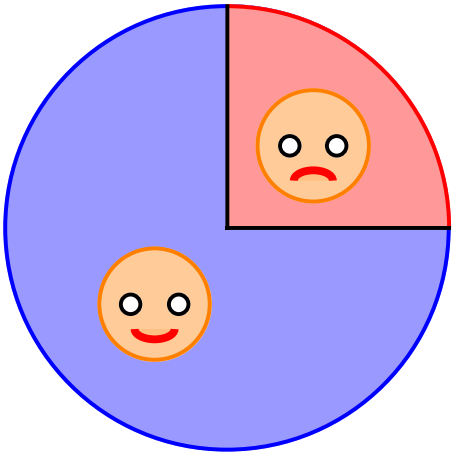
Hans Walser

Mathematik 2 für Naturwissenschaften



Modul 205

Binomialverteilung

UNI
BASEL

Inhalt

1 Die Qual der Wahl: Binomialkoeffizienten 1
1.1 Ordnung muss sein 1
1.2 Auswählen und Anordnen 2
1.3 Muss Ordnung sein? 3
1.3.1 Darstellung in Tabelle 3
1.3.2 Die Binomische Formel 4
1.3.3 Pascalsches Zahlendreieck 4
2 Bernoulli-Ketten 4
2.1 Bernoulli-Experiment 4
2.2 Definition Bernoulli-Kette 5
2.2.1 Beispiel: Augenzahl fünf 5
2.2.2 Analyse des Beispiels 6
2.2.3 Übergang zur Binomialverteilung 7
2.3 Würfelwurf. Erfolg = Augenzahl 5 8
3 Binomialverteilung 9
3.1 Grundformel 9
3.2 Beispiel 10
3.3 Summative Binomialverteilung 10
3.4 Beispiele 11
3.4.1 Münzenwurf 11
3.4.2 Würfel 11
3.4.3 Glücksrad mit Problem 12
3.5 Erwartungswert und Varianz 13
3.5.1 Beispiele: Münzenwurf 13
4 Zusammenfassung 14
4.1 Kombinatorik 14
4.2 Bernoulli-Ketten 14
4.2.1 Binomialverteilung 14
4.2.2 Summative Binomialverteilung 14
4.2.3 Erwartungswert und Varianz 14

Modul 205 für die Lehrveranstaltung *Mathematik 2 für Naturwissenschaften*

Sommer 2006 Probeausgabe. MathType
Sommer 2007 Kleine Erweiterung
Frühjahr 2008 Geändertes Layout
Frühjahr 2011 Fehlerkorrekturen
Frühjahr 2014 Überarbeitung

last modified: 10. November 2013

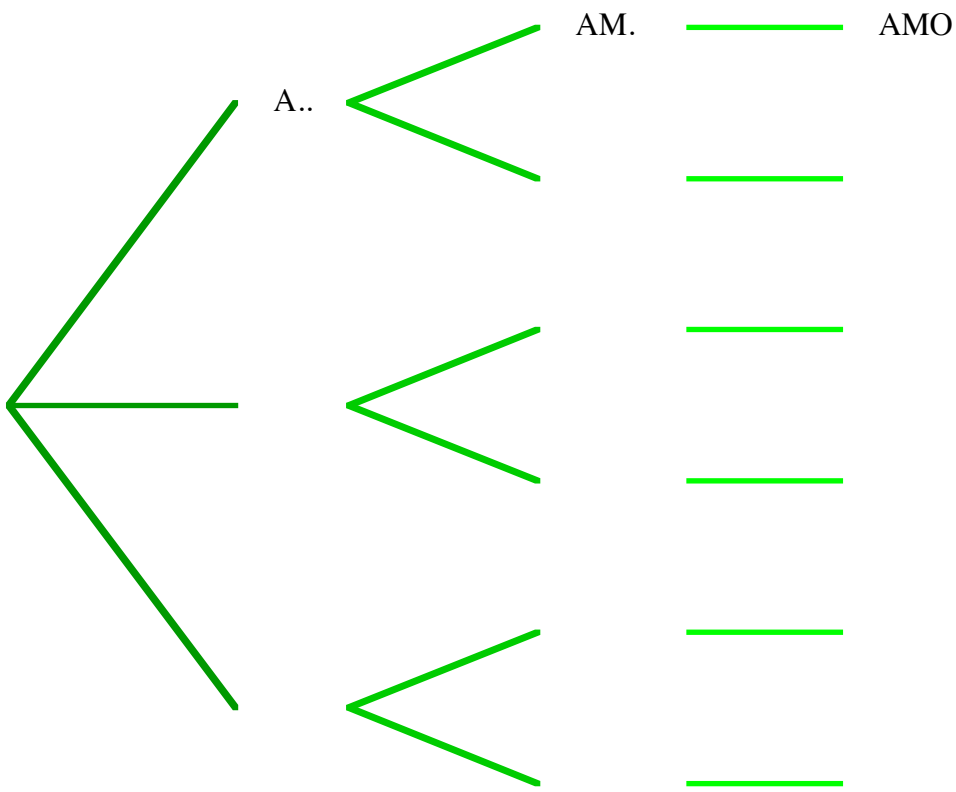
Hans Walser
Mathematisches Institut, Rheinsprung 21, 4051 Basel
www.walser-h-m.ch/hans

1 Die Qual der Wahl: Binomialkoeffizienten

Etwas Kombinatorik mit Fragen des Auswählens und Anordnens

1.1 Ordnung muss sein

Auf wie viele Arten können die drei Buchstaben A, M, O in eine standardisierte Reihenfolge (zum Beispiel von links nach rechts) gebracht werden?



Der Möglichkeiten sind viele

Es gibt $3 \cdot 2 \cdot 1 = 3! = 6$ Möglichkeiten.

Allgemein:

n Elemente können auf $n!$ Arten in eine Reihenfolge gebracht werden.

Jede Reihenfolge heißt eine Permutation der n Elemente. Es gibt, einschließlich der Startreihenfolge, also $n!$ Permutationen von n Elementen.

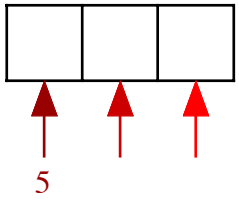
n	$n!$
0	1
1	1
2	2
3	6
4	24
5	120
6	720
7	5040
8	40320
9	362880

n	$n!$
10	3628800
11	39916800
12	479001600
13	6227020800
14	87178291200
15	1307674368000
16	20922789888000
17	355687428096000
18	6402373705728000
19	121645100408832000

1.2 Auswählen und Anordnen

Wir haben die fünf Buchstaben {A, M, O, R, E}. Wie viele Wörter mit genau drei verschiedenen Buchstaben können damit geschrieben werden?

Wir haben also ein Auswählen *und* Anordnen.

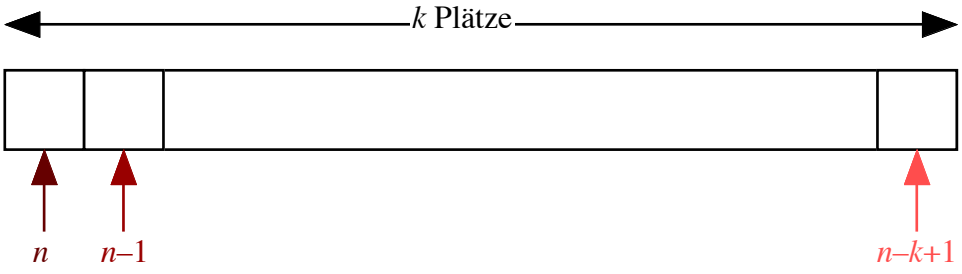


Immer weniger Möglichkeiten

Es gibt $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ Möglichkeiten. Das kann komplizierter einfacher geschrieben werden:

$$5 \cdot 4 \cdot 3 = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot 1} = \frac{5!}{2!} = \frac{5!}{(5-3)!} = \frac{120}{2} = 60$$

Allgemein:



Immer weniger Möglichkeiten

Es gibt

$$n(n-1)\cdots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Möglichkeiten, aus n Elementen deren k auszuwählen *und* anzuordnen.

1.3 Muss Ordnung sein?

Wenn wir aus der Menge der fünf Buchstaben {A, M, O, R, E} deren drei auswählen möchten, die Reihenfolge aber Wurst ist, gibt es weniger Möglichkeiten. Wir müssen durch die Anzahl Anordnungsmöglichkeiten, also 3! = 6, dividieren. Damit haben wir noch

$$\frac{5\cdot4\cdot3}{1\cdot2\cdot3}=\frac{5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}{1\cdot2\cdot3\cdot2\cdot1}=\frac{5!}{3!\,2!}=\frac{5!}{3!(5-3)!}=\frac{120}{6\cdot2}=10$$

Möglichkeiten.

Allgemein:

Es gibt

$$\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{1\cdot2\cdot\cdots\cdot k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Möglichkeiten, aus n Elementen deren k auszuwählen.

Schreibweise: $\binom{n}{k}=\frac{n!}{(n-k)!\,k!}=\frac{n!}{k!(n-k)!}$ Sprechweise: „n tief k“

Die Ausdrücke $\binom{n}{k}=\frac{n!}{(n-k)!\,k!}=\frac{n!}{k!(n-k)!}$ werden auch als *Binomialkoeffizienten* bezeichnet, sie erscheinen im PASCALschen Zahlendreieck. Ausführliche Tabelle im Anhang.

1.3.1 Darstellung in Tabelle

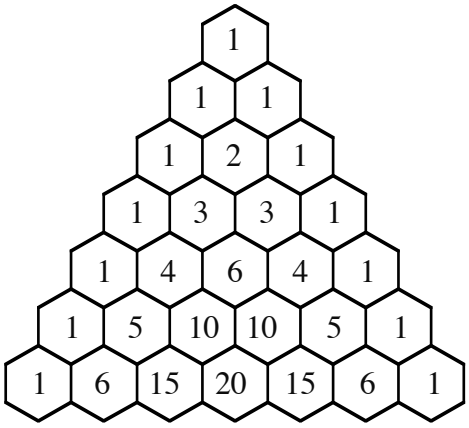
$n \setminus k$	0	1	2	3	4	5	6
0	1						
1	1	1					
2	1	2	1				
3	1	3	3	1			
4	1	4	6	4	1		
5	1	5	10	10	5	1	
6	1	6	15	20	15	6	1

1.3.2 Die Binomische Formel

$$(a+b)^0 = 1$$
$$(a+b)^1 = 1a + 1b$$
$$(a+b)^2 = 1a^2 + 2ab + 1b^2$$
$$(a+b)^3 = 1a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + 1b^3$$
$$(a+b)^4 = 1a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + 1b^4$$
$$(a+b)^5 = 1a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + 1b^5$$
$$(a+b)^6 = 1a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + 1b^6$$
$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

1.3.3 Pascalsches Zahlendreieck

Blaise Pascal, 1623-1662



Pascalsches Zahlendreieck

2 Bernoulli-Ketten

2.1 Bernoulli-Experiment

Definition:

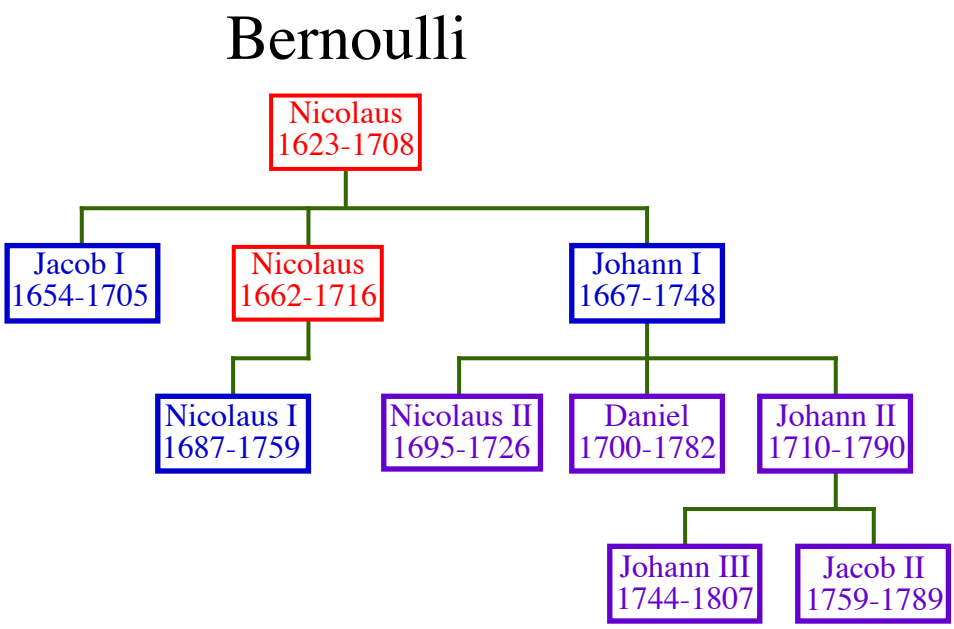
Ein Experiment mit genau zwei möglichen Ausgängen heißt *Bernoulli-Experiment*.

Die beiden Ausgänge können oft mit „Erfolg“ beziehungsweise „Misserfolg“ interpretiert werden.

Beispiel: Bei einem Würfelwurf interessiert nur, ob die Augenzahl fünf geworfen wird oder nicht. Dann ist $P(\text{Erfolg}) = \frac{1}{6}$.

Sehr oft werden der Erfolg mit 1 und der Misserfolg mit 0 codiert.

Jacob Bernoulli, 1655 – 1705



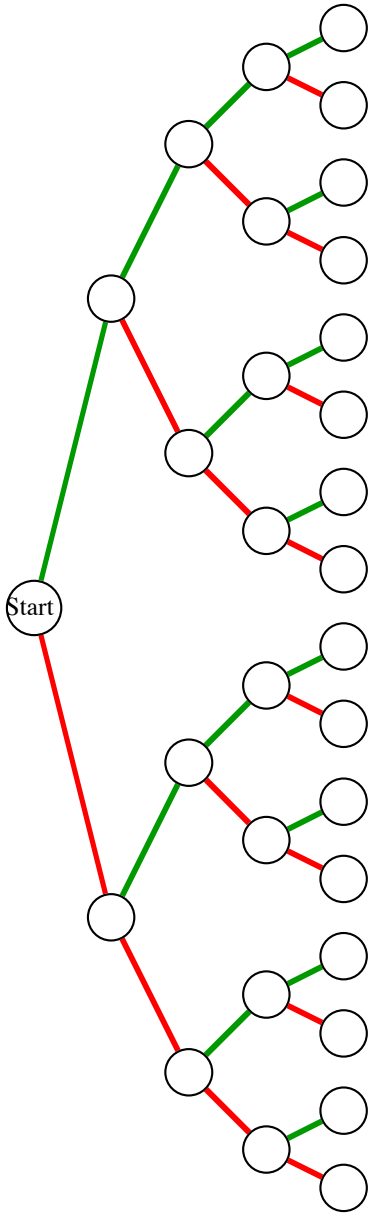
Familie Bernoulli, ohne Frauen

2.2 Definition Bernoulli-Kette

Eine *Bernoulli-Kette* ist eine Folge von gleichen Bernoulli-Experimenten.

2.2.1 Beispiel: Augenzahl fünf

Wir werfen einen Würfel vier Mal hintereinander. „Erfolg“ ist jeweils die Augenzahl fünf. Bei einem einzelnen Wurf haben wir also $p = P(\text{Erfolg}) = \frac{1}{6}$. Wir können die Situation in einer Baumstruktur darstellen.



Baumstruktur einer BERNOULLI-Kette

2.2.2 Analyse des Beispiels

$$\Omega = \left\{ (wxyz) \,\middle|\, w,x,y,z \in \{0,1\} \right\}$$

Der Ergebnisraum besteht aus Quadrupeln, die sich aus Nullen (Misserfolge, also Augenzahl ungleich fünf) und Einsen (Erfolge, also Augenzahl fünf) zusammensetzen. Es gibt daher $16 = 2^4$ Ergebnisse. Werden die 0,1-Codierungen als Dualzahlen gedeutet, erhalten wir die Zahlen von (im Dezimalsystem) 0 bis 15.

2.2.3 Übergang zur Binomialverteilung

Wenn wir nur an der *Anzahl der Erfolge*, nicht aber an ihrer Position im Quadrupel, interessiert sind, können wir wie folgt zusammenfassen:

k = Anzahl Erfolge	Anzahl Fälle	$P_4(k)$
0		
1		
2		
3		
4		

Wir stellen fest, dass in der mittleren Spalte die Binomialkoeffizienten $\binom{4}{k}$ erscheinen.

Warum ist das so?

Es gilt die Formel:

$$P_4(k) = \binom{4}{k}\left(\frac{1}{6}\right)^k\left(\frac{5}{6}\right)^{4-k}$$

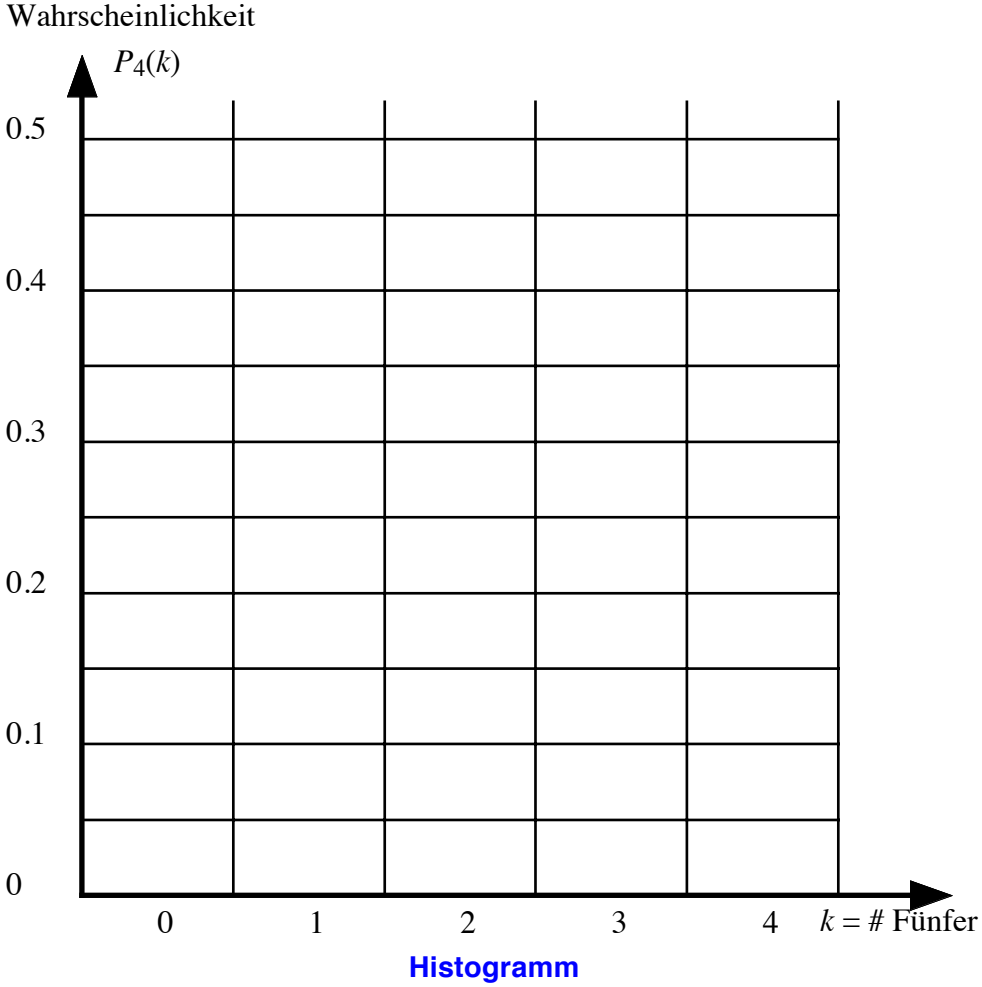
Verwendung der Tabelle:

	p	0.001	0.01	0.05	0.1	1/6	0.2	0.25	0.3	0.4	0.5
n	k										
4	0	0.996	0.961	0.815	0.656	0.482	0.410	0.316	0.240	0.130	0.063
4	1	0.004	0.039	0.171	0.292	0.386	0.410	0.422	0.412	0.346	0.250
4	2	0.000	0.001	0.014	0.049	0.116	0.154	0.211	0.265	0.346	0.375
4	3	0.000	0.000	0.000	0.004	0.015	0.026	0.047	0.076	0.154	0.250
4	4	0.000	0.000	0.000	0.000	0.001	0.002	0.004	0.008	0.026	0.063

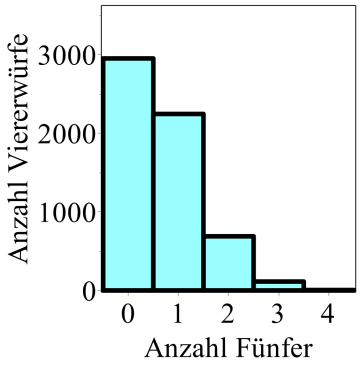
Die Wahrscheinlichkeiten $P_4(k)$ von genau k Erfolgen auf 4 Versuche lassen sich graphisch in einem Histogramm darstellen:

2.3 Würfelwurf. Erfolg = Augenzahl 5

$n = 4$, $p = \frac{1}{6}$



Histogramm



Simulation mit 6000 Vierfachwürfen

Anteile:

Null Fünfer: 0.49167

Ein Fünfer: 0.37400

Zwei Fünfer: 0.11467

Drei Fünfer: 0.01883

Vier Fünfer: 0.00083

3 Binomialverteilung

3.1 Grundformel

Situation:

Wir haben n gleiche Bernoulli-Experimente, also eine Bernoulli-Kette der Länge n.

Es sei p die Erfolgswahrscheinlichkeit im Einzelversuch.

Ferner sei $q = 1 - p$ die Misserfolgswahrscheinlichkeit im Einzelversuch.

$P_n(k)$ sei die Wahrscheinlichkeit, auf n Versuche genau k Erfolge zu haben.

Dann gilt:

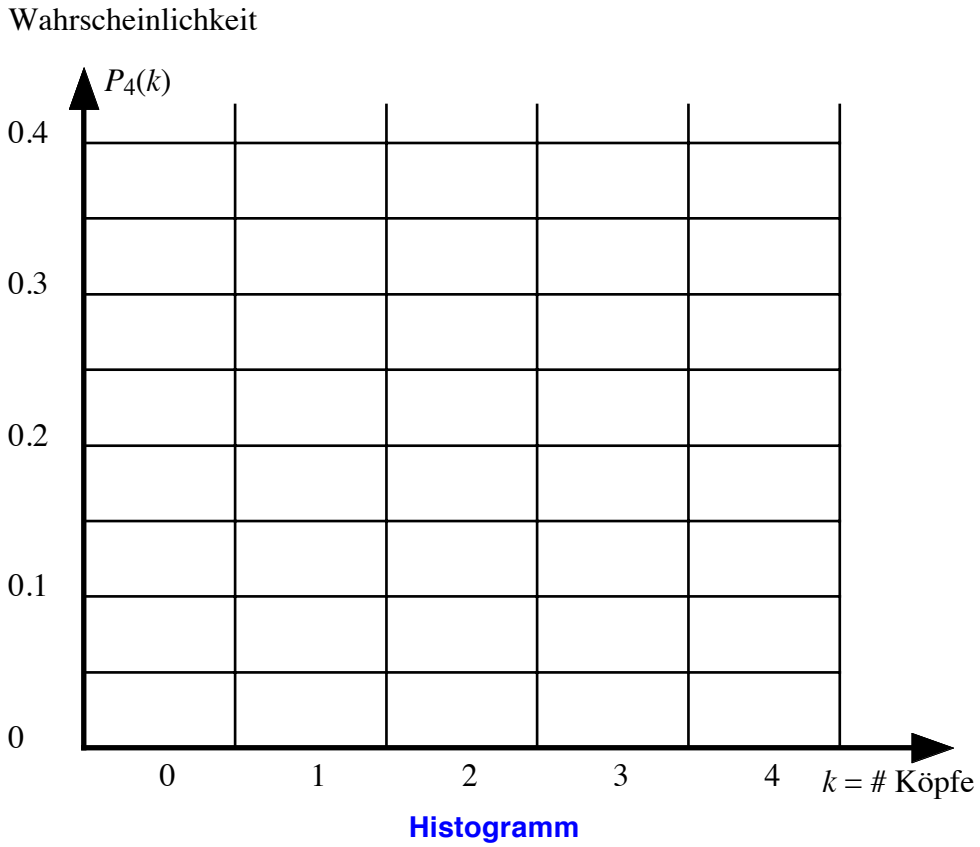
$$P_n(k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$

3.2 Beispiel

Münzenwurf. Erfolg = „Kopf“. $n = 4$. $p = q = \frac{1}{2}$

	p	0.001	0.01	0.05	0.1	1/6	0.2	0.25	0.3	0.4	0.5
n	k										
4	0	0.996	0.961	0.815	0.656	0.482	0.410	0.316	0.240	0.130	0.063
4	1	0.004	0.039	0.171	0.292	0.386	0.410	0.422	0.412	0.346	0.250
4	2	0.000	0.001	0.014	0.049	0.116	0.154	0.211	0.265	0.346	0.375
4	3	0.000	0.000	0.000	0.004	0.015	0.026	0.047	0.076	0.154	0.250
4	4	0.000	0.000	0.000	0.000	0.001	0.002	0.004	0.008	0.026	0.063

Wir erhalten folgendes Histogramm:



Histogramm

Wegen $p = q = \frac{1}{2}$ ist das Histogramm symmetrisch.

3.3 Summative Binomialverteilung

Die Fragestellung ist nun: Mit welcher Wahrscheinlichkeit haben wir höchstens x Erfolge auf n Versuche.

$$P_n(k \le x) = P_n(0) + P_n(1) + \cdots + P_n(x) = \sum_{k=0}^{x} P_n(k)$$

3.4 Beispiele

3.4.1 Münzenwurf

Eine Münze wird 8-mal geworfen. $n = 8$, $p = q = \frac{1}{2}$

$P(\text{5 Mal Kopf}) = P_8(5) =$

$P(\text{höchstens 5 Mal Kopf}) = P_8(k \le 5) =$

$P(\text{mindestens 5 Mal Kopf}) = P_8(k \ge 5) =$

$P_8(3 \le k \le 5) =$

3.4.2 Würfel

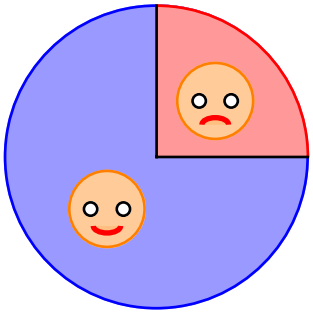
Ein Würfel wird 15-mal geworfen. Erfolg ist das Werfen der Augenzahl 5. $n = 15$, $p = \frac{1}{6}$

$P(\text{4 Mal Augenzahl fünf}) = P_{15}(4) =$

$P(\text{mindestens 3 Mal Augenzahl fünf}) = P_{15}(3 \le k) =$

$P_{15}(2 \le k \le 5) =$

3.4.3 Glücksrad mit Problem



$p(\text{:-)}) = \frac{3}{4}$

Das Problem ist, dass $p = \frac{3}{4}$ in der Tabelle nicht vorkommt. Wie lösen wir dieses Problem?

3.5 Erwartungswert und Varianz

Mit welcher Anzahl von Erfolgen können wir beim *i*-ten Versuch in unserer Bernoulli-Kette rechnen? Wie groß ist die Varianz?

X_i = Anzahl Erfolge beim *i*-ten Versuch

x	0	1
$w_i(x)$	q	p

$$E(X_i) = 0 \cdot q + 1 \cdot p = p$$

Für die Varianz erhalten wir:

$(x-p)^2$	$(0-p)^2$	$(1-p)^2$
$w_i(x)$	q	p

$$Var(X_i) = q \cdot (0-p)^2 + p \cdot \underbrace{(1-p)}_{=q}^2 = p^2 q + pq^2 = pq\underbrace{(p+q)}_{=1} = pq$$

Nun sei X die Anzahl Erfolge bei n Versuchen:

$$E(X) = np$$

$$Var(X) = npq$$

$$\sigma(X) = \sqrt{npq}$$

3.5.1 Beispiele: Münzenwurf

Eine Münze wird *n*-mal geworfen. $p = q = \frac{1}{2}$

$n = 10$ $\mu =$ $\sigma =$

$n = 100$ $\mu =$ $\sigma =$

$n = 10000$ $\mu =$ $\sigma =$

Die Streuung wird relativ immer kleiner.

4 Zusammenfassung

4.1 Kombinatorik

n Elemente können auf $n!$ Arten in eine Reihenfolge gebracht werden.

Es gibt $n(n-1)\cdots(n-k+1)=\frac{n!}{(n-k)!}$ Möglichkeiten, aus n Elementen deren k auszuwählen *und* anzuordnen.

Es gibt $\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{1\cdot 2\cdot\cdots\cdot k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}$ Möglichkeiten, aus n Elementen deren k auszuwählen.

Schreibweise: $\binom{n}{k}=\frac{n!}{(n-k)!\,k!}=\frac{n!}{k!(n-k)!}$ Sprechweise: „n tief k“

Die Ausdrücke $\binom{n}{k}=\frac{n!}{(n-k)!\,k!}=\frac{n!}{k!(n-k)!}$ werden auch als *Binomialkoeffizienten* bezeichnet, sie erscheinen im PASCALschen Zahlendreieck.

4.2 Bernoulli-Ketten

Situation: n gleiche Bernoulli-Experimente, also eine Bernoulli-Kette der Länge n

p = Erfolgswahrscheinlichkeit im Einzelversuch.

$q=1-p$ = Misserfolgswahrscheinlichkeit im Einzelversuch

4.2.1 Binomialverteilung

$P_n(k)$ = Wahrscheinlichkeit, auf n Versuche genau k Erfolge zu haben

Dann gilt: $P_n(k)=\binom{n}{k}p^k q^{n-k}$

4.2.2 Summative Binomialverteilung

Wahrscheinlichkeit von höchstens x Erfolgen auf n Versuche:

$$P_n(k\le x)=P_n(0)+P_n(1)+\cdots+P_n(x)=\sum_{k=0}^{x}P_n(k)$$

4.2.3 Erwartungswert und Varianz

$$E(X)=np \qquad Var(X)=npq \qquad \sigma(X)=\sqrt{npq}$$