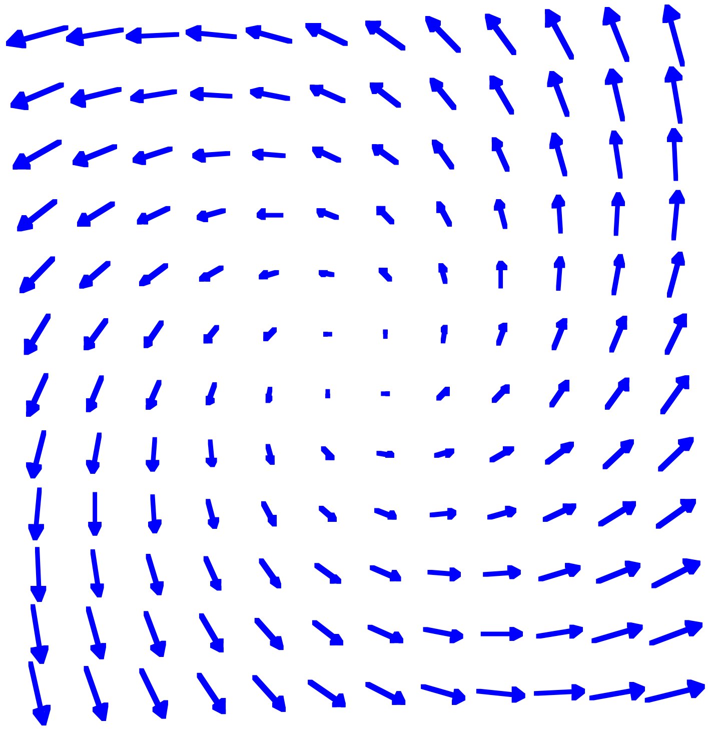
Hans Walser

Mathematik 1 für Naturwissenschaften



Modul 114

Vektorfelder und Wegintegrale

UNI BASEL

Inhalt

Modul 114 für die Vorlesung *Mathematik 1 für Naturwissenschaften*

Winter 2002/03 Erstausgabe
Winter 2004/05 Fehlerkorrekturen. Geändertes Layout
Winter 2005/06 Fehlerkorrekturen
Herbst 2007 Kleine Ergänzung. Fehlerkorrekturen
Herbst 2008 Geändertes Layout
Herbst 2013 Kleine Erweiterung. Grafische Überarbeitung

last modified: 19. September 2013

Hans Walser
Mathematisches Institut, Rheinsprung 21, 4051 Basel
www.walser-h-m.ch/hans

1 Vektorfeld

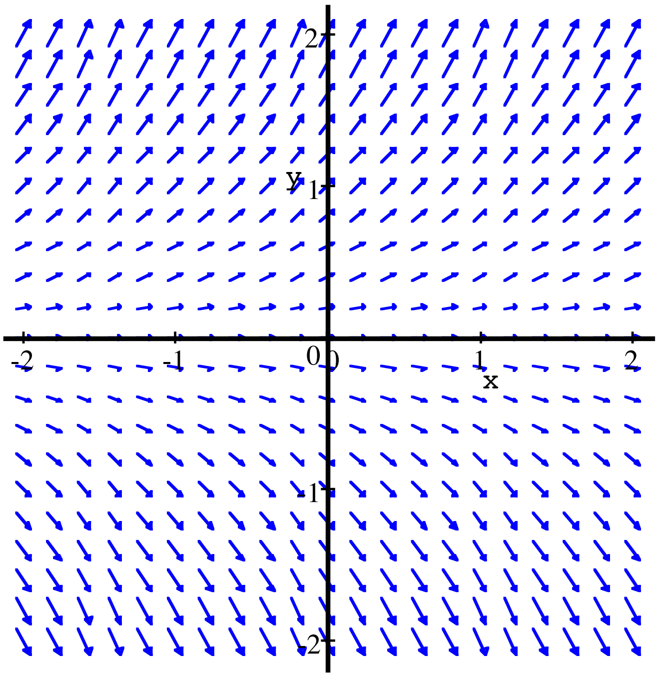
Zu jedem Punkt (x, y) gehört ein *Vektor* $F(x,y) = \begin{bmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{bmatrix}$

1.1 Beispiele

1. Jedes Gradientenfeld ist ein Vektorfeld.

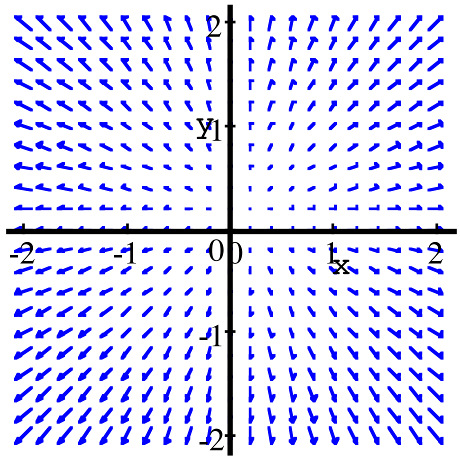
2. Vektorfeld $F(x,y) = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.1y \end{bmatrix}$.

Es ist also zum Beispiel $F(1,2) = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.2 \end{bmatrix}$, $F(-3,0) = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $F(100,30) = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 3 \end{bmatrix}$.



Vektorfeld $F(x,y) = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.1y \end{bmatrix}$

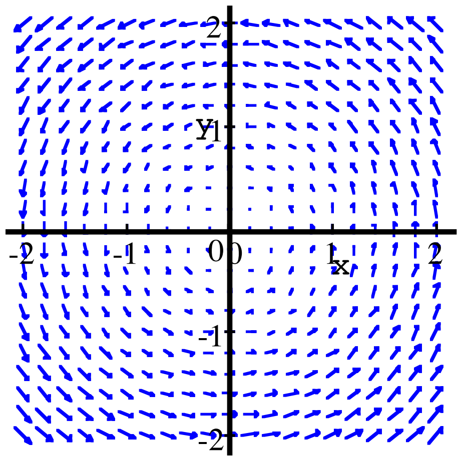
3. Vektorfeld $F(x,y)=\begin{bmatrix}0.1x\\0.1y\end{bmatrix}$.



Vektorfeld $F(x,y)=\begin{bmatrix}0.1x\\0.1y\end{bmatrix}$

Es ist also zum Beispiel $F(1,2)=\begin{bmatrix}0.1\\0.2\end{bmatrix}$, $F(-3,0)=\begin{bmatrix}-0.3\\0\end{bmatrix}$, $F(100,30)=\begin{bmatrix}10\\3\end{bmatrix}$.

4. Vektorfeld $F(x,y)=\begin{bmatrix}-0.1y\\0.1x\end{bmatrix}$.

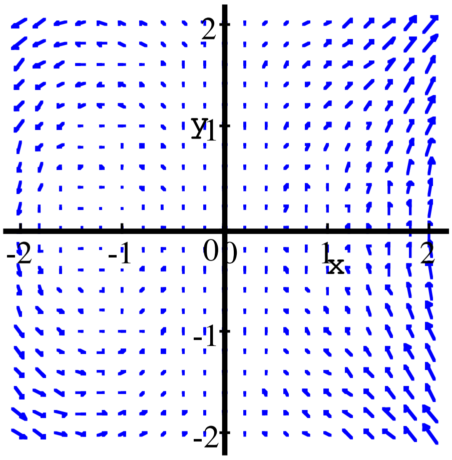


Vektorfeld $F(x,y)=\begin{bmatrix}-0.1y\\0.1x\end{bmatrix}$

Es ist also zum Beispiel $F(1,2)=\begin{bmatrix}-0.2\\0.1\end{bmatrix}$, $F(-3,0)=\begin{bmatrix}0\\-0.3\end{bmatrix}$, $F(100,30)=\begin{bmatrix}-3\\10\end{bmatrix}$.

5. Vektorfeld $F(x,y) = \begin{bmatrix} 0.1xy \\ 0.1 + 0.05x^3 \end{bmatrix}$.

Beispiele: $F(1,2) = \begin{bmatrix} 0.2 \\ 0.15 \end{bmatrix}$, $F(-3,0) = \begin{bmatrix} 0 \\ -1.25 \end{bmatrix}$, $F(100,30) = \begin{bmatrix} 300 \\ 50000.1 \end{bmatrix}$.



Vektorfeld $F(x,y) = \begin{bmatrix} 0.1xy \\ 0.1 + 0.05x^3 \end{bmatrix}$

1.2 Konservatives Vektorfeld

Jedes Gradientenfeld ist ein Vektorfeld.

Nicht jedes Vektorfeld ist ein Gradientenfeld. Wie können wir bei einem gegebenen Vektorfeld prüfen, ob es ein Gradientenfeld ist?

Trick: Die „kreuzweisen“ Ableitungen müssen übereinstimmen.

Beispiel: $f(x,y) = x^4 y^7$

Gegenbeispiel: $F(x,y) = \begin{bmatrix} -0.1y \\ 0.1x \end{bmatrix}$

Ein Vektorfeld $F(x,y)$, das auch ein Gradientenfeld ist, heißt *konservatives* Vektorfeld. Wir haben also ein konservatives Vektorfeld, falls es eine Funktion $f(x,y)$ gibt, so dass:

$$F = \operatorname{grad}(f) = \nabla f$$

Die Funktion $f(x,y)$ heißt dann *Potenzialfunktion* des Vektorfeldes $F(x,y)$.

Eine *notwendige* Bedingung für ein konservatives Vektorfeld ist das Übereinstimmen der „kreuzweisen" Ableitungen:

$$F(x,y) = \begin{bmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{bmatrix} \text{ konservativ } \Rightarrow \quad u_y = v_x$$

$$F(x,y) = \begin{bmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{bmatrix} \text{ konservativ } \Rightarrow \quad \tfrac{\partial u}{\partial y} = \tfrac{\partial v}{\partial x}$$

$$F(x,y) = \begin{bmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{bmatrix} \text{ konservativ } \Rightarrow \quad \tfrac{\partial v}{\partial x} - \tfrac{\partial u}{\partial y} = 0$$

Diese notwendige (aber nicht hinreichende) Bedingung heißt *Integrabilitätsbedingung*.

1.2.1 Beispiele

1. Das Vektorfeld $F(x,y) = \begin{bmatrix} 4x^3y^7 \\ 7x^4y^6 \end{bmatrix}$ ist konservativ, da $F(x,y) = \begin{bmatrix} 4x^3y^7 \\ 7x^4y^6 \end{bmatrix} = \operatorname{grad}\left(x^4y^7\right)$. Die Funktion $f(x,y) = x^4y^7 + C$ ist die Potenzialfunktion von $F(x,y)$.

2. Für das Vektorfeld $F(x,y) = \begin{bmatrix} -0.1y \\ 0.1x \end{bmatrix}$ gilt einerseits $\tfrac{\partial u}{\partial y} = -0.1$ und andererseits $\tfrac{\partial v}{\partial x} = +0.1$. Es ist also $\tfrac{\partial u}{\partial y} \neq \tfrac{\partial v}{\partial x}$. Das Vektorfeld ist *nicht* konservativ, es gibt *keine* passende Potenzialfunktion.

1.2.2 Im Raum

Die Funktion $f(x,y,z)$ hat den Gradienten $\operatorname{grad}(f) = \begin{bmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{bmatrix}$.

Es ist dann $f_{yz} = f_{zy}$ und $f_{zx} = f_{xz}$ und $f_{xy} = f_{yx}$; es gibt also drei Paare von kreuzweisen Ableitungen.

Damit nun ein Vektorfeld $F(x,y,z) = \begin{bmatrix} u(x,y,z) \\ v(x,y,z) \\ w(x,y,z) \end{bmatrix}$ konservativ ist, also ein Gradientenfeld ist, müssen notwendigerweise folgende drei Bedingungen erfüllt sein:

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} &= 0 \\ \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} &= 0 \end{aligned}$$

Diese drei Bedingungen können mit folgendem Begriff zusammengefasst werden:

1.2.2.1 Rotation eines Vektorfeldes im Raum

Unter der *Rotation* eines räumlichen Vektorfeldes $F(x,y,z) = \begin{bmatrix} u(x,y,z) \\ v(x,y,z) \\ w(x,y,z) \end{bmatrix}$ verstehen wir das Vektorfeld:

$$\operatorname{rot}(F) = \begin{bmatrix} \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \end{bmatrix}$$

Die Rotation ist also wiederum ein räumliches Vektorfeld.

Die Rotation kann ebenfalls mit dem Nabla-Operator geschrieben werden:

$$\operatorname{rot}(F) = \nabla \times F = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} u(x,y,z) \\ v(x,y,z) \\ w(x,y,z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \end{bmatrix}$$

Also:

$$\boxed{\operatorname{rot}(F) = \nabla \times F}$$

Man beachte das Cross-Symbol (Vektorprodukt)

Wir können nun die Integrabilitätsbedingung wie folgt zusammenfassen:

$$F \text{ ist konservativ, das heißt ein Gradientenfeld} \quad \Rightarrow \quad \operatorname{rot}(F) = \nabla \times F = \vec{0}$$

1.3 Integration eines Gradientenfeldes

Der Gradient entsteht durch partielle Ableitungen einer gegebenen Funktion $f(x,y)$. Wenn wir nun zu einem gegebenen Gradienten eine passende Funktion $f(x,y)$ suchen, haben wir das umgekehrte Problem, also ein *Integrationsproblem*.

Wir können das Problem auf verschiedene, aber äquivalente Weisen formulieren:

(1) u, v gegeben. Gesucht f, so dass $f_x = u$ und $f_y = v$

(2) Vektorfeld F gegeben. Gesucht f, so dass grad(f) = F.

1.3.1 Heuristisches Beispiel

Gegeben ist das Vektorfeld:

$$F(x,y) = \begin{bmatrix} 12xy^3 \\ 18x^2y^2 + 7y^6 \end{bmatrix}$$

Fragen: Ist das ein Gradientenfeld?

Falls ja: Was ist die zugehörige Potenzialfunktion?

Wir prüfen die Integrabilitätsbedingung:

$$\left(12xy^3\right)_y =$$

$$\left(18x^2y^2 + 7y^6\right)_x =$$

Die Integrabilitätsbedingung ist erfüllt. Sie ist allerdings nur eine notwendige Bedingung, und wir sind noch nicht sicher, ob es wirklich eine Potenzialfunktion gibt.

In einem heuristischen Vorgehen integrieren wir. Subtil ist dabei die Frage der Integrationskonstanten. Bei einer Integration bezüglich x kann die Integrationskonstante durchaus noch von y abhängen.

$$\int 12xy^3 \mathrm{d}x =$$

$$\int \left(18x^2y^2 + 7y^6\right) \mathrm{d}y =$$

Vergleich ergibt:

$$f(x,y) = 6x^2y^3 + y^7 + C$$

Dies ist die Potenzialfunktion, wie durch Gradientenbildung verifiziert werden kann.

1.3.2 Formale Bearbeitung

Wir sahen beim Integrieren mit nur einer Variablen, dass die Stammfunktionen nur bis auf eine Konstante festgelegt sind. Das Analoge gilt hier für Potenzialfunktionen:

Eindeutigkeitssatz:

$$\mathrm{grad}(f) = \mathrm{grad}(g) \quad \Leftrightarrow \quad f = g + C$$

Beweis:

Wie finden wir nun aber die Potenzialfunktion? Dazu eine Erinnerung: Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung besagt:

$$h(x) - h(x_0) = \int_{x_0}^{x} h'(s)\, \mathrm{d}s$$

Wir wenden das nun sozusagen „partiell“ für eine Funktion von zwei Variablen an:

Damit haben wir ein Hilfsmittel zur Berechnung der Potenzialfunktion.

Es gilt folgender

Existenzsatz (ohne Beweis)

Es sei $F(x,y)=\begin{bmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{bmatrix}$ auf ganz $\mathbb{R}^2$ gegeben und dort stetig differenzierbar, das heißt die Ableitungen u_x, u_y, v_x und v_y sind stetig, und $u_y = v_x$.

Dann gilt:

$$F = \operatorname{grad}(f) \quad \text{mit} \quad f(x,y) = \int_{x_0}^{x} u(s,y_0)\,\mathrm{d}s + \int_{y_0}^{y} v(x,t)\,\mathrm{d}t + C$$

Wir sehen, dass außer der (notwendigen) Integrabilitätsbedingung $u_y = v_x$ noch einige Stetigkeitsbedingungen erfüllt sein müssen.

Beispiel

Es sei:

$$u(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}$$

$$v(x,y) = \frac{y}{x^2+y^2}$$

Wir prüfen zunächst die Integrabilitätsbedingung $u_y = v_x$:

Nun berechnen wir die Potenzialfunktion $f(x,y)$:

2 Weg und Wegintegral

2.1 Beispiel: Wanderung in Schottland

Weg: Wanderweg

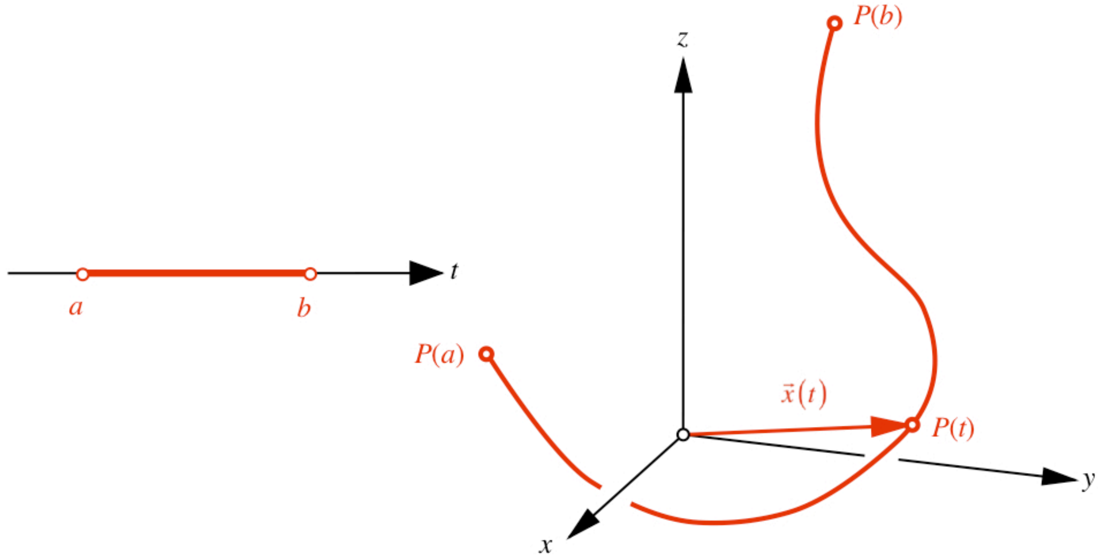
Leider regnet es, aber nicht konstant. Mal heftig, mal nur Nieselregen.

Wegintegral:

$$\text{totale Regenmenge} = \int_{\text{Start}}^{\text{Ziel}} \text{Regendichte}\, \mathrm{d}s$$

2.2 Parameterdarstellung eines Weges (einer Kurve)

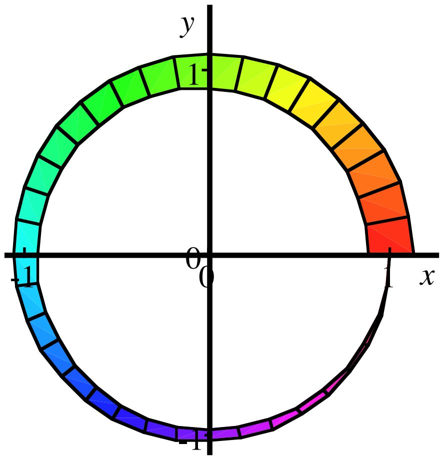
Durch den Ortsvektor $\vec{x}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{bmatrix}$ mit dem Parameter $t \in [a,b]$ entsteht eine Kurve im Raum. Eine Kurve in der Ebene wird entsprechend definiert.



Kurve im Raum

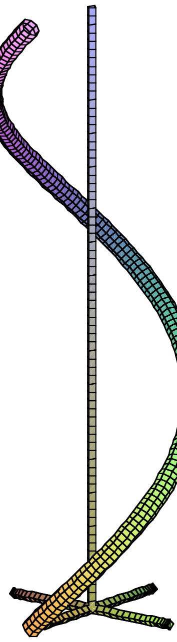
2.2.1 Beispiele

1. Durch $\vec{x}(t) = \begin{bmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{bmatrix}$, $t \in [0, 2\pi]$ erhalten wir in der Ebene den Einheitskreis.

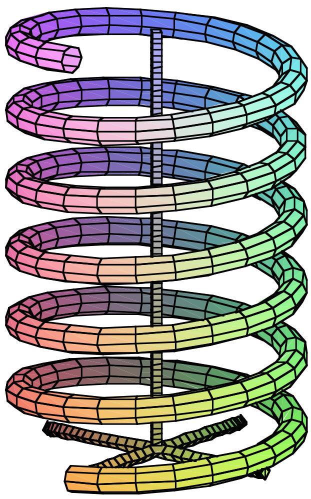


Der Einheitskreis

2. Mit $\vec{x}(t)=\begin{bmatrix}\cos(t)\\ \sin(t)\\ t\end{bmatrix}$ und $t\in[0,2\pi]$ erhalten wir eine Schraubenlinie im Raum.



Schraubenlinie



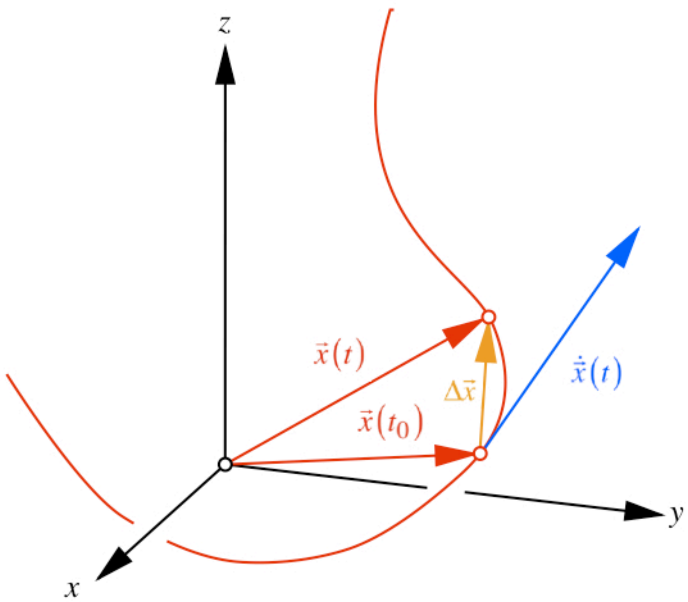
Schraubenlinie im Raum

2.3 Tangentialvektor

Wir versuchen, $\vec{x}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{bmatrix}$ nach t wie folgt abzuleiten:

$$\boxed{\dot{\vec{x}}(t_0) = \lim_{t \to t_0} \frac{\vec{x}(t) - \vec{x}(t_0)}{t - t_0}}$$

Geometrisch bedeutet $\dot{\vec{x}}(t_0)$ den Tangentialvektor, physikalisch den Geschwindigkeitsvektor. Aus Traditionsgründen wird für die Bezeichnung der Ableitung bei Vektoren der Punkt anstelle des Striches verwendet.



$\dot{\vec{x}}(t_0)$ **ist der Tangentialvektor (Geschwindigkeitsvektor)**

Rein technisch erhalten wir den Tangentialvektor durch komponentenweises Ableiten:

$$\vec{x}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \dot{\vec{x}}(t) = \begin{bmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{bmatrix}$$

Man beachte die Subtilitäten bei der Bezeichnung.

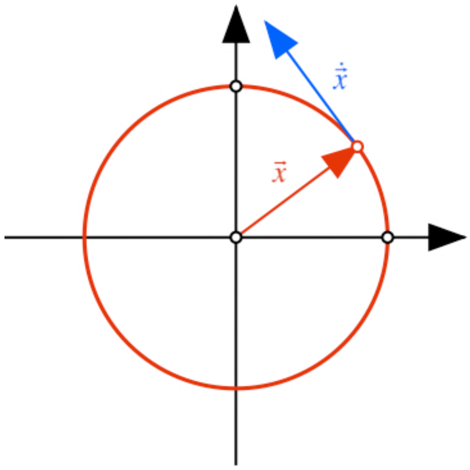
Beispiel: Für den Kreis

$$\vec{x}(t) = \begin{bmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{bmatrix}, \; t \in [0, 2\pi]$$

erhalten wir den Ableitungsvektor

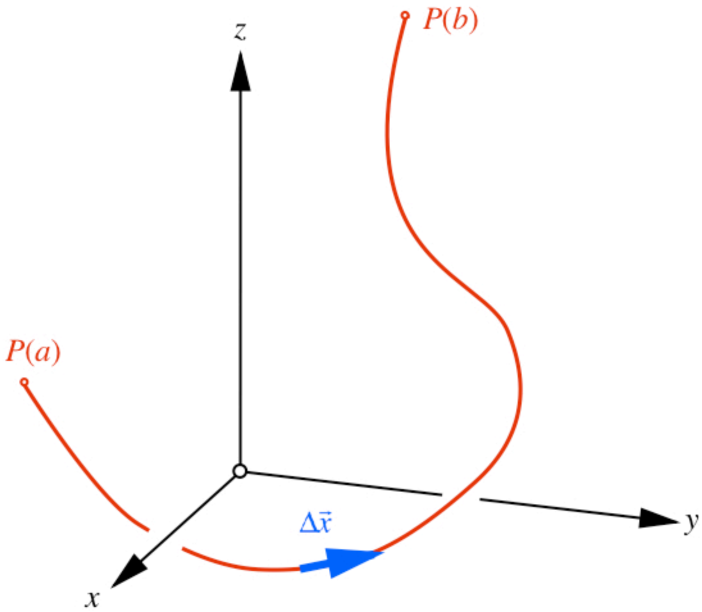
$$\dot{\vec{x}}(t) = \begin{bmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \end{bmatrix},\; t \in [0, 2\pi]$$

Die beiden Vektoren $\vec{x}(t)$ und $\dot{\vec{x}}(t)$ sind orthogonal.



Die beiden Vektoren $\vec{x}(t)$ und $\dot{\vec{x}}(t)$ sind orthogonal

2.4 Die Bogenlänge



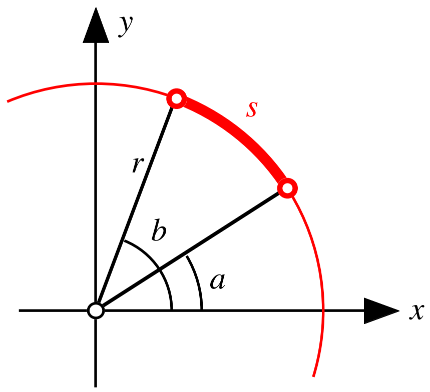
Berechnung der Bogenlänge

Für das kleine Stück $\Delta\vec{x}$ gilt: $\Delta\vec{x} \approx \mathrm{d}\vec{x} = \dot{\vec{x}}\,\mathrm{d}t$. Damit ergibt sich für die gesamte Weglänge s von $P(a)$ bis $P(b)$:

$$\boxed{s = \int_{P(a)}^{P(b)} \mathrm{d}s = \int_{P(a)}^{P(b)} |\mathrm{d}\vec{x}| = \int_a^b \left|\dot{\vec{x}}(t)\right| \mathrm{d}t}$$

Beispiele

1. Der Kreisbogen



Kreisbogen

Aus

$$\vec{x}(t)=\begin{bmatrix} r\cos(t) \\ r\sin(t) \end{bmatrix} \quad ; \; t\in[a,b]$$

erhalten wir den Ableitungsvektor

$$\dot{\vec{x}}(t)=\begin{bmatrix} -r\sin(t) \\ r\cos(t) \end{bmatrix}$$

und damit $\left|\dot{\vec{x}}\right|=r$. Daraus ergibt sich für die Länge des Kreisbogens:

$$s=\int_a^b r\,\mathrm{d}t=r(b-a)$$

2. Die Schraubenlinie

Aus

$$\vec{x}(t)=\begin{bmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \\ t \end{bmatrix} \text{ mit } t\in[0,2\pi]$$

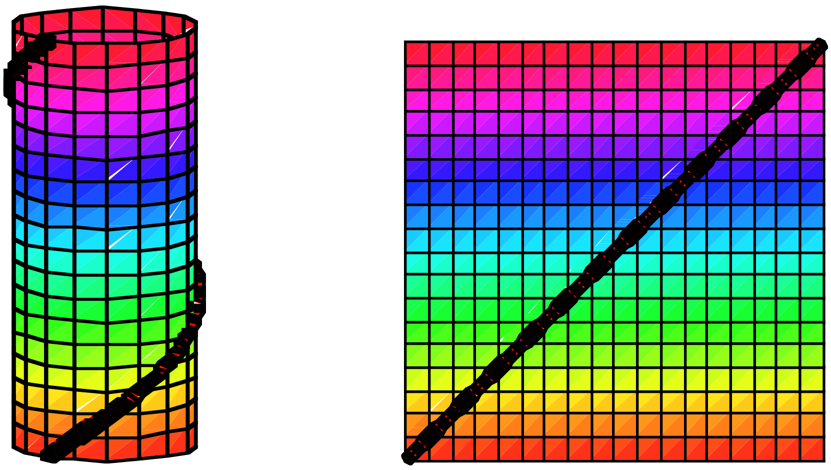
ergibt sich:

$$\dot{\vec{x}}(t)=\begin{bmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \\ 1 \end{bmatrix} \text{ und } \left|\dot{\vec{x}}(t)\right|=\sqrt{2}$$

Damit erhalten wir:

$$s=\int_0^{2\pi}\left|\dot{\vec{x}}(t)\right|\mathrm{d}t=\int_0^{2\pi}\sqrt{2}\,\mathrm{d}t=\sqrt{2}\,2\pi$$

Dieses Resultat hätten wir allerdings auch einfacher durch „Abwickeln“ der Schraubenlinie und Anwendung des Satzes von Pythagoras erhalten können.



Abwickeln der Schraubenlinie

2.5 Wegintegral bei einer Funktion

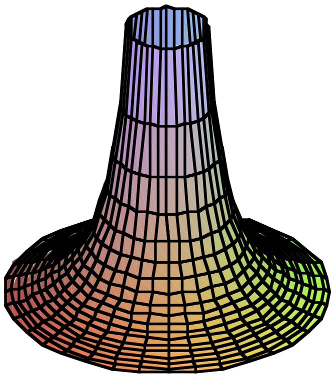
In der Ebene oder im Raum haben wir einerseits einen Weg $\vec{x}(t),\, t \in [a,b]$ und andererseits eine Funktion $\Phi(x,y)$ beziehungsweise $\Phi(x,y,z)$. Als Beispiele solcher Ortsfunktionen können etwa die Strahlenbelastung in einem verseuchten Gebiet oder die Temperatur im Raum gelten oder die Regendichte in Schottland. Als *Wegintegral* (oder *Kurvenintegral*) definieren wir nun:

$$\boxed{\int_A^B \Phi(x,y,z)\,\mathrm{d}s = \int_a^b \Phi(\vec{x}(t))\left|\dot{\vec{x}}(t)\right|\mathrm{d}t}$$

Das Integral links ist das Wegintegral; das Integral rechts ist ein Integral im gewöhnlichen Sinn auf der *t*-Geraden.

2.5.1 Integrale Strahlenbelastung

Es sei $\Phi(x,y)=\frac{1}{x^2+y^2}$. Dieses Beispiel kann als die Intensität einer Strahlung mit Strahlenquelle im Ursprung interpretiert werden; die Strahlung klingt mit dem Quadrat der Entfernung von der Strahlenquelle ab.

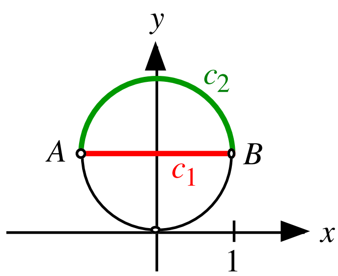


$\Phi(x,y)=\frac{1}{x^2+y^2}$

Wir vergleichen nun die Strahlenbelastung

$$\Psi=\int_A^B \Phi(x,y)\,\mathrm{d}s$$

auf zwei verschiedenen Wegen von A nach B. Dabei gehen wir davon aus, dass wir beide Wege mit konstanter Geschwindigkeit durchlaufen. In einer Gefahrensituation wird man ohnehin die maximal mögliche Geschwindigkeit wählen. In unseren beiden Beispielen ist diese Geschwindigkeit gleich eins.



Vergleich zweier Wege

1. Weg c_1: Strecke von A nach B. Es ist:

$$\vec{x}(t)=\begin{bmatrix} t \\ 1 \end{bmatrix} \quad ; \quad t\in[-1,+1]$$

Weiter:

$$\dot{\vec{x}}(t)=\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

also $\left|\dot{\vec{x}}(t)\right| = 1$, und somit:

$$\Psi_{c_1} = \int_{-1}^{+1} \frac{1}{t^2+1}\mathrm{d}t = \arctan(1) - \arctan(-1) = \frac{\pi}{2}$$

2. Weg c_2: Oberer Halbkreis von A nach B. Es ist dann:

$$\vec{x}(t) = \begin{bmatrix} -\cos(t) \\ \sin(t)+1 \end{bmatrix} \quad ; \quad t \in [0,\pi]$$

Daraus folgt

$$\dot{\vec{x}}(t) = \begin{bmatrix} \sin(t) \\ \cos(t) \end{bmatrix}$$

also wiederum $\left|\dot{\vec{x}}(t)\right| = 1$, und somit:

$$\Psi_{c_2} = \int_0^{\pi} \frac{\mathrm{d}t}{(\cos(t))^2+(\sin(t)+1)^2} = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}t}{2+2\sin(t)} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}t}{1+\sin(t)}$$

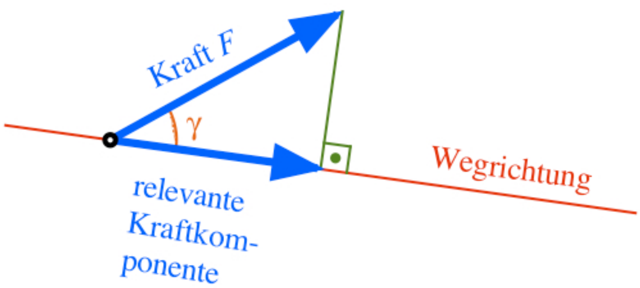
$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}t}{1+\cos(t)} \overset{\overbrace{\theta=\frac{t}{2}}}{=} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{2\mathrm{d}\theta}{2(\cos(\theta))^2} = \tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$$

Auf dem zweiten Weg ist die integrale Strahlungsaufnahme also geringer als auf dem ersten Weg, obwohl wir länger unterwegs sind.

Allgemein ist die Strahlenbelastung minimal auf dem die Strahlenquelle nicht enthaltenden Bogen AB des Kreises durch A, B und die Strahlenquelle. Dies kann mit Methoden der *Variationsrechnung* gezeigt werden.

2.6 Wegintegral bei Vektorfeld

Wir erinnern uns an die Formel: „Arbeit = Weg mal Kraft“. Diese Formel muss richtig interpretiert werden: relevant ist nur die Kraftkomponente in der Wegrichtung.



Relevante Kraftkomponente $|F|\cos(\gamma)$

Damit ergibt sich für die auf ein Wegstück ds bezogene Arbeit: $|\mathrm{d}\vec{x}|\,|F|\cos(\gamma) = \mathrm{d}\vec{x}\,F$

Für die gesamte Arbeit längs eines Weges müssen wir nun integrieren:

$$\text{Integrale Arbeit} = \int_{P(a)}^{P(b)} |\mathrm{d}\vec{x}|\,|F|\cos(\gamma) = \int_{P(a)}^{P(b)} \mathrm{d}\vec{x}\,F = \int_a^b F\,\dot{\vec{x}}(t)\,\mathrm{d}t$$

Wir übertragen dies nun vom Kraftfeld auf ein beliebiges Vektorfeld:

Zu einem Vektorfeld $F(x,y,z) = \begin{bmatrix} u(x,y,z) \\ v(x,y,z) \\ w(x,y,z) \end{bmatrix}$

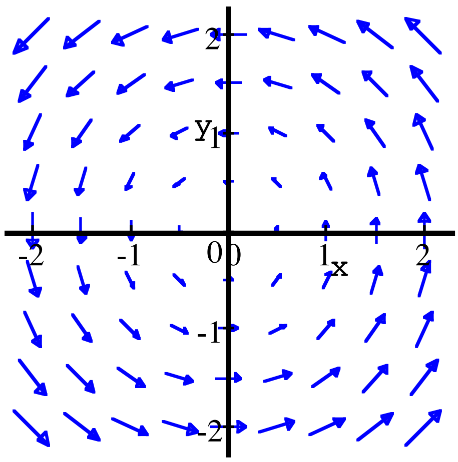
und einem Weg c: $\vec{x}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{bmatrix}$ mit $t \in [a,b]$

gehört das *Wegintegral*:

$$\text{Wegintegral} = \int_c F\,\mathrm{d}\vec{x} = \int_a^b F\,\dot{\vec{x}}(t)\,\mathrm{d}t$$

2.6.1 Beispiel

Wir nehmen das „zirkuläre“ Vektorfeld $F(x,y) = \begin{bmatrix} -y \\ x \end{bmatrix}$.



Vektorfeld $F(x,y) = \begin{bmatrix} -y \\ x \end{bmatrix}$ (die Vektoren sind zu *kurz* gezeichnet, nur die Richtung stimmt!)

In diesem Vektorfeld studieren wir zwei verschiedene Wege.

a) Radialer Weg c_1 vom Zentrum nach außen

Der Weg c_1 kann durch $\vec{x}(t)=\begin{bmatrix} pt \\ qt \end{bmatrix}=t\begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix}$, $t\in[0,b]$ parametrisiert werden. Wir erhalten damit:

$$\dot{\vec{x}}(t)=\begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix} \text{ (das ist der Richtungsvektor des Weges } c_1\text{)}$$

$$F\big(x(t),y(t)\big)=\begin{bmatrix} -y(t) \\ x(t) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -qt \\ pt \end{bmatrix}$$

und damit das Wegintegral:

$$\int_{c_1} F\,\mathrm{d}\vec{x}=\int_0^b F\,\dot{\vec{x}}(t)\,\mathrm{d}t=\int_0^b \begin{bmatrix} -qt \\ pt \end{bmatrix}\begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix}\mathrm{d}t=0$$

Geometrisch ist das klar, da der Weg rechtwinklig zu den Feldvektoren verläuft.

b) Kreisförmiger Weg c_2

Der Weg c_2 kann durch $\vec{x}(t)=\begin{bmatrix} r\cos(t) \\ r\sin(t) \end{bmatrix}$, $t\in[0,2\pi]$ parametrisiert werden. Wir erhalten:

$$\dot{\vec{x}}(t)=\begin{bmatrix} -r\sin(t) \\ r\cos(t) \end{bmatrix}$$

$$F\big(x(t),y(t)\big)=\begin{bmatrix} -y(t) \\ x(t) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -r\sin(t) \\ r\cos(t) \end{bmatrix}$$

und damit das Wegintegral:

$$\int_{c_2} F\,\mathrm{d}\vec{x}=\int_0^{2\pi} F\,\dot{\vec{x}}(t)\,\mathrm{d}t=\int_0^{2\pi} \begin{bmatrix} -r\sin(t) \\ r\cos(t) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -r\sin(t) \\ r\cos(t) \end{bmatrix}\mathrm{d}t=r^2\int_0^{2\pi}\mathrm{d}t=2\pi r^2$$

2.6.2 Sonderfall: konservatives Vektorfeld

Es sei nun $F(x,y)$ ein *Gradientenfeld*, also ein *konservatives* Vektorfeld, und $f(x,y)$ eine zugehörige Potenzialfunktion, also:

$$F = \operatorname{grad}(f) = \nabla f = \begin{bmatrix} f_x \\ f_y \end{bmatrix}$$

Ferner sei c irgend ein *beliebiger* Weg von $A = P(a)$ nach $B = P(b)$ mit der Parameterdarstellung:

$$c: \quad \vec{x}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix}; t \in [a,b]$$

Für das Wegintegral längs c erhalten wir dann:

$$\begin{aligned}
\int\limits_c F\,\mathrm{d}\vec{x} &= \int\limits_a^b F\,\dot{\vec{x}}(t)\,\mathrm{d}t = \int\limits_a^b \begin{bmatrix} f_x \\ f_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{bmatrix} \mathrm{d}t \\
&= \int\limits_a^b \left(f_x x'(t) + f_y y'(t) \right) \mathrm{d}t = \int\limits_a^b \frac{\mathrm{d}f(\vec{x}(t))}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t \\
&= f(\vec{x}(t))\Big|_a^b = f(\vec{x}(b)) - f(\vec{x}(a)) = f(B) - f(A)
\end{aligned}$$

Folgerungen:

- Der Weg c spielt keine Rolle, nur Anfangspunkt A und Endpunkt B sind wichtig.
- Das Wegintegral ist die *Potenzialdifferenz* $f(B) - f(A)$ zwischen Endpunkt B und Anfangspunkt A
- Bei einem *geschlossenen* Weg in einem konservativen Vektorfeld verschwindet das Wegintegral.

3 Zusammenfassung

3.1 Vektorfeld

Zu jedem Punkt (x, y) gehört ein *Vektor* $F(x,y) = \begin{bmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{bmatrix}$

Jedes Gradientenfeld ist ein Vektorfeld, aber *nicht* jedes Vektorfeld ist ein Gradientenfeld.

3.1.1 Konservatives Vektorfeld

Ein Gradientenfeld $F = \operatorname{grad}(f) = \nabla f$ heißt konservatives Vektorfeld. Die Funktion f heißt Potentialfunktion des Vektorfeldes F.

Integrabilitätsbedingung: Notwendige Bedingung für konservatives Vektorfeld:

In Ebene: $F(x,y) = \begin{bmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{bmatrix}$ konservativ $\Rightarrow \quad u_y = v_x$

Im Raum: $F(x,y,z) = \begin{bmatrix} u(x,y,z) \\ v(x,y,z) \\ w(x,y,z) \end{bmatrix}$ konservativ

$$\Rightarrow \operatorname{rot}(F) = \nabla \times F = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} u(x,y,z) \\ v(x,y,z) \\ w(x,y,z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \end{bmatrix} = \vec{0}$$

Finden der Potenzialfunktion:

Gegeben: $F(x,y) = \begin{bmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{bmatrix}$, u_x, u_y, v_x und v_y stetig, und $u_y = v_x$. Dann ist:

$$F = \operatorname{grad}(f) \quad \text{mit} \quad f(x,y) = \int_{x_0}^{x} u(s,y_0)\,\mathrm{d}s + \int_{y_0}^{y} v(x,t)\,\mathrm{d}t + C$$

3.2 Weg

In Ebene: $\vec{x}(t)=\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix}, t \in [a,b]$ Tangentialvektor: $\dot{\vec{x}}(t)=\begin{bmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{bmatrix}$

Im Raum analog.

3.2.1 Wegintegrale

Weglänge (Bogenlänge, Kurvenlänge):

$$s = \int_{P(a)}^{P(b)} \mathrm{d}s = \int_{P(a)}^{P(b)} |\mathrm{d}\vec{x}| = \int_a^b \left|\dot{\vec{x}}(t)\right| \mathrm{d}t$$

Wegintegral einer Funktion: Beispiel Regendichte

$$\int_A^B \Phi(x,y,z)\,\mathrm{d}s = \int_a^b \Phi(\vec{x}(t))\left|\dot{\vec{x}}(t)\right|\mathrm{d}t$$

Wegintegral eines Vektorfeldes: Beispiel Arbeit im Kraftfeld

$$\int_c F\,\mathrm{d}\vec{x} = \int_a^b F\,\dot{\vec{x}}(t)\,\mathrm{d}t$$

Wegintegral eines konservativen Vektorfeldes: Potenzialdifferenz. Wegunabhängig

$$\int_c F\,\mathrm{d}\vec{x} = \int_a^b \begin{bmatrix} f_x \\ f_y \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{bmatrix}\mathrm{d}t = f(B) - f(A)$$