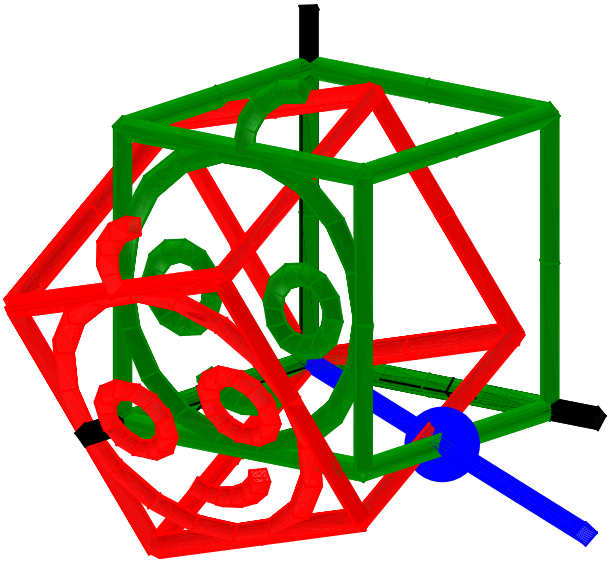
Hans Walser

Mathematik 2 für Naturwissenschaften



Modul 213

Lineare Abbildungen. Eigenwerte

UNI
BASEL

Modul 213 für die Lehrveranstaltung *Mathematik 2 für Naturwissenschaften*

Sommer 2003 Probeausgabe
Sommer 2004 Änderungen. Straffung
Sommer 2005 Kleine Ergänzungen. Fehlerkorrekturen
Sommer 2006 Fehlerkorrekturen. Formel-Editor revidiert. Straffung
Sommer 2007 Neue Moduleinteilung. Kürzungen. MathType. Zusammenfassung
Frühjahr 2008 Geändertes Layout
Frühjahr 2009 Erweiterung
Frühjahr 2010 Grafische Überarbeitung
Frühjahr 2011 Grafische Überarbeitung
Frühjahr 2013 Erweiterung
Frühjahr 2014 Kürzung

last modified: 26. Oktober 2013

Hans Walser
Mathematisches Institut, Rheinsprung 21, 4051 Basel
www.walser-h-m.ch/hans

Inhalt

1 Lineare Abbildungen 1
2 Beispiele in der Ebene 1
2.1 Erstes Beispiel 1
2.2 Zweites Beispiel: Zentrische Streckung 3
2.3 Drittes Beispiel 4
2.4 Viertes Beispiel: Drehung 4
2.5 Fünftes Beispiel: Scherung 5
3 Beispiele im Raum 5
3.1 Zentrische Streckung 5
3.2 Weiteres Beispiel 6
3.3 Drehungen im Raum 6
3.3.1 Drehung um die dritte Achse 6
3.3.2 Drehung um die erste Achse 7
3.3.3 Drehung um die zweite Achse 7
3.3.4 Drehung um eine Achse in „Bodenebene“ 8
3.3.5 Drehung um eine beliebige Achse 10
4 Fixrichtungen 14
4.1 Wann ist es gleich spät? 14
4.1.1 Fixpunkte 14
4.1.2 Fixrichtungen durch den Ursprung 14
4.2 Weitere Beispiele 15
4.2.1 Identische Abbildung 15
4.2.2 Strecken und Stauchen 15
4.2.3 Sichtbare Fixrichtungen 16
5 Eigenvektor und Eigenwert 17
5.1 Definition 17

5.2 Berechnung der Eigenwerte und Eigenvektoren 17
5.2.1 Beispiel 17
5.2.2 Allgemein 21
5.3 Beispiel im Raum 22
6 Symmetrische Matrix 23
6.1 Die Matrix 23
6.2 Die Abbildung 24
6.3 Eigenwerte und Eigenvektoren 24
6.4 Eine Diagonalmatrix 25
6.5 Noch eine Matrix 26
6.5.1 Eine Drehmatrix 26
6.5.2 Orthogonale Matrix 27
6.6 Zusammensetzung von Abbildungen 27
6.7 Vorgehen mit Matrizen 28
7 Zusammenfassung 28
7.1 Lineare Abbildungen 28
7.2 Drehungen 28
7.3 Eigenvektoren und Eigenwerte 29
7.4 Symmetrische Matrix 29
7.5 Orthogonale Matrix 29

1 Lineare Abbildungen

Wir untersuchen (einmal mehr) Abbildungen von der Form $v = Au$.

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \dots & a_{m,n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}$$

Bild (↑ v_m) — Urbild (↑ u_n)

2 Beispiele in der Ebene

2.1 Erstes Beispiel

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ \frac{1}{2} & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

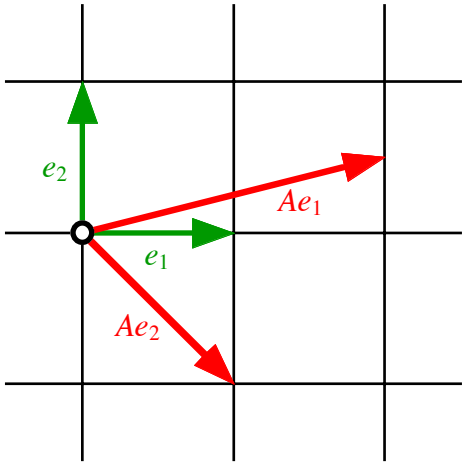
Abbildungsgleichungen:

$$\begin{aligned} v_1 &= 2u_1 + u_2 \\ v_2 &= \tfrac{1}{2}u_1 - u_2 \end{aligned}$$

Bilder der Einheitsvektoren:

$$e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 2 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$



Bilder der Einheitsvektoren

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ \frac{1}{2} & -1 \end{bmatrix}$$
$$\uparrow \quad \uparrow$$
$$Ae_1 \quad Ae_2$$

Die Spalten der Abbildungsmatrix sind die Bilder der Einheitsvektoren.

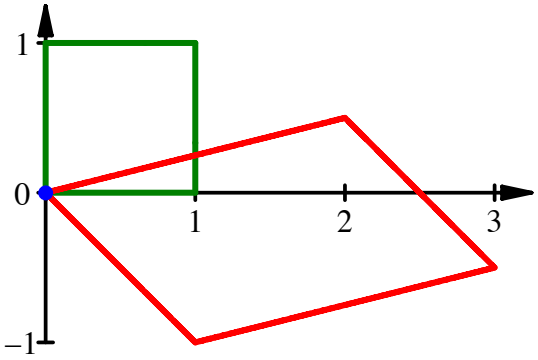


Bild des Einheitsquadrates

Die Determinante der Abbildungsmatrix ist der Flächenmaßstab.

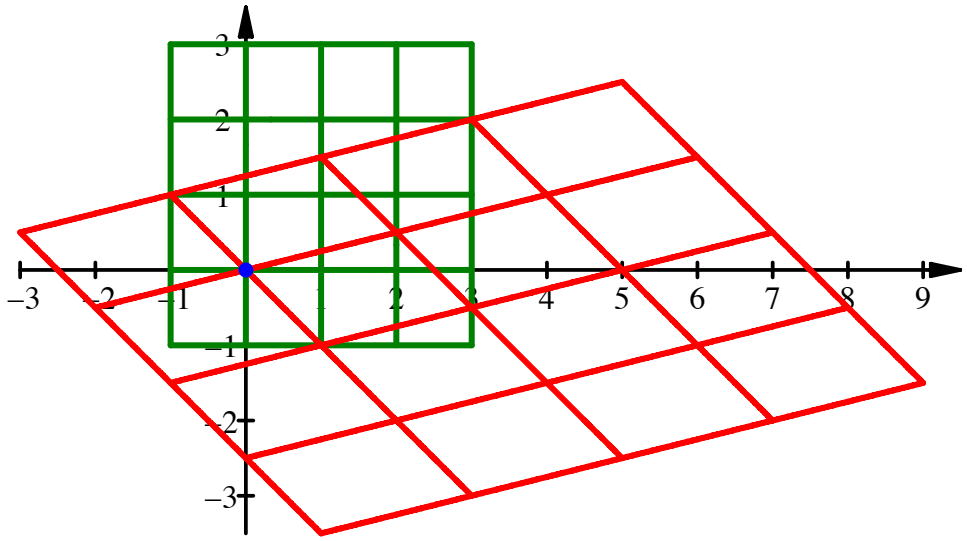
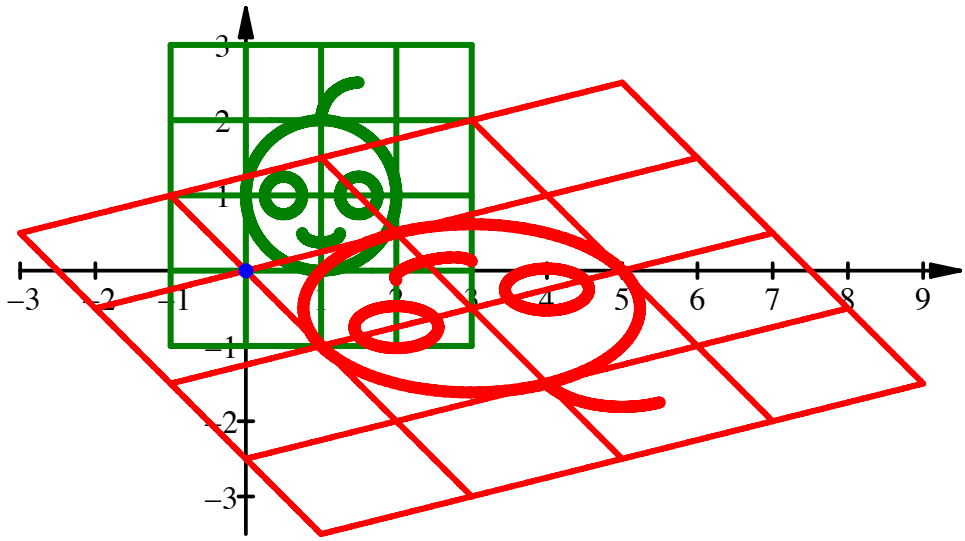


Bild eines Quadratrasters

Im Raster können wir grafisch verifizieren, dass zum Beispiel:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ \frac{1}{2} & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

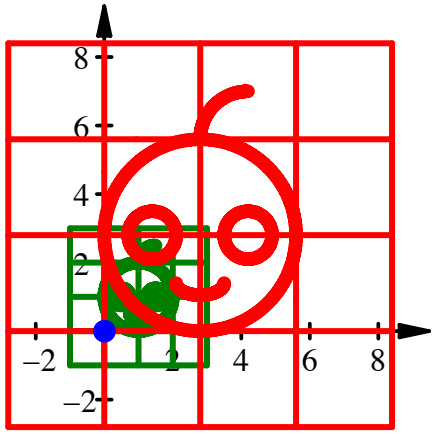
Statt einzelner Punkte können wir eine ganze Figur abbilden:



Urbild und Bild

2.2 Zweites Beispiel: Zentrische Streckung

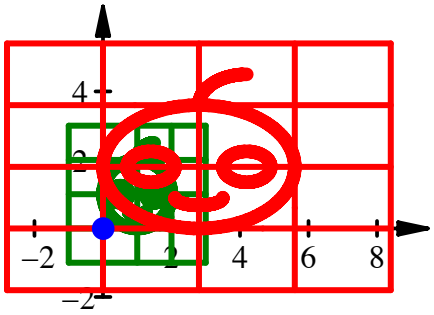
$$A = \begin{bmatrix} 2.8 & 0 \\ 0 & 2.8 \end{bmatrix}$$



Zentrische Streckung

2.3 Drittes Beispiel

$$A = \begin{bmatrix} 2.8 & 0 \\ 0 & 1.8 \end{bmatrix}$$

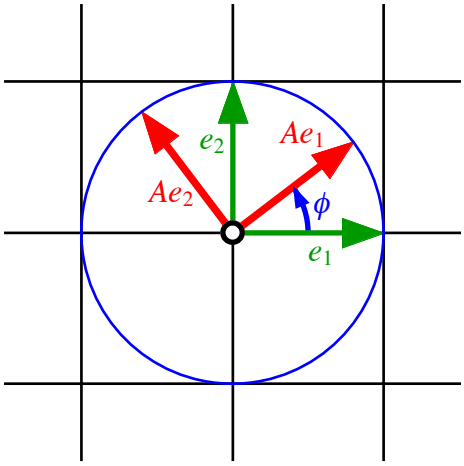


Unterschiedliche Streckungen

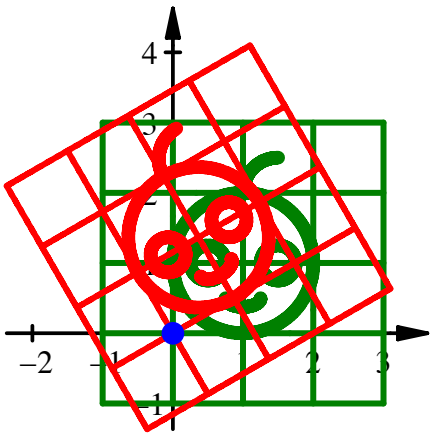
2.4 Viertes Beispiel: Drehung

$$A = \begin{bmatrix} \cos(\phi) & -\sin(\phi) \\ \sin(\phi) & \cos(\phi) \end{bmatrix}$$

Bild der Einheitsvektoren:



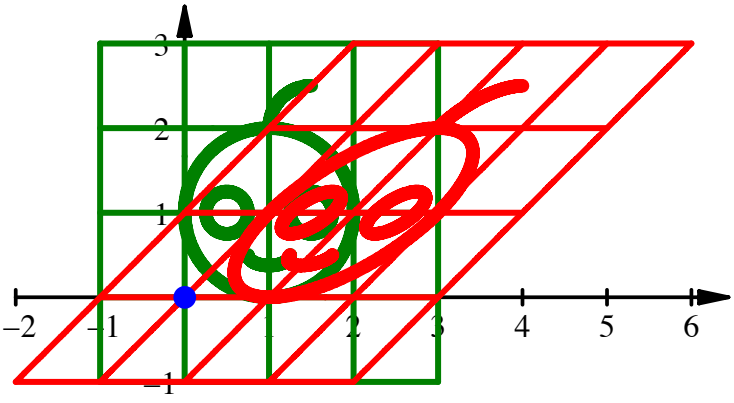
Drehung: Bild der Einheitsvektoren



Raster mit Gesicht

2.5 Fünftes Beispiel: Scherung

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

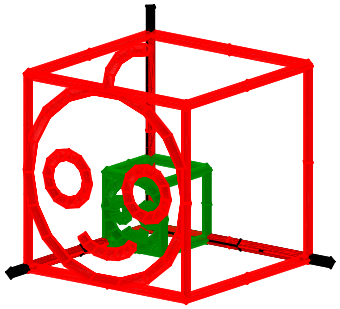


Scherung

3 Beispiele im Raum

3.1 Zentrische Streckung

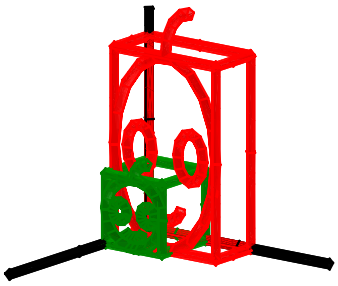
$$A = \begin{bmatrix} 2.8 & 0 & 0 \\ 0 & 2.8 & 0 \\ 0 & 0 & 2.8 \end{bmatrix}$$



Zentrische Streckung

3.2 Weiteres Beispiel

$$A = \begin{bmatrix} 0.8 & 0 & 0 \\ 0 & 1.8 & 0 \\ 0 & 0 & 2.8 \end{bmatrix}$$

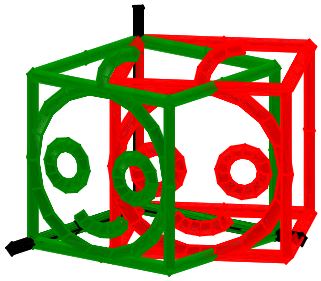


Urbild und Bild

3.3 Drehungen im Raum

3.3.1 Drehung um die dritte Achse

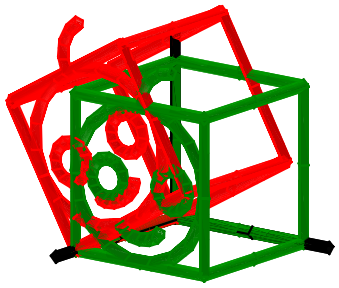
$$R_{e_3,\phi} = \begin{bmatrix} \cos(\phi) & -\sin(\phi) & 0 \\ \sin(\phi) & \cos(\phi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



Drehung um die dritte Achse um ϕ = +30°

3.3.2 Drehung um die erste Achse

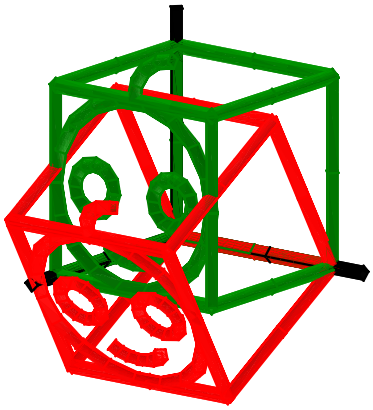
$$R_{e_1,\phi} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\phi) & -\sin(\phi) \\ 0 & \sin(\phi) & \cos(\phi) \end{bmatrix}$$



Drehung um die erste Achse um ϕ = +30°

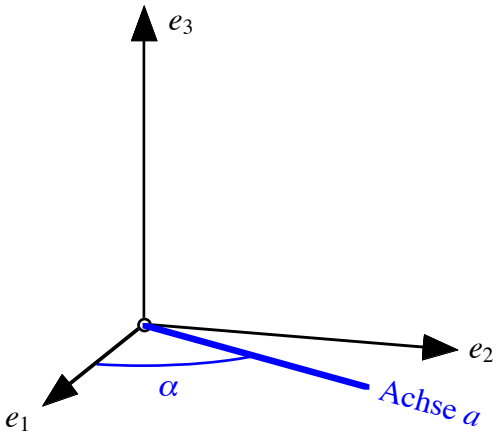
3.3.3 Drehung um die zweite Achse

$$R_{e_2,\phi} = \begin{bmatrix} \cos(\phi) & 0 & \sin(\phi) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\phi) & 0 & \cos(\phi) \end{bmatrix}$$

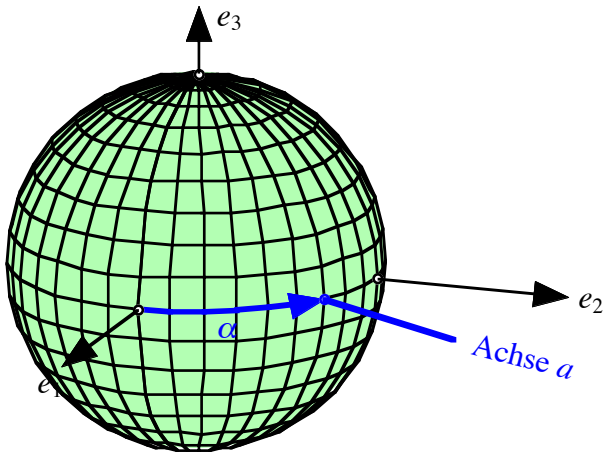


Drehung um die zweite Achse um ϕ = +30°

3.3.4 Drehung um eine Achse in „Bodenebene“



Situation der Drehachse *a*



Situation der Drehachse *a* in der Äquatorebene

In dieser Situation ist:

$$R_{a,\phi} = R_{e_3,\alpha} \circ R_{e_1,\phi} \circ R_{e_3,-\alpha}$$

Im Klartext heißt das:

$$R_{a,\phi} = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) & 0 \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\phi) & -\sin(\phi) \\ 0 & \sin(\phi) & \cos(\phi) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(-\alpha) & -\sin(-\alpha) & 0 \\ \sin(-\alpha) & \cos(-\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Beispiel:

$\alpha = 60°$ (Position der Achse a)

$\phi = 30°$ (Drehwinkel)

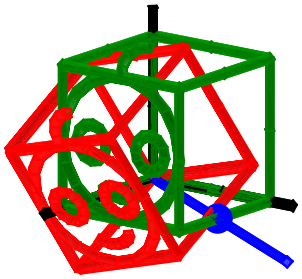
Es ist dann:

$$R_{e_3,\alpha} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad R_{e_1,\phi} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad R_{e_3,-\alpha} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & +\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Daraus ergibt sich (mit CAS):

$$R_{a,\phi} = R_{e_3,\alpha} \circ R_{e_1,\phi} \circ R_{e_3,-\alpha} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} + \frac{3}{8}\sqrt{3} & \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{3}{8} & \frac{\sqrt{3}}{4} \\ \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{3}{8} & \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{8} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{1}{4} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$$

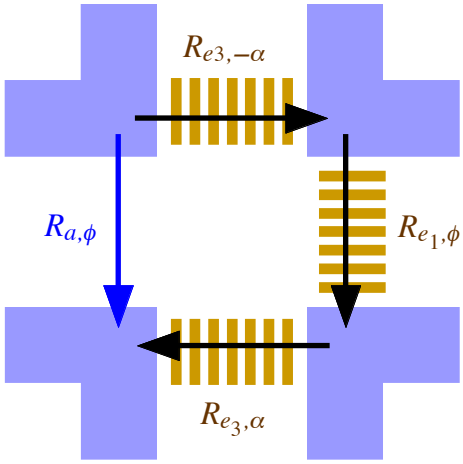
Die Figur zeigt, dass das richtig ist:



Drehung um eine Achse *a* in Bodenebene

3.3.4.1 Konjugation

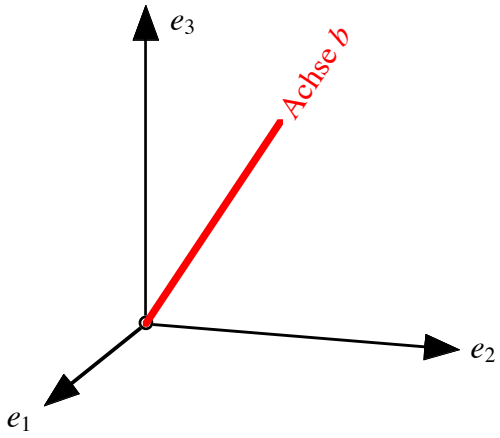
$$R_{a,\phi} = R_{e_3,\alpha} \circ R_{e_1,\phi} \circ R_{e_3,-\alpha}$$



Konjugation

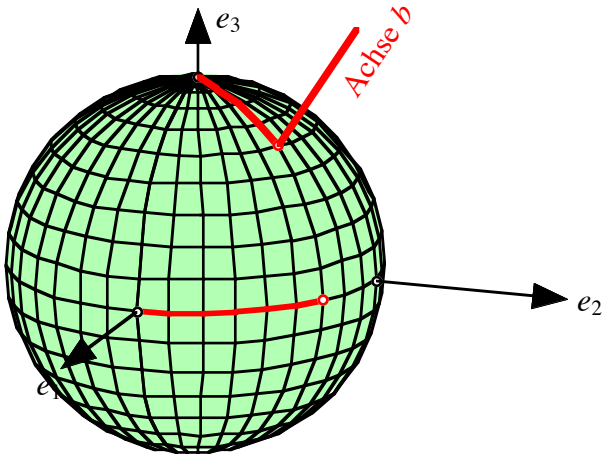
3.3.5 Drehung um eine beliebige Achse

In einem Schrägbild kann die Position der Achse *b* nicht eindeutig angegeben werden.



Lage der Achse *b* unklar

Mit geografischen Koordinaten kann das präzisiert werden.



„Geografie“ der Achse *b*

Zur Festlegung der Achse b verwenden wir in der Nord-Süd-Richtung die so genannte *Poldistanz* θ, die vom Nordpol aus gemessen wird. Die Poldistanz ist der Komplementwinkel der üblichen geografischen Breite.

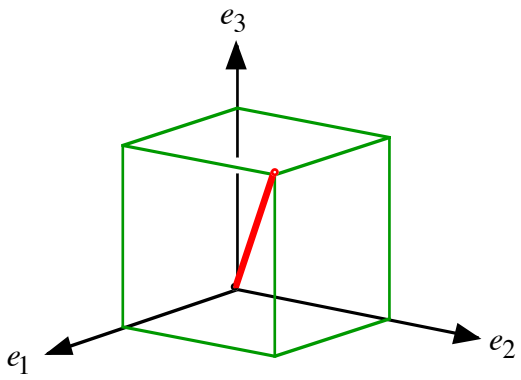
In der Ost-West-Richtung verwenden wir die übliche geografische Länge λ.

Die Rotation um die Achse b um den Winkel ϕ kann jetzt wie folgt zusammengesetzt werden:

$$R_{b,\phi} = R_{e_3,\lambda} \circ R_{e_2,\theta} \circ R_{e_3,\phi} \circ R_{e_2,-\theta} \circ R_{e_3,-\lambda}$$

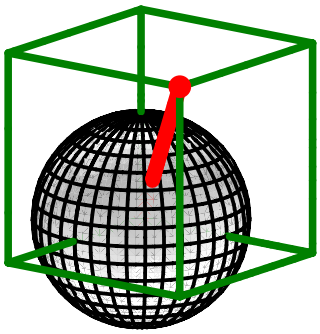
3.3.5.1 Beispiel

Wir drehen einen Würfel um eine Körperdiagonale um $\phi = 60°$.



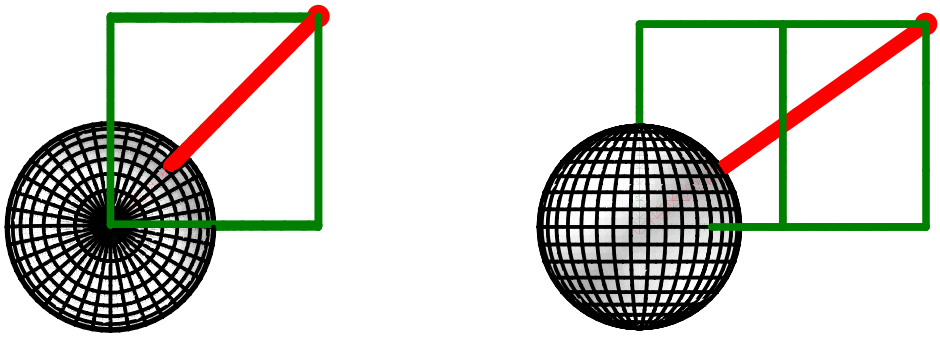
Drehung um eine Körperdiagonale

Was ist nun die Geografie der Drehachse b, also der Körperdiagonalen des Würfels?



Körperdiagonale und Orientierungskugel

Offensichtlich ist die geografische Länge $\lambda = 45°$. Dies zeigt die Sicht von oben. Zur Bestimmung des Winkels θ sehen wir die Sache von einer geeigneten Seite an.



Sicht von oben und von der Seite

Es ist $\tan(\theta) = \sqrt{2}$.

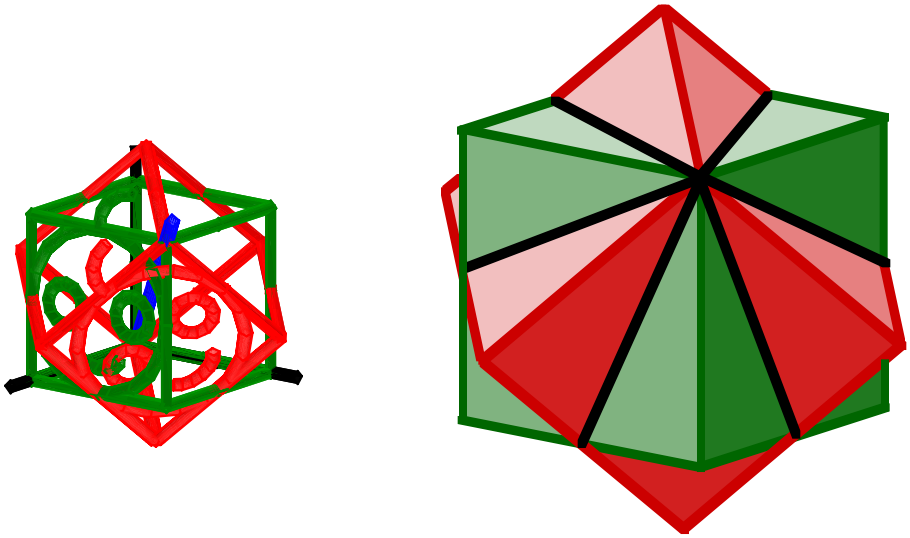
Es ist also $\phi = \frac{\pi}{3} = 60°$, $\lambda = \frac{\pi}{4} = 45°$, $\theta = \arctan\left(\sqrt{2}\right) \approx 54.7356°$.

Maple liefert damit die Abbildungsmatrix:

$$R_{b,\phi} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

Die Drehmatrix $R_{b,\phi}$ hat einige bemerkenswerte Eigenschaften. So hat jeder Spaltenvektor und auch jeder Zeilenvektor die Länge 1. Zwei verschiedene Spaltenvektoren sind zueinander orthogonal, ebenso zwei verschiedene Zeilenvektoren. Ferner ist, $R_{b,\phi}^{-1} = R_{b,\phi}^{t}$ und $\det\left(R_{b,\phi}\right) = 1$. Matrizen mit diesen Eigenschaften heißen *orthogonale Matrizen*.

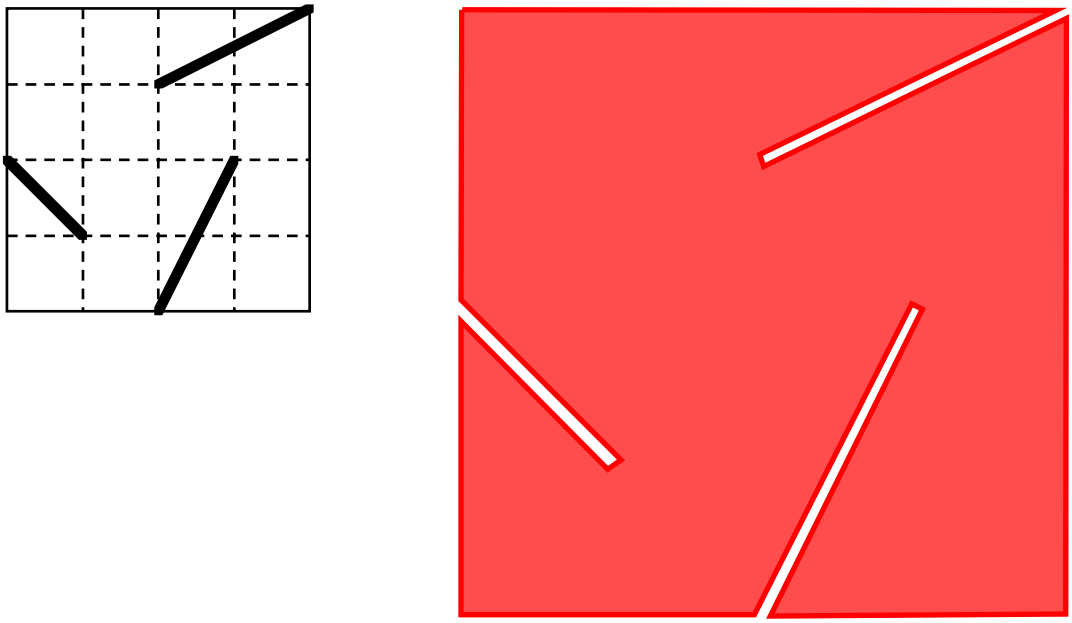
Im folgenden Bild sehen wir den Würfel und sein Drehbild bei einer Drehung um die Körperdiagonale um 60°.



Urbildwürfel und Bildwürfel

3.3.5.2 Die Bastelstunde

Diese Würfelkonfiguration kann als Steckmodell hergestellt werden. Wir brauchen dazu 12 Quadrate (6 in der einen und 6 in der anderen Farbe) aus Halbkarton mit Nuten. Das Modell kann dann ohne weitere Bindemittel zusammengesteckt werden.



Schnittmuster für das Steckmodell

4 Fixrichtungen

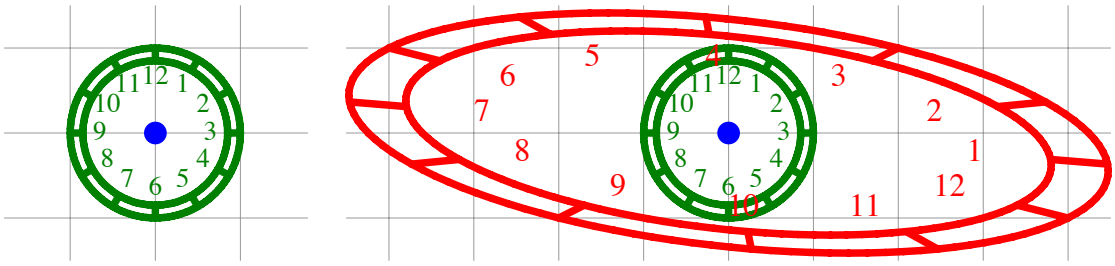
Wann hat der Schattenzeiger einer Sonnenuhr dieselbe Richtung wir der Stundenzeiger einer normalen Uhr?

4.1 Wann ist es gleich spät?

Wir betrachten lineare Abbildungen, also Abbildungen von der Form $v = Au$. Mit der Abbildungsmatrix

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

wird die Standarduhr wie folgt verzerrt:



Uhr und ihr Bild

Wann ist es nun auf beiden Uhren gleich spät? (Nur Stundenzeiger beachten.)

4.1.1 Fixpunkte

Gesucht sind Punkte u mit $Au = u$.

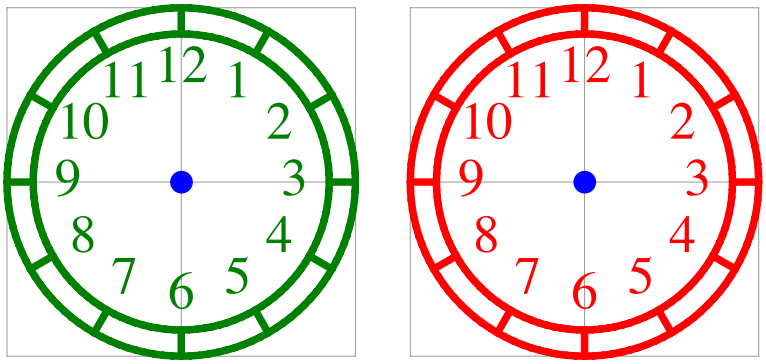
4.1.2 Fixrichtungen durch den Ursprung

Gesucht sind Vektoren u mit $Au = \lambda u$.

4.2 Weitere Beispiele

4.2.1 Identische Abbildung

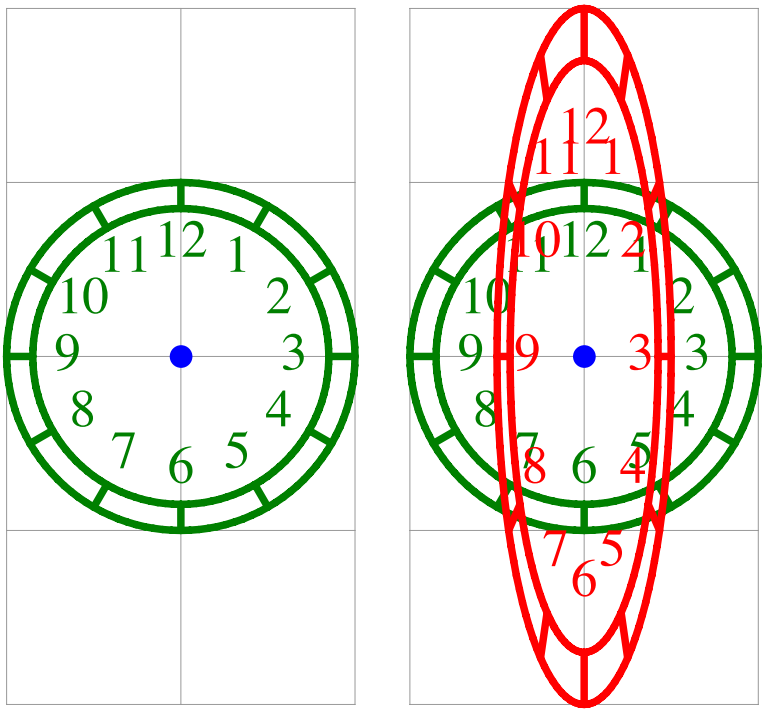
$$A = E = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$



Identität: Urbilduhr und Bilduhr

4.2.2 Strecken und Stauchen

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$



Urbilduhr und Bilduhr

Eigenwerte, Eigenvektoren?

4.2.2.1 Erster Eigenvektor, erster Eigenwert

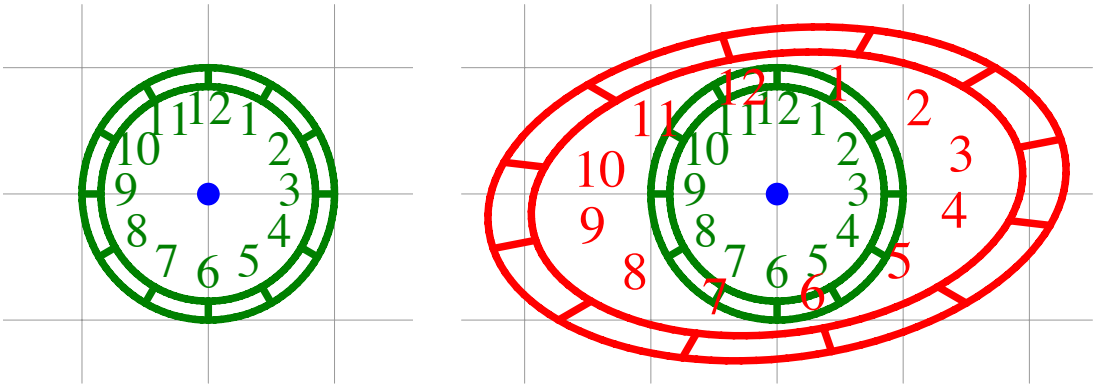
$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\substack{\uparrow \\ \text{Eigen-} \\ \text{vektor}}} = \underbrace{\frac{1}{2}}_{\substack{\uparrow \\ \text{Eigen-} \\ \text{wert}}} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\substack{\uparrow \\ \text{Eigen-} \\ \text{vektor}}}$$

4.2.2.2 Zweiter Eigenvektor, zweiter Eigenwert

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\substack{\uparrow \\ \text{Eigen-} \\ \text{vektor}}} = \underbrace{2}_{\substack{\uparrow \\ \text{Eigen-} \\ \text{wert}}} \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\substack{\uparrow \\ \text{Eigen-} \\ \text{vektor}}}$$

4.2.3 Sichtbare Fixrichtungen

$$A = \begin{bmatrix} \frac{9}{4} & -\frac{1}{4}\sqrt{3} \\ \frac{1}{4}\sqrt{3} & \frac{5}{4} \end{bmatrix}$$



Urbilduhr und Bilduhr

4.2.3.1 Erster Eigenvektor, erster Eigenwert

Auf Grund der Figur vermuten wir: u_1 gehört zu „ein Uhr“, also:

$$u_1 = \begin{bmatrix} \cos(60°) \\ \sin(60°) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \text{ und } \lambda_1 = \frac{3}{2}.$$

Kontrolle:

$$\begin{bmatrix} \frac{9}{4} & -\frac{1}{4}\sqrt{3} \\ \frac{1}{4}\sqrt{3} & \frac{5}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} =$$

4.2.3.2 Zweiter Eigenvektor, zweiter Eigenwert

Auf Grund der Figur vermuten wir: u_2 gehört zu „zwei Uhr“, also:

$$u_2 = \begin{bmatrix} \cos(30°) \\ \sin(30°) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} \text{ und } \lambda_1 = 2$$

Kontrolle:

$$\begin{bmatrix} \frac{9}{4} & -\frac{1}{4}\sqrt{3} \\ \frac{1}{4}\sqrt{3} & \frac{5}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} =$$

5 Eigenvektor und Eigenwert

5.1 Definition

Falls

$$Au = \lambda u$$

heißt

u *Eigenvektor* der Matrix A

und

λ *Eigenwert* der Matrix A.

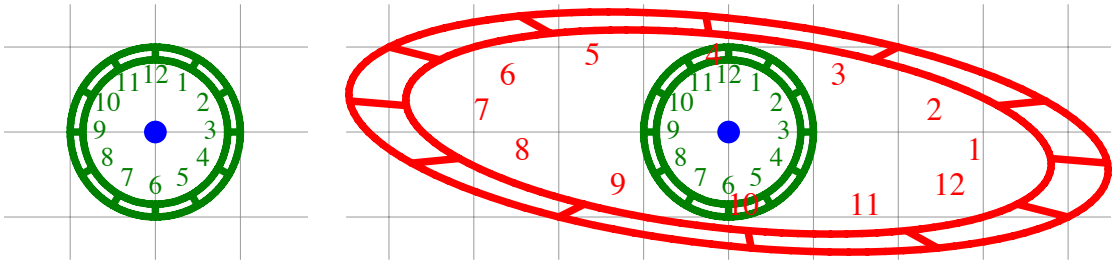
Bemerkung: Mit u ist auch ein Vielfaches von u Eigenvektor.

5.2 Berechnung der Eigenwerte und Eigenvektoren

5.2.1 Beispiel

Wir verwenden das uns schon bekannte Beispiel:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$



Uhr und ihr Bild

Die Bedingung $Au = \lambda u$ führt auf:

Es ist $\det\left(\begin{bmatrix} 2-\lambda & 4 \\ 1 & -1-\lambda \end{bmatrix}\right) = \lambda^2 - \lambda - 6$. Dies ist das *charakteristische Polynom* der Matrix A. Die gesuchten Eigenwerte sind die Nullstellen des charakteristischen Polynoms:

$$\lambda^2 - \lambda - 6 = 0$$

Wir erhalten $\lambda_1 = 3$ und $\lambda_2 = -2$.

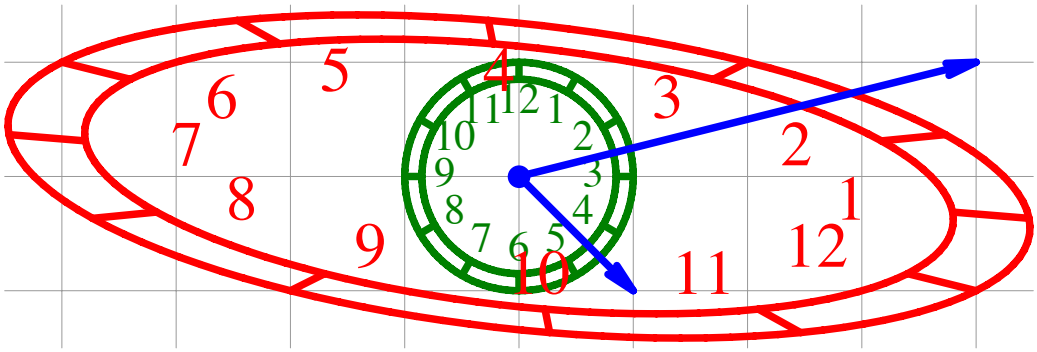
Die zugehörigen Eigenvektoren finden wir wie folgt:

Erster Eigenwert $\lambda_1 = 3$

Wir erhalten $u_1 = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}$. Selbstverständlich ist auch jedes Vielfache von u_1 ein Eigenvektor zu $\lambda_1 = 3$.

Zweiter Eigenwert $\lambda_2 = -2$

Wir erhalten $u_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$. Auch jedes Vielfache von u_2 ist ein Eigenvektor zu $\lambda_2 = -2$.



Eigenvektoren

5.2.1.1 Link mit Differenzialgleichungen

Wir suchen Funktionen $y_1(t)$ und $y_2(t)$ so dass:

$$y_1' = 2y_1 + 4y_2$$

$$y_2' = y_1 - y_2$$

Wir haben somit ein System homogener linearer Differenzialgleichungen erster Ordnung. Mit den Schreibweisen

$$Y(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

können wir das in der kompakten Form

$$Y'(t) = AY(t)$$

schreiben. Das erinnert formal an die gewöhnliche Differenzialgleichung $y' = ay$ mit der Lösung $y(t) = be^{at}$. Wir versuchen daher folgenden Ansatz:

$$y_1(t) = c_1 e^{\lambda t} \qquad y_2(t) = c_2 e^{\lambda t}$$

Wir haben also in den beiden Funktionen zwar verschiedene Konstante Faktoren c_1 und c_2, aber dasselbe λ.

Mit dem Vektor $C = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$ können wir den Ansatz kompakt schreiben:

$$Y(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 e^{\lambda t} \\ c_2 e^{\lambda t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} e^{\lambda t} = Ce^{\lambda t}$$

$$Y(t) = Ce^{\lambda t}$$

Ableiten ergibt:

$$Y'(t) = \begin{bmatrix} y_1'(t) \\ y_2'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \lambda e^{\lambda t} \\ c_2 \lambda e^{\lambda t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} \lambda e^{\lambda t} = C \lambda e^{\lambda t}$$

$$Y'(t) = C \lambda e^{\lambda t}$$

Wir sehen hier, dass es wichtig ist, dass wir in beiden Funktionen dasselbe λ haben. Einsetzen in das Differenzialgleichungssystem $Y'(t) = AY(t)$ liefert:

$$C \lambda e^{\lambda t} = AC e^{\lambda t}$$

Den Anteil $e^{\lambda t}$ können wir wegdividieren. Den Vektor C können wir aber *nicht* weglassen, weil man nicht durch einen Vektor dividieren kann. Wir erhalten $C\lambda = AC$ oder

$$AC = \lambda C$$

Wir sehen, dass C ein *Eigenvektor* und λ der zugehörige *Eigenwert* für die Matrix A sein muss. Für die Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

ergeben sich die Eigenwerte $\lambda_1 = 3$ und $\lambda_2 = -2$ mit passenden Eigenvektoren:

$$u_1 = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad u_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Da mit einem Eigenvektor auch ein Vielfaches davon Eigenvektor ist, erhalten wir

$$Y_1(t) = b_1 \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} e^{3t} \quad \text{und} \quad Y_2(t) = b_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} e^{-2t}$$

mit beliebigen Koeffizienten b_1 und b_2, und daraus die allgemeine Lösung für den homogenen Fall

$$Y(t) = b_1 \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} e^{3t} + b_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} e^{-2t}$$

oder detailliert:

$$y_1(t) = 4b_1 e^{3t} + b_2 e^{-2t}$$

$$y_2(t) = b_1 e^{3t} - b_2 e^{-2t}$$

CAS liefert:

y1(t) = C1*exp(-2*t) + C2*exp(3*t)

y2(t) = 1/4*C2*exp(3*t) - C1*exp(-2*t)

Setzt man $C2 = 4b_1$ und $C1 = b_2$, erhalten wir unsere Lösung.

Zur Kontrolle (wer dem Computer nicht traut) setzen wir in die Differenzialgleichungen

$$y_1' = 2y_1 + 4y_2$$
$$y_2' = y_1 - y_2$$

ein:

$$\left.\begin{aligned} 3\cdot 4b_1 e^{3t} - 2b_2 e^{-2t} &\overset{?}{=} 2\left(4b_1 e^{3t} + b_2 e^{-2t}\right) + 4\left(b_1 e^{3t} - b_2 e^{-2t}\right) \\ 3b_1 e^{3t} - (-2)b_2 e^{-2t} &\overset{?}{=} \left(4b_1 e^{3t} + b_2 e^{-2t}\right) - \left(b_1 e^{3t} - b_2 e^{-2t}\right) \end{aligned}\right\} \text{ o.K.}$$

5.2.2 Allgemein

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

Wir erhalten:

Charakteristisches Polynom:

$$\det\left(\begin{bmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{bmatrix}\right) = \lambda^2 - \underbrace{(a+d)}_{\substack{\text{in der} \\ \text{Haupt-} \\ \text{diagonalen}}} \lambda + \underbrace{(ad-bc)}_{=\det(A)}$$

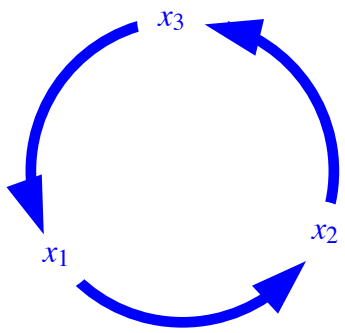
5.3 Beispiel im Raum

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Wie wirkt sich diese Abbildung auf einen Vektor $u = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ aus?

$$Au = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} =$$

Wir erhalten also eine zyklische Vertauschung der Koordinaten:



Zyklische Vertauschung

Wenn drei Designer einen Computer, eine Seife und einen Kaktus bearbeiten, sieht nachher der Computer aus wie eine Seife, die Seife wie ein Kaktus und der Kaktus wie ein Computer. Und alle drei waren kreativ.

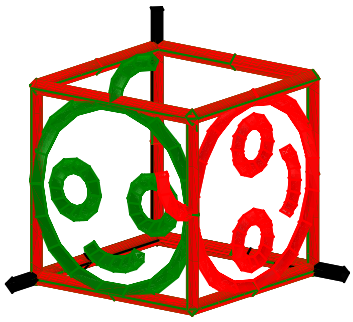
Berechnung der Eigenwerte:

Wir erhalten die charakteristische Gleichung $\lambda^3 = 1$ mit der einzigen (reellen) Lösung $\lambda_1 = 1$.

Berechnung des zugehörigen Eigenvektors:

Wir erhalten den Eigenvektor $u_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Die Abbildung ist geometrisch eine Drehung um die durch diesen Eigenvektor gegebene Achse um 120°.



Drehung um Diagonale um 120°

6 Symmetrische Matrix

6.1 Die Matrix

Wir arbeiten mit der symmetrischen Matrix:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$$

Eine *symmetrische* Matrix ist gleich ihrer transponierten Matrix: $A^t = A$

6.2 Die Abbildung

Wir verwenden die Matrix A als Abbildungsmatrix und bilden den Einheitskreis ab.

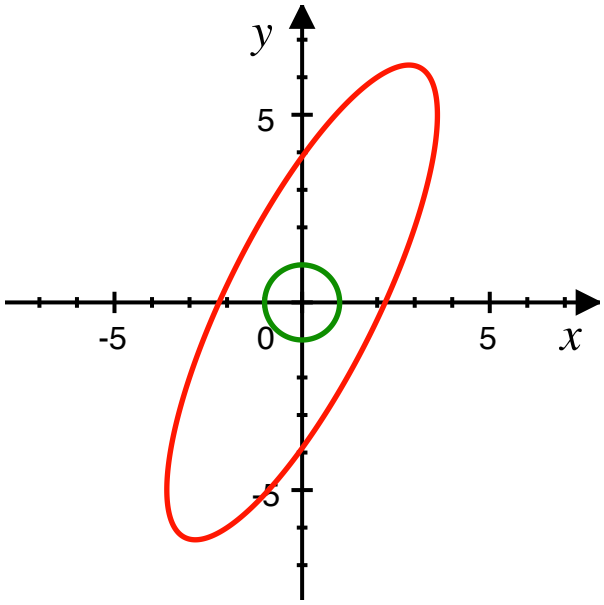
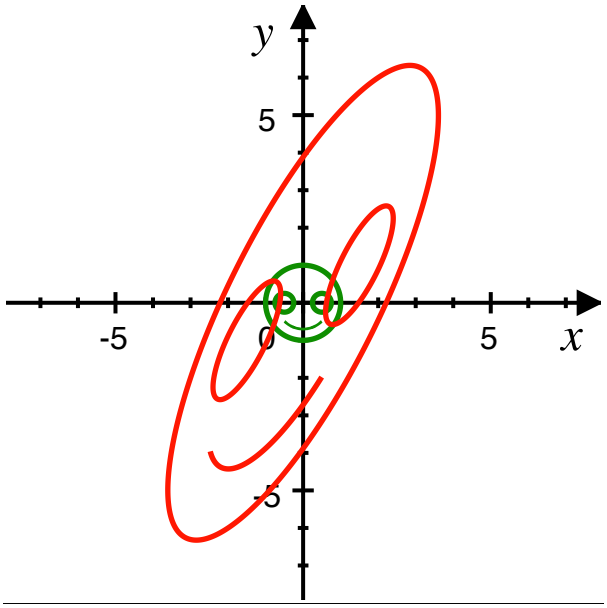


Bild des Einheitskreises

Der Kreis wird zu einer schrägen Ellipse verzerrt.

Wir sehen etwas mehr, wenn wir den Einheitskreis durch den Smiley ersetzen.



Smiley

6.3 Eigenwerte und Eigenvektoren

Wir bestimmen die Eigenwerte und Eigenvektoren der symmetrischen Matrix A: Wir erhalten die charakteristische Gleichung $\lambda^2 - 9\lambda + 14 = 0$ mit den beiden Lösungen $\lambda_1 = 7$ und $\lambda_2 = 2$. Dies sind die Eigenwerte der Matrix A. Für die Eigenvektoren erhalten wir zum Beispiel:

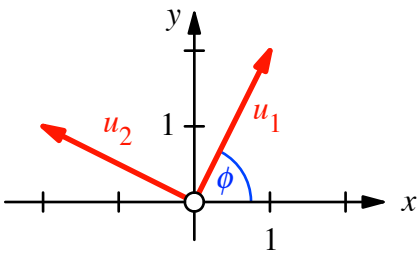
$$u_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \text{ und } u_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Die beiden Eigenvektoren sind orthogonal.

Allgemein gilt (ohne Beweis):

> Eine symmetrische Matrix hat reelle Eigenwerte.
>
> Die Eigenvektoren sind orthogonal.

Die Abbildung zeigt die beiden Eigenvektoren.



Eigenvektoren

Wir vermuten, dass der Eigenvektor u_1 die Richtung der langen Hauptachse (lange Symmetrieachse) der obigen Verzerrungsellipse hat. Der Eigenvektor u_2 hat die Richtung der kurzen Hauptachse (kurze Symmetrieachse) der Verzerrungsellipse.

Für den eingezeichneten Winkel ϕ ergibt sich:

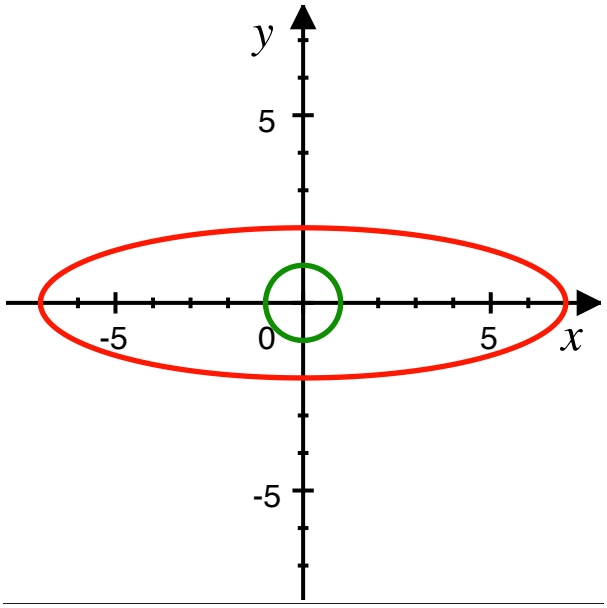
$$\cos(\phi) = \frac{1}{\sqrt{5}}, \quad \sin(\phi) = \frac{4}{\sqrt{5}}, \quad \phi = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right) \approx 63.43°$$

6.4 Eine Diagonalmatrix

Die Matrix

$$A' = \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

enthält die Eigenwerte der Matrix A in der Diagonalen und sonst nichts. Die zugehörige Abbildung ist eine Streckung in der x-Richtung um den Faktor 7 und in der y-Richtung um den Faktor 2. Der Einheitskreis wird zu einer Ellipse mit den Hauptachsen 7 und 2 verzerrt.



Verzerrung

Das ist offenbar wieder unsere Verzerrungsellipse, aber um den Winkel ϕ zurückgedreht.

6.5 Noch eine Matrix

6.5.1 Eine Drehmatrix

Die Drehmatrix T für den Winkel ϕ ist:

$$T = \begin{bmatrix} \cos(\phi) & -\sin(\phi) \\ \sin(\phi) & \cos(\phi) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$$

Diese Matrix hat folgende Eigenschaften:

Die Spaltenvektoren sind zueinander orthogonal.

Die Spaltenvektoren haben die Länge 1.

Die Spaltenvektoren (und ebenso die Zeilenvektoren) bilden also eine orthonormale Basis.

Es ist:

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} \cos(-\phi) & -\sin(-\phi) \\ \sin(-\phi) & \cos(-\phi) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\phi) & \sin(\phi) \\ -\sin(\phi) & \cos(\phi) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} = T^t$$

Eine Matrix mit diesen Eigenschaften wird als *orthogonale Matrix* bezeichnet.

6.5.2 Orthogonale Matrix

Eine orthogonale Matrix ist eine quadratische Matrix Q mit folgenden Eigenschaften:

Die Spaltenvektoren sind zueinander orthogonal.

Die Spaltenvektoren haben die Länge 1.

Es ist $Q^t = Q^{-1}$.

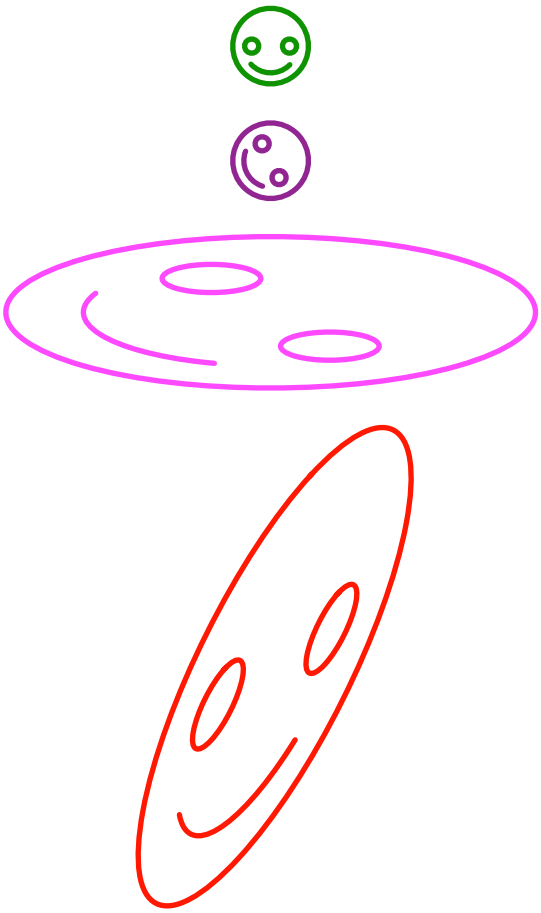
Wir deine orthogonale Matrix als Abbildungsmatrix verwendet, bleiben Längen und Winkel invariant. Die Abbildung ist also eine Kongruenzabbildung. Die Abbildung ist eine Drehung oder eine Spiegelung.

Der entsprechende Begriff bei komplexen Matrizen ist die *unitäre Matrix*.

6.6 Zusammensetzung von Abbildungen

Wir machen nun folgendes: Wir drehen den Smiley um den Winkel ϕ zurück, dann verzerren wir mit der Matrix A', also in der x-Richtung mit dem Faktor 7 und in der y-Richtung mit dem Faktor 2, und dann drehen wir um den Winkel ϕ vorwärts. Dann sollten wir dasselbe erhalten wie bei der Direktabbildung mit der Matrix A.

Die Figurenfolge zeigt, dass es klappt.



Zusammensetzung von Abbildungen

Wir sehen, dass der erste Schritt, also das Zurückdrehen des Smileys um den Winkel ϕ, wesentlich ist und nicht übersprungen werden kann.

6.7 Vorgehen mit Matrizen

Dem Zusammensetzen von Abbildungen entspricht die Multiplikation von Matrizen.

Gemäß unseren Überlegungen muss gelten:

$$T\,A'T^{-1} = A$$

Kontrolle:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{7}{\sqrt{5}} & \frac{14}{\sqrt{5}} \\ -\frac{4}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{15}{5} & \frac{10}{5} \\ \frac{10}{5} & \frac{30}{5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$$

Die Sache ist also ok.

Umgekehrt gilt auch:

$$A' = T^{-1}AT$$

Eine symmetrische Matrix kann also „diagonalisiert“ werden. In der Diagonalen stehen dann die Eigenwerte der Matrix.

7 Zusammenfassung

7.1 Lineare Abbildungen

Allgemein

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}$$

$v_1 \ldots v_m$: ↑ Bild; $u_1 \ldots u_n$: ↑ Urbild

7.2 Drehungen

Drehung in der Ebene: $$A = \begin{bmatrix} \cos(\phi) & -\sin(\phi) \\ \sin(\phi) & \cos(\phi) \end{bmatrix}$$

Drehungen im Raum:

Um erste Achse: $$R_{e_1,\phi} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\phi) & -\sin(\phi) \\ 0 & \sin(\phi) & \cos(\phi) \end{bmatrix}$$

Um zweite Achse: $R_{e_2,\phi} = \begin{bmatrix} \cos(\phi) & 0 & \sin(\phi) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\phi) & 0 & \cos(\phi) \end{bmatrix}$

Um dritte Achse: $R_{e_3,\phi} = \begin{bmatrix} \cos(\phi) & -\sin(\phi) & 0 \\ \sin(\phi) & \cos(\phi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Allgemein: Drehung um ϕ um die Achse mit den geografischen Koordinaten Poldistanz θ und geografische Länge λ:

$$R_{b,\phi} = R_{e_3,\lambda} \circ R_{e_2,\theta} \circ R_{e_3,\phi} \circ R_{e_2,-\theta} \circ R_{e_3,-\lambda}$$

7.3 Eigenvektoren und Eigenwerte

Falls $Au = \lambda u$ heißt u *Eigenvektor* der Matrix A und λ *Eigenwert* der Matrix A.

Mit u ist auch ein Vielfaches von u Eigenvektor.

Zur Matrix $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ finden wir die charakteristische Gleichung:

$$\det\left(\begin{bmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{bmatrix}\right) = \lambda^2 - \underbrace{(a+d)}_{\substack{\text{in der} \\ \text{Haupt-} \\ \text{diagonalen}}} \lambda + \underbrace{(ad-bc)}_{=\det(A)} = 0$$

Ihre Lösungen sind die Eigenwerte. Dann Vektoren $u \neq 0$ suchen so dass $Au = \lambda u$.

Für 3×3-Matrizen analog.

7.4 Symmetrische Matrix

$$A^t = A$$

Eigenwerte reell. Eigenvektoren orthogonal.

Eine symmetrische Matrix ist diagonalisierbar.

7.5 Orthogonale Matrix

Die Spaltenvektoren sind zueinander orthogonal.

Die Spaltenvektoren haben die Länge 1.

$$Q^t = Q^{-1}$$

Wir deine orthogonale Matrix als Abbildungsmatrix verwendet, bleiben Längen und Winkel invariant. Die Abbildung ist also eine Kongruenzabbildung. Die Abbildung ist eine Drehung oder eine Spiegelung.