Hans Walser

Rechtwinkliges Dreieck und Binomialverteilung

1 Worum geht es?

Durch iterierte Zerlegung eines rechtwinkligen Dreiecks durch die Höhe kommen wir zu den Binomialkoeffizienten und der Binomialverteilung.

Die Überlegungen können mit Schere und Papier nachvollzogen werden.

2 Mit Geodreieck und Schere

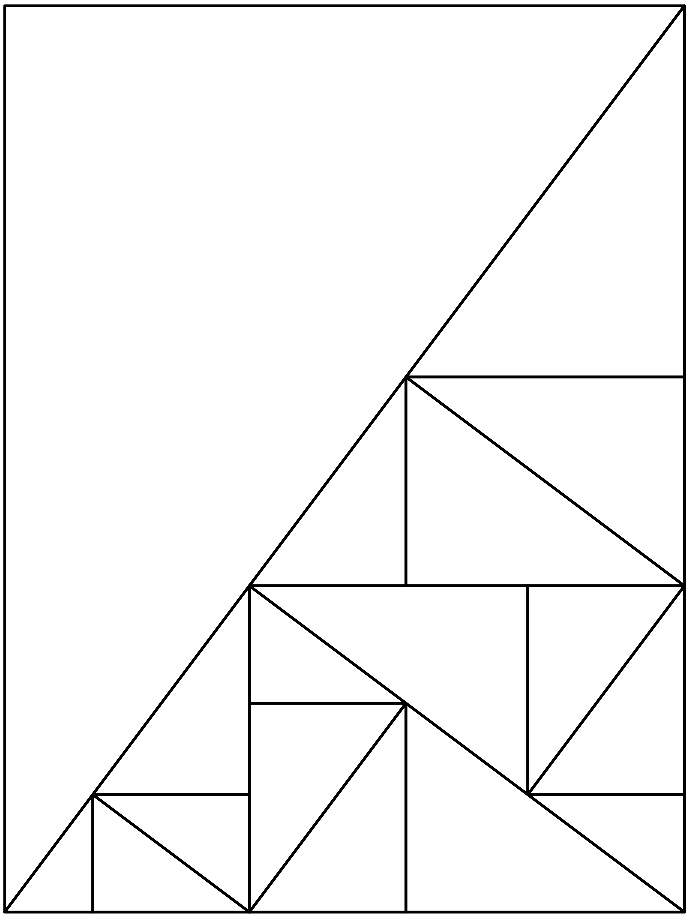

Abb. 0: Arbeitsvorlage

Wir arbeiten entweder mit dem weißen Dreieck links oben (oder mit einem beliebigen anderen rechtwinkligen Dreieck), zeichnen mit dem Geodreieck die Höhe und schneiden aus. In den beiden Teildreiecken zeichnen wir wieder je die Höhe und zerlegen mit der Schere. Und so weiter und so fort.

Alternativ können wir im schon präparierten rechtwinkligen Dreieck rechts unten mit den Höhen zerlegen, die Teildreiecke der Größe nach ordnen und am Schluss versuchen, die Teildreiecke wieder zum großen rechtwinkligen Dreieck zusammenzufügen.

Alternativ können wir im schon präparierten rechtwinkligen Dreieck rechts unten die Dreiecke der Größe nach ausmalen und dann die Farben auszählen.

Die Arbeitsvorlage kann in [1] als pdf heruntergeladen werden.

3 Zerlegungen des rechtwinkligen Dreiecks

Ein Dreieck wird durch eine Ecktransversale in zwei Teildreiecke zerlegt (Hölzl 2017). Dabei können verschiedene Bedingungen an das Startdreieck und die beiden Teildreiecke gestellt werden.

Wir besprechen den Sonderfall eines rechtwinkligen Dreiecks, welches wir durch die Höhe in zwei Teildreiecke zerlegen. Die beiden Teildreiecke sind wieder rechtwinklig.

Dabei iterieren wir den Zerlegungsprozess.

Die Abbildung 1 zeigt das Startdreieck. Da wir noch nichts zerlegt haben, bleibt vorerst einmal dieses Startdreieck.

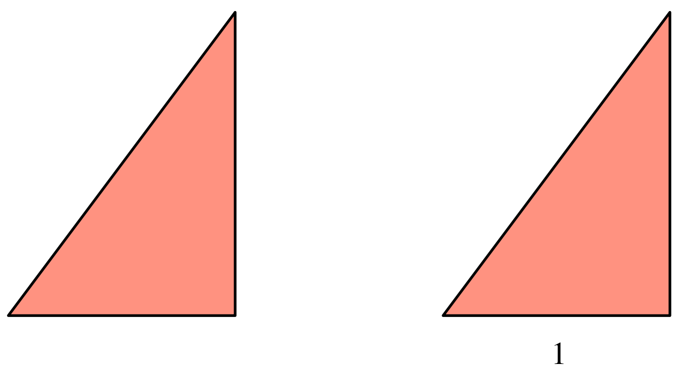

Abb. 1: Startdreieck

Erster Schritt: wir zerlegen mit der zur Hypotenuse senkrecht stehenden Höhe. Es entstehen zwei ungleich große Teildreiecke (Abb. 2).

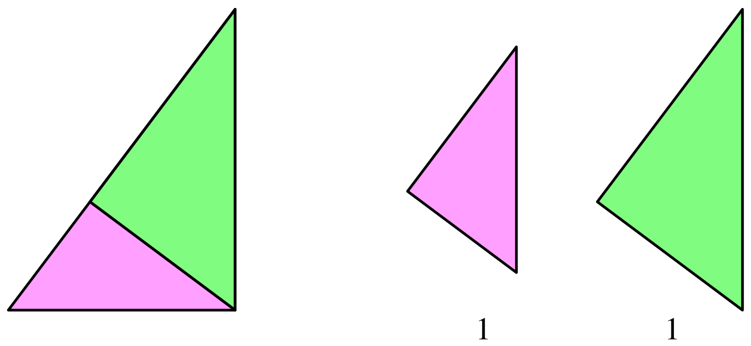

Abb. 2: Zerlegung durch die Höhe

Zweiter Schritt: Und nun kommt das Entscheidende. Wir zerlegen auch jedes der beiden Teildreiecke mit seiner Hypotenusenhöhe (Abb. 3).

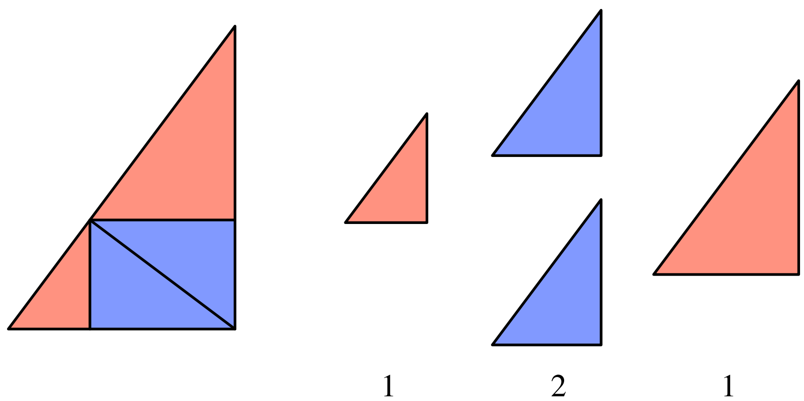

Abb. 3: Zweite Zerlegung durch die Höhe

Das gibt zunächst vier Teildreiecke. Dabei ist aus Symmetriegründen sofort klar, dass die beiden mittleren gleich groß sind. Das eine der beiden mittleren Dreiecke ist dabei das große Teildreieck vom vorhergehenden kleinen Teildreieck, und das andere das kleine Teildreieck vom vorhergehenden großen Teildreieck.

Die Anzahlen 1, 2, 1 erinnern an die Binomialkoeffizienten.

Die Abbildungen 4 und 5 zeigen die beiden weiteren Zerlegungen.

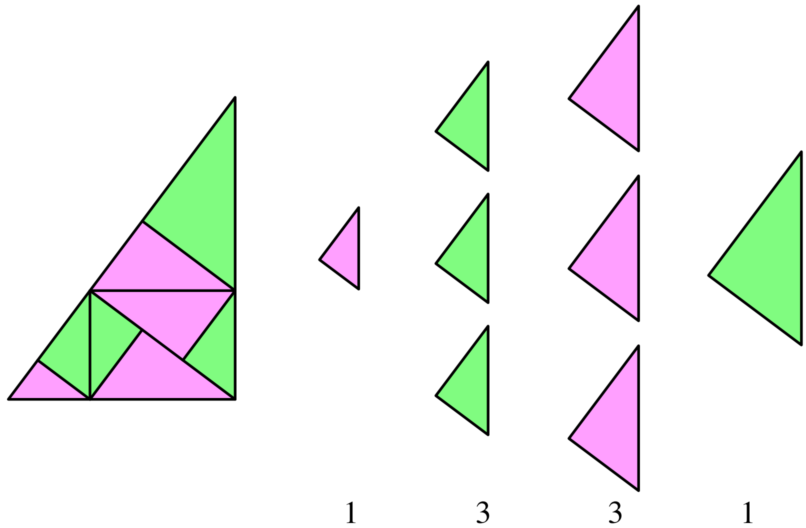

Abb. 4: Dritte Zerlegung

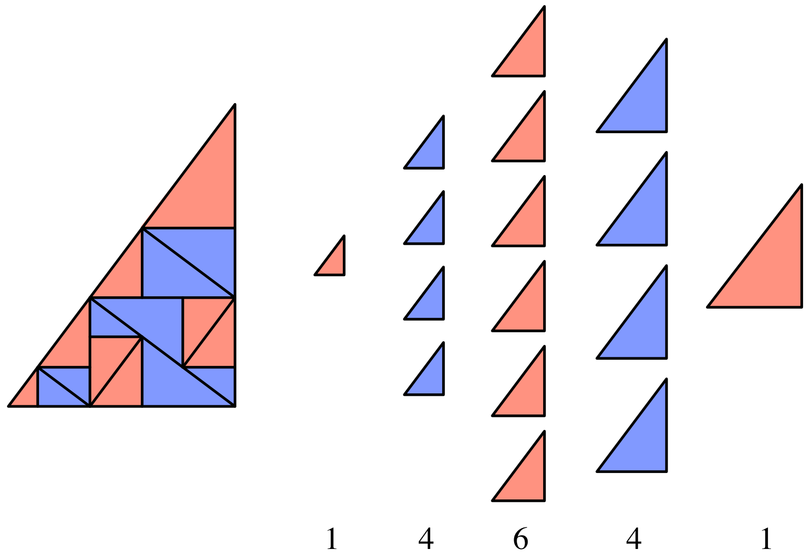

Abb. 5: Vierte Zerlegung

4 Binomialkoeffizienten

Die jeweiligen Anzahlen der Teildreiecke sind vermutlich die Binomialkoeffizienten (Abb. 6).

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & 1 & & & & \\ & & & 1 & & 1 & & & \\ & & 1 & & 2 & & 1 & & \\ & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\ 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & \binom{0}{0} & & & & \\ & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & \\ & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & \\ & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & \\ \binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4} \end{array}$$

Abb. 6: Binomialkoeffizienten

Um dies exemplarisch einzusehen, vermischen wir die figürlichen Aufzählungen der Abbildungen 3 und 4. Die in der Abbildung 7 weiß unterlegten Teile entstammen der Abbildung 3, die gelb unterlegten der Abbildung 4.

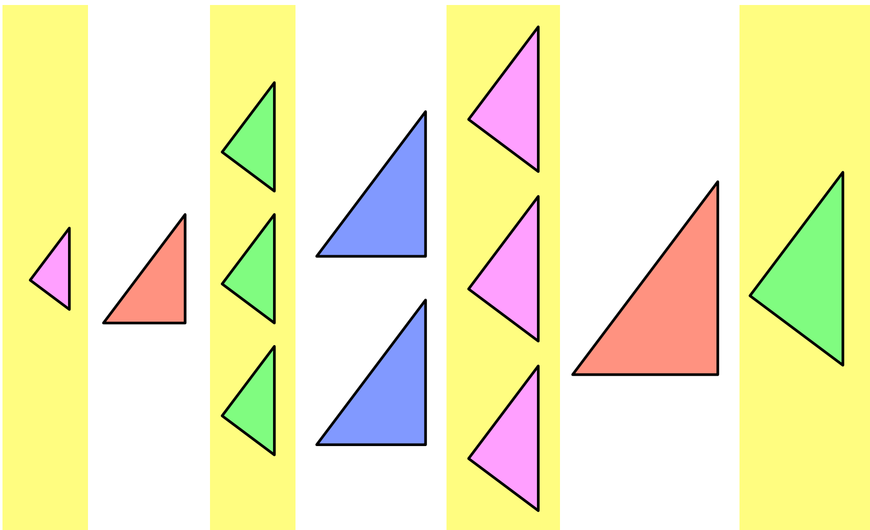

Abb. 7: Vermischung

Nun zerlegen wir die Dreiecke aus der Abbildung 3, also die in der Abbildung 7 weiß unterlegten Dreiecke, durch ihre Hypotenusenhöhen (Abb. 8).

Wir können die Teildreiecke nun eins zu eins (bijektiv) den gelb unterlegten Dreiecken zuordnen.

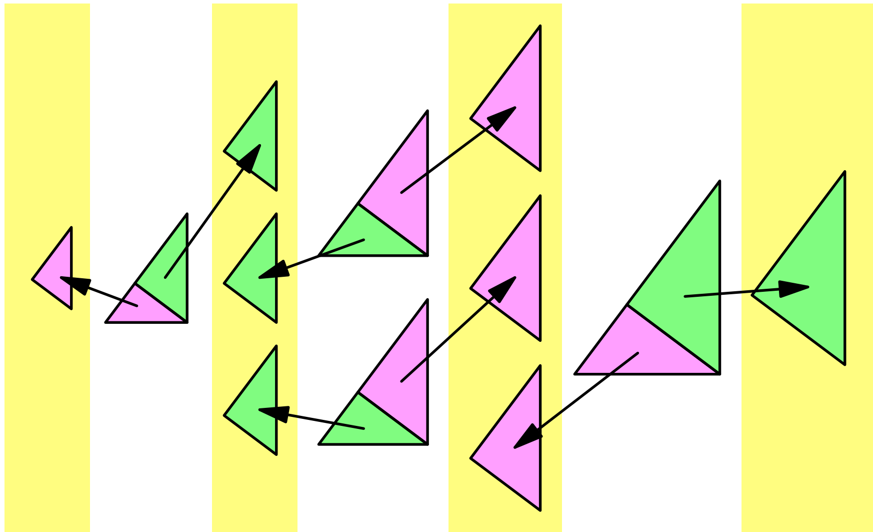

Abb. 8: Zerlegung und Zuordnung

Im Zahlendreieck der Binomialkoeffizienten haben wir damit die Zuordnung der Abbildung 9 vorgenommen.

1

1 1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

Abb. 9: Im Zahlendreieck

Damit ergibt sich allgemein die für die Binomialkoeffizienten relevante Rekursion:

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} \tag{1}$$

5 Didaktische Zwischenbemerkung

Die Zerlegungen können mit Schere und Papier nachvollzogen werden. So erhalten wir einen modellmäßigen Zugang zu den Binomialkoeffizienten.

Neckisch ist auch das Puzzle, die einzelnen Teildreiecke ohne Schnittvorlage wieder zum Startdreieck zusammenzufügen.

6 Maßverhältnisse

Für die Berechnungen im rechtwinkligen Dreieck verwenden wir die üblichen Bezeichnungen a und b für die beiden Katheten und c für die Hypotenuse. Für die Dreiecke der Abbildung 2 erhalten wir damit die in der Abbildung 10 rot angegebenen Ähnlichkeitsfaktoren (Längenmaßstäbe oder Längenveränderungsfaktoren). Die Flächenmaßstäbe sind die Quadrate davon (blau in Abb. 10).

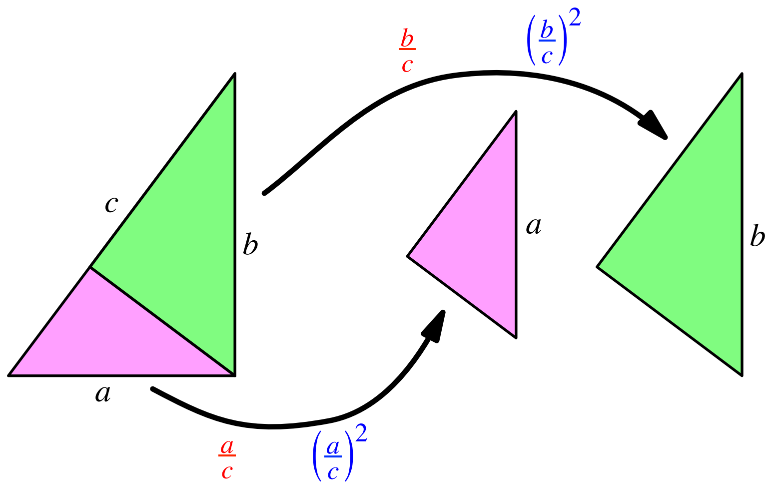

Abb. 10: Längenmaßstäbe (rot) und Flächenmaßstäbe (blau)

7 Relative Hypotenusenabschnitte

Für das Ausgangsdreieck definieren wir die *relativen* Hypotenusenabschnitte:

$$p=\left(\frac{a}{c}\right)^2 \quad , \quad q=\left(\frac{b}{c}\right)^2 \qquad (2)$$

Um daraus die in der Schule üblichen vom Höhenfußpunkt ausgehenden absoluten Hypotenusenabschnitte zu erhalten, muss man noch mit der Hypotenusenlänge c multiplizieren.

Diese relativen Hypotenusenabschnitte sind auch die Flächenmaßstäbe bei der Zerlegung durch die Hypotenusenhöhe gemäß Abbildung 10.

Weiter gilt nach dem Satz des Pythagoras:

$$p+q=\frac{a^2+b^2}{c^2}=1 \qquad (3)$$

Die beiden Variablen p und q sind also auch passend für Überlegungen mit Wahrscheinlichkeit und Gegenwahrscheinlichkeit.

8 Flächenanteile

Wir können nun mit den Variablen p und q die Flächenanteile der Teildreiecke der Abbildungen 2 bis 5 am Startdreieck angeben (Abb. 11-14).

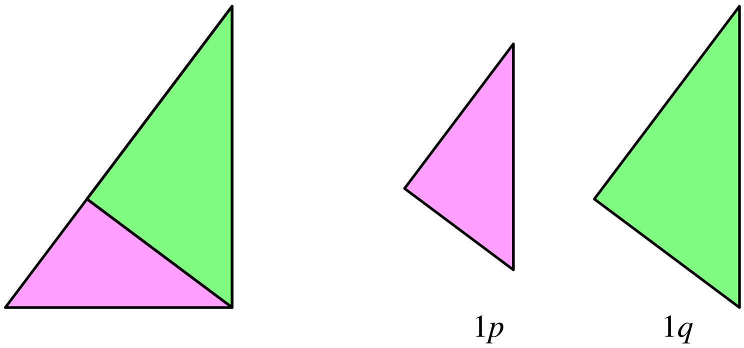

Abb. 11: Flächenanteile bei einmaligem Zerlegen

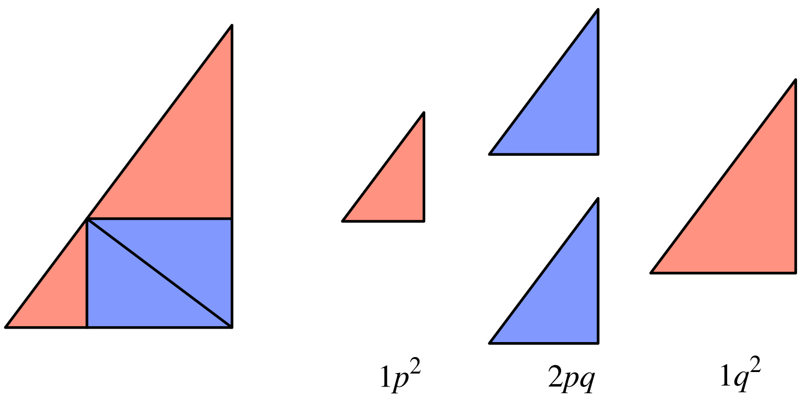

Abb. 12: Flächenanteile bei zweimaligem Zerlegen

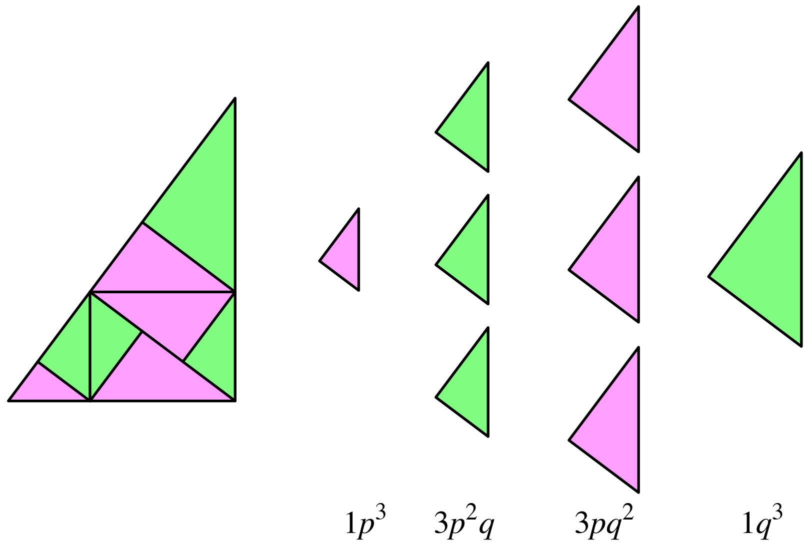

Abb. 13: Flächenanteile bei dreimaligem Zerlegen

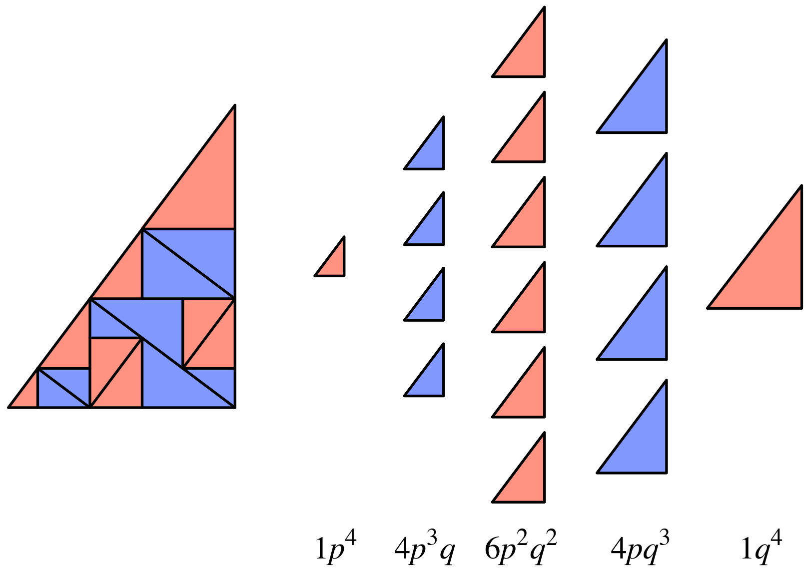

Abb. 14: Flächenanteile bei viermaligem Zerlegen

Wir erkennen die Binomialverteilung in folgender Form: in der n-ten Zerlegung ist der Flächenanteil aller $\binom{n}{k}$ gleich großer Teildreiecke:

$$\text{Flächenanteil}_{n,k} = \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \tag{4}$$

9 Und wo bleibt der Baum?

In der Schule ist es üblich, im Kontext der Binomialverteilung mit einem Baumgerüst etwa gemäß der Abbildung 15 zu arbeiten.

Dieser Baum visualisiert die kombinatorischen Anzahlen mit den Binomialkoeffizienten, er ist aber keine Visualisierung der Maßverhältnisse mit der Binomialverteilung.

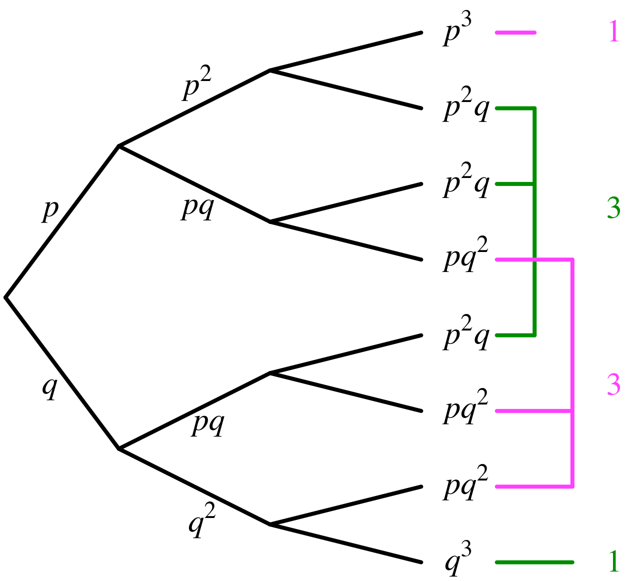

Abb. 15: Kombinatorischer Baum

10 Der Pythagorasbaum

Um die kombinatorischen Anzahlen zusammen mit den Maßverhältnissen zu visualisieren, verfahren wir wie folgt (Abb. 16-21).

Abb. 16: Am Anfang war das Quadrat

Abb. 17: Gruß von Pythagoras

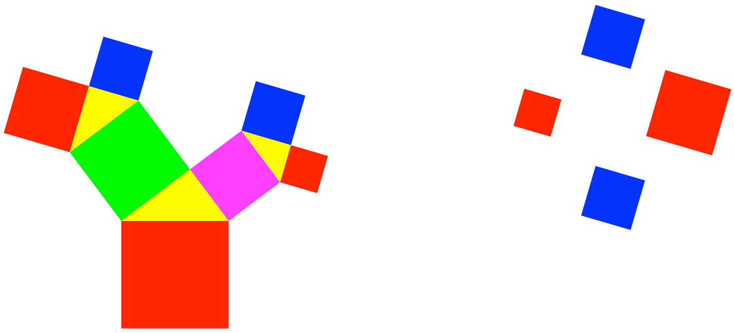

Abb. 18: Zweiter Gruß von Pythagoras

Wir sehen, dass die Quadrate der jeweils neuen Runde gleich orientiert sind.

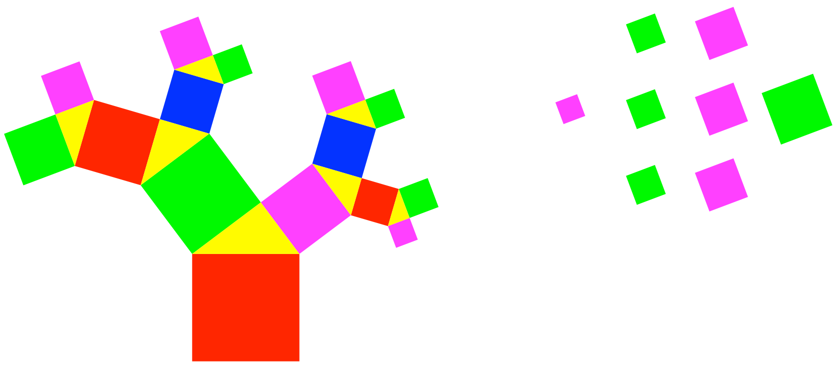

Abb. 19: Dritte Verästelung

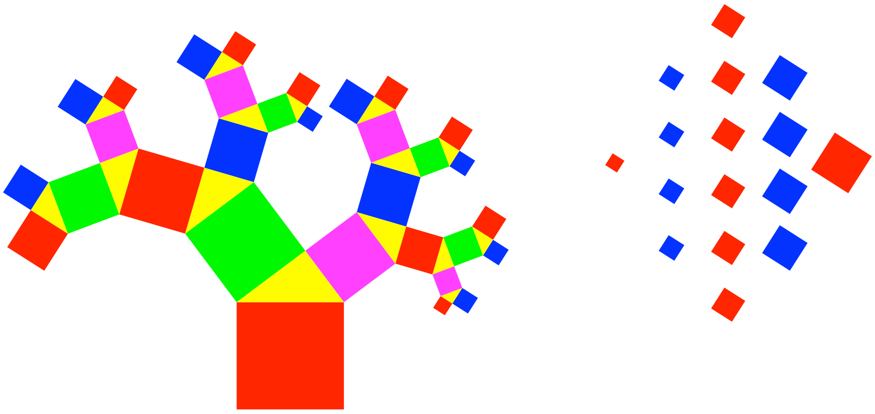

Abb. 20: Vierte Verästelung

Die Weiterführung ad infinitum führt zu einem Fraktal (Abb. 21). Hat das etwas mit der Normalverteilung zu tun?

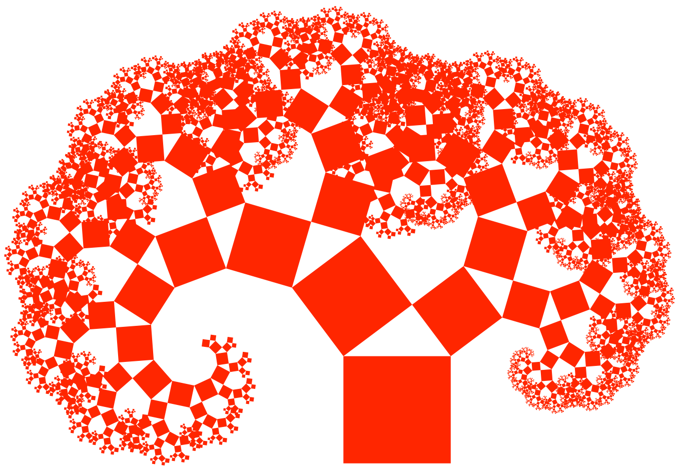

Abb. 21: Pythagorasbaum

Literatur

Glötzner, Fabian (2017): Binomialverteilung erkunden. Beispiele untersuchen, systematisieren und erweitern. mathematik lehren 201 | 2017, 36-41.

Hölzl, Reinhard (2017): Dreiecke in Dreiecke zerlegen. Welche Eigenschaften und Zusammenhänge findest du? mathematik lehren 201 | 2017, 12-15.

Walser, Hans (2017): Dreiecksunterteilung und Binomialverteilung – In: Fachnewsletter mathematik lehren vom 18.9.2017

Walser, Hans (2017): Rechtwinklige Dreiecke ... . Ideenkiste. ml, mathematik lehren 204 | 2017, 51.

Websites

[1] Hans Walser: Arbeitsvorlage (10.12.2017):

http://www.walser-h-m.ch/hans/Vortraege/20180306/Puzzle_24_bw.pdf