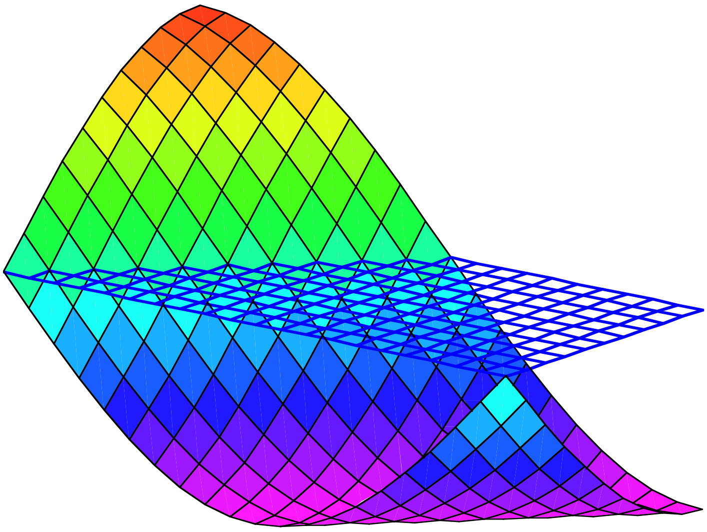
Hans Walser

# Mathematik 1 für Naturwissenschaften



## Modul 115

## Extrema, Integration

UNI BASEL

## Inhalt



Modul 115 für die Lehrveranstaltung *Mathematik 1 für Naturwissenschaften*

Winter 2002/03 Erstausgabe
Winter 2004/05 Technische Überarbeitung, Ergänzungen
Winter 2006/07 MathType. Kleine Ergänzung. Fehlerkorrekturen
Herbst 2007 Neue Kapiteleinteilung. Neues Layout
Herbst 2008 Geändertes Layout
Herbst 2010 Keine Änderung
Herbst 2013 Kürzung

last modified: 19. September 2013

Hans Walser
Mathematisches Institut, Rheinsprung 21, 4051 Basel
www.walser-h-m.ch/hans

# 1 Extrema

## 1.1 Erinnerung

Für eine Funktion $y = f(x)$ *einer* Variablen fanden wir:

$$\text{Extremum} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 0 \text{ ; die Umkehrung ist falsch}$$

$$f''(x) < 0 \text{ , } f'(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Maximum}$$

$$f''(x) > 0 \text{ , } f'(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Minimum}$$

$$\text{Wendepunkt} \quad \Rightarrow \quad f''(x) = 0 \text{ ; die Umkehrung ist falsch}$$

## 1.2 Regeln für Extrema

Für eine Funktion $z = f(x,y)$ *zweier* Variablen gelten entsprechende Regeln:

$$\boxed{\text{Extremum} \quad \Rightarrow \quad \operatorname{grad}(f) = \vec{0} \text{, d.h. } f_x = 0 \text{ und } f_y = 0 \text{ ; die Umkehrung gilt nicht}}$$

Als weiteres Kriterium brauchen wir eine aus zweiten Ableitungen gebildete Determinante:

$$\Delta = f_{xx} f_{yy} - f_{xy}^2 = \det\left(\begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{bmatrix}\right)$$

Damit gilt dann:

$$\boxed{\begin{array}{ll} \operatorname{grad}(f) = \vec{0} \text{ und } \Delta > 0 \text{, } f_{xx} > 0 \quad \Rightarrow & \text{isoliertes Minimum} \\ \operatorname{grad}(f) = \vec{0} \text{ und } \Delta > 0 \text{, } f_{xx} < 0 \quad \Rightarrow & \text{isoliertes Maximum} \\ \operatorname{grad}(f) = \vec{0} \text{ und } \Delta < 0 \quad \Rightarrow & \text{Sattelpunkt} \\ \operatorname{grad}(f) = \vec{0} \text{ und } \Delta = 0 & \text{keine Aussage möglich} \end{array}}$$

### 1.2.1 Beispiele

**1. Beispiel**: $f(x,y) = xy$ .

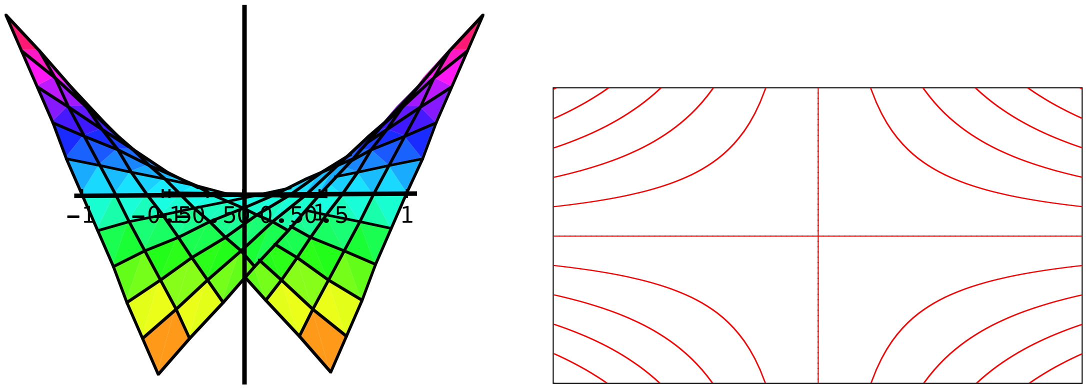
Es ist $\operatorname{grad}(f) = \begin{bmatrix} y \\ x \end{bmatrix}$, also $\operatorname{grad}(f)(0,0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \vec{0}$ . Ferner ist:

$$\begin{matrix} f_{xx} = 0 & f_{xy} = 1 \\ f_{yx} = 1 & f_{yy} = 0 \end{matrix}$$

also

$$\Delta(0,0) = \det\left(\begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{bmatrix}\right) = \det\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right) = -1$$

Im Ursprung haben wir somit einen *Sattelpunkt*.



$f(x,y) = xy$ **, Sattelpunkt im Ursprung**

**2. Beispiel**: $f(x,y) = x^3 - 3xy^2$ (Affensattel)

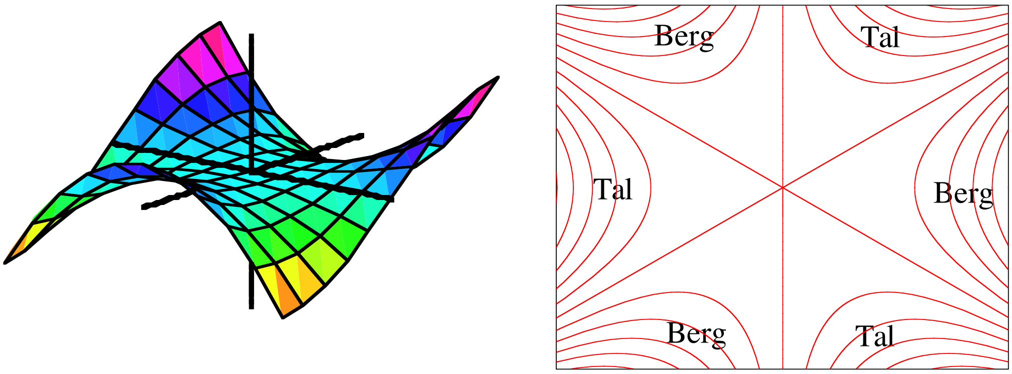
Es ist $\operatorname{grad}(f) = \begin{bmatrix} 3x^2 - 3y^2 \\ -6xy \end{bmatrix}$, also $\operatorname{grad}(f)(0,0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \vec{0}$. Ferner ist:

$$\begin{array}{ll} f_{xx} = 6x & f_{xy} = -6y \\ f_{yx} = -6y & f_{yy} = -6x \end{array}$$

also

$$\Delta(x,y) = \det\left(\begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{bmatrix}\right) = \det\left(\begin{bmatrix} 6x & -6y \\ -6y & -6x \end{bmatrix}\right) = -36x^2 - 36y^2$$

und somit $\Delta(0,0) = 0$. Es ist also keine Aussage möglich.




$f(x,y) = x^3 - 3xy^2$. **Der Affensattel ist kein gewöhnlicher Sattelpunkt**

**3. Beispiel**: $f(x,y) = x^2 + y^2$

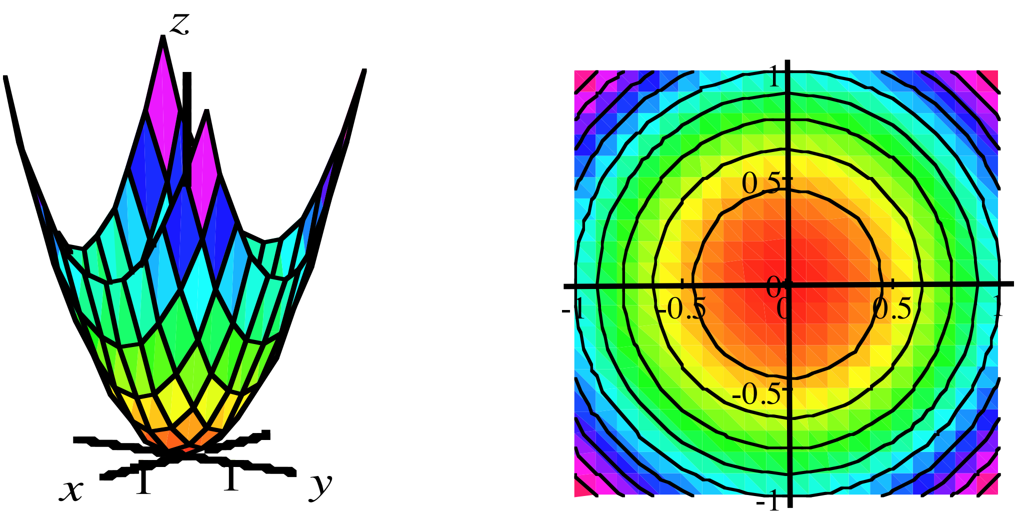
Es ist $\operatorname{grad}(f) = \begin{bmatrix} 2x \\ 2y \end{bmatrix}$, also $\operatorname{grad}(f)(0,0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \vec{0}$. Ferner ist:

$$\begin{array}{ll} f_{xx} = 2 & f_{xy} = 0 \\ f_{yx} = 0 & f_{yy} = 2 \end{array}$$

also

$$\Delta(x,y) = \det\left(\begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{bmatrix}\right) = \det\left(\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\right) = 4$$

Somit ist auch $\Delta(0,0) = 4 > 0$, und wir haben ein Extremum. Wegen $f_{xx}(0,0) = 2 > 0$ handelt es sich um ein isoliertes Minimum.




$f(x,y) = x^2 + y^2$, **isoliertes Minimum im Ursprung**

**4. Beispiel**: $f(x,y) = x^2 - 2xy + y^2 = (x-y)^2$

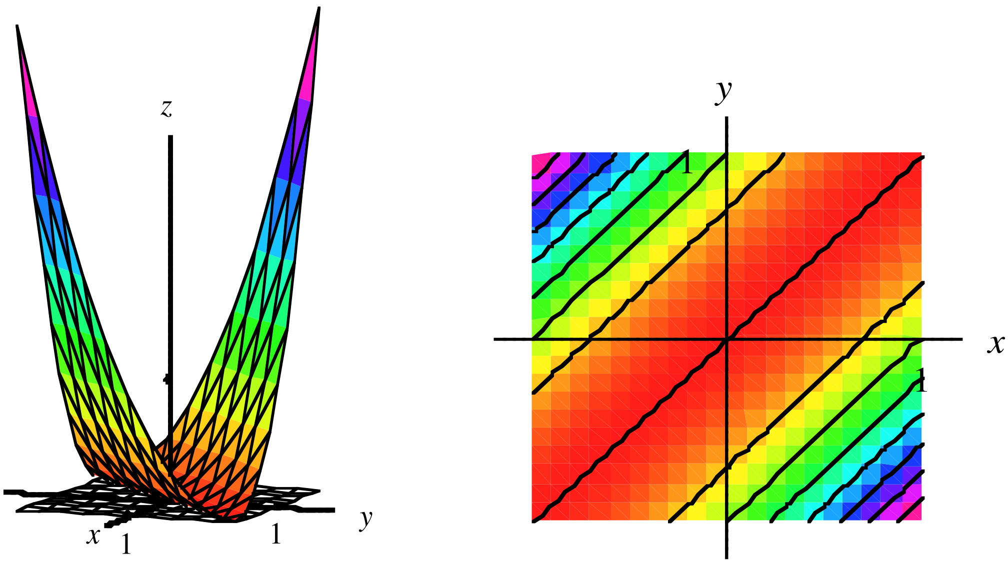
Es ist $\operatorname{grad}(f) = \begin{bmatrix} 2x-2y \\ -2x+2y \end{bmatrix}$, also $\operatorname{grad}(f)(0,0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \vec{0}$. Ferner ist:

$$\begin{array}{ll} f_{xx} = 2 & f_{xy} = -2 \\ f_{yx} = -2 & f_{yy} = 2 \end{array}$$

also

$$\Delta(x,y) = \det\left(\begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{bmatrix}\right) = \det\left(\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}\right) = 0$$

Wegen $\Delta = 0$ ist keine Aussage möglich.




$f(x,y) = x^2 - 2xy + y^2 = (x-y)^2$

Der Funktionsgraph ist ein Tal mit der Talsohle $y = x$; der Ursprung ist zwar ein Minimum, dieses ist aber nicht isoliert.

## 2 Implizite Darstellungen von Kurven

Dieses Kapitel ist eine Vorbereitung für das nächste Kapitel über Extrema mit Nebenbedingungen.

### 2.1 Beispiel: der Kreis

Beispiel: In der Gleichung $x^2 + y^2 - 1 = 0$ des Einheitskreises hängen $x$ und $y$ voneinander ab.

Können wir das eine durch das andere explizit (nach einer bestimmten Variablen ausgerechnet) ausdrücken?

Mögliche Vorschläge (und ihre Kritik):

$y = g_+(x) = \sqrt{1-x^2}$, gibt nur oberen Halbkreis

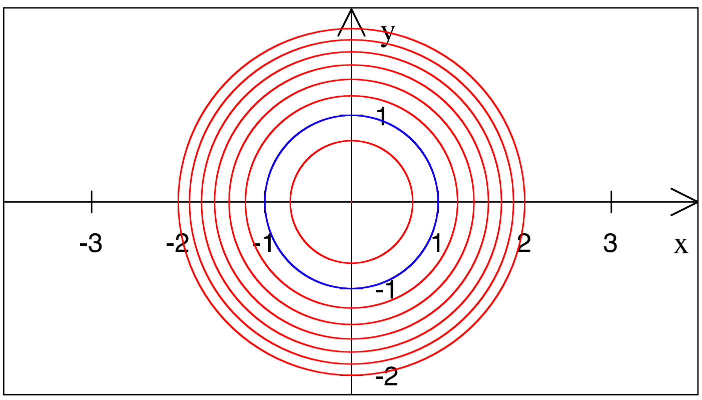
$y = g_-(x) = -\sqrt{1-x^2}$, gibt nur unteren Halbkreis

$x = h_+(y) = \sqrt{1-y^2}$, gibt nur rechten Halbkreis

$x = h_-(y) = -\sqrt{1-y^2}$, gibt nur linken Halbkreis

Wir können also nicht den ganzen Kreis durch eine explizite Funktion darstellen.

Die implizite Kreisgleichung $x^2 + y^2 - 1 = 0$ kann aber mit einer Funktion von zwei Variablen in Verbindung gebracht werden, nämlich $f(x,y) = x^2 + y^2 - 1$. Der Einheitskreis entspricht dann gerade der Niveaulinie zum Niveau Null. Die Niveaulinie für das Niveau $c$ ist wegen $f(x,y) = x^2 + y^2 - 1 = c$ dann der Kreis mit dem Radius $r = \sqrt{c+1}$.




**Niveaulinien von** $f(x,y) = x^2 + y^2 - 1$

**für die Niveaus -1, -0.5, 0, 0.5, 1, 1.5, 2, 2.5, 3**

## 2.2 Tangenten an Niveaulinien

Gesucht ist die Tangente an eine Niveaulinie $f(x,y)=c$ im Berührungspunkt $(x_0,y_0)$.

Da der Gradient von der Funktion *f* rechtwinklig zu den Niveaulinien steht, ist er auch rechtwinklig zur gesuchten Tangente. Er ist also ein Normalvektor der gesuchten Tangente.

**Erinnerung**

In der impliziten Geradengleichung $ax+by+d=0$ sind die Koeffizienten *a* und *b* gerade die Komponenten eines Normalvektors dieser Geraden:

$$\text{Gerade } g\text{:} \quad ax+by+d=0 \quad \text{hat Normalvektor} \quad \vec{n}=\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

Somit ist ein Normalvektor der gesuchten Tangente der Gradient der Funktion *f*:

$$\vec{n}=\operatorname{grad}\big(f(x_0,y_0)\big)=\begin{bmatrix} f_x(x_0,y_0) \\ f_y(x_0,y_0) \end{bmatrix}$$

Für die Tangente an die Niveaulinie $f(x,y)=c$ erhalten wir somit die Geradengleichung:

$$xf_x(x_0,y_0)+yf_y(x_0,y_0)+d=0$$

Für die Bestimmung von *d* überlegen wir, dass diese Gleichung auch im Berührungspunkt $(x_0,y_0)$ gelten muss, also: $x_0f_x(x_0,y_0)+y_0f_y(x_0,y_0)+d=0$

Daraus ergibt sich: $d=-\big(x_0f_x(x_0,y_0)+y_0f_y(x_0,y_0)\big)$

Somit gilt:

Tangente an Niveaulinie $f(x,y)=c$ im Berührungspunkt $(x_0,y_0)$:

$$(x-x_0)f_x(x_0,y_0)+(y-y_0)f_y(x_0,y_0)=0$$

### 2.2.1 Beispiele

**1. Beispiel**: Der Kreis mit dem Radius $r$ hat die Gleichung $x^2 + y^2 - r^2 = 0$. Wir suchen die Tangente im Punkt $(x_0, y_0)$.

Vorgehen: Der Kreis ist die Niveaulinie der Funktion $f(x,y) = x^2 + y^2 - r^2$ zum Niveau Null. Es ist:

$$f_x = 2x \quad ; \quad f_x(x_0, y_0) = 2x_0$$

$$f_y = 2y \quad ; \quad f_y(x_0, y_0) = 2y_0$$

Damit ergibt sich zunächst:

$$(x - x_0)2x_0 + (y - y_0)2y_0 = 0$$

oder:

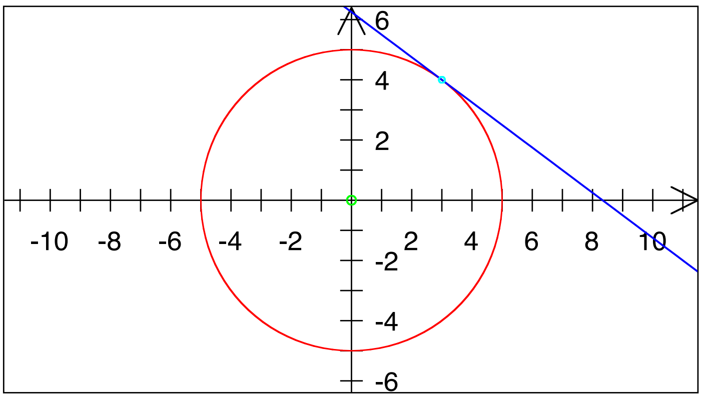
$$xx_0 + yy_0 = x_0^2 + y_0^2$$

und wegen $x_0^2 + y_0^2 = r^2$ schließlich:

$$xx_0 + yy_0 = r^2$$

Beispiel im Beispiel: Gesucht ist die Tangente an den Kreis mit Radius $r = 5$ im Punkt $(3, 4)$. Wir erhalten die implizite Tangentengleichung $3x + 4y = 25$ oder explizit:

$$y = -\tfrac{3}{4}x + \tfrac{25}{4}$$




**Kreis und Tangente**

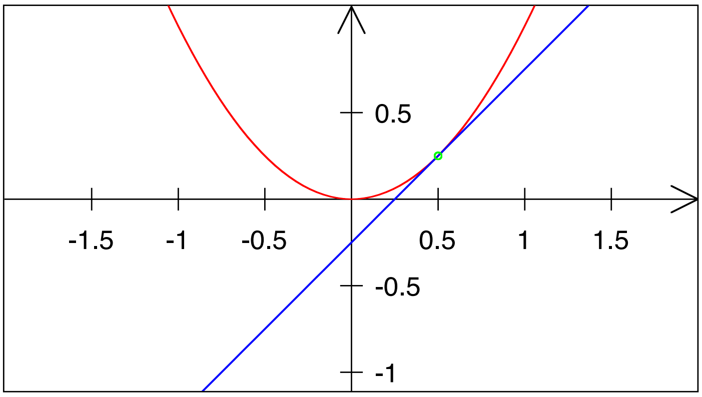
**2. Beispiel**: Die Standardparabel hat die Gleichung $y = x^2$, ist also Niveaulinie von $f(x,y) = y - x^2$ für das Niveau Null. Gesucht ist die Tangente im Punkt $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$. Aus

$$f_x = -2x \quad ; \quad f_x\left(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{4}\right) = -1$$

$$f_y = 1 \quad ; \quad f_y\left(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{4}\right) = 1$$

Ergibt sich die implizite Tangentengleichung $\left(x - \frac{1}{2}\right) \cdot (-1) + \left(y - \frac{1}{4}\right) \cdot 1 = 0$, oder explizit:

$$y = x - \tfrac{1}{4}$$

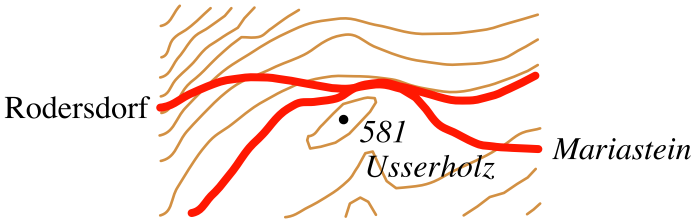



**Parabel und Tangente**

# 3 Extrema mit Nebenbedingungen

## 3.1 Problemstellung

Wo ist das Maximum auf dem Wanderweg von Rodersdorf nach Mariastein?

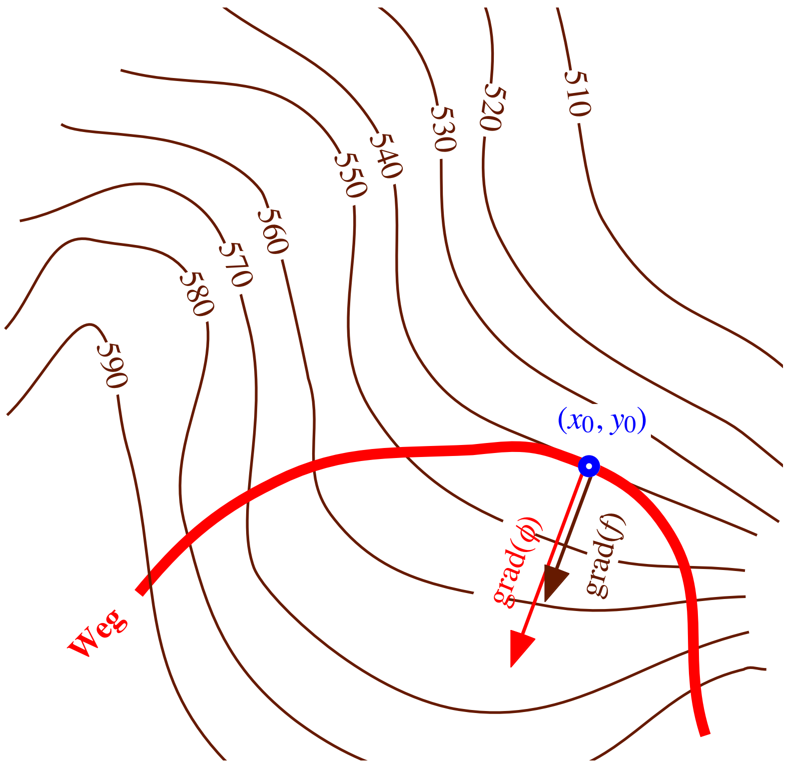



**Wanderweg**

Wir haben eine Funktion $f(x,y)$, die wir als „Gelände" interpretieren, sowie eine Nebenbedingung $\phi(x,y)=0$ , die wir als implizite Wegdarstellung interpretieren.

## 3.2 Lösungsidee

Gesucht sind die Extrema von $f(x,y)$ unter der Nebenbedingung $\phi(x,y)=0$ , in unserer Interpretation also der höchste oder tiefste Punkt auf dem Weg.




**Weg im tiefsten Punkt tangential an Niveaulinie**

Da der Weg im Extrempunkt $(x_0,y_0)$ tangential an die Niveaulinie ist, haben wir dort parallele (oder antiparallele) Gradienten. Im Extrempunkt $(x_0,y_0)$ gilt also:

$$\operatorname{grad}(f)(x_0,y_0) = \lambda \cdot \operatorname{grad}(\phi)(x_0,y_0)$$

Dabei ist $\lambda$ eine von Null verschiedene Zahl.

Wir können nun unser Problem so formulieren:

> Zu einer Funktion $f(x,y)$ und der Nebenbedingung $\phi(x,y) = 0$ suchen wir $(x_0,y_0)$ so, dass:
>
> $$\operatorname{grad}(f)(x_0,y_0) = \lambda \cdot \operatorname{grad}(\phi)(x_0,y_0)$$

Zur Lösung verwenden wir folgenden Trick: Wir definieren eine Hilfsfunktion $F(x,y,\lambda)$ wie folgt:

$$F(x,y,\lambda) = f(x,y) - \lambda\phi(x,y)$$

Und nun suchen wir den Ort, wo der Gradient dieser Hilfsfunktion verschwindet:

$$\operatorname{grad}(F) = \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_\lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_x - \lambda\phi_x \\ f_y - \lambda\phi_y \\ -\phi \end{bmatrix} \overset{\text{soll}}{\underset{\downarrow}{=}} \vec{0}$$

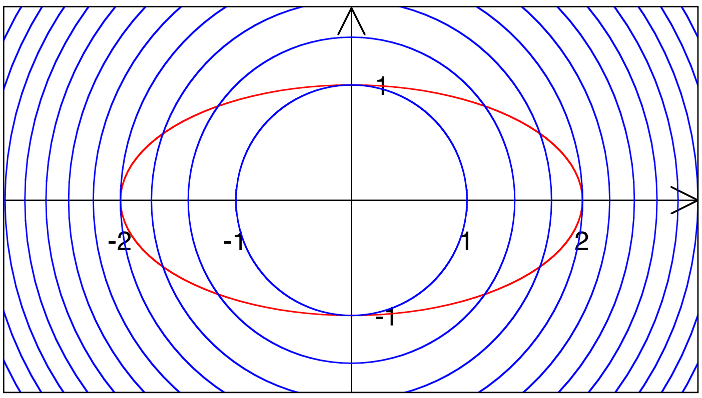
Im Einzelnen heißt das:

$$\left.\begin{array}{l} f_x - \lambda\phi_x = 0 \\ f_y - \lambda\phi_y = 0 \end{array}\right\} \quad \Leftrightarrow \quad \operatorname{grad}(f) = \lambda \cdot \operatorname{grad}(\phi)$$

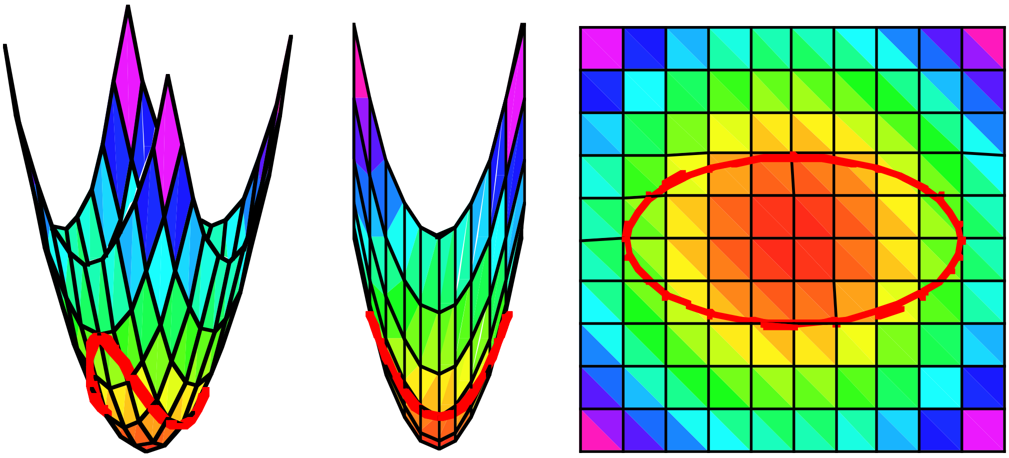
$$-\phi = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \text{Nebenbedingung erfüllt}$$

### 3.2.1 Beispiel

Es sei $f(x,y) = x^2 + y^2$ und die Nebenbedingung $\phi(x,y) = \frac{x^2}{4} + y^2 - 1 = 0$. Diese Nebenbedingung bedeutet geometrisch eine Ellipse mit den Halbachsen 2 und 1.




**Niveaulinien und Nebenbedingung**



**Verschiedene Ansichten**

Aus der Figur lesen wir die Extrema $(\pm 2, 0)$ (Maxima) und $(0, \pm 1)$ (Minima) ab.

Wir wollen diese aber auch mit unserem Trick berechnen. Es ist:

$$F(x,y,\lambda) = f(x,y) - \lambda\phi(x,y) = x^2 + y^2 - \lambda\left(\tfrac{x^2}{4} + y^2 - 1\right)$$

Daraus ergibt sich:

Wir erhalten somit die Lösungen:

$$(x = \pm 2,\ y = 0,\ \lambda = 4)$$

$$(x = 0,\ y = \pm 1,\ \lambda = 1)$$

## 4 Integration in mehreren Variablen

Es geht hier um Integrale von der Form:

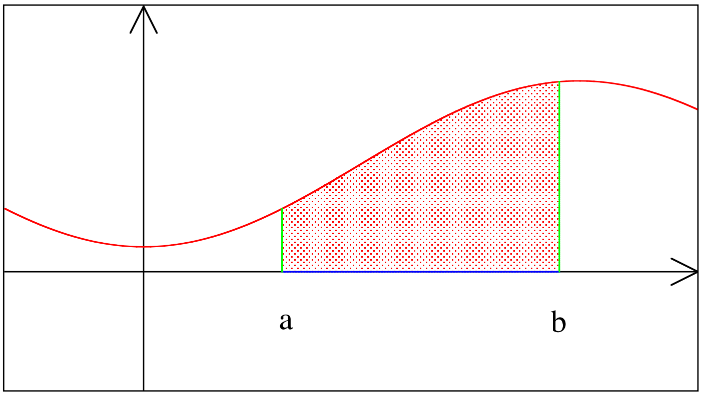
$$\iint_A f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \quad \text{oder} \quad \iiint_A f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

Dabei ist $A$ ein zweidimensionaler beziehungsweise dreidimensionaler Integrationsbereich.

### 4.1 Erinnerung

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \text{„Fläche unter der Kurve“}$$

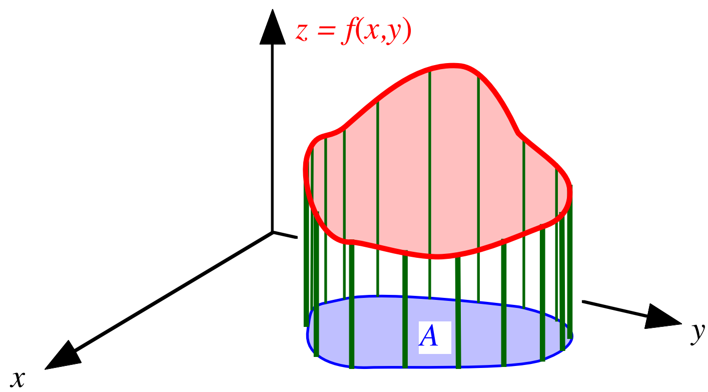
Der Integrationsbereich $[a,b]$ ist eindimensional.




**Erinnerung**

### 4.2 Analogie

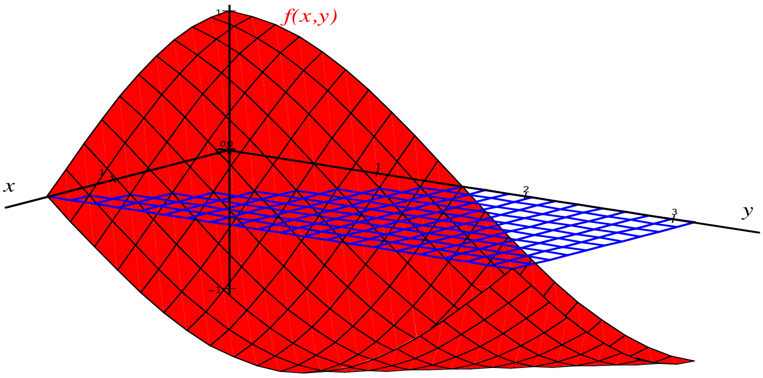
Zu einer Funktion $f(x,y)$ berechnen wir $\iint_A f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ als „Volumen“ mit der Grundfläche $A$.




**Integral zweier Variablen**

### 4.3 Beispiele

**1. Beispiel**: $f(x,y) = \cos(x+y)$, $A = \left[0,\frac{\pi}{2}\right] \times [0,\pi] = \left\{(x,y) \,\middle|\, x \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right], y \in [0,\pi]\right\}$




$f(x,y) = \cos(x+y)$, $A = \left[0,\frac{\pi}{2}\right] \times [0,\pi] = \left\{(x,y) \,\middle|\, x \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right], y \in [0,\pi]\right\}$

Der größere Teil der Fläche ist unterhalb der *x,y*-Ebene, es ist daher ein negatives Integral zu erwarten. Das Integral berechnen wir in zwei Schritten, indem wir zuerst über *x* integrieren und dann über *y*.

$$I = \iint_A f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^{\pi} \left[ \underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x+y)\,\mathrm{d}x}_{I_1} \right] \mathrm{d}y$$

Die Reihenfolge der Integration spielt keine Rolle; natürlich müssen die Integrationsgrenzen entsprechend berücksichtigt werden.

Im Folgenden die Integralberechnung mit *Maple* in beiden Reihenfolgen:

```
> Int( Int(cos(x+y), x=0..Pi/2 ), y=0..Pi) = int( int(cos(x+y), x=0..Pi/2 ), y=0..Pi);
```

$$\int_0^{\pi}\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \cos(x+y)\, dx\, dy = -2$$

---

```
> Int( Int(cos(x+y), y=0..Pi ), x=0..Pi/2) = int( int(cos(x+y), y=0..Pi ), x=0..Pi/2);
```

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\int_0^{\pi} \cos(x+y)\, dy\, dx = -2$$

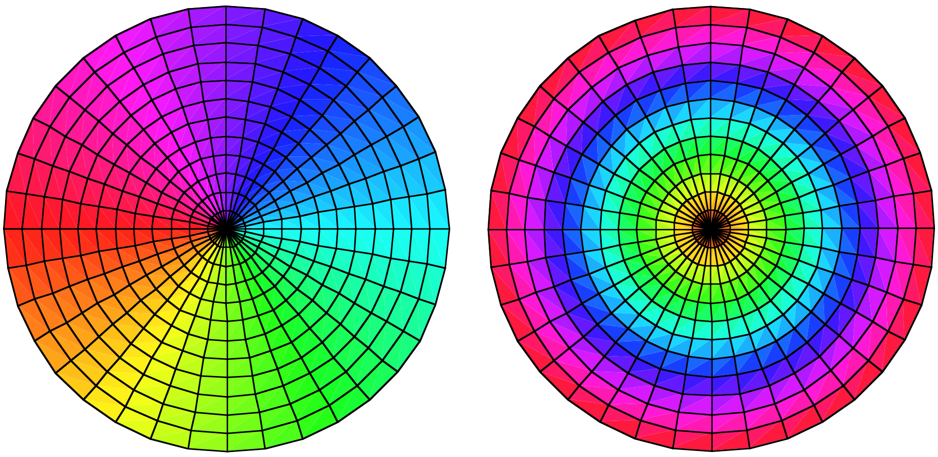
**2. Beispiel**: Die Kreisfläche

Die gesamte Kreisscheibe ist in Polarkoordinaten durch

$$A = \left\{ (\rho,\phi) \middle| \rho \in (0,r), \phi \in [0,2\pi] \right\}$$

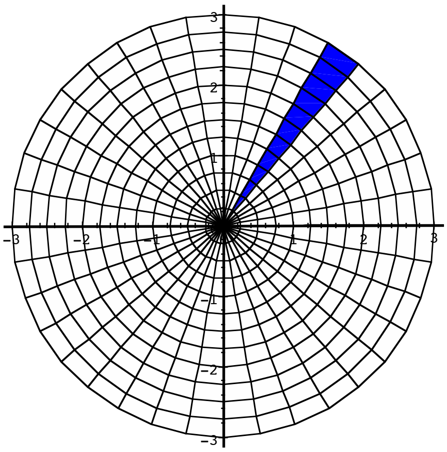
gegeben.

Wir berechnen nun die Kreisfläche auf drei verschiedene Arten.



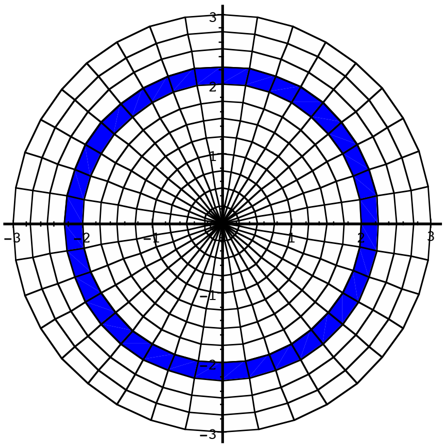
**Sektoren und Ringe**

**Berechnung über infinitesimal kleine Sektoren:**



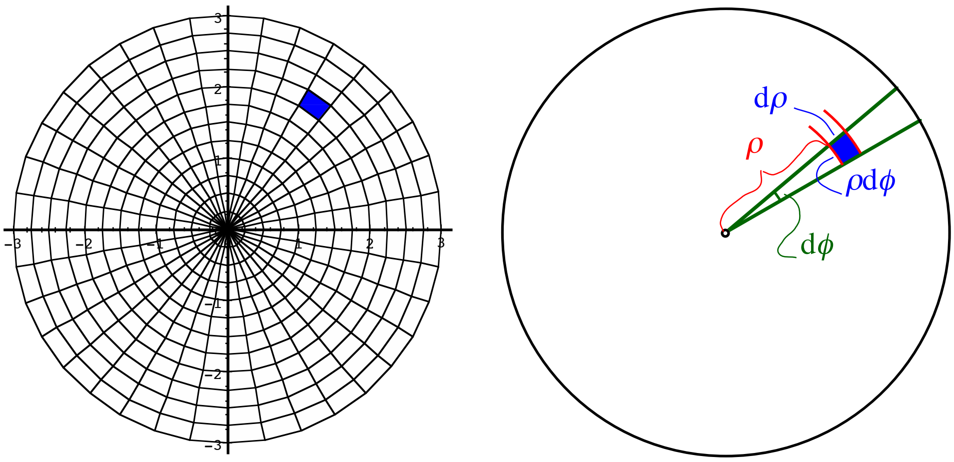

Sektor als „Dreieck“

**Berechnung über infinitesimal schmale Ringe:**




Ring als „Straße“

**Berechnung über infinitesimal kleine Rechtecke:**



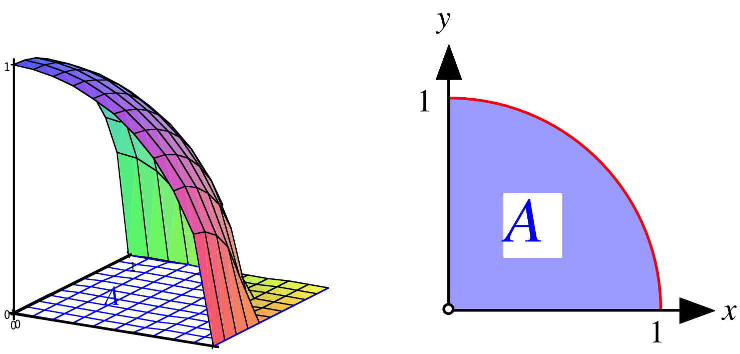

**Kleines Rechteck**

Ein infinitesimal kleiner Ausschnitt aus der Kreisscheibe ist annähernd ein Rechteck mit der Fläche $\rho\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}\rho$. Für die gesamte Kreisfläche finden wir

$$\text{Kreisfläche} = \iint\limits_A \rho\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}\rho = \int\limits_0^r \left[\int\limits_0^{2\pi} \rho\,\mathrm{d}\phi\right]\mathrm{d}\rho = \int\limits_0^r \left[\rho\,2\pi\right]\mathrm{d}\rho = \frac{r^2}{2}2\pi = \pi r^2$$

**3. Beispiel**: Kugelvolumen

Mit $f(x,y) = \sqrt{1-x^2-y^2}$ wird die obere Halbkugel mit Radius $r=1$ beschrieben. Für unsere Volumenberechnung beschränken wir uns auf den Viertel mit $x>0$ und $y>0$; wir erhalten somit einen Achtel des Kugelvolumens.




**Ein Achtel der Einheitskugel, Integrationsbereich**

Der Integrationsbereich $A$ ist in diesem fall *kein* Rechteck, sondern ein *Viertelskreis*. Zu gegebenem $y$ ist $x \in \left[0, \sqrt{1-y^2}\,\right]$.

Für das Volumen der Achtelskugel erhalten wir:

$$I = \iint\limits_A \sqrt{1-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^1 \left[\int_0^{\sqrt{1-y^2}} \sqrt{1-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y$$

Beim inneren Integral haben wir nun eine variable obere Grenze. Zur Berechnung dieses inneren Integrals verwenden wir folgende Formel aus der *Formelsammlung*:

$$\int \sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x = \tfrac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \tfrac{a^2}{2}\arcsin\left(\tfrac{x}{a}\right) + C$$

In unserem Beispiel ist $a^2 = 1-y^2$. Damit ergibt sich:

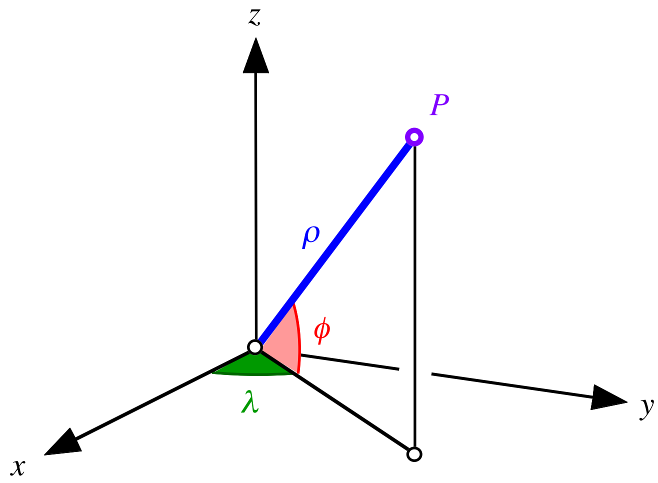
Nun können wir das Integral $I$ berechnen:

Es ist also $I = \frac{\pi}{6}$ und damit das Volumen der Einheitskugel $8I = 8\frac{\pi}{6} = \frac{4}{3}\pi$.

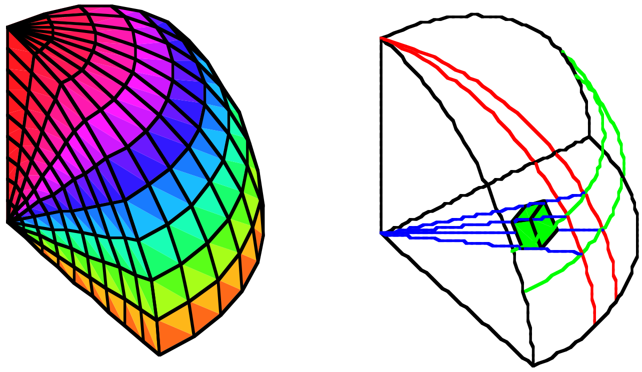
**4. Beispiel**: Nochmals Kugelvolumen

Wir können aber die Kugel analog dem Vorgehen bei der Kreisscheibe unterteilen, diesmal in infinitesimal kleine Quaderchen. Zur koordinatenmäßigen Erfassung verwenden wir Kugelkoordinaten: $\rho$ ist der Abstand vom Ursprung, $\phi$ die geographische Breite und $\lambda$ die geographische Länge. Für die Vollkugel mit Radius $r$ gilt dann:

$$A=\left\{(\rho,\phi,\lambda)\,\middle|\,\rho\in[0,r],\phi\in\left[-\tfrac{\pi}{2},\tfrac{\pi}{2}\right],\lambda\in[0,2\pi]\right\}$$




**Kugelkoordinaten**



**Unterteilung der Kugel**

Ein solches Quaderchen hat dann das Volumen:

$$\rho\,\mathrm{d}\phi\;\rho\,\mathrm{d}\lambda\cos(\phi)\;\mathrm{d}\rho=\rho^2\cos(\phi)\;\mathrm{d}\rho\;\mathrm{d}\phi\;\mathrm{d}\lambda\,.$$

Für das Volumen der Vollkugel brauchen wir das Dreifachintegral:

$$\text{Kugelvolumen}=\iiint_A \rho^2\cos(\phi)\;\mathrm{d}\rho\;\mathrm{d}\phi\;\mathrm{d}\lambda=\int_0^{2\pi}\left[\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left[\int_0^r\rho^2\cos(\phi)\mathrm{d}\rho\right]\mathrm{d}\phi\right]\mathrm{d}\lambda$$

# 5 Zusammenstellung

## 5.1 Extrema bei Funktionen von zwei Variablen

Extremum $\Rightarrow$ $\mathrm{grad}(f) = \vec{0}$, d.h. $f_x = 0$ und $f_y = 0$; die Umkehrung gilt nicht

Hilfsgröße: $\Delta = f_{xx} f_{yy} - f_{xy}^2 = \det\left(\begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{bmatrix}\right)$

$\mathrm{grad}(f) = \vec{0}$ und $\Delta > 0$, $f_{xx} > 0$ $\Rightarrow$ isoliertes Minimum

$\mathrm{grad}(f) = \vec{0}$ und $\Delta > 0$, $f_{xx} < 0$ $\Rightarrow$ isoliertes Maximum

$\mathrm{grad}(f) = \vec{0}$ und $\Delta < 0$ $\Rightarrow$ Sattelpunkt

$\mathrm{grad}(f) = \vec{0}$ und $\Delta = 0$ keine Aussage möglich

## 5.2 Implizite Darstellung einer Kurve als Niveaulinie

$f(x,y) = c$ Beispiel Kreis: $f(x,y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$

Tangente an Niveaulinie $f(x,y) = c$ im Berührungspunkt $(x_0, y_0)$:

$$(x - x_0) f_x(x_0, y_0) + (y - y_0) f_y(x_0, y_0) = 0$$

## 5.3 Extremum einer Funktion unter einer Nebenbedingung

Hilfsfunktion: $F(x,y,\lambda) = f(x,y) - \lambda\phi(x,y)$

$$\mathrm{grad}(F) = \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_\lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_x - \lambda\phi_x \\ f_y - \lambda\phi_y \\ -\phi \end{bmatrix} \overset{\substack{\text{soll} \\ \downarrow}}{=} \vec{0}$$

## 5.4 Mehrfachintegrale

$$\iint_A f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \quad \text{oder} \quad \iiint_A f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

Wie bei Klammern von innen nach außen arbeiten.