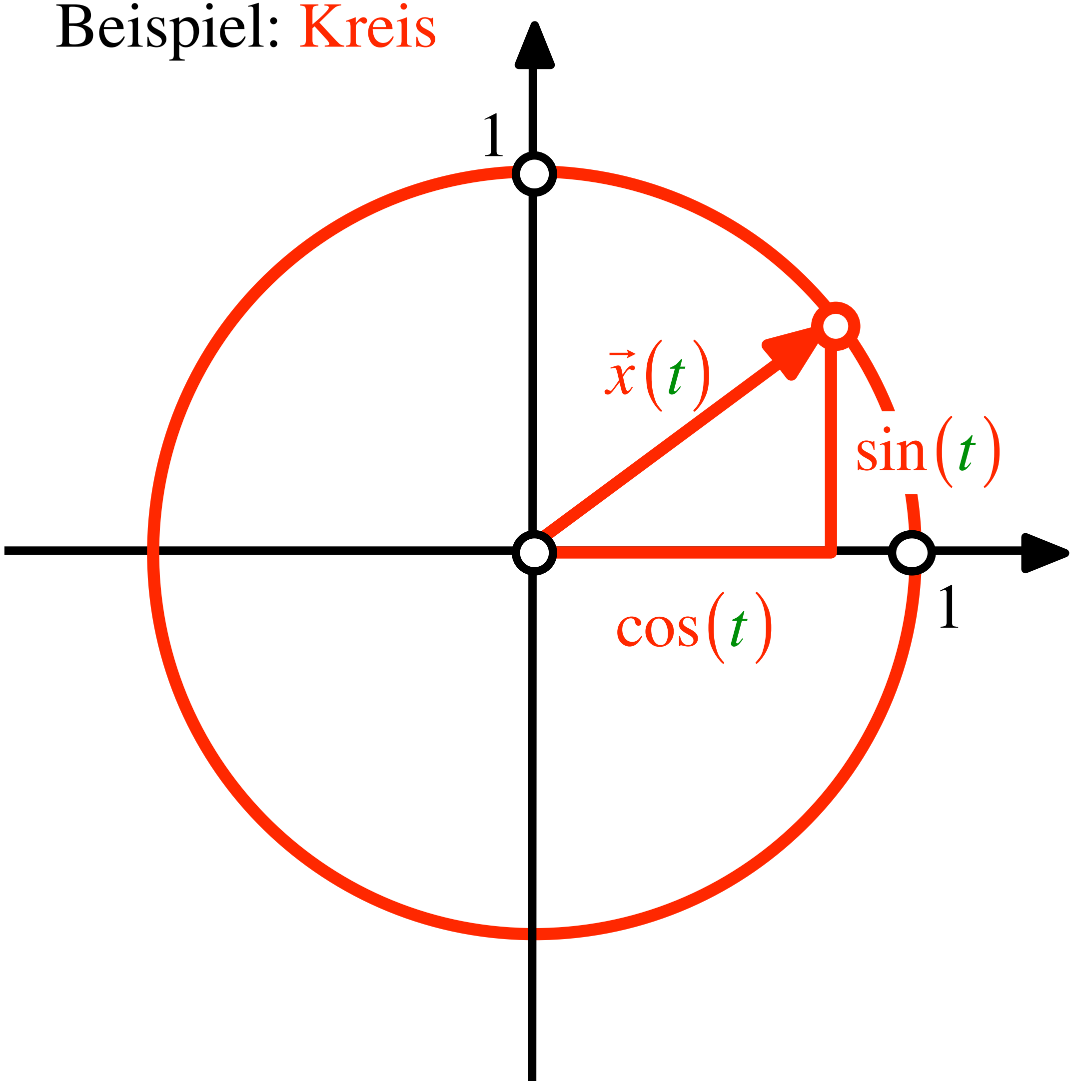
Parameter

$$\vec{x}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{bmatrix}$$

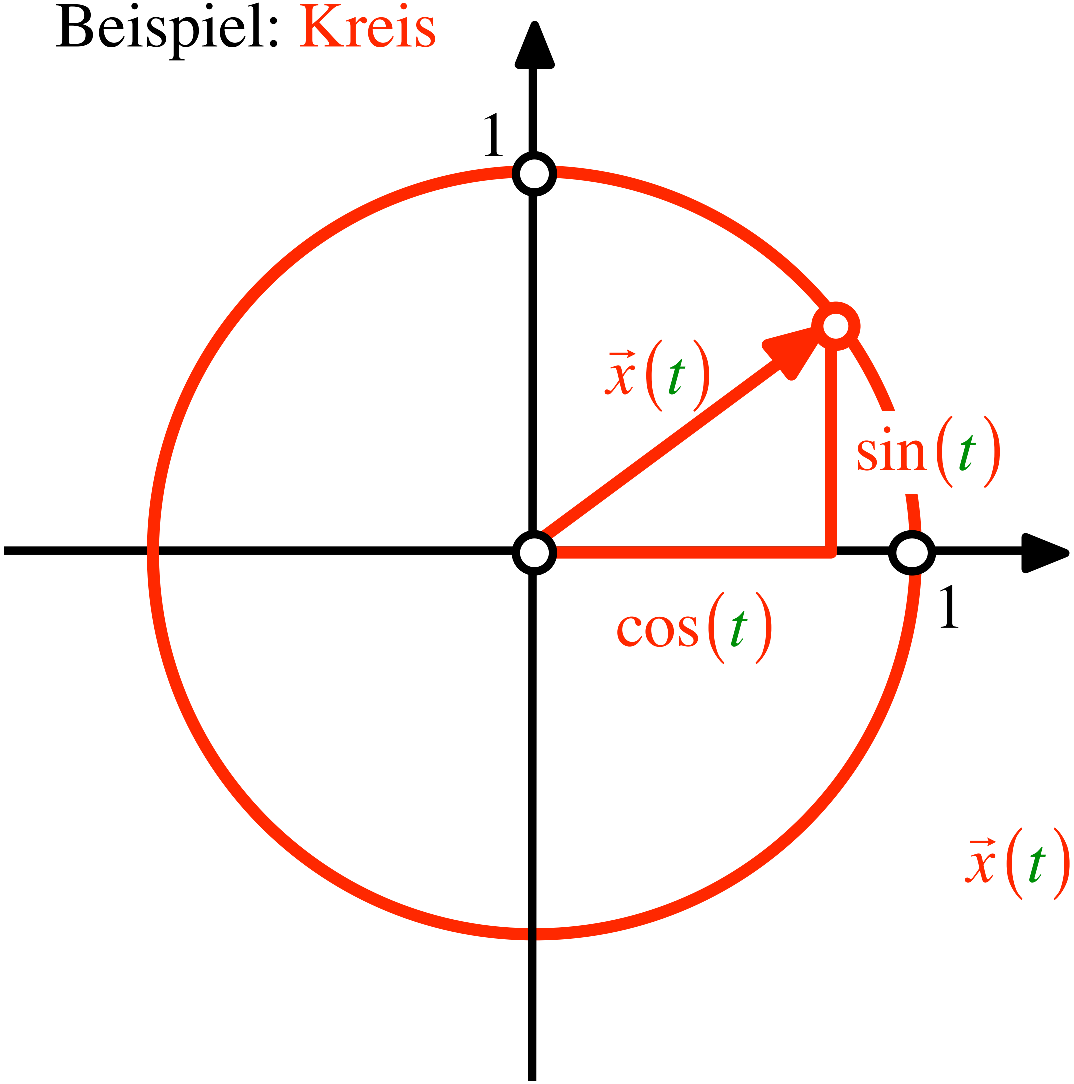
Ortsvektor
Vektorspitze beschreibt Weg



Beispiel: Kreis



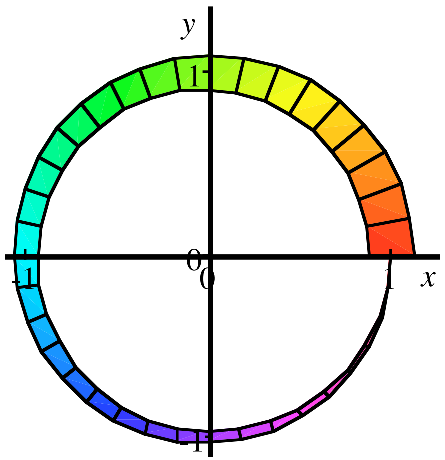
Beispiel: Kreis



$$\vec{x}(t) = \begin{bmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{bmatrix}, \quad t \in [0, 2\pi]$$

Beispiel: Kreis

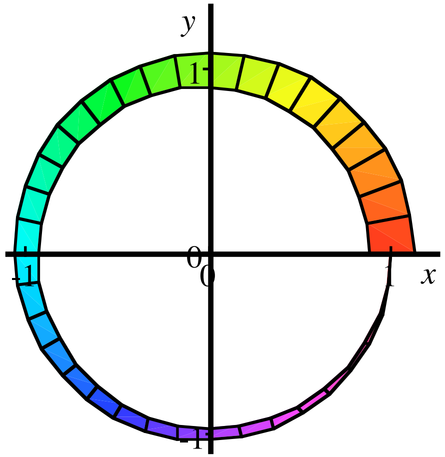
$$\vec{x}(t) = \begin{bmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{bmatrix}$$



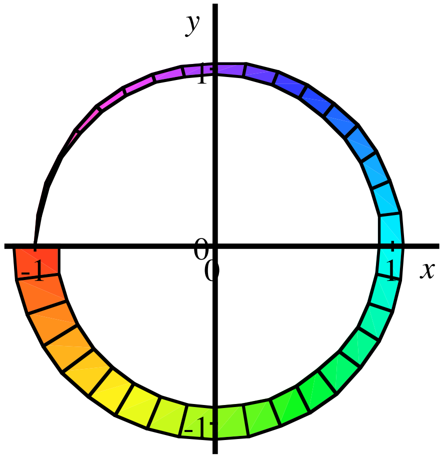
$$t \in [0, 2\pi]$$

Beispiel: Kreis

$$\vec{x}(t) = \begin{bmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{bmatrix}$$



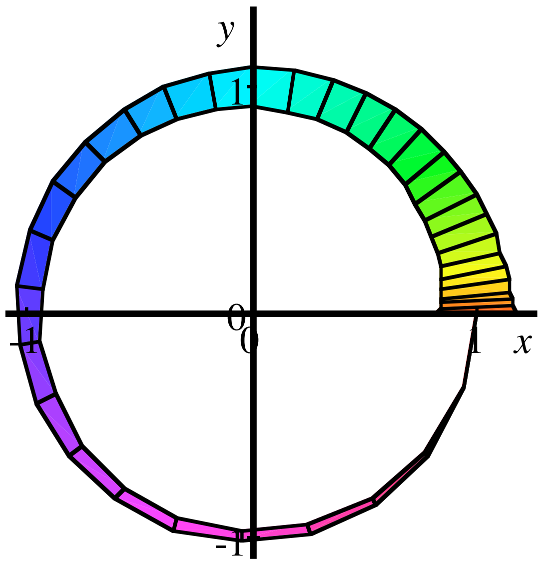
$t \in [0, 2\pi]$



$t \in [-\pi, \pi]$

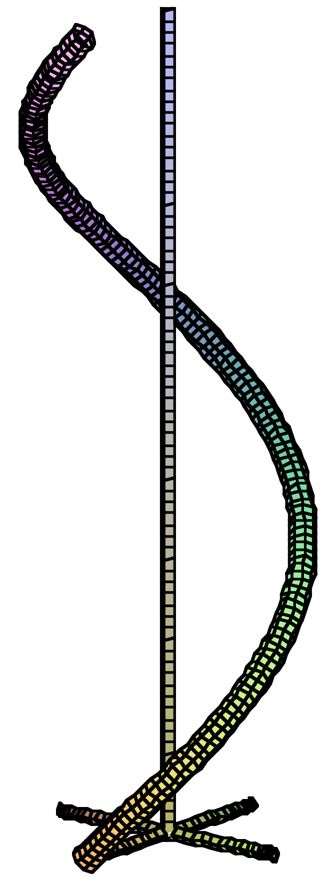
Beispiel: Kreis

$$\vec{x}(t) = \begin{bmatrix} \cos(t^2) \\ \sin(t^2) \end{bmatrix}$$



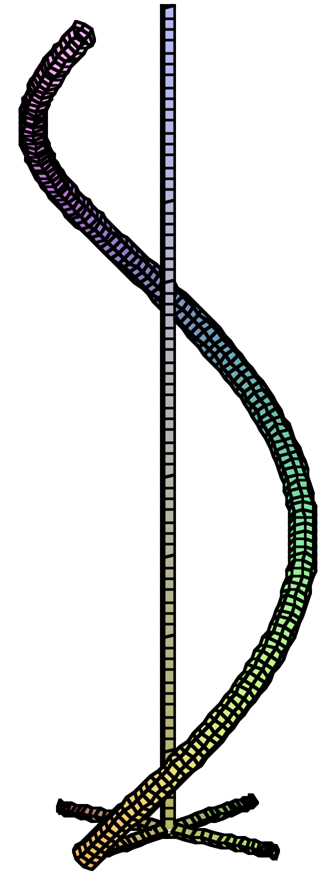
$$t \in \left[0, \sqrt{2\pi}\right]$$

$$\text{Schraubenlinie: } \vec{x}(t) = \begin{bmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \\ t \end{bmatrix}, \quad t \in [0, 2\pi]$$

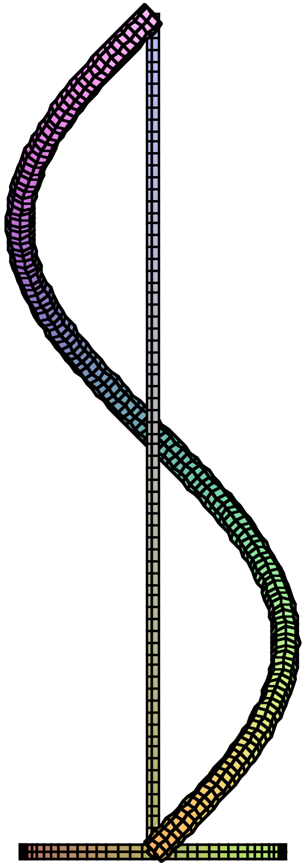


Ansicht

Schraubenlinie: $\vec{x}(t)=\begin{bmatrix}\cos(t)\\ \sin(t)\\ t\end{bmatrix},\quad t\in[0,2\pi]$

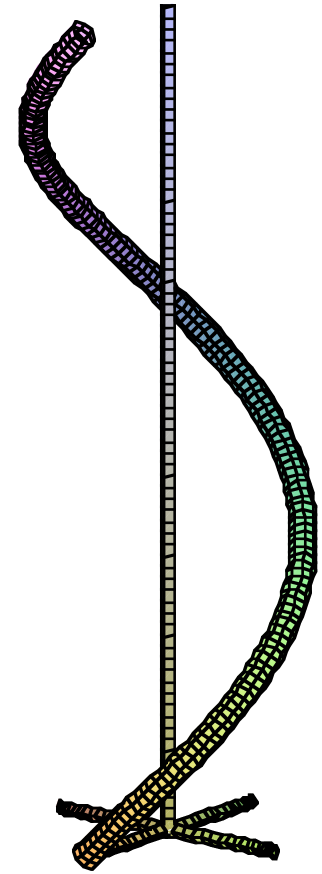


Ansicht

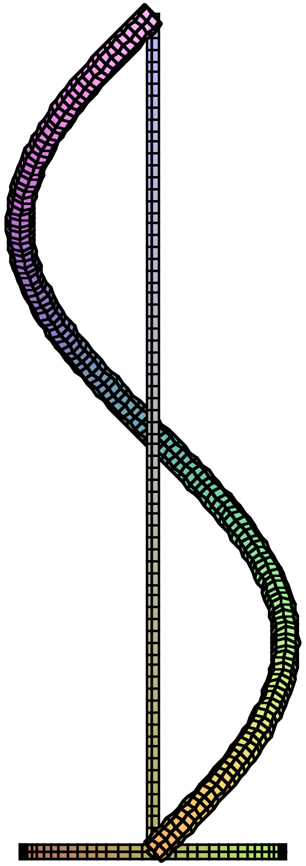


Von vorne

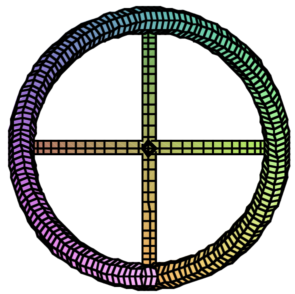
Schraubenlinie: $\vec{x}(t) = \begin{bmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \\ t \end{bmatrix}, \quad t \in [0, 2\pi]$



Ansicht



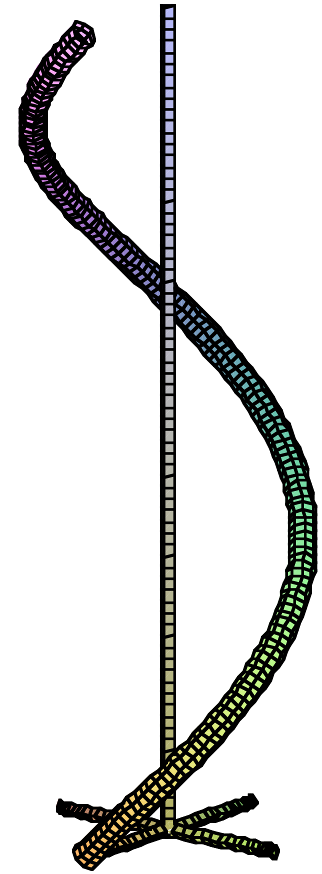
Von vorne



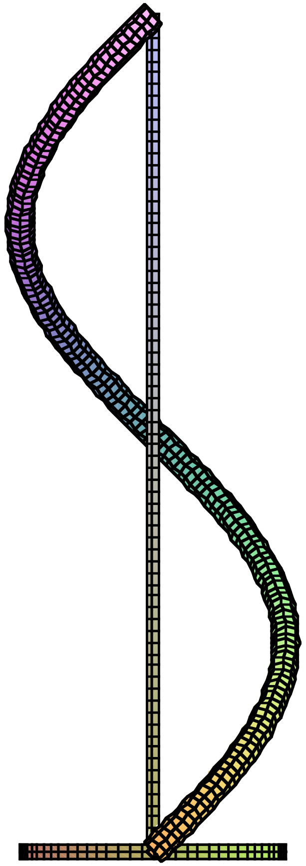
Von oben

$$\text{Schraubenlinie: } \vec{x}(t) = \begin{bmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \\ t \end{bmatrix}, \quad t \in [0, 2\pi]$$

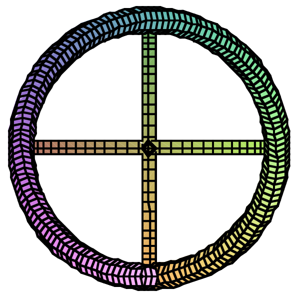
Mit Folie zeigen



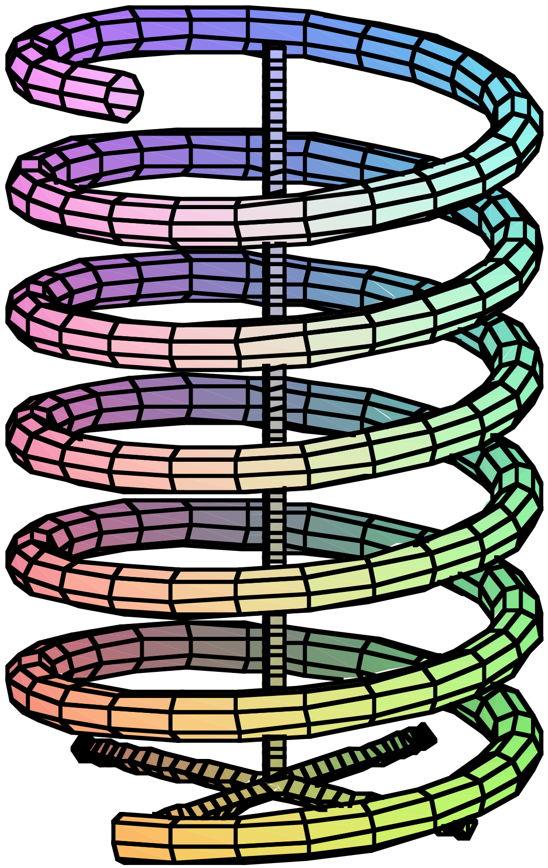
Ansicht



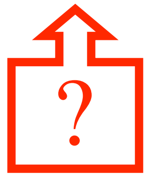
Von vorne

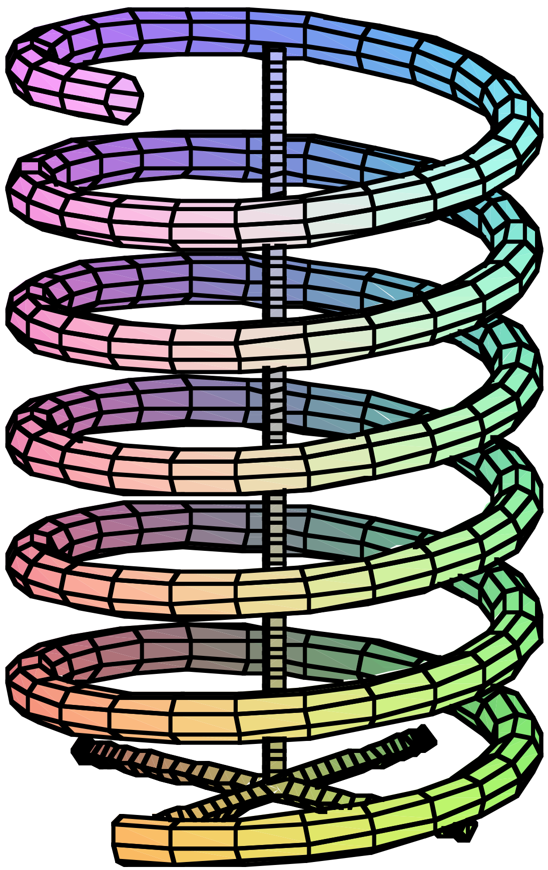


Von oben

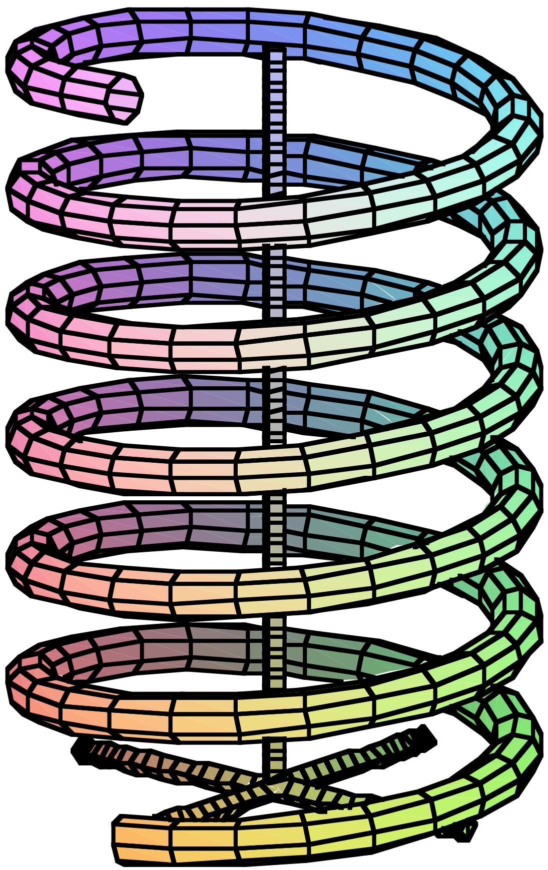


$$\vec{x}(t) = \begin{bmatrix} r\cos(t) \\ r\sin(t) \\ pt \end{bmatrix}, \quad t \in [0, \qquad]$$



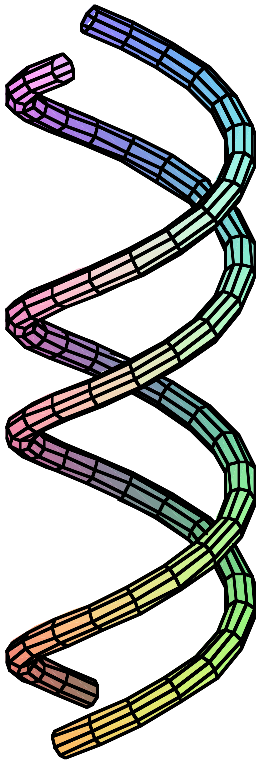


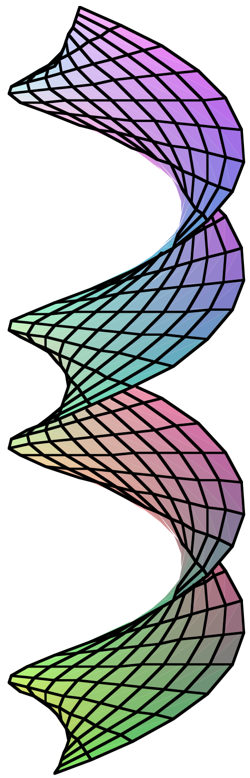
$$\vec{x}(t) = \begin{bmatrix} r\cos(t) \\ r\sin(t) \\ pt \end{bmatrix}, \quad t \in [0, 12\pi\ ]$$

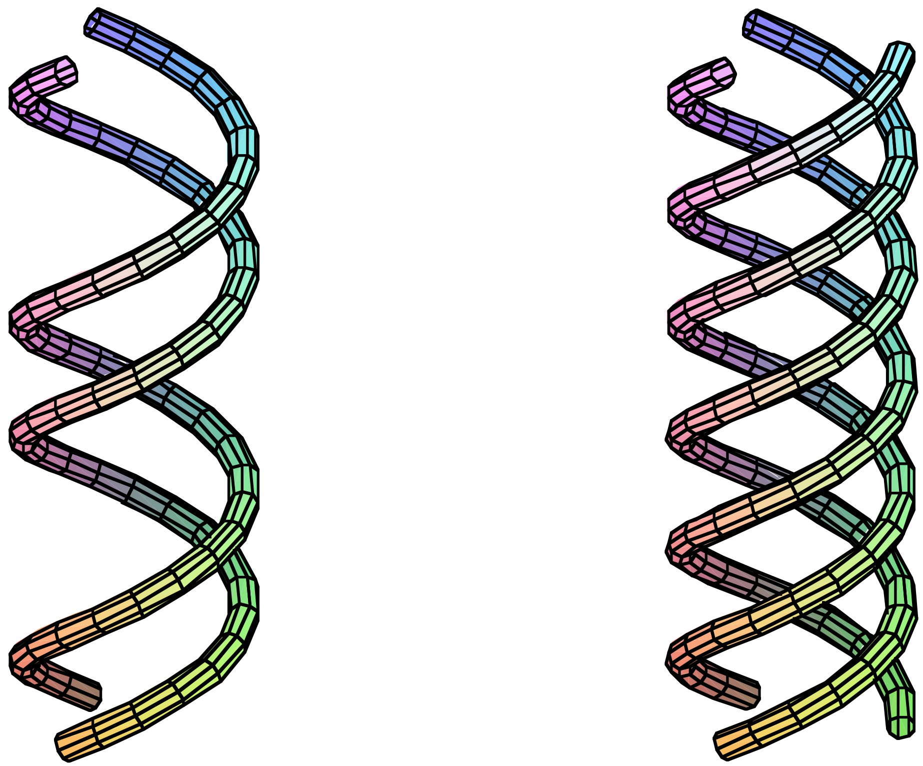


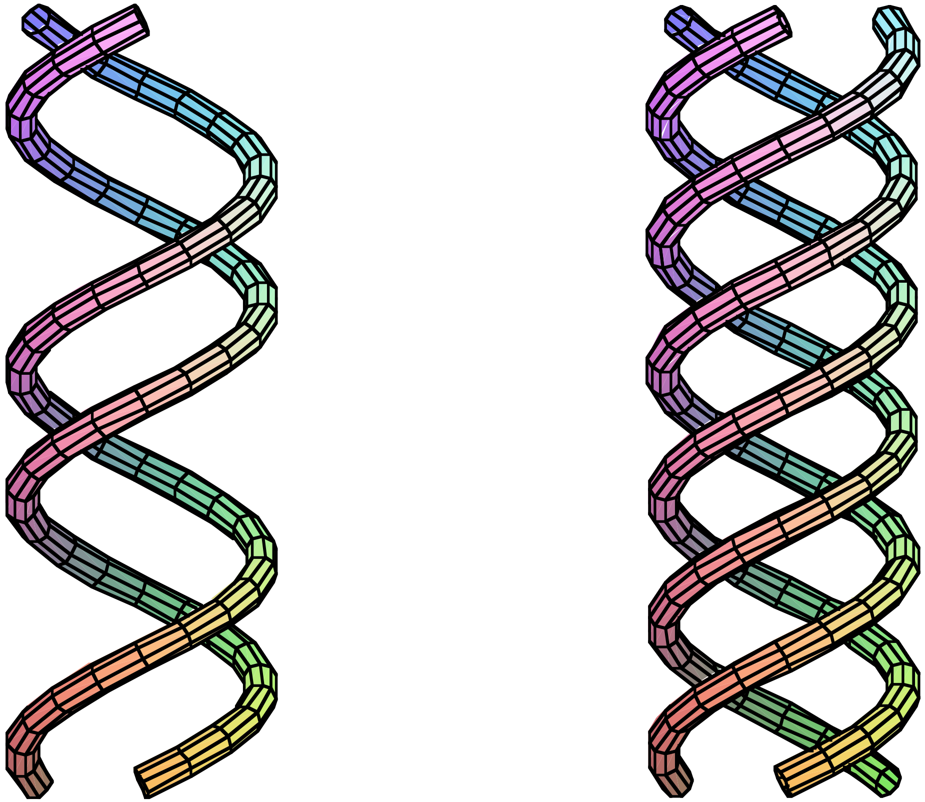
$$\vec{x}(t) = \begin{bmatrix} r\cos(t) \\ r\sin(t) \\ pt \end{bmatrix}, \quad t \in [0, 12\pi\ ]$$

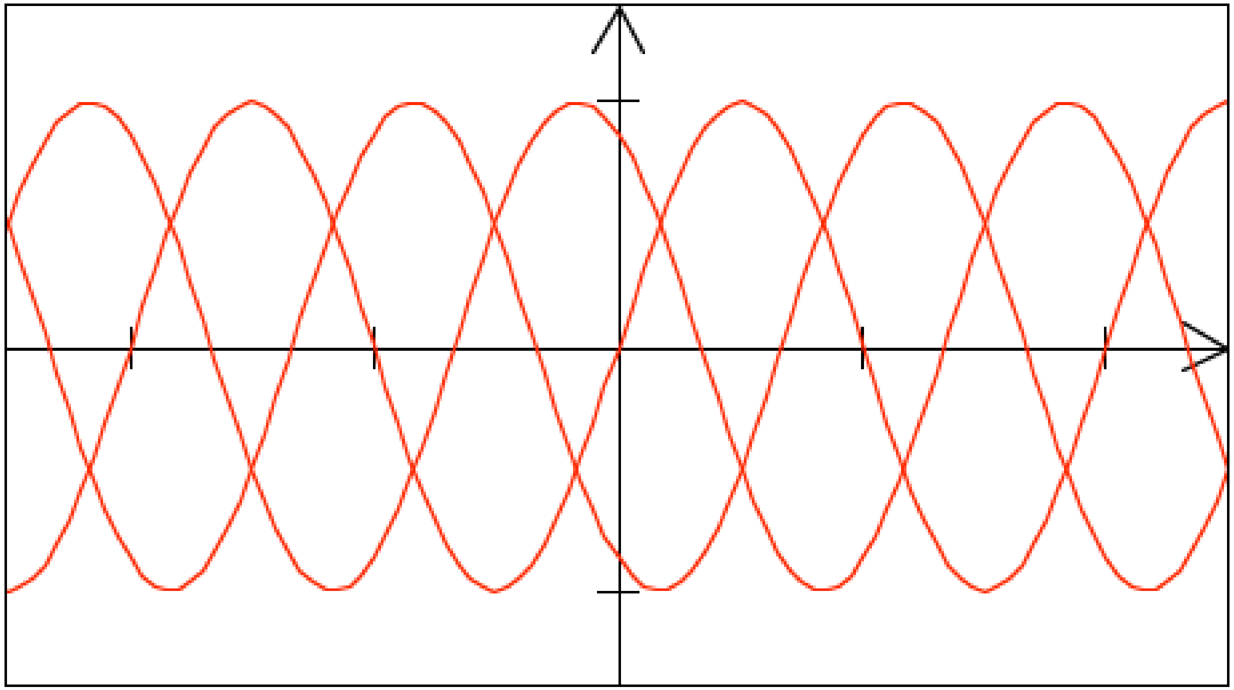
p positiv:
Rechtsschraube









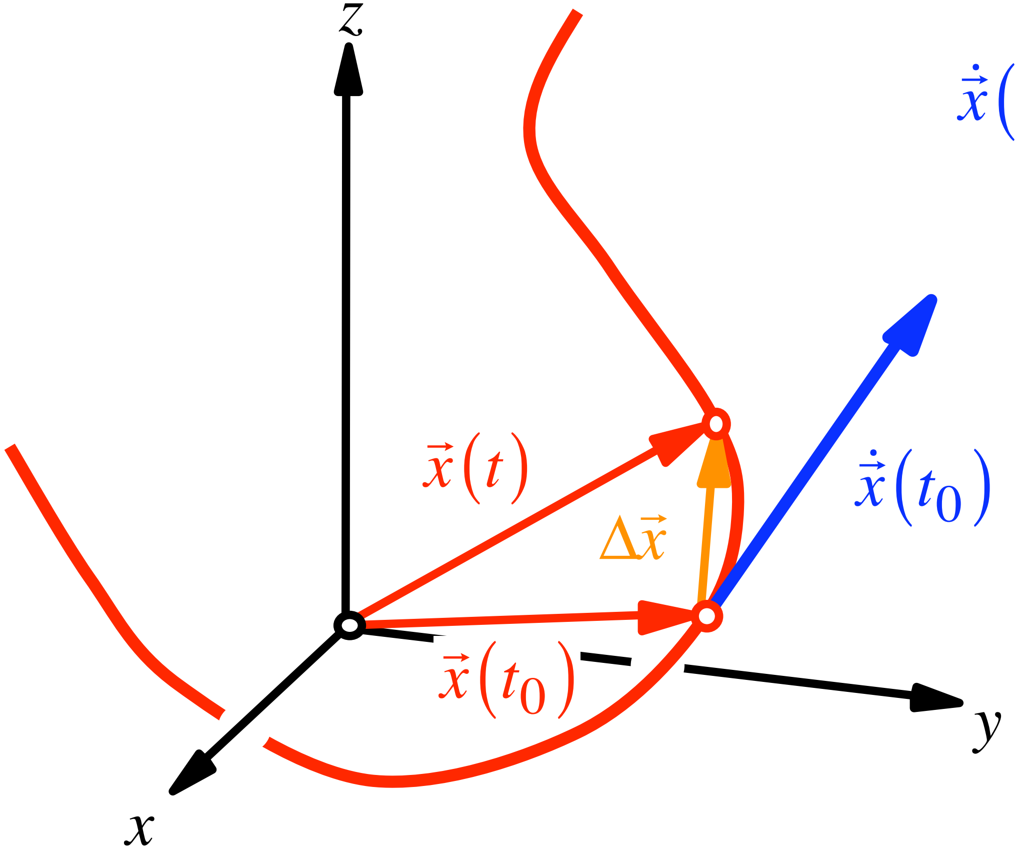


Wechselstrom

Kurve: $$\vec{x}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{bmatrix}$$

Ableitung: $$\dot{\vec{x}}(t_0) = \lim_{t \to t_0} \frac{\vec{x}(t) - \vec{x}(t_0)}{t - t_0}$$

Geometrische Situation



Ableitung:

$$\dot{\vec{x}}(t_0) = \lim_{t \to t_0} \frac{\vec{x}(t) - \vec{x}(t_0)}{t - t_0}$$

Rechnerisches Vorgehen

Kurve: $\vec{x}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{bmatrix}$

Ableitung: $\dot{\vec{x}}(t) = \lim_{t \to t_0} \frac{\vec{x}(t) - \vec{x}(t_0)}{t - t_0} = ?$

Rechnerisches Vorgehen

Ableitung:

$$\dot{\vec{x}}(t_0) = \lim_{t \to t_0} \frac{\vec{x}(t) - \vec{x}(t_0)}{t - t_0}$$

Rechnerisches Vorgehen

Ableitung:

$$\dot{\vec{x}}(t_0) = \lim_{t \to t_0} \frac{\vec{x}(t) - \vec{x}(t_0)}{t - t_0} = \lim_{t \to t_0} \frac{1}{t - t_0} \begin{bmatrix} x(t) - x(t_0) \\ y(t) - y(t_0) \\ z(t) - z(t_0) \end{bmatrix}$$

Rechnerisches Vorgehen

Ableitung:

$$\dot{\vec{x}}(t_0) = \lim_{t \to t_0} \frac{\vec{x}(t) - \vec{x}(t_0)}{t - t_0} = \lim_{t \to t_0} \frac{1}{t - t_0} \begin{bmatrix} x(t) - x(t_0) \\ y(t) - y(t_0) \\ z(t) - z(t_0) \end{bmatrix}$$

$$= \lim_{t \to t_0} \begin{bmatrix} \frac{x(t) - x(t_0)}{t - t_0} \\ \frac{y(t) - y(t_0)}{t - t_0} \\ \frac{z(t) - z(t_0)}{t - t_0} \end{bmatrix}$$

Rechnerisches Vorgehen

Ableitung:

$$\dot{\vec{x}}(t_0) = \lim_{t\to t_0} \frac{\vec{x}(t)-\vec{x}(t_0)}{t-t_0} = \lim_{t\to t_0} \frac{1}{t-t_0} \begin{bmatrix} x(t)-x(t_0) \\ y(t)-y(t_0) \\ z(t)-z(t_0) \end{bmatrix}$$

$$= \lim_{t\to t_0} \begin{bmatrix} \frac{x(t)-x(t_0)}{t-t_0} \\ \frac{y(t)-y(t_0)}{t-t_0} \\ \frac{z(t)-z(t_0)}{t-t_0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lim\limits_{t\to t_0} \frac{x(t)-x(t_0)}{t-t_0} \\ \lim\limits_{t\to t_0} \frac{y(t)-y(t_0)}{t-t_0} \\ \lim\limits_{t\to t_0} \frac{z(t)-z(t_0)}{t-t_0} \end{bmatrix}$$

Rechnerisches Vorgehen

Ableitung:

$$\dot{\vec{x}}(t_0) = \lim_{t \to t_0} \frac{\vec{x}(t) - \vec{x}(t_0)}{t - t_0} = \lim_{t \to t_0} \frac{1}{t - t_0} \begin{bmatrix} x(t) - x(t_0) \\ y(t) - y(t_0) \\ z(t) - z(t_0) \end{bmatrix}$$

$$= \lim_{t \to t_0} \begin{bmatrix} \frac{x(t) - x(t_0)}{t - t_0} \\ \frac{y(t) - y(t_0)}{t - t_0} \\ \frac{z(t) - z(t_0)}{t - t_0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lim\limits_{t \to t_0} \frac{x(t) - x(t_0)}{t - t_0} \\ \lim\limits_{t \to t_0} \frac{y(t) - y(t_0)}{t - t_0} \\ \lim\limits_{t \to t_0} \frac{z(t) - z(t_0)}{t - t_0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{bmatrix}$$

Rechnerisches Vorgehen

Kurve: $$\vec{x}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{bmatrix}$$

Ableitung: $$\dot{\vec{x}}(t) = \begin{bmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{bmatrix}$$

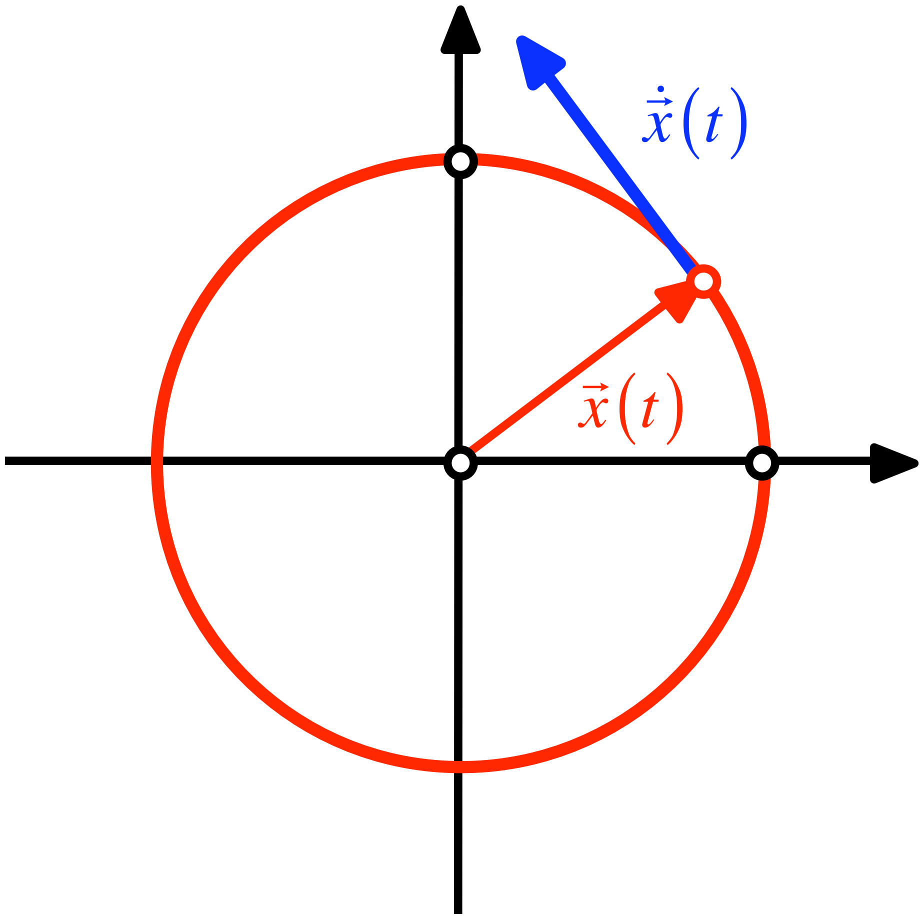
Komponentenweises Ableiten

Gleichmäßig
durchlaufener Kreis

$$\vec{x}(t) = \begin{bmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{bmatrix}$$

$$\dot{\vec{x}}(t) = \begin{bmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \end{bmatrix}$$

$$\left|\dot{\vec{x}}(t)\right| = 1$$



Gleichmäßig durchlaufener Kreis

$$\vec{x}(t) = \begin{bmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{bmatrix}$$

$$\dot{\vec{x}}(t) = \begin{bmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \end{bmatrix}$$

$$\left|\dot{\vec{x}}(t)\right| = 1$$

Beschleunigt durchlaufener Kreis

$$\vec{x}(t) = \begin{bmatrix} \cos\left(t^2\right) \\ \sin\left(t^2\right) \end{bmatrix}$$

Gleichmäßig durchlaufener Kreis

$$\vec{x}(t) = \begin{bmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{bmatrix}$$

$$\dot{\vec{x}}(t) = \begin{bmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \end{bmatrix}$$

$$\left|\dot{\vec{x}}(t)\right| = 1$$

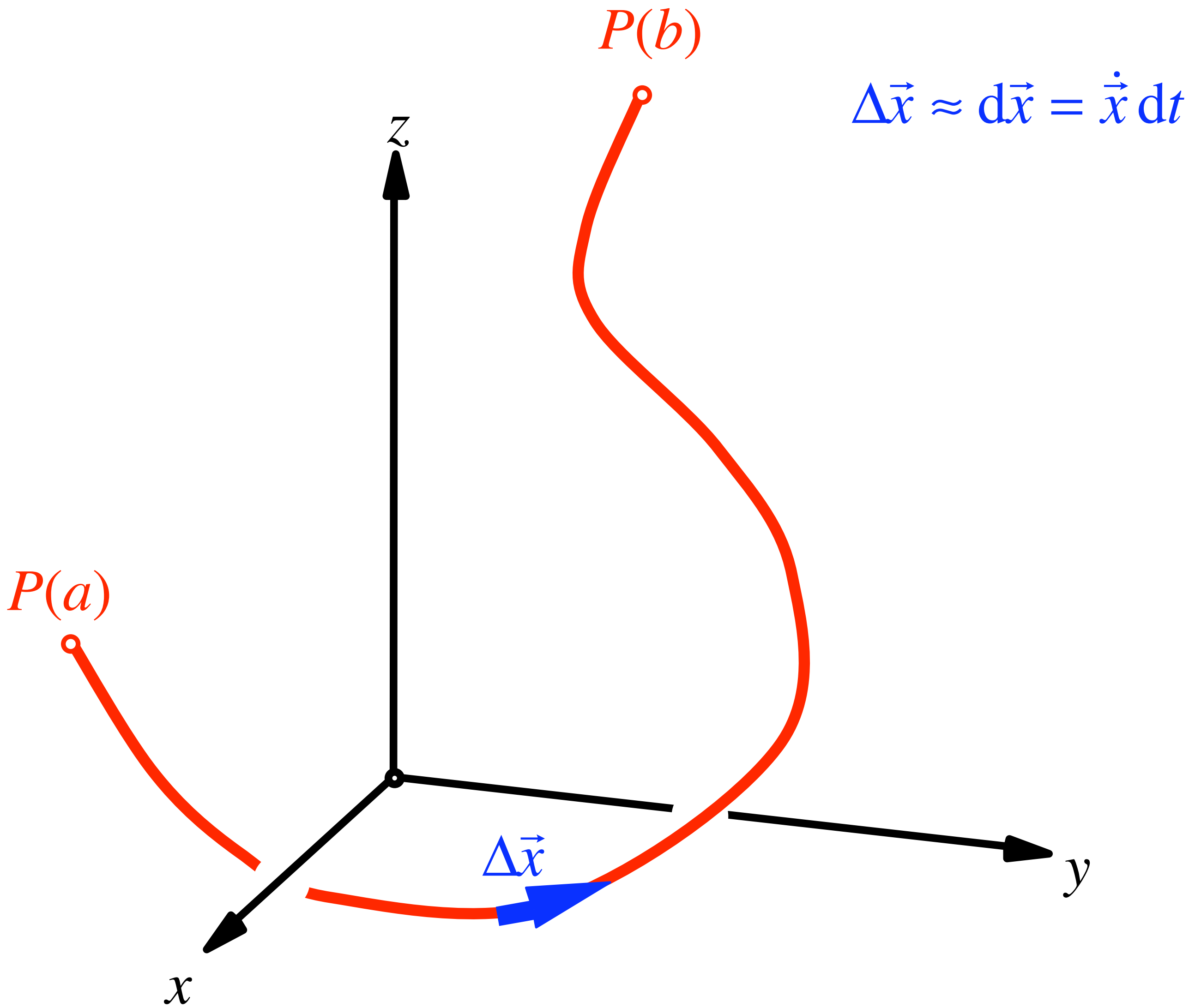
Beschleunigt durchlaufener Kreis

$$\vec{x}(t) = \begin{bmatrix} \cos\left(t^2\right) \\ \sin\left(t^2\right) \end{bmatrix}$$

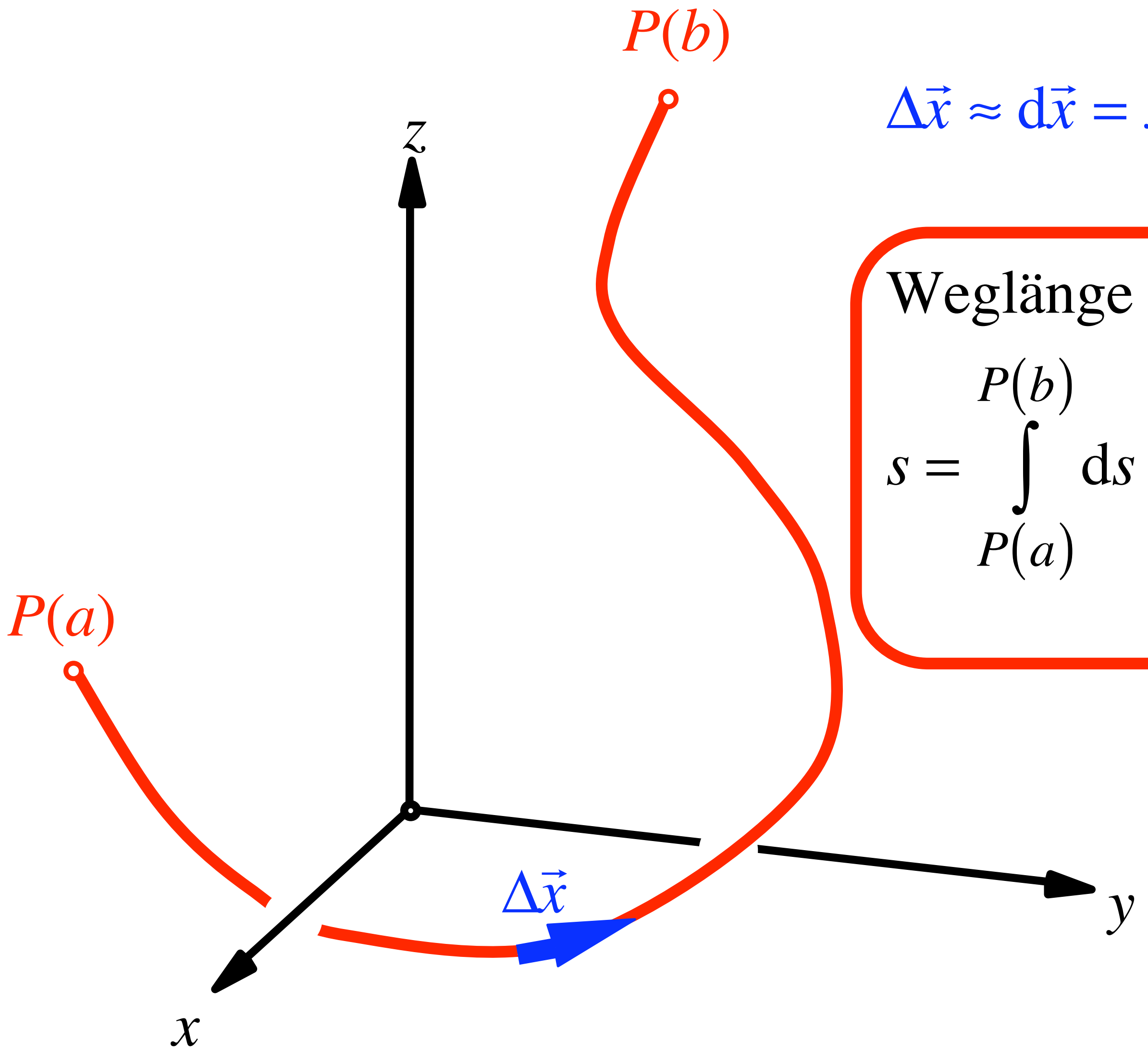
Innere Ableitung

$$\dot{\vec{x}}(t) = \begin{bmatrix} -\sin\left(t^2\right)2t \\ \cos\left(t^2\right)2t \end{bmatrix} = 2t\begin{bmatrix} -\sin\left(t^2\right) \\ \cos\left(t^2\right) \end{bmatrix}$$

$$\left|\dot{\vec{x}}(t)\right| = 2t$$



Kleine Änderung

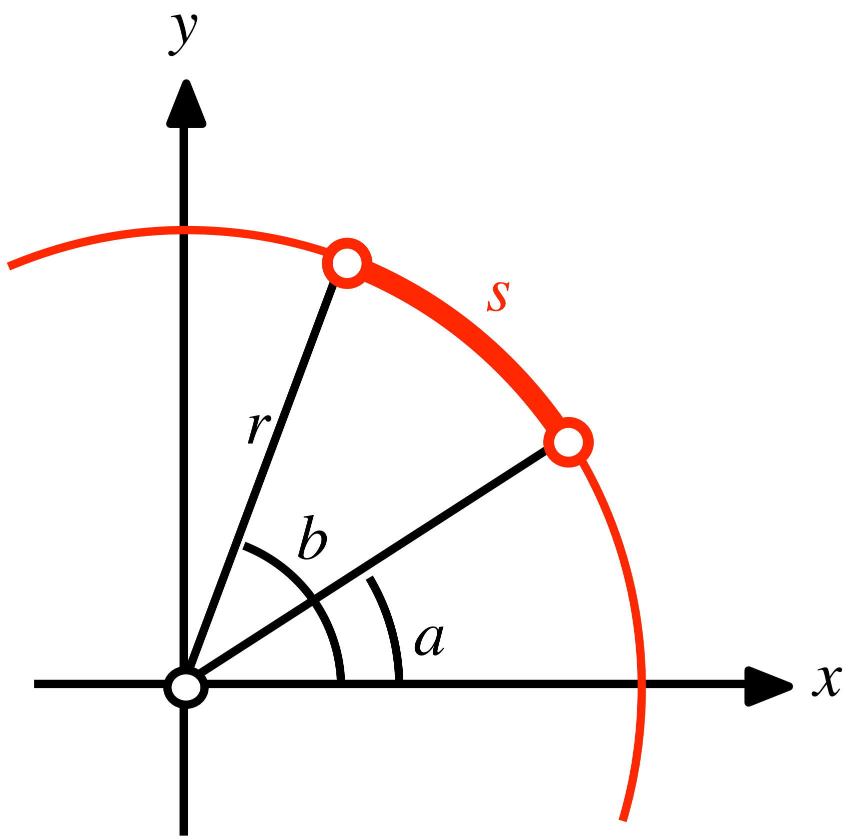


$$\Delta\vec{x} \approx \mathrm{d}\vec{x} = \dot{\vec{x}}\,\mathrm{d}t$$

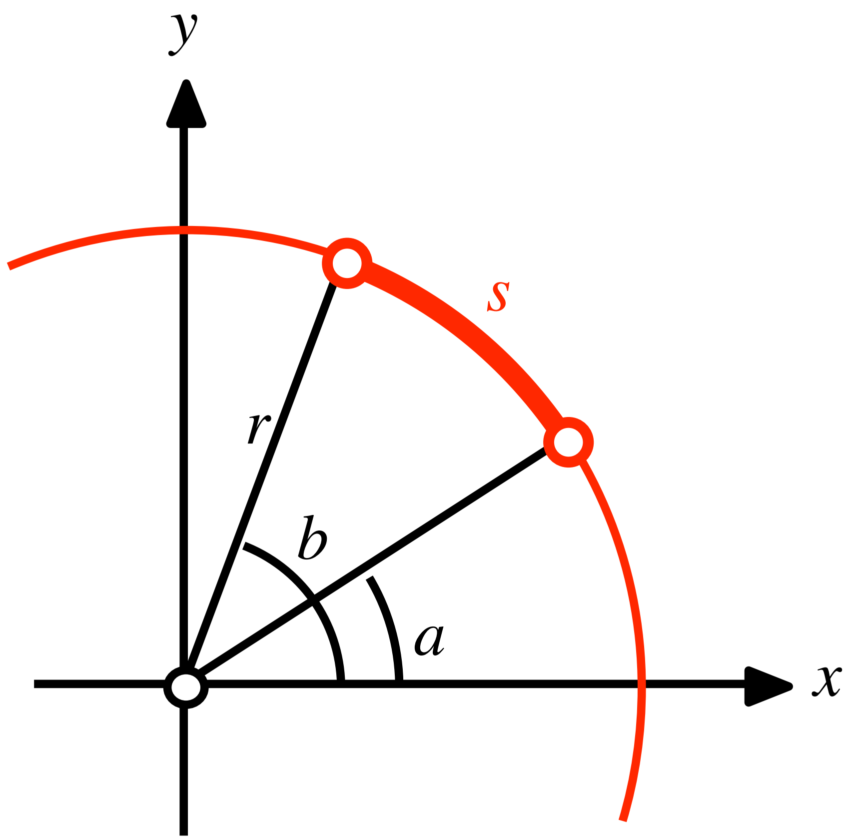
Weglänge

$$s = \int_{P(a)}^{P(b)} \mathrm{d}s = \int_{P(a)}^{P(b)} |\mathrm{d}\vec{x}| = \int_a^b \left|\dot{\vec{x}}(t)\right| \mathrm{d}t$$

Kleine Änderung

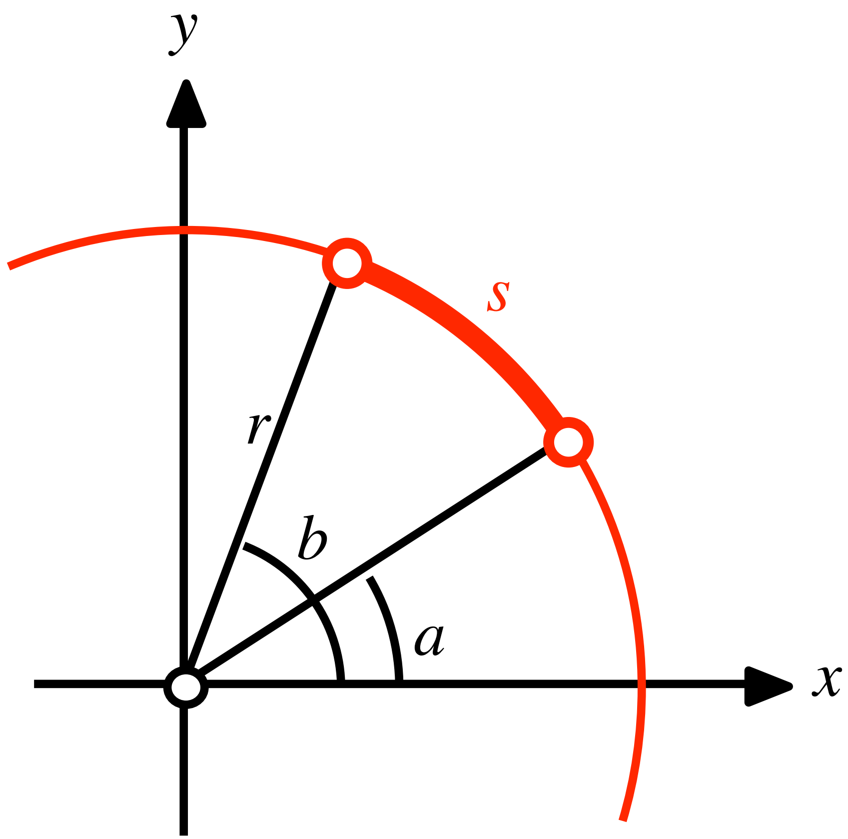


$$\vec{x}(t) = \begin{bmatrix} r\cos(t) \\ r\sin(t) \end{bmatrix}, \quad t \in [a,b]$$



$$\vec{x}(t) = \begin{bmatrix} r\cos(t) \\ r\sin(t) \end{bmatrix}, \quad t \in [a,b]$$

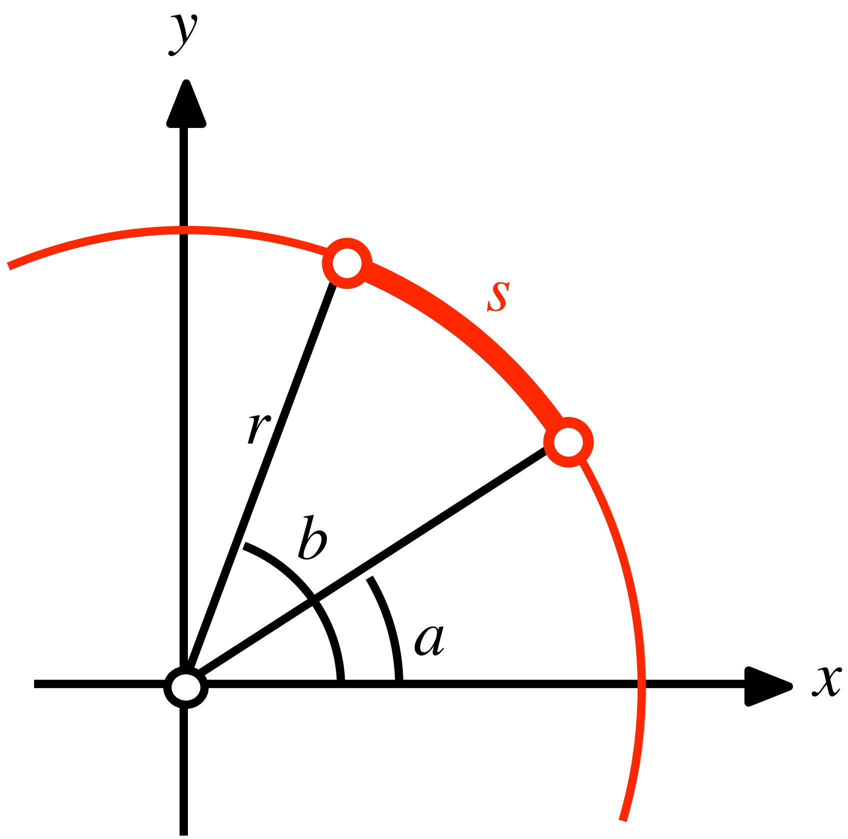
$$\dot{\vec{x}}(t) = \begin{bmatrix} -r\sin(t) \\ r\cos(t) \end{bmatrix}$$



$$\vec{x}(t) = \begin{bmatrix} r\cos(t) \\ r\sin(t) \end{bmatrix}, \quad t \in [a,b]$$

$$\dot{\vec{x}}(t) = \begin{bmatrix} -r\sin(t) \\ r\cos(t) \end{bmatrix}$$

$$\left|\dot{\vec{x}}\right| = r$$

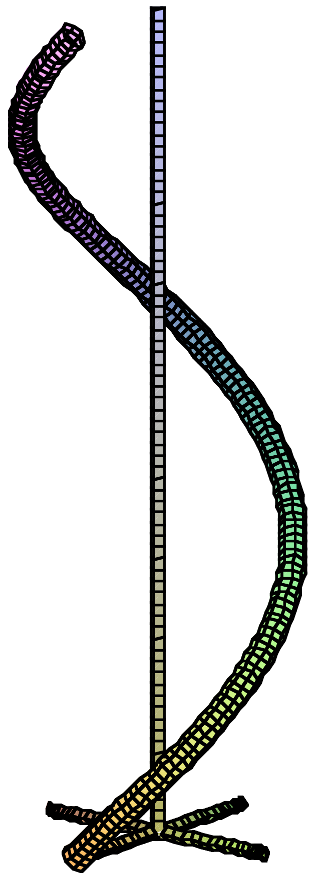


$$\vec{x}(t) = \begin{bmatrix} r\cos(t) \\ r\sin(t) \end{bmatrix}, \quad t \in [a,b]$$

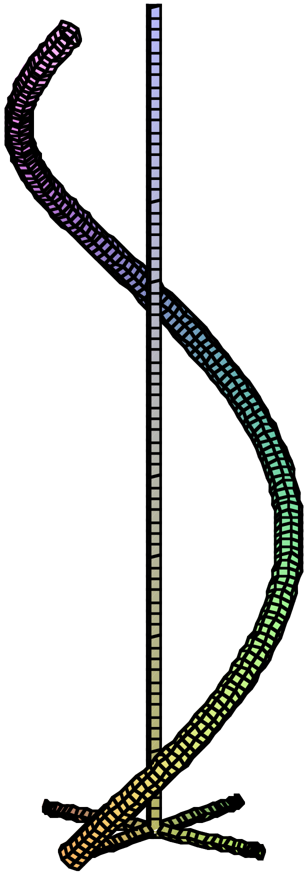
$$\dot{\vec{x}}(t) = \begin{bmatrix} -r\sin(t) \\ r\cos(t) \end{bmatrix}$$

$$\left|\dot{\vec{x}}\right| = r$$

$$s = \int_a^b r\,\mathrm{d}t = r(b-a)$$

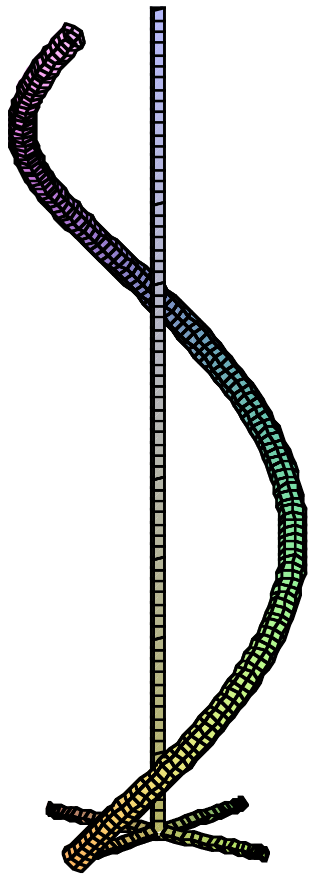


$$\vec{x}(t) = \begin{bmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \\ t \end{bmatrix}, \quad t \in [0, 2\pi]$$



$$\vec{x}(t) = \begin{bmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \\ t \end{bmatrix}, \quad t \in [0, 2\pi]$$

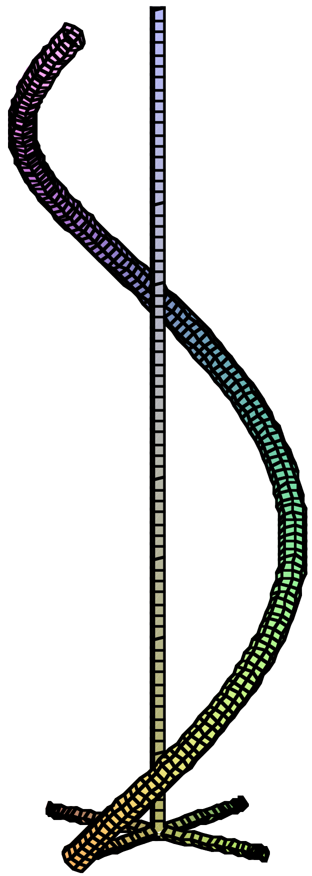
$$\dot{\vec{x}}(t) = \begin{bmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \\ 1 \end{bmatrix}$$



$$\vec{x}(t) = \begin{bmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \\ t \end{bmatrix}, \quad t \in [0, 2\pi]$$

$$\dot{\vec{x}}(t) = \begin{bmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\left|\dot{\vec{x}}(t)\right| = \sqrt{2}$$

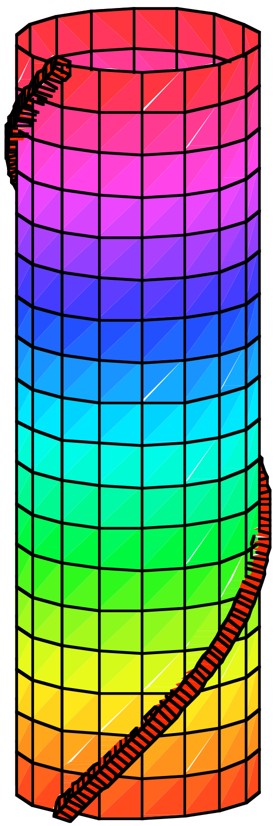


$$\vec{x}(t) = \begin{bmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \\ t \end{bmatrix}, \quad t \in [0, 2\pi]$$

$$\dot{\vec{x}}(t) = \begin{bmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\left|\dot{\vec{x}}(t)\right| = \sqrt{2}$$

$$s = \int_0^{2\pi} \left|\dot{\vec{x}}(t)\right| \mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} \sqrt{2}\, \mathrm{d}t = \sqrt{2}\, 2\pi$$

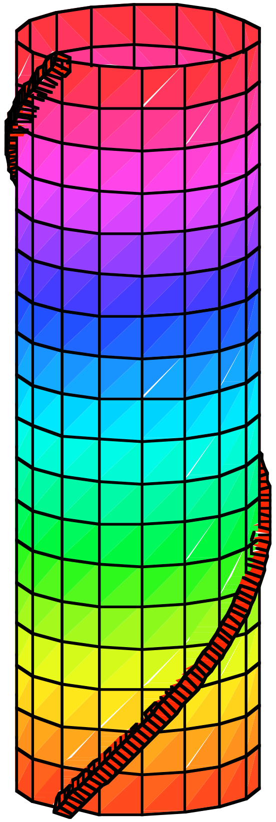


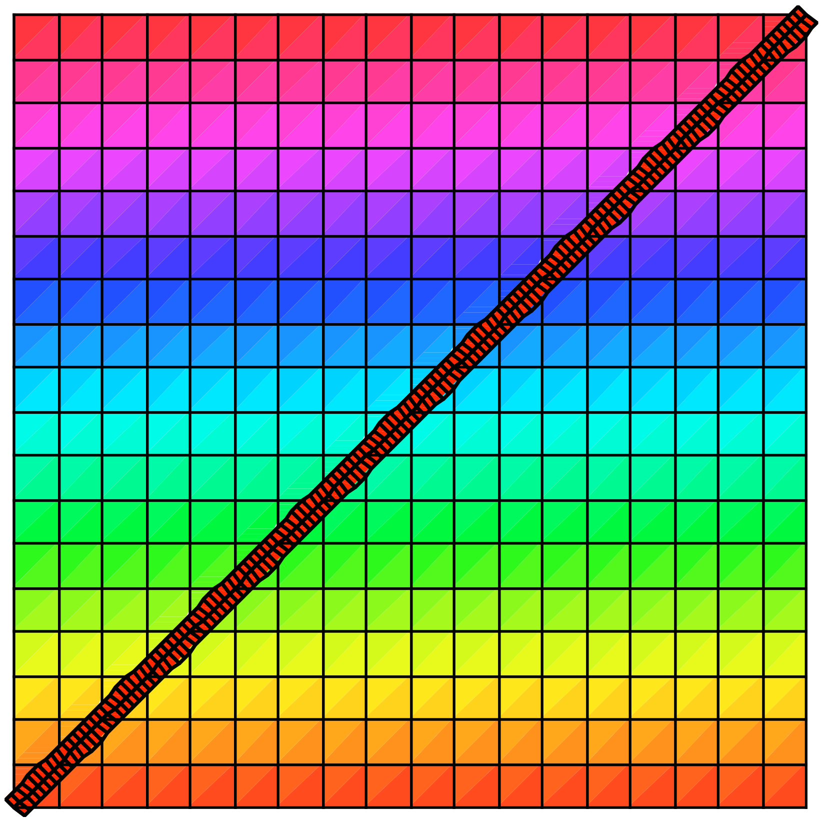
$$\vec{x}(t)=\begin{bmatrix}\cos(t)\\ \sin(t)\\ t\end{bmatrix},\quad t\in[0,2\pi]$$

$$\dot{\vec{x}}(t)=\begin{bmatrix}-\sin(t)\\ \cos(t)\\ 1\end{bmatrix}$$

$$\left|\dot{\vec{x}}(t)\right|=\sqrt{2}$$

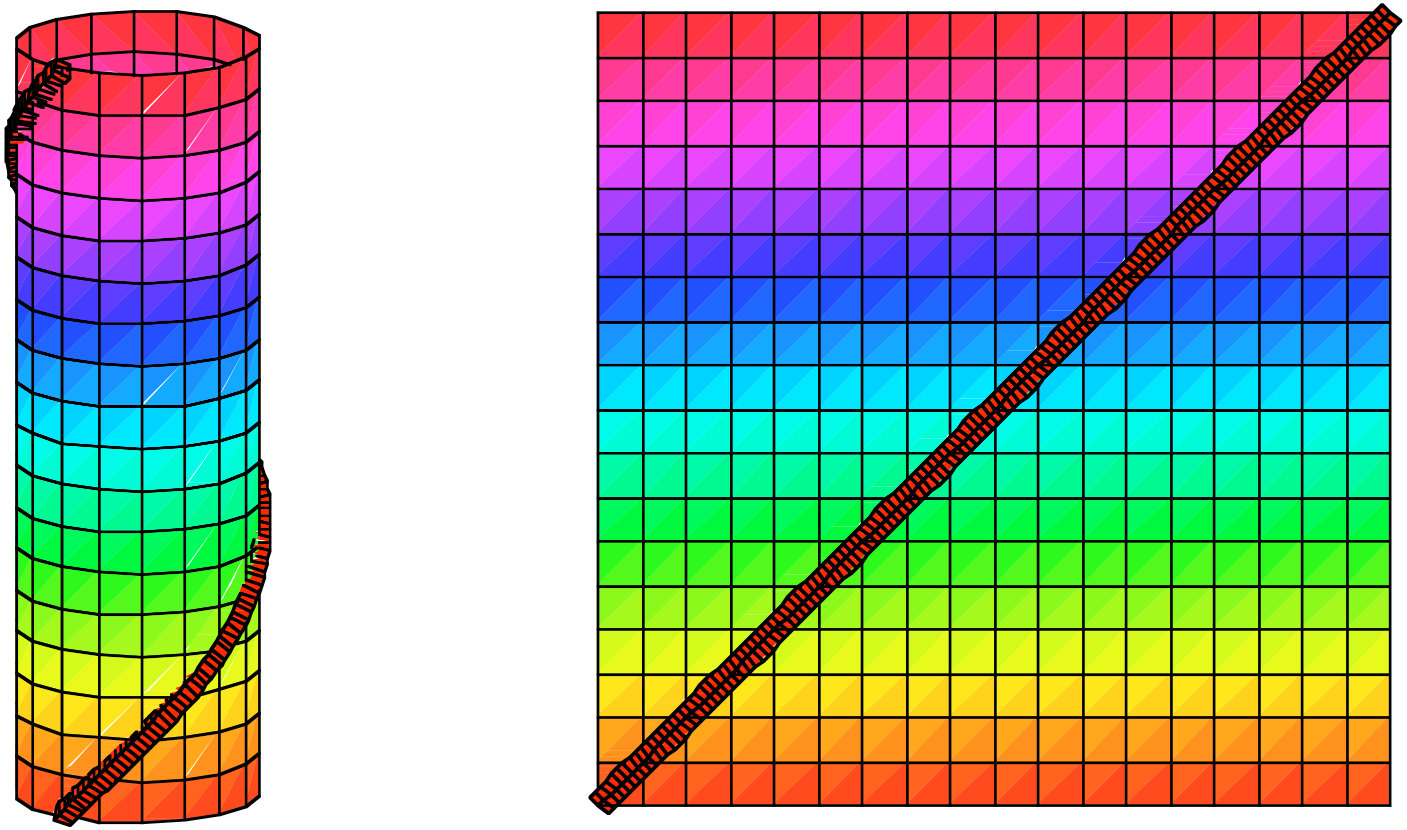
$$s=\int_0^{2\pi}\left|\dot{\vec{x}}(t)\right|\mathrm{d}t=\int_0^{2\pi}\sqrt{2}\,\mathrm{d}t=\sqrt{2}\,2\pi$$





$$s = \int_0^{2\pi} \left|\dot{\vec{x}}(t)\right| \mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} \sqrt{2}\,\mathrm{d}t = \sqrt{2}\,2\pi$$

Demo mit Folie



$$s = \int_0^{2\pi} \left|\dot{\vec{x}}(t)\right| \mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} \sqrt{2}\,\mathrm{d}t = \sqrt{2}\,2\pi$$

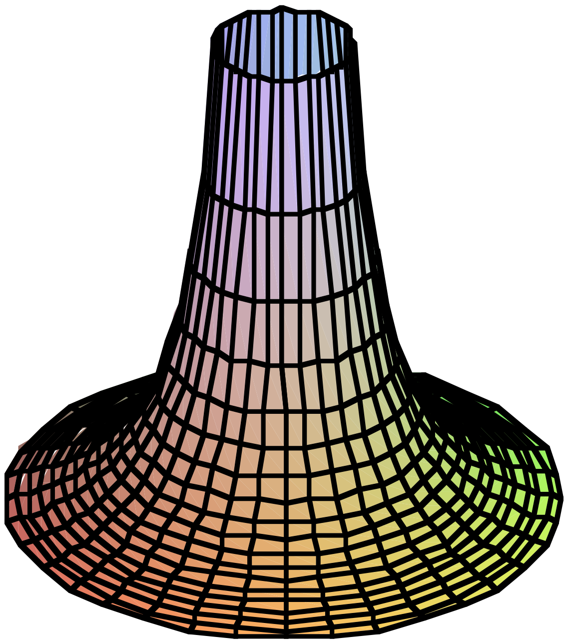
Wegintegral einer Funktion

Weg: $\vec{x}(t),\ t \in [a,b]$

Funktion: $\Phi(x,y,z)$

Wegintegral: $$\int_A^B \Phi(x,y,z)\,\mathrm{d}s = \int_a^b \Phi(\vec{x}(t))\left|\dot{\vec{x}}(t)\right|\mathrm{d}t$$

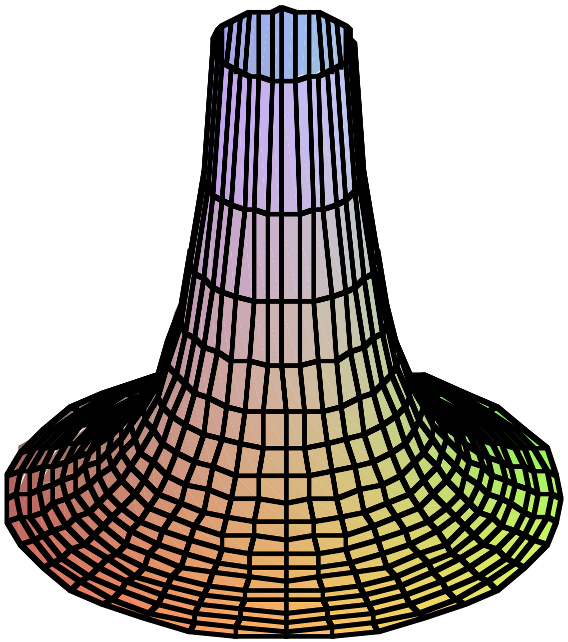
Integrale Strahlenbelastung



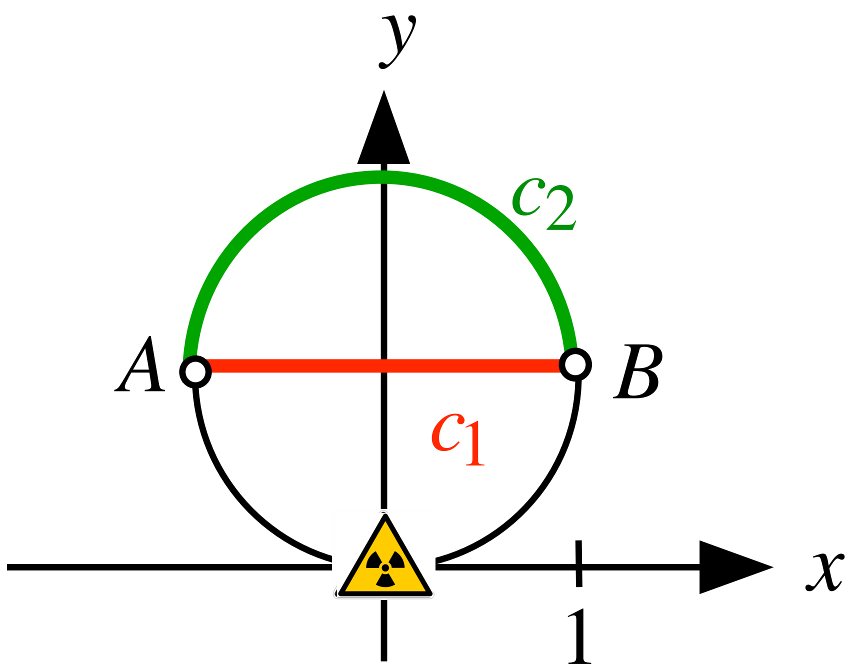
$$\Phi(x,y) = \frac{1}{x^2+y^2}$$

Integrale Strahlenbelastung

Vergleich zweier Wege

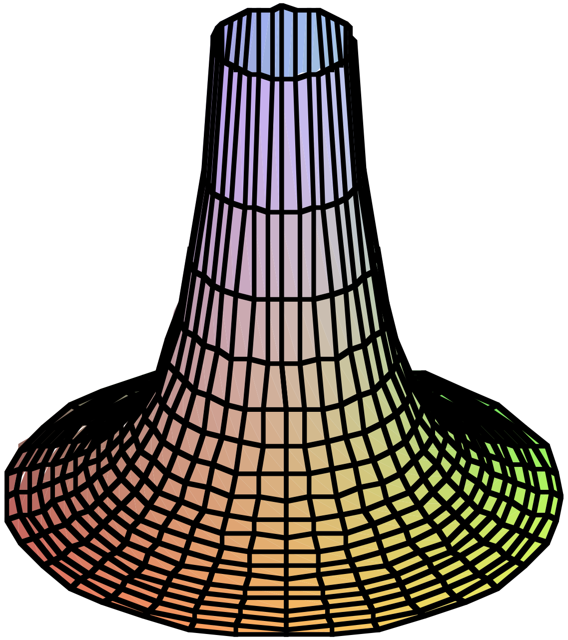


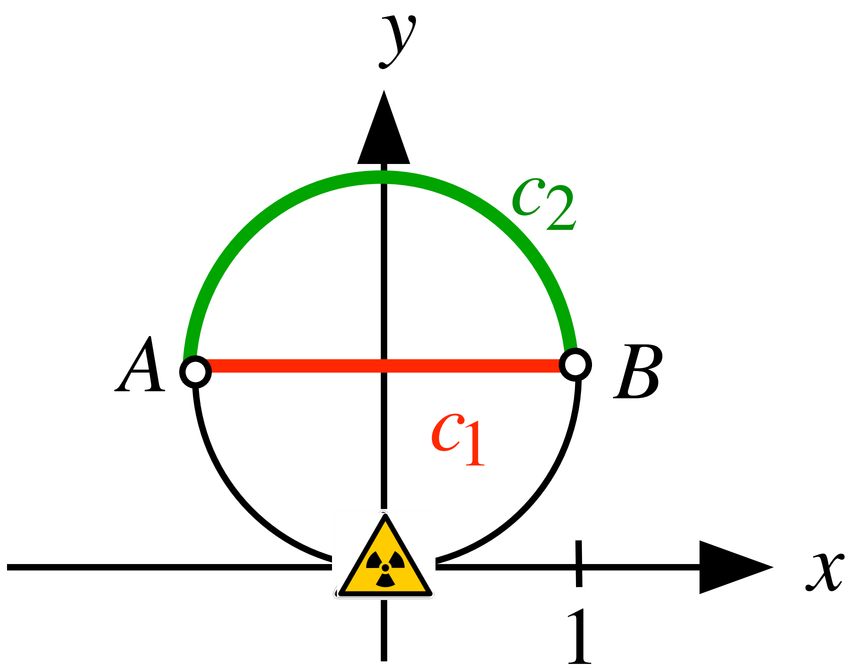
$$\Phi(x,y) = \frac{1}{x^2+y^2}$$



Integrale Strahlenbelastung

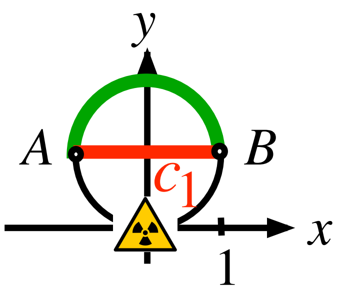
Vergleich zweier Wege





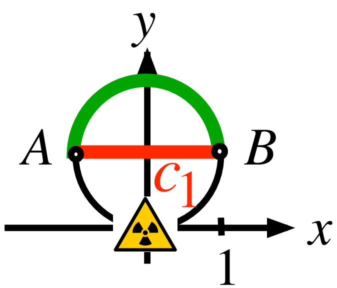
$$\Phi(x,y) = \frac{1}{x^2+y^2}$$

Wir gehen so schnell wir können.



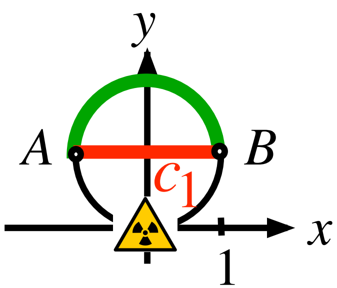
$$\Phi(x,y)=\frac{1}{x^2+y^2}$$

$$c_1: \quad \vec{x}(t)=\begin{bmatrix} t \\ 1 \end{bmatrix} \quad ; \quad t\in[-1,+1]$$



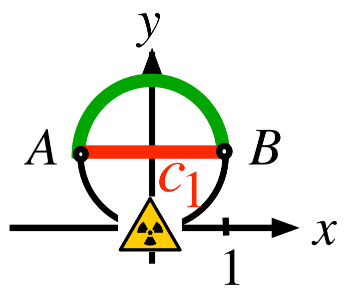
$$\Phi(x,y) = \frac{1}{x^2+y^2}$$

$$c_1 : \quad \vec{x}(t) = \begin{bmatrix} t \\ 1 \end{bmatrix} \quad ; \quad t \in [-1,+1] \quad \Rightarrow \quad \dot{\vec{x}}(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$



$$\Phi(x,y) = \frac{1}{x^2+y^2}$$

$$c_1: \quad \vec{x}(t) = \begin{bmatrix} t \\ 1 \end{bmatrix} \quad ; \quad t \in [-1,+1] \quad \Rightarrow \quad \dot{\vec{x}}(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \left|\dot{\vec{x}}(t)\right| = 1$$

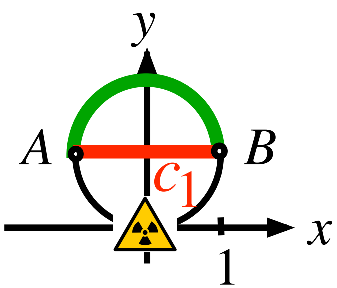


$$\Phi(x,y)=\frac{1}{x^2+y^2}$$

$$c_1: \quad \vec{x}(t)=\begin{bmatrix} t \\ 1 \end{bmatrix} \quad ; \quad t\in[-1,+1] \quad \Rightarrow \quad \dot{\vec{x}}(t)=\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \left|\dot{\vec{x}}(t)\right|=1$$

$$\Psi_{c_1}=\int_{-1}^{+1}\frac{1}{t^2+1}\,\mathrm{d}t$$

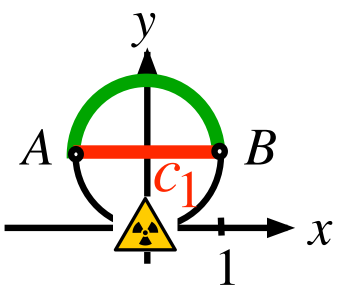
Das Röslein am Wege



$$\Phi(x,y)=\frac{1}{x^2+y^2}$$

$$c_1: \quad \vec{x}(t)=\begin{bmatrix} t \\ 1 \end{bmatrix} \quad ; \quad t\in[-1,+1] \quad \Rightarrow \quad \dot{\vec{x}}(t)=\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \left|\dot{\vec{x}}(t)\right|=1$$

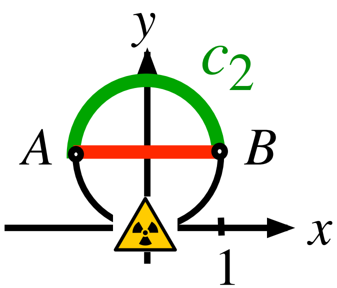
$$\Psi_{c_1} = \int_{-1}^{+1} \frac{1}{t^2+1}\,\mathrm{d}t = \arctan(1)-\arctan(-1)$$



$$\Phi(x,y) = \frac{1}{x^2+y^2}$$

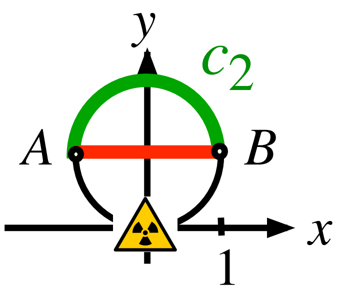
$$c_1 : \quad \vec{x}(t) = \begin{bmatrix} t \\ 1 \end{bmatrix} \quad ; \quad t \in [-1,+1] \quad \Rightarrow \quad \dot{\vec{x}}(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad |\dot{\vec{x}}(t)| = 1$$

$$\Psi_{c_1} = \int_{-1}^{+1} \frac{1}{t^2+1} \mathrm{d}t = \arctan(1) - \arctan(-1) = \frac{\pi}{2}$$



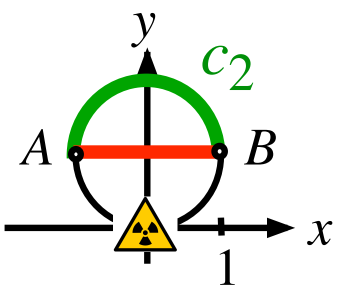
$$\Phi(x,y) = \frac{1}{x^2+y^2}$$

$$c_2: \quad \vec{x}(t) = \begin{bmatrix} -\cos(t) \\ \sin(t)+1 \end{bmatrix}; \quad t \in [0,\pi]$$



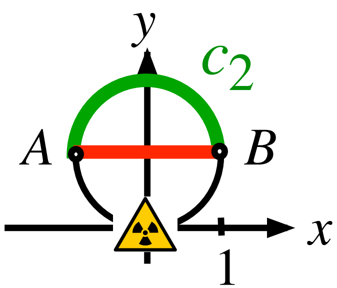
$$\Phi(x,y)=\frac{1}{x^2+y^2}$$

$$c_2: \quad \vec{x}(t)=\begin{bmatrix}-\cos(t)\\ \sin(t)+1\end{bmatrix}; \quad t\in[0,\pi] \Rightarrow \dot{\vec{x}}(t)=\begin{bmatrix}\sin(t)\\ \cos(t)\end{bmatrix}$$



$$\Phi(x,y)=\frac{1}{x^2+y^2}$$

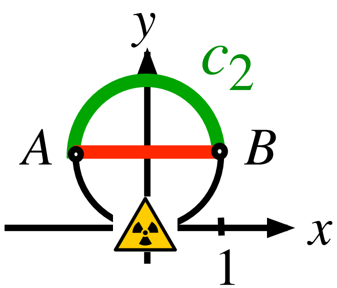
$$c_2: \quad \vec{x}(t)=\begin{bmatrix}-\cos(t)\\ \sin(t)+1\end{bmatrix}; \quad t\in[0,\pi]\Rightarrow \dot{\vec{x}}(t)=\begin{bmatrix}\sin(t)\\ \cos(t)\end{bmatrix}\Rightarrow \left|\dot{\vec{x}}(t)\right|=1$$



$$\Phi(x,y)=\frac{1}{x^2+y^2}$$

$$c_2: \quad \vec{x}(t)=\begin{bmatrix}-\cos(t)\\ \sin(t)+1\end{bmatrix}; \quad t\in[0,\pi]\Rightarrow \dot{\vec{x}}(t)=\begin{bmatrix}\sin(t)\\ \cos(t)\end{bmatrix}\Rightarrow \left|\dot{\vec{x}}(t)\right|=1$$

$$\Psi_{c_2}=\int_0^{\pi}\frac{\mathrm{d}t}{\cos^2(t)+\left(\sin(t)+1\right)^2}$$



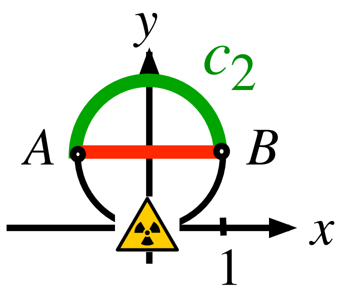
$$\Phi(x,y) = \frac{1}{x^2+y^2}$$

$$c_2: \quad \vec{x}(t) = \begin{bmatrix} -\cos(t) \\ \sin(t)+1 \end{bmatrix}; \quad t \in [0,\pi] \Rightarrow \dot{\vec{x}}(t) = \begin{bmatrix} \sin(t) \\ \cos(t) \end{bmatrix} \Rightarrow \left|\dot{\vec{x}}(t)\right| = 1$$

$$\Psi_{c_2} = \int_0^{\pi} \frac{\mathrm{d}t}{\cos^2(t)+(\sin(t)+1)^2} = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}t}{2+2\sin(t)} =$$

2 Mal die Hälfte, und einiges gerechnet:

$$\cos^2(t)+(\sin(t)+1)^2 = \cos^2(t)+\sin^2(t)+2\sin(t)+1$$



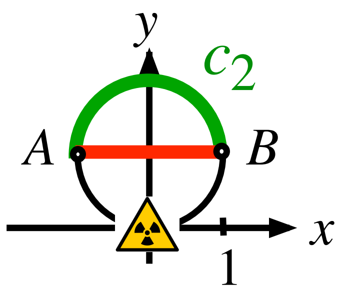
$$\Phi(x,y)=\frac{1}{x^2+y^2}$$

$$c_2:\quad \vec{x}(t)=\begin{bmatrix}-\cos(t)\\ \sin(t)+1\end{bmatrix};\quad t\in[0,\pi]\Rightarrow \dot{\vec{x}}(t)=\begin{bmatrix}\sin(t)\\ \cos(t)\end{bmatrix}\Rightarrow\left|\dot{\vec{x}}(t)\right|=1$$

$$\Psi_{c_2}=\int_0^{\pi}\frac{\mathrm{d}t}{\cos^2(t)+(\sin(t)+1)^2}=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}t}{2+2\sin(t)}=$$

2 Mal die Hälfte, und einiges gerechnet:

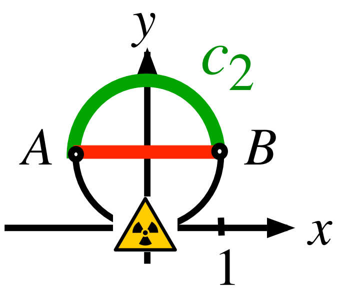
$$\cos^2(t)+(\sin(t)+1)^2=\underbrace{\cos^2(t)+\sin^2(t)}_{1}+2\sin(t)+1=2+2\sin(t)$$



$$\Phi(x,y)=\frac{1}{x^2+y^2}$$

$$c_2:\quad \vec{x}(t)=\begin{bmatrix}-\cos(t)\\ \sin(t)+1\end{bmatrix};\quad t\in[0,\pi]\Rightarrow \dot{\vec{x}}(t)=\begin{bmatrix}\sin(t)\\ \cos(t)\end{bmatrix}\Rightarrow\left|\dot{\vec{x}}(t)\right|=1$$

$$\Psi_{c_2}=\int_0^{\pi}\frac{\mathrm{d}t}{\cos^2(t)+(\sin(t)+1)^2}=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}t}{2+2\sin(t)}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}t}{1+\sin(t)}$$



$$\Phi(x,y)=\frac{1}{x^2+y^2}$$

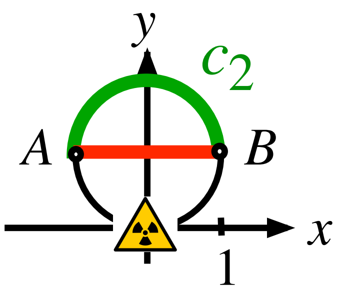
$$c_2: \quad \vec{x}(t)=\begin{bmatrix}-\cos(t)\\ \sin(t)+1\end{bmatrix}; \quad t\in[0,\pi]\Rightarrow \dot{\vec{x}}(t)=\begin{bmatrix}\sin(t)\\ \cos(t)\end{bmatrix}\Rightarrow \left|\dot{\vec{x}}(t)\right|=1$$

$$\Psi_{c_2}=\int_0^{\pi}\frac{\mathrm{d}t}{\cos^2(t)+(\sin(t)+1)^2}=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}t}{2+2\sin(t)}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}t}{1+\sin(t)}$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}t}{1+\cos(t)}$$

Zwischen 0 und $\frac{\pi}{2}$ sind

$\sin(\mathrm{t})$ und $\cos(\mathrm{t})$ spiegelbildlich.



$$\Phi(x,y) = \frac{1}{x^2+y^2}$$

$$c_2: \quad \vec{x}(t) = \begin{bmatrix} -\cos(t) \\ \sin(t)+1 \end{bmatrix}; \quad t \in [0,\pi] \Rightarrow \dot{\vec{x}}(t) = \begin{bmatrix} \sin(t) \\ \cos(t) \end{bmatrix} \Rightarrow \left|\dot{\vec{x}}(t)\right| = 1$$

$$\Psi_{c_2} = \int_0^{\pi} \frac{\mathrm{d}t}{\cos^2(t)+(\sin(t)+1)^2} = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}t}{2+2\sin(t)} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}t}{1+\sin(t)}$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}t}{1+\cos(t)} \overset{\overbrace{\theta=\frac{t}{2}}}{\downarrow}{=} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{2\mathrm{d}\theta}{2\cos^2(\theta)} =$$

Substitution

Nebenrechnung

$$\Psi_{c_2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}t}{1+\cos(t)}$$

Substitution: $\theta = \frac{t}{2} \quad \Rightarrow \quad 2\mathrm{d}\theta = \mathrm{d}t$

Nebenrechnung

$$\Psi_{c_2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}t}{1+\cos(t)}$$

Substitution: $\theta = \frac{t}{2} \quad \Rightarrow \quad 2\mathrm{d}\theta = \mathrm{d}t$

Grenzen:

t	$\theta = \frac{t}{2}$
$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{4}$
0	0

Nebenrechnung

$$\Psi_{c_2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}t}{1+\cos(t)} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{2\mathrm{d}\theta}{1+\cos(2\theta)}$$

Substitution: $\theta = \frac{t}{2} \quad \Rightarrow \quad 2\mathrm{d}\theta = \mathrm{d}t$

Grenzen:

t	$\theta = \frac{t}{2}$
$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{4}$
0	0

Nebenrechnung

$$\Psi_{c_2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}t}{1+\cos(t)} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{2\mathrm{d}\theta}{1+\cos(2\theta)}$$

Substitution: $\theta = \frac{t}{2} \quad \Rightarrow \quad 2\mathrm{d}\theta = \mathrm{d}t$

Grenzen:

t	$\theta = \frac{t}{2}$
$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{4}$
0	0

Nebenrechnung in der Nebenrechnung

$$1 + \cos(2\theta)$$

Nebenrechnung

$$\Psi_{c_2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}t}{1+\cos(t)} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{2\mathrm{d}\theta}{1+\cos(2\theta)}$$

Substitution: $\theta = \frac{t}{2} \quad \Rightarrow \quad 2\mathrm{d}\theta = \mathrm{d}t$

Grenzen:

t	$\theta = \frac{t}{2}$
$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{4}$
0	0

Nebenrechnung in der Nebenrechnung

$$1+\cos(2\theta) = 1+\cos^2(\theta) - \sin^2(\theta)$$

Additionstheorem

Nebenrechnung

$$\Psi_{c_2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}t}{1+\cos(t)} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{2\mathrm{d}\theta}{1+\cos(2\theta)}$$

Substitution: $\theta = \frac{t}{2} \quad \Rightarrow \quad 2\mathrm{d}\theta = \mathrm{d}t$

Grenzen:

t	$\theta = \frac{t}{2}$
$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{4}$
0	0

Nebenrechnung in der Nebenrechnung

$$1+\cos(2\theta) = 1+\cos^2(\theta)-\sin^2(\theta) = 1-\sin^2(\theta)+\cos^2(\theta)$$

Additionstheorem

Nebenrechnung

$$\Psi_{c_2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}t}{1+\cos(t)} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{2\mathrm{d}\theta}{1+\cos(2\theta)}$$

Substitution: $\theta = \frac{t}{2} \quad \Rightarrow \quad 2\mathrm{d}\theta = \mathrm{d}t$

Grenzen:

t	$\theta = \frac{t}{2}$
$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{4}$
0	0

Nebenrechnung in der Nebenrechnung

$$1+\cos(2\theta) = 1+\cos^2(\theta)-\sin^2(\theta) = \underbrace{1-\sin^2(\theta)}_{\cos^2(\theta)}+\cos^2(\theta) = 2\cos^2(\theta)$$

Additionstheorem

Nebenrechnung

$$\Psi_{c_2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}t}{1+\cos(t)} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{2\mathrm{d}\theta}{1+\cos(2\theta)} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{2\mathrm{d}\theta}{2\cos^2(\theta)}$$

Substitution: $\theta = \frac{t}{2} \quad \Rightarrow \quad 2\mathrm{d}\theta = \mathrm{d}t$

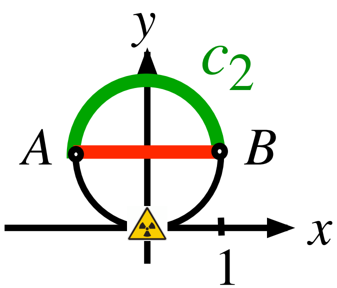
Grenzen:

t	$\theta = \frac{t}{2}$
$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{4}$
0	0

Nebenrechnung in der Nebenrechnung

$$1+\cos(2\theta) = 1+\cos^2(\theta)-\sin^2(\theta) = \underbrace{1-\sin^2(\theta)}_{\cos^2(\theta)}+\cos^2(\theta) = 2\cos^2(\theta)$$

Additionstheorem

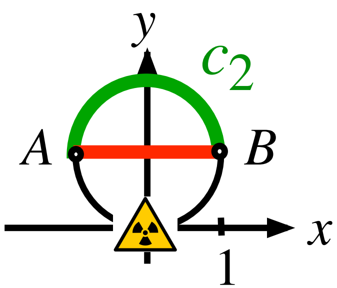


$$\Phi(x,y)=\frac{1}{x^2+y^2}$$

$$c_2:\quad \vec{x}(t)=\begin{bmatrix}-\cos(t)\\ \sin(t)+1\end{bmatrix};\quad t\in[0,\pi]\Rightarrow \dot{\vec{x}}(t)=\begin{bmatrix}\sin(t)\\ \cos(t)\end{bmatrix}\Rightarrow\left|\dot{\vec{x}}(t)\right|=1$$

$$\Psi_{c_2}=\int_0^{\pi}\frac{\mathrm{d}t}{\cos^2(t)+(\sin(t)+1)^2}=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}t}{2+2\sin(t)}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}t}{1+\sin(t)}$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}t}{1+\cos(t)}\overset{\overbrace{\theta=\frac{t}{2}}}{\downarrow}{=}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{2\mathrm{d}\theta}{2\cos^2(\theta)}=$$

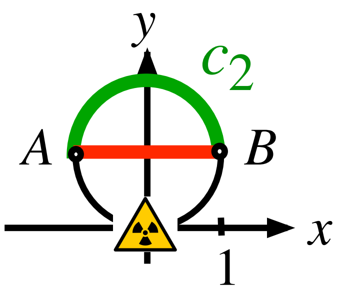


$$\Phi(x,y)=\frac{1}{x^2+y^2}$$

$$c_2: \quad \vec{x}(t)=\begin{bmatrix}-\cos(t)\\ \sin(t)+1\end{bmatrix}; \quad t\in[0,\pi]\Rightarrow \dot{\vec{x}}(t)=\begin{bmatrix}\sin(t)\\ \cos(t)\end{bmatrix}\Rightarrow \left|\dot{\vec{x}}(t)\right|=1$$

$$\Psi_{c_2}=\int_0^{\pi}\frac{\mathrm{d}t}{\cos^2(t)+(\sin(t)+1)^2}=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}t}{2+2\sin(t)}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}t}{1+\sin(t)}$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}t}{1+\cos(t)}\underbrace{\;}_{\theta=\frac{t}{2}}\!\!\!\!\downarrow\!\!= \int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{2\mathrm{d}\theta}{2\cos^2(\theta)}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\mathrm{d}\theta}{\cos^2(\theta)}$$

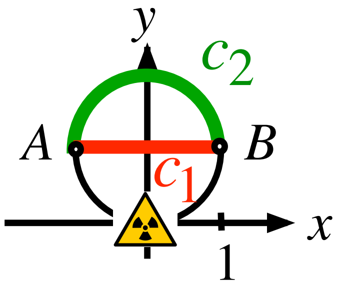


$$\Phi(x,y)=\frac{1}{x^2+y^2}$$

$$c_2: \quad \vec{x}(t)=\begin{bmatrix}-\cos(t)\\ \sin(t)+1\end{bmatrix}; \quad t\in[0,\pi]\Rightarrow \dot{\vec{x}}(t)=\begin{bmatrix}\sin(t)\\ \cos(t)\end{bmatrix}\Rightarrow \left|\dot{\vec{x}}(t)\right|=1$$

$$\Psi_{c_2}=\int_0^{\pi}\frac{\mathrm{d}t}{\cos^2(t)+\left(\sin(t)+1\right)^2}=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}t}{2+2\sin(t)}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}t}{1+\sin(t)}$$

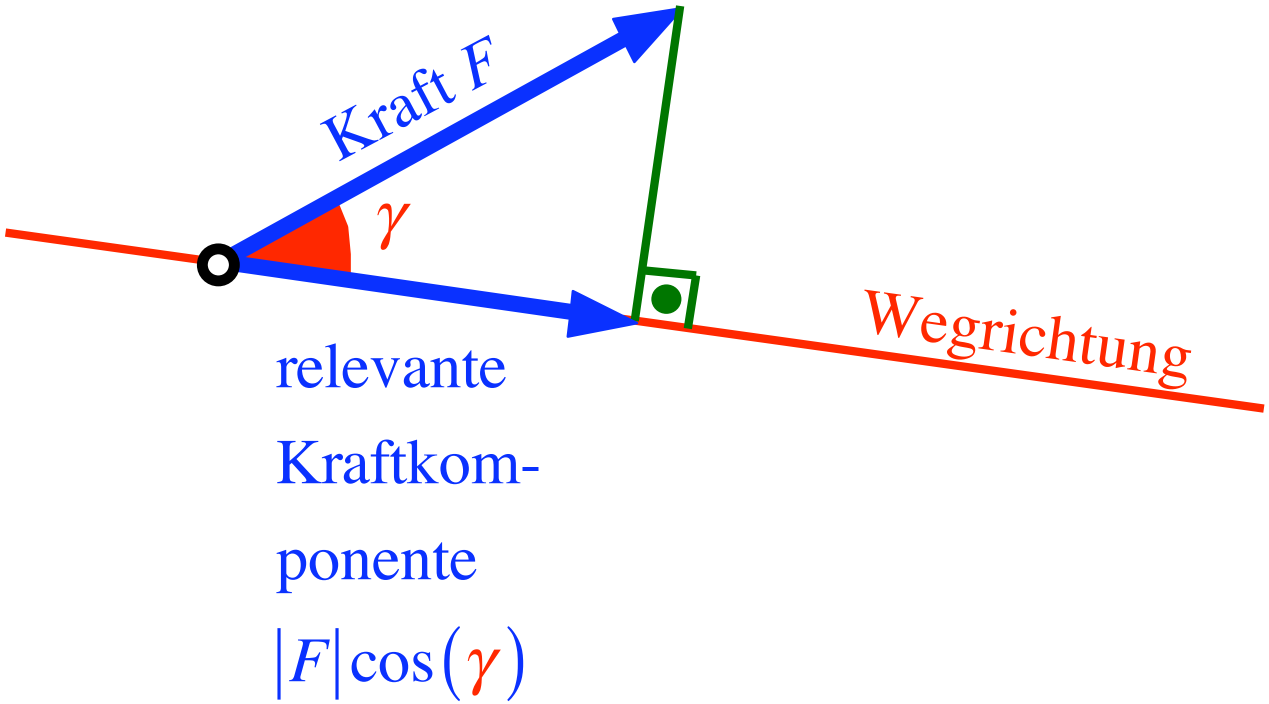
$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}t}{1+\cos(t)}\overset{\theta=\frac{t}{2}}{=}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{2\,\mathrm{d}\theta}{2\cos^2(\theta)}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\mathrm{d}\theta}{\cos^2(\theta)}=\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)=1$$

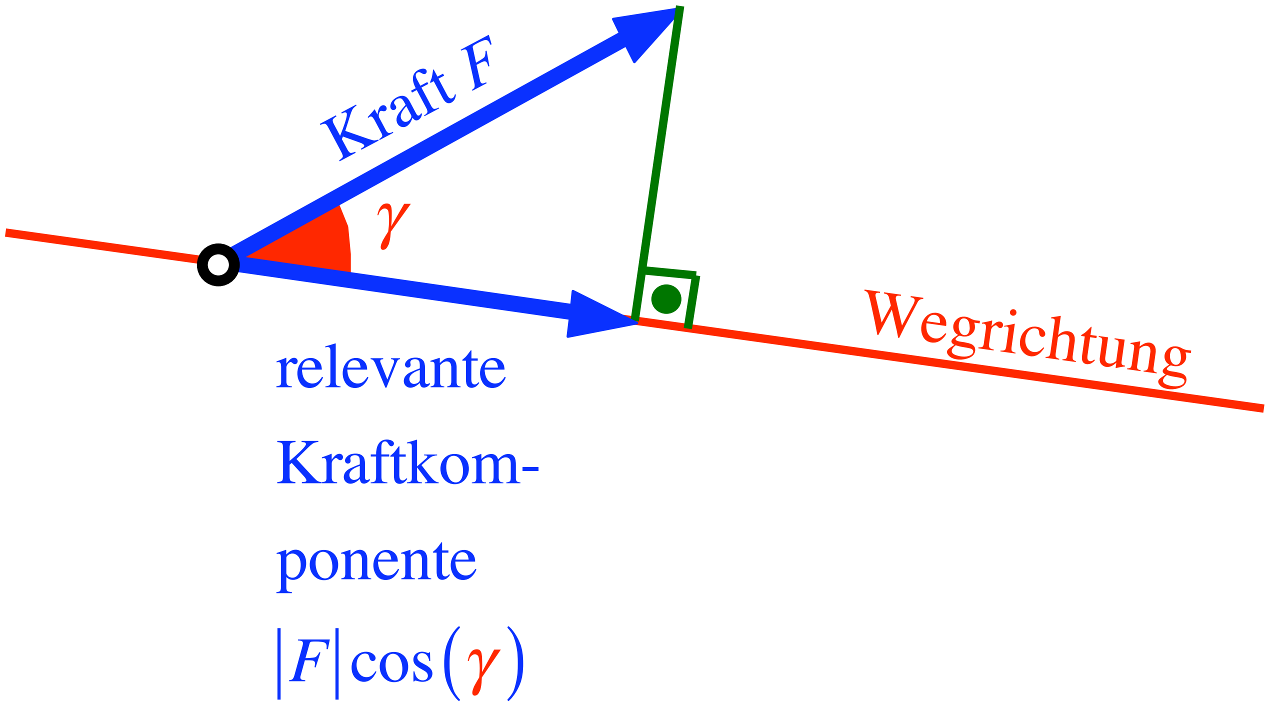


$$\Phi(x,y) = \frac{1}{x^2+y^2}$$

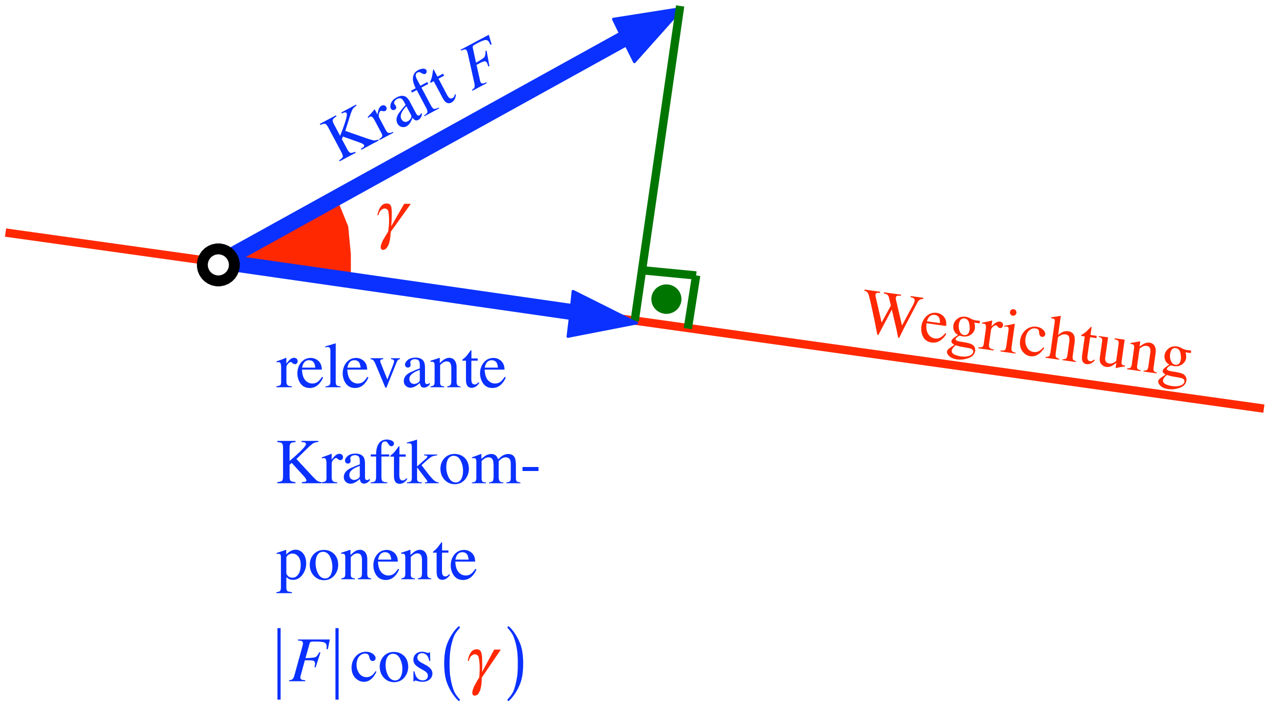
$$\Psi_{c_1} = \frac{\pi}{2}$$

$$\Psi_{c_2} = 1$$


Kraft F
γ
Wegrichtung
relevante
Kraftkom-
ponente
$|F|\cos(\gamma)$



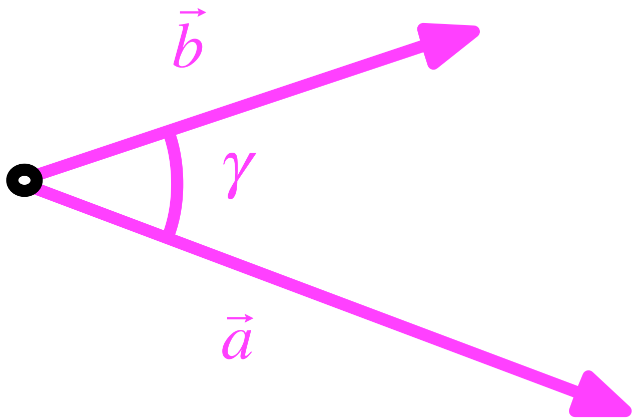
$$\text{Integrale Arbeit} = \int_{P(a)}^{P(b)} |\mathrm{d}\vec{x}|\,|F|\cos(\gamma)$$



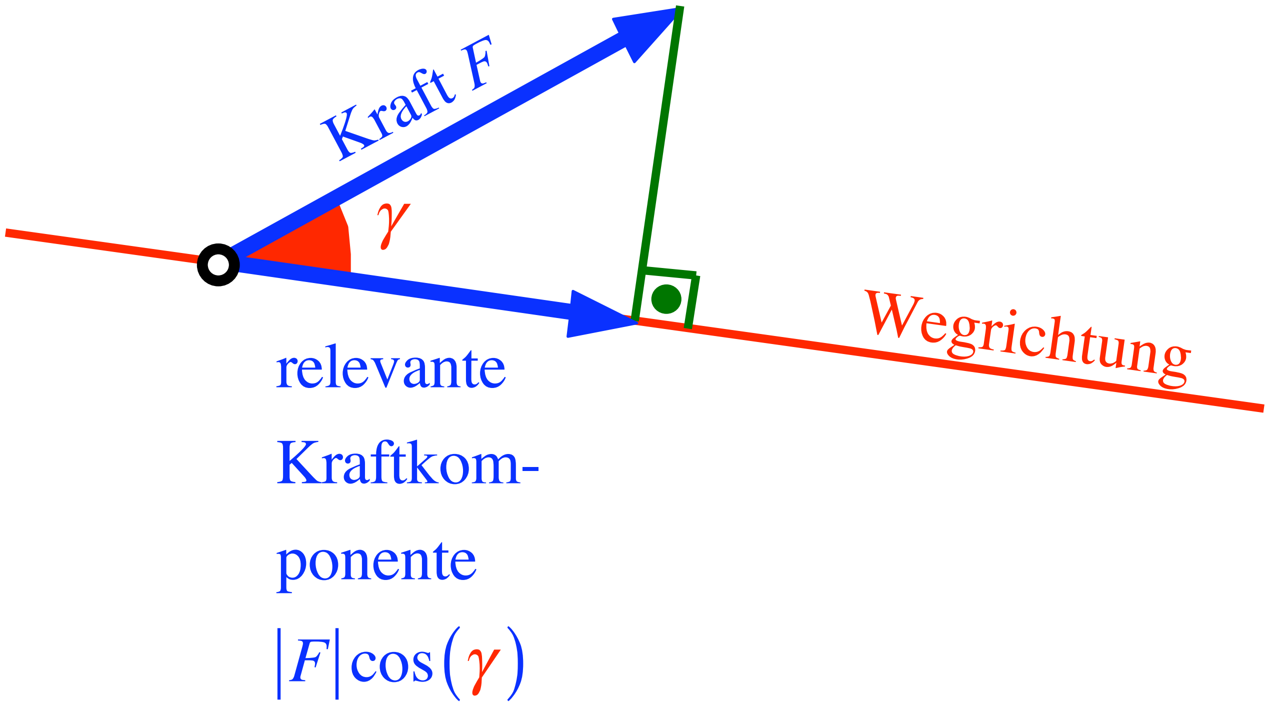
$$\text{Integrale Arbeit} = \int_{P(a)}^{P(b)} |\mathrm{d}\vec{x}|\,|F|\cos(\gamma) = \int_{P(a)}^{P(b)} \mathrm{d}\vec{x}\, F$$

Skalarprodukt

Erinnerung: Skalarprodukt

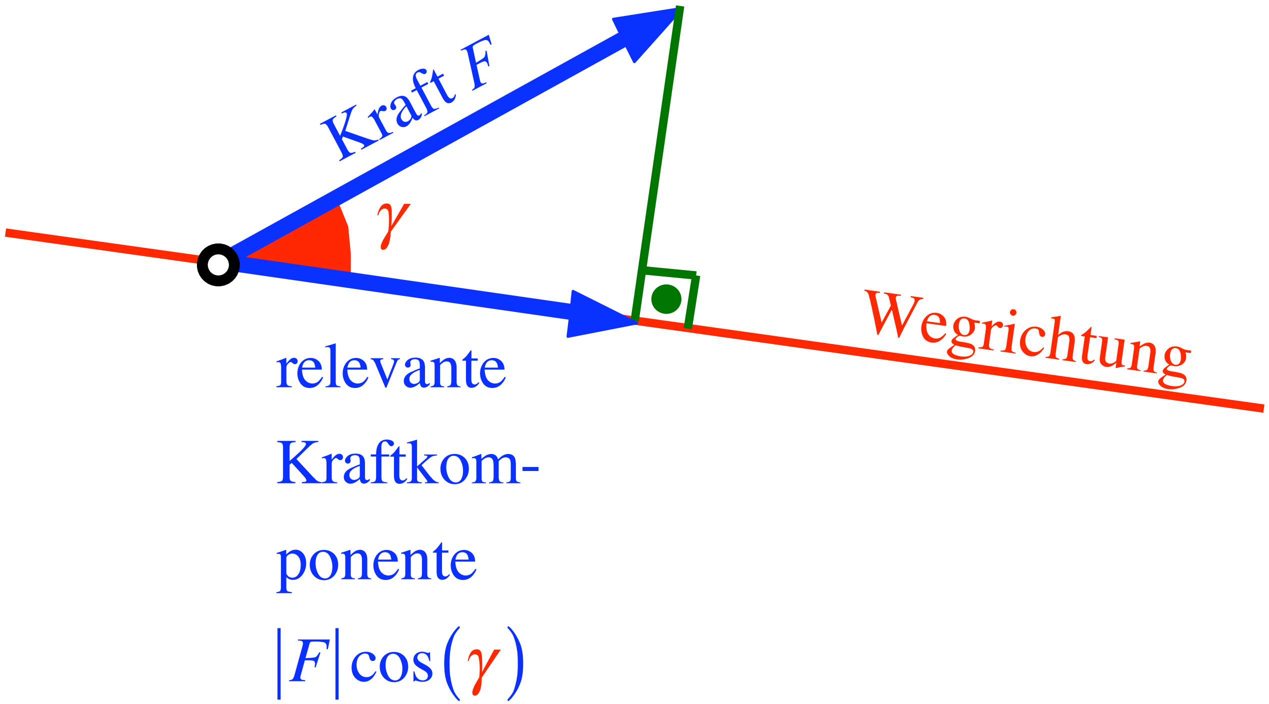


$$\vec{a}\,\vec{b} = |\vec{a}|\,|\vec{b}|\cos(\gamma)$$



$$\text{Integrale Arbeit} = \int_{P(a)}^{P(b)} |\mathrm{d}\vec{x}|\,|F|\cos(\gamma) = \int_{P(a)}^{P(b)} \mathrm{d}\vec{x}\,F$$

Skalarprodukt



$$\text{Integrale Arbeit} = \int_{P(a)}^{P(b)} |d\vec{x}|\,|F|\cos(\gamma) = \int_{P(a)}^{P(b)} d\vec{x}\,F = \int_a^b F\,\dot{\vec{x}}(t)\,dt$$

Skalarprodukt

Wegintegral:

Vektorfeld: $F(x,y,z)=\begin{bmatrix} u(x,y,z) \\ v(x,y,z) \\ w(x,y,z) \end{bmatrix}$

Wegintegral:

Vektorfeld: $F(x,y,z) = \begin{bmatrix} u(x,y,z) \\ v(x,y,z) \\ w(x,y,z) \end{bmatrix}$

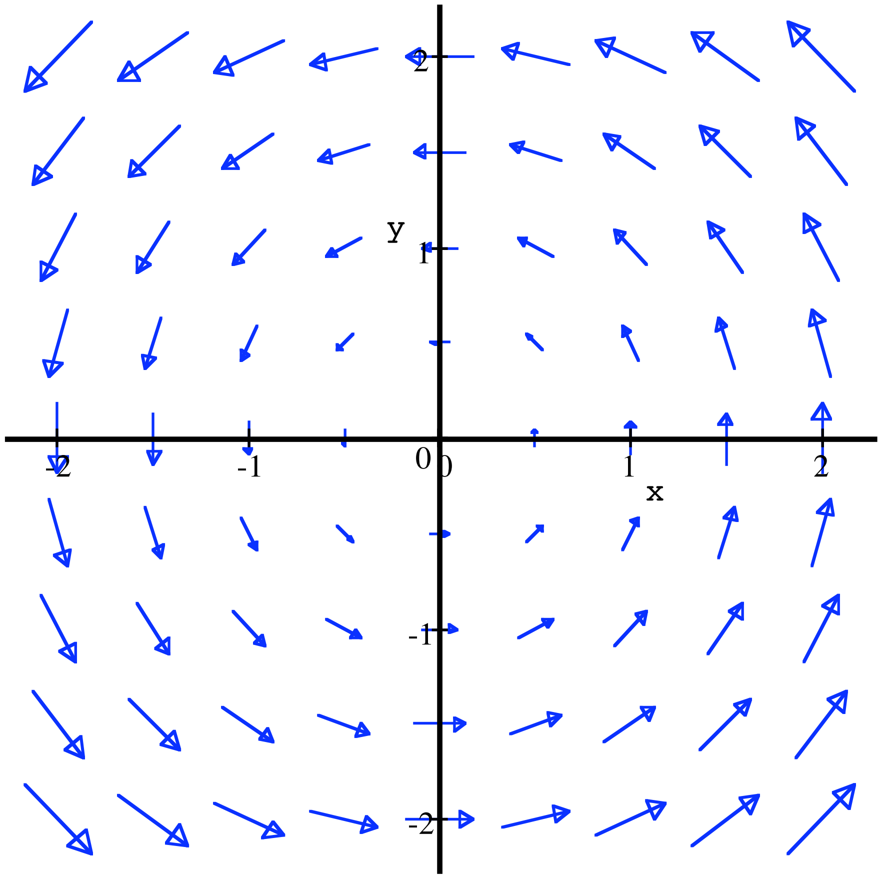
Weg c: $\vec{x}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{bmatrix}, \quad t \in [a,b]$

Wegintegral:

Vektorfeld: $F(x,y,z) = \begin{bmatrix} u(x,y,z) \\ v(x,y,z) \\ w(x,y,z) \end{bmatrix}$

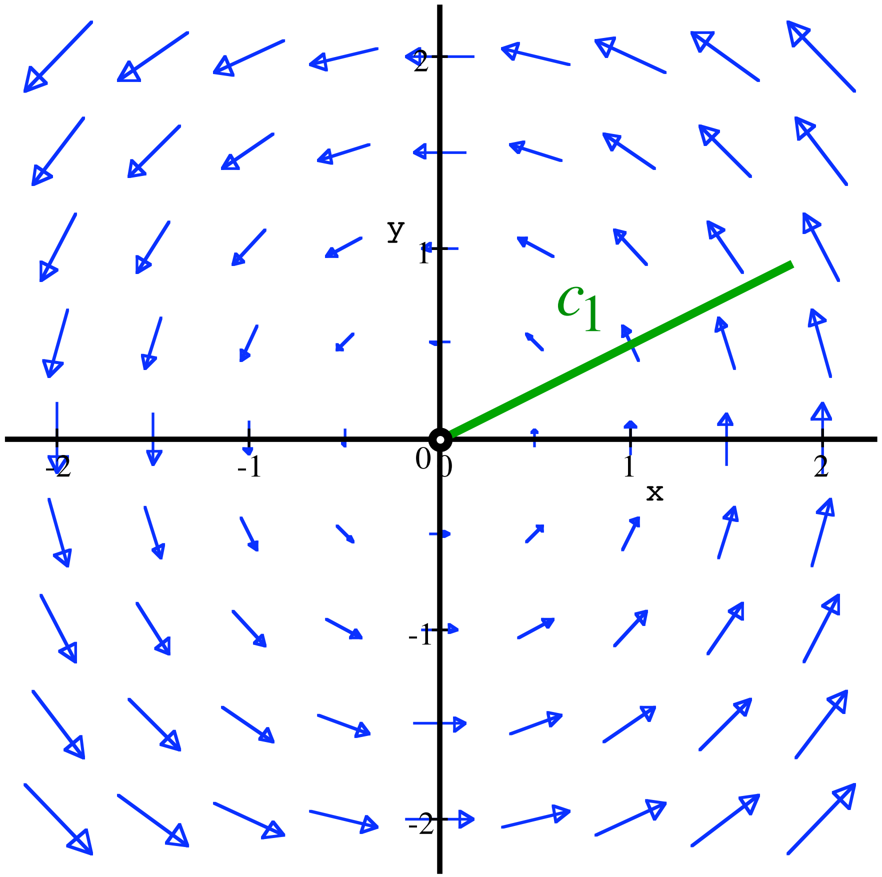
Weg c: $\vec{x}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{bmatrix}, \quad t \in [a,b]$

$$\text{Wegintegral} = \int_c F \,\mathrm{d}\vec{x} = \int_a^b F\,\dot{\vec{x}}(t)\,\mathrm{d}t$$



Beispiel: $$F(x,y) = \begin{bmatrix} -y \\ x \end{bmatrix}$$

(Vektoren zu *kurz* gezeichnet)



Beispiel: $F(x,y)=\begin{bmatrix}-y\\ x\end{bmatrix}$

Radialer Weg c_1

vom Zentrum nach außen

$$\vec{x}(t)=\begin{bmatrix}pt\\ qt\end{bmatrix}=t\begin{bmatrix}p\\ q\end{bmatrix},\quad t\in[0,b]$$

Immer Seitenwind

(Vektoren zu *kurz* gezeichnet)

Beispiel: $F(x,y)=\begin{bmatrix}-y\\x\end{bmatrix}$

Radialer Weg: $\vec{x}(t)=\begin{bmatrix}pt\\qt\end{bmatrix}=t\begin{bmatrix}p\\q\end{bmatrix}, \quad t\in[0,b]$

Beispiel: $F(x,y)=\begin{bmatrix}-y\\x\end{bmatrix}$

Radialer Weg: $\vec{x}(t)=\begin{bmatrix}pt\\qt\end{bmatrix}=t\begin{bmatrix}p\\q\end{bmatrix},\quad t\in[0,b]$

$$\dot{\vec{x}}(t)=\begin{bmatrix}p\\q\end{bmatrix}$$

Beispiel: $F(x,y) = \begin{bmatrix} -y \\ x \end{bmatrix}$

Radialer Weg: $\vec{x}(t) = \begin{bmatrix} pt \\ qt \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix}, \quad t \in [0,b]$

$$\dot{\vec{x}}(t) = \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix}$$

$$F(x(t), y(t)) = \begin{bmatrix} -y(t) \\ x(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -qt \\ pt \end{bmatrix}$$

Beispiel: $$F(x,y) = \begin{bmatrix} -y \\ x \end{bmatrix}$$

Radialer Weg: $$\vec{x}(t) = \begin{bmatrix} pt \\ qt \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix}, \quad t \in [0,b]$$

$$\dot{\vec{x}}(t) = \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix}$$

$$F(x(t), y(t)) = \begin{bmatrix} -y(t) \\ x(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -qt \\ pt \end{bmatrix}$$

$$\int_{c_1} F \, \mathrm{d}\vec{x} = \int_0^b F \, \dot{\vec{x}}(t) \, \mathrm{d}t =$$

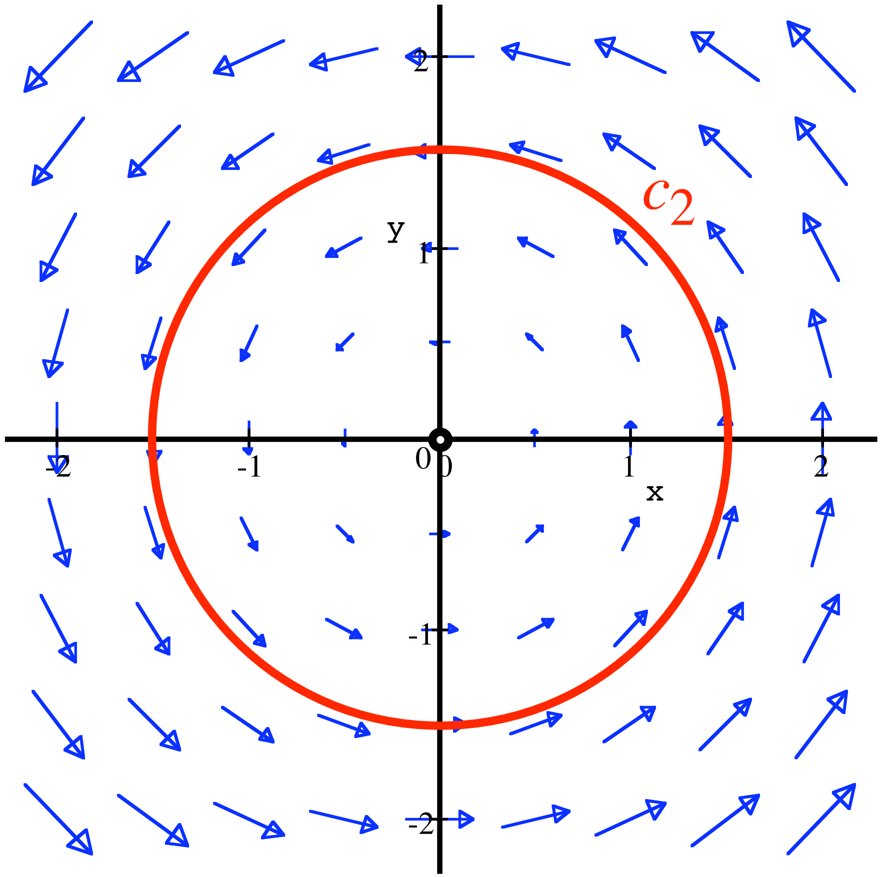
Beispiel: $F(x,y) = \begin{bmatrix} -y \\ x \end{bmatrix}$

Radialer Weg: $\vec{x}(t) = \begin{bmatrix} pt \\ qt \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix}, \quad t \in [0,b]$

$$\dot{\vec{x}}(t) = \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix}$$

$$F\big(x(t), y(t)\big) = \begin{bmatrix} -y(t) \\ x(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -qt \\ pt \end{bmatrix}$$

$$\int_{c_1} F \, \mathrm{d}\vec{x} = \int_0^b F \, \dot{\vec{x}}(t) \, \mathrm{d}t = \int_0^b \begin{bmatrix} -qt \\ pt \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix} \mathrm{d}t = 0$$



Beispiel: $F(x,y) = \begin{bmatrix} -y \\ x \end{bmatrix}$

Kreisweg c_2

$$\vec{x}(t) = \begin{bmatrix} r\cos(t) \\ r\sin(t) \end{bmatrix}, \quad t \in [0, 2\pi]$$

Immer Rückenwind

(Vektoren zu *kurz* gezeichnet)

Beispiel: $$F(x,y) = \begin{bmatrix} -y \\ x \end{bmatrix}$$

Keisweg: $$\vec{x}(t) = \begin{bmatrix} r\cos(t) \\ r\sin(t) \end{bmatrix}$$

Beispiel: $F(x,y)=\begin{bmatrix}-y\\x\end{bmatrix}$

Keisweg: $\vec{x}(t)=\begin{bmatrix}r\cos(t)\\r\sin(t)\end{bmatrix}$

$$\dot{\vec{x}}(t)=\begin{bmatrix}-r\sin(t)\\r\cos(t)\end{bmatrix}$$

Beispiel: $F(x,y)=\begin{bmatrix}-y\\x\end{bmatrix}$

Keisweg: $\vec{x}(t)=\begin{bmatrix}r\cos(t)\\r\sin(t)\end{bmatrix}$

$$\dot{\vec{x}}(t)=\begin{bmatrix}-r\sin(t)\\r\cos(t)\end{bmatrix}$$

$$F(x(t),y(t))=\begin{bmatrix}-y(t)\\x(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-r\sin(t)\\r\cos(t)\end{bmatrix}$$

Beispiel: $F(x,y)=\begin{bmatrix}-y\\ x\end{bmatrix}$

Keisweg: $\vec{x}(t)=\begin{bmatrix}r\cos(t)\\ r\sin(t)\end{bmatrix}$

$$\dot{\vec{x}}(t)=\begin{bmatrix}-r\sin(t)\\ r\cos(t)\end{bmatrix}$$

$$F\big(x(t),y(t)\big)=\begin{bmatrix}-y(t)\\ x(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-r\sin(t)\\ r\cos(t)\end{bmatrix}$$

$$\int\limits_{c_2} F\,\mathrm{d}\vec{x}=\int\limits_0^{2\pi} F\,\dot{\vec{x}}(t)\,\mathrm{d}t=$$

Beispiel: $F(x,y)=\begin{bmatrix}-y\\ x\end{bmatrix}$

Keisweg: $\vec{x}(t)=\begin{bmatrix}r\cos(t)\\ r\sin(t)\end{bmatrix}$

$$\dot{\vec{x}}(t)=\begin{bmatrix}-r\sin(t)\\ r\cos(t)\end{bmatrix}$$

$$F(x(t),y(t))=\begin{bmatrix}-y(t)\\ x(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-r\sin(t)\\ r\cos(t)\end{bmatrix}$$

$$\int\limits_{c_2} F\,\mathrm{d}\vec{x}=\int\limits_0^{2\pi} F\,\dot{\vec{x}}(t)\,\mathrm{d}t=\int\limits_0^{2\pi}\begin{bmatrix}-r\sin(t)\\ r\cos(t)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-r\sin(t)\\ r\cos(t)\end{bmatrix}\mathrm{d}t$$

Beispiel: $F(x,y) = \begin{bmatrix} -y \\ x \end{bmatrix}$

Keisweg: $\vec{x}(t) = \begin{bmatrix} r\cos(t) \\ r\sin(t) \end{bmatrix}$

$$\dot{\vec{x}}(t) = \begin{bmatrix} -r\sin(t) \\ r\cos(t) \end{bmatrix}$$

$$F\big(x(t), y(t)\big) = \begin{bmatrix} -y(t) \\ x(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -r\sin(t) \\ r\cos(t) \end{bmatrix}$$

$$\int\limits_{c_2} F\,\mathrm{d}\vec{x} = \int\limits_0^{2\pi} F\,\dot{\vec{x}}(t)\,\mathrm{d}t = \int\limits_0^{2\pi} \begin{bmatrix} -r\sin(t) \\ r\cos(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -r\sin(t) \\ r\cos(t) \end{bmatrix} \mathrm{d}t = r^2 \int\limits_0^{2\pi} \mathrm{d}t$$

Beispiel: $F(x,y) = \begin{bmatrix} -y \\ x \end{bmatrix}$

Keisweg: $\vec{x}(t) = \begin{bmatrix} r\cos(t) \\ r\sin(t) \end{bmatrix}$

$$\dot{\vec{x}}(t) = \begin{bmatrix} -r\sin(t) \\ r\cos(t) \end{bmatrix}$$

$$F(x(t), y(t)) = \begin{bmatrix} -y(t) \\ x(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -r\sin(t) \\ r\cos(t) \end{bmatrix}$$

$$\int\limits_{c_2} F\,\mathrm{d}\vec{x} = \int\limits_0^{2\pi} F\,\dot{\vec{x}}(t)\,\mathrm{d}t = \int\limits_0^{2\pi} \begin{bmatrix} -r\sin(t) \\ r\cos(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -r\sin(t) \\ r\cos(t) \end{bmatrix} \mathrm{d}t = r^2 \int\limits_0^{2\pi} \mathrm{d}t = 2\pi r^2$$

Konservatives Vektorfeld: $F = \operatorname{grad}(f) = \begin{bmatrix} f_x \\ f_y \end{bmatrix}$

$$c: \quad \vec{x}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} \quad ; \quad t \in [a,b]$$

Konservatives Vektorfeld: $F = \operatorname{grad}(f) = \begin{bmatrix} f_x \\ f_y \end{bmatrix}$

$$c: \quad \vec{x}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} \quad ; \quad t \in [a,b]$$

$$\int\limits_c F \,\mathrm{d}\vec{x} = \int\limits_a^b F \,\dot{\vec{x}}(t)\,\mathrm{d}t =$$

$$\text{Konservatives Vektorfeld:} \quad F = \operatorname{grad}(f) = \begin{bmatrix} f_x \\ f_y \end{bmatrix}$$

$$c: \quad \vec{x}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} \quad ; \quad t \in [a,b]$$

$$\int_c F \, \mathrm{d}\vec{x} = \int_a^b F \, \dot{\vec{x}}(t) \, \mathrm{d}t = \int_a^b \begin{bmatrix} f_x \\ f_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{bmatrix} \mathrm{d}t$$

Konservatives Vektorfeld: $F = \operatorname{grad}(f) = \begin{bmatrix} f_x \\ f_y \end{bmatrix}$

$$c: \quad \vec{x}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} \quad ; \quad t \in [a,b]$$

$$\int_c F \, \mathrm{d}\vec{x} = \int_a^b F \, \dot{\vec{x}}(t) \, \mathrm{d}t = \int_a^b \begin{bmatrix} f_x \\ f_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{bmatrix} \mathrm{d}t$$

$$= \int_a^b \Big(f_x x'(t) + f_y y'(t) \Big) \mathrm{d}t =$$

$$\text{Konservatives Vektorfeld:} \quad F = \operatorname{grad}(f) = \begin{bmatrix} f_x \\ f_y \end{bmatrix}$$

$$c: \quad \vec{x}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} \quad ; \quad t \in [a,b]$$

$$\int_c F \, \mathrm{d}\vec{x} = \int_a^b F \, \dot{\vec{x}}(t) \, \mathrm{d}t = \int_a^b \begin{bmatrix} f_x \\ f_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{bmatrix} \mathrm{d}t$$

$$= \int_a^b \Big(f_x x'(t) + f_y y'(t) \Big) \mathrm{d}t = \int_a^b \frac{\mathrm{d}f(\vec{x}(t))}{\mathrm{d}t} \mathrm{d}t$$

Konservatives Vektorfeld: $F = \text{grad}(f) = \begin{bmatrix} f_x \\ f_y \end{bmatrix}$

$$c: \quad \vec{x}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} \quad ; \quad t \in [a,b]$$

$$\int_c F \, \mathrm{d}\vec{x} = \int_a^b F \, \dot{\vec{x}}(t) \, \mathrm{d}t = \int_a^b \begin{bmatrix} f_x \\ f_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{bmatrix} \mathrm{d}t$$

$$= \int_a^b \Big(f_x x'(t) + f_y y'(t) \Big) \mathrm{d}t = \int_a^b \frac{\mathrm{d}f(\vec{x}(t))}{\mathrm{d}t} \mathrm{d}t$$

$$= f(\vec{x}(t)) \Big|_a^b =$$

$$\text{Konservatives Vektorfeld:} \quad F = \operatorname{grad}(f) = \begin{bmatrix} f_x \\ f_y \end{bmatrix}$$

$$c: \quad \vec{x}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} \quad ; \quad t \in [a,b]$$

$$\int_c F \,\mathrm{d}\vec{x} = \int_a^b F\,\dot{\vec{x}}(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b \begin{bmatrix} f_x \\ f_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{bmatrix} \mathrm{d}t$$

$$= \int_a^b \Big(f_x x'(t) + f_y y'(t) \Big) \mathrm{d}t = \int_a^b \frac{\mathrm{d}f\big(\vec{x}(t)\big)}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t$$

$$= f\big(\vec{x}(t)\big)\Big|_a^b = f\big(\vec{x}(b)\big) - f\big(\vec{x}(a)\big)$$

$$\text{Konservatives Vektorfeld:} \quad F = \operatorname{grad}(f) = \begin{bmatrix} f_x \\ f_y \end{bmatrix}$$

$$c: \quad \vec{x}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} \quad ; \quad t \in [a, b]$$

$$\int_c F \, \mathrm{d}\vec{x} = \int_a^b F \, \dot{\vec{x}}(t) \, \mathrm{d}t = \int_a^b \begin{bmatrix} f_x \\ f_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{bmatrix} \mathrm{d}t$$

$$= \int_a^b \Big(f_x x'(t) + f_y y'(t) \Big) \mathrm{d}t = \int_a^b \frac{\mathrm{d}f(\vec{x}(t))}{\mathrm{d}t} \, \mathrm{d}t$$

$$= f\big(\vec{x}(t)\big)\Big|_a^b = f\big(\vec{x}(b)\big) - f\big(\vec{x}(a)\big) = f(B) - f(A)$$

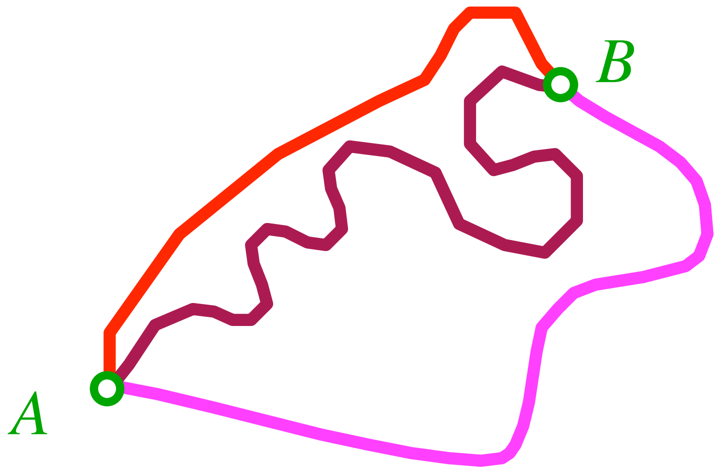
Konservatives Vektorfeld: $F = \mathrm{grad}(f) = \begin{bmatrix} f_x \\ f_y \end{bmatrix}$

$$\int_C F \, \mathrm{d}\vec{x} = \underbrace{f(B) - f(A)}_{\text{Potenzial-differenz}}$$

Konservatives Vektorfeld: $F = \mathrm{grad}(f) = \begin{bmatrix} f_x \\ f_y \end{bmatrix}$

$$\int_c F \,\mathrm{d}\vec{x} = \underbrace{f(B) - f(A)}_{\text{Potenzial-differenz}}$$

Weg von A nach B
spielt keine Rolle



Konservatives Vektorfeld: $F = \mathrm{grad}(f) = \begin{bmatrix} f_x \\ f_y \end{bmatrix}$

Folgerung für "Rundintegral"