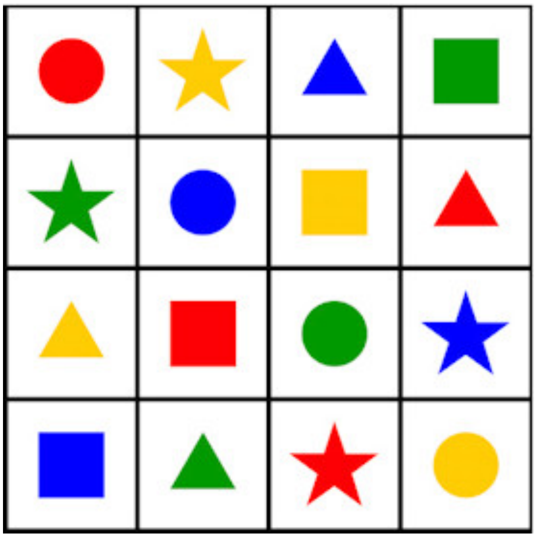
Hans Walser

Die geheime Ordnung in der totalen Unordnung



Zusammenfassung

In 3×3-Quadraten und 4×4-Quadraten konstruieren wir mit Farb- und Formkombinationen verschiedene Auslegeordnungen mit unterschiedlich hoher Ordnungsstruktur. Dabei stoßen wir auch auf unerwartete Ordnungsstrukturen.

Unter Verwendung zweistelliger Codierungen und dem Einsatz von Positions-Zahlensystemen mit angepasster Basis erhalten wir so genannte „Hexenhäuschen“. Mit geeigneten Vertauschungen können wir diese in magische Quadrate umbauen.

Der Hintergrund ist ein berühmtes Anordnungsproblem am Hofe der russischen Zarin Katharina der Großen, ein Problem das auch der berühmte Mathematiker Leonhard Euler aus Basel nicht vollständig lösen konnte. Es brauchte über 150 Jahre, bis das Problem vollständig verstanden wurde.

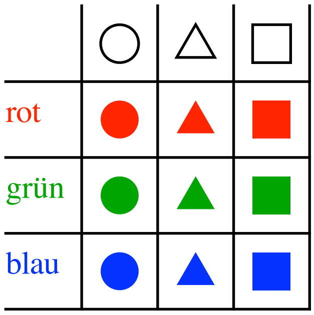
Inhalt

Last modified: 19. Dezember 2018

1 Einstiegsbeispiel

1.1 Spielmaterial

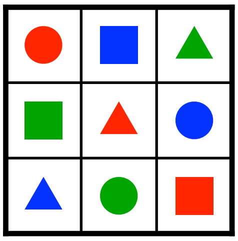
Wir haben drei Farben (rot, grün, blau) und drei Formen (Kreis, Dreieck, Quadrat). Ein ordentlicher Mensch stellt das so dar:



Ordnung

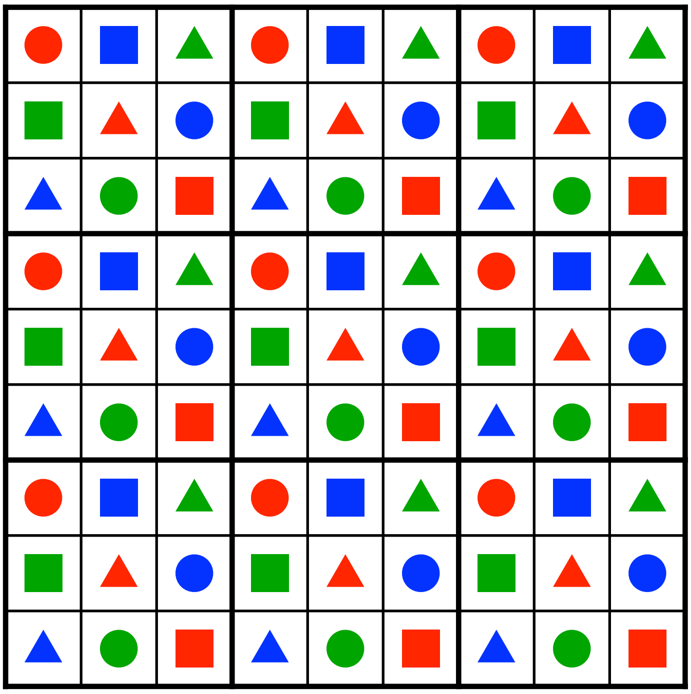
1.2 Unordnung

Nun versuchen wir es mit maximaler Unordnung. Das heißt wohl: In jeder Zeile und in jeder Spalte jede Farbe und jede Form. Versuchen Sie's. Beispiel:



Maximale Unordnung

Auweia: Jetzt sehen wir in der einen Diagonalen rot und in der anderen dreieckig.
Wenn wir die Quadrate repetitiv aneinander setzen, wird es noch schöner:

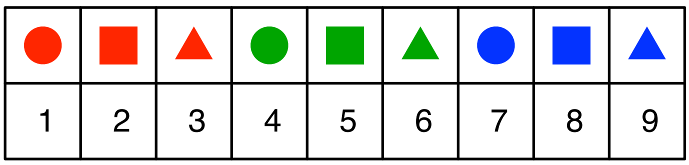


Wiederholung

In der einen Schrägrichtung sehen wir gleiche Farben, in der anderen gleiche Formen. Eine fast beängstigende Ordnung.

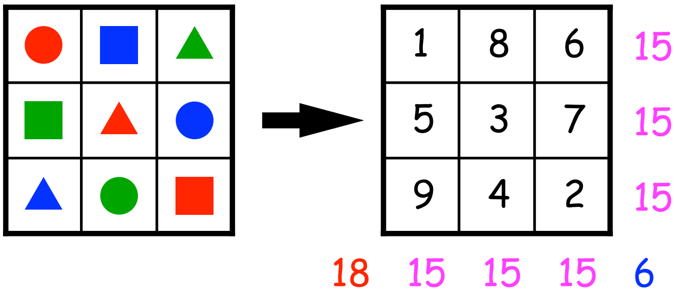
1.3 Codierung

Wir können mit einer Liste codieren.



Codierung

Damit ergibt sich aus der unordentlichen Darstellung:

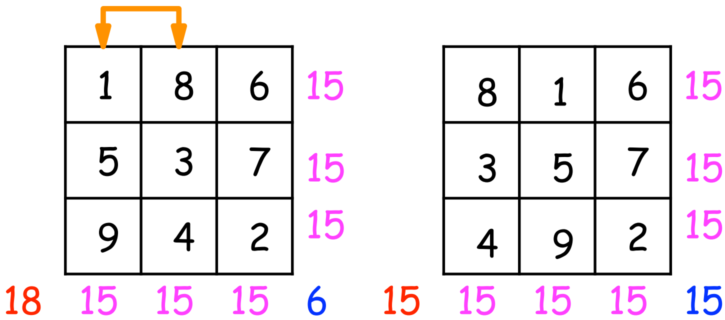


Codierung

Wir erhalten in jeder Zeile und in jeder Spalte die gleiche Summe, nämlich 15. Warum ist das so? Wir werden dies mit einer Idee von Euler einsehen.

Allerdings stimmen die Diagonalen nicht. Wir haben kein magisches Quadrat. Wir können dies aber justieren, indem wir die ersten beiden Spalten vertauschen.

Beim Vertauschen zweier Spalten (oder zweier Zeilen) ändern sich weder die Zeilensummen noch die Spaltensummen. Warum ist das so?

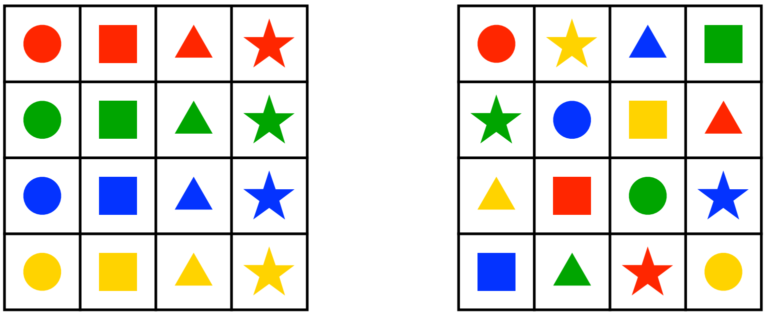


Vertauschen von Spalten

2 4×4-Quadrat

2.1 Beispiel

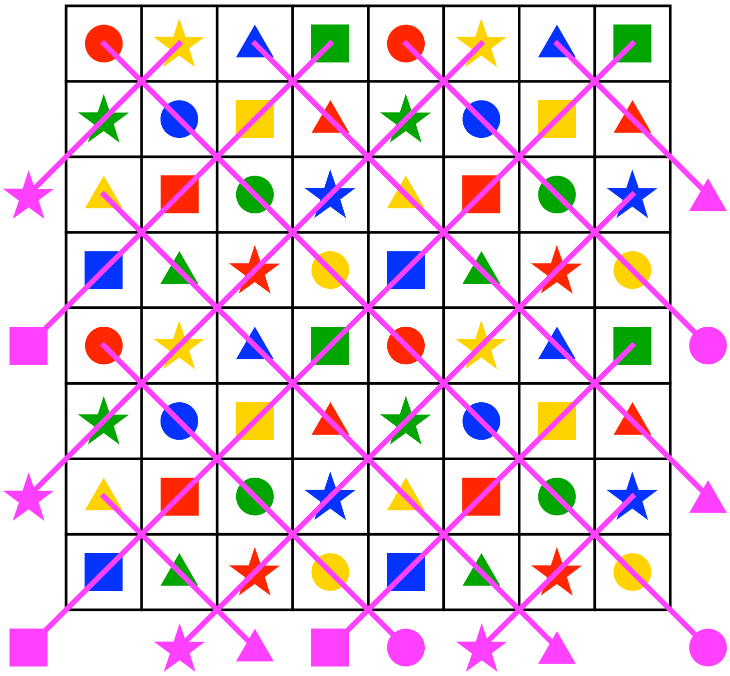
Im Mathematikum in Gießen gibt es eine erweiterte Version unseres Spiels. Links die ordentliche, rechts eine unordentliche Situation.



Erweiterung des Spiels

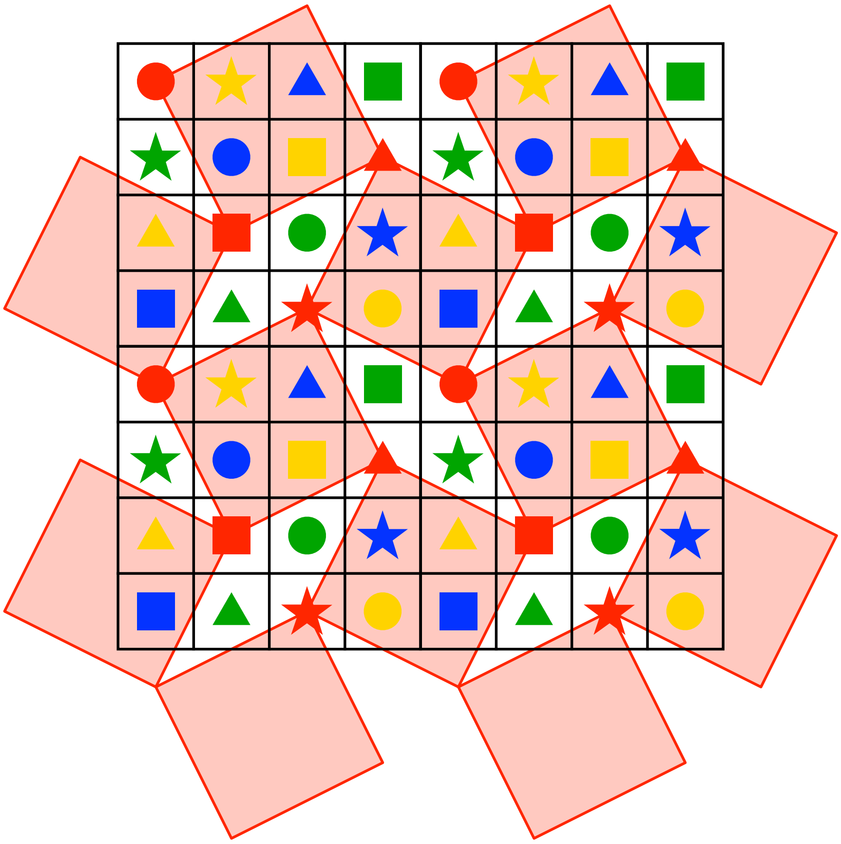
2.2 Parkett

In einem Parkett aus der unordentlichen Situation erkennen wir Strukturen. Einerseits haben wir Diagonalen mit gleichen Formfiguren.



Diagonalen mit gleichen Formen

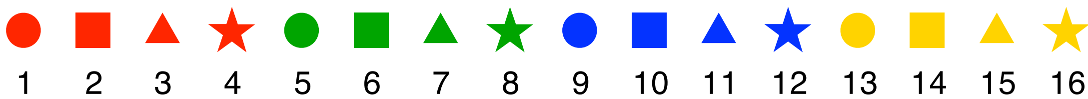
Die Figuren mit gleichen Farben, zum Beispiel rot, bilden ein Raster mit Quadraten und Rhomben. Analog mit den andren drei Farben.



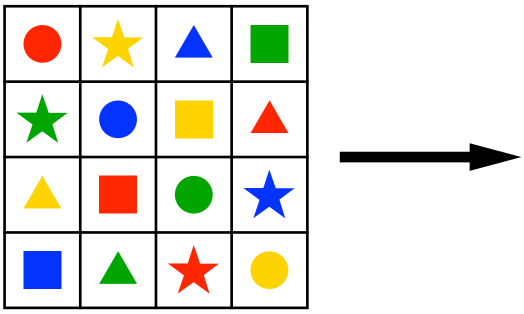
Rote Quadrate

2.3 Codierung

Wir codieren im unordentlichen Quadrat mit folgender Liste:



Codierliste



	1	16	11	6	34
	8	9	14	3	34
	15	2	5	12	34
	10	7	4	13	34
32	34	34	34	34	28

Codierung

Wir erhalten wiederum Quadrate mit konstanten Zeilen- und Spaltensummen. Und wiederum stimmen die Diagonalen nicht.

2.4 Magisches Quadrat

Mit einer zyklischen Vertauschung von drei Spalten können wir das regeln.

	1	16	11	6	34
	8	9	14	3	34
	15	2	5	12	34
	10	7	4	13	34
32	34	34	34	34	28

	16	6	11	1	34
	9	3	14	8	34
	2	12	5	15	34
	7	13	4	10	34
34	34	34	34	34	34

Zyklische Vertauschung von drei Spalten. Magisches Quadrat

Die Zeilen-, Spalten- und Diagonalensumme 34 finden wir auch an anderen Orten.

16	6	11	1
9	3	14	8
2	12	5	15
7	13	4	10

16	6	11	1
9	3	14	8
2	12	5	15
7	13	4	10

16	6	11	1
9	3	14	8
2	12	5	15
7	13	4	10

Summe 34

16	6	11	1
9	3	14	8
2	12	5	15
7	13	4	10

16	6	11	1
9	3	14	8
2	12	5	15
7	13	4	10

16	6	11	1
9	3	14	8
2	12	5	15
7	13	4	10

Summe 34. Gibt es weitere Beispiele?

3 Zweistellige Codierung

Mit einer zweistelligen Codierung erhalten wir Einsicht in die Invarianz der Zeilen- und Spaltensummen.

3.1 Farbe und Form

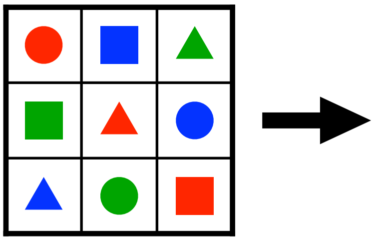
Wir codieren unser Einstiegsbeispiel zweistellig nach den Kriterien Farbe und Form.

Farbcode	
rot	0
grün	1
blau	2

Formcode	
○	0
□	1
△	2

Zweistellige Codierung

Das blaue Quadrat erhält somit den Code (blau / Quadrat) = 21. Wir codieren entsprechend das ganze unordentliche Quadrat:



00	21	12
11	02	20
22	10	01

Zweistellig codiert

Wenn wir die Codierung als Dezimalzahlen interpretieren, haben wir in jeder Zeile und in jeder Spalte die Summe 33. Wir haben in jeder Zeile und in jeder Spalte jeden Einer aus $\{0, 1, 2\}$ und jeden Zehner aus $\{00, 10, 20\}$ genau einmal.

3.2 Zahlensystem auf der Basis 3

Nun codieren wir nochmals um: Wir fassen die „Zehner“ als „Dreier“ auf. Statt

$$21 = 2 \cdot 10 + 1$$

interpretieren wir:

$$21 = 2 \cdot 3 + 1 = 7$$

Klartext: Wir interpretieren die Zahlen im Positionssystem zur Basis drei und rechnen ins Dezimalsystem um. Es ergibt sich der Schlüssel:

Dreiersystem	00	01	02	10	11	12	20	21	22	100
Dezimalsystem	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Umrechnungsschlüssel

Damit erhalten wir:

00	21	12
11	02	20
22	10	01

0	7	5
4	2	6
8	3	1

Übersetzung ins Dezimalsystem

Wir haben nun in jeder Zeile und in jeder Spalte jeden „Einer“ und jeden „Dreier“ genau einmal.
Und nun addieren wir noch 1, damit wir wie üblich die Zahlen von 1 bis 9 erhalten.

0	7	5
4	2	6
8	3	1

1	8	6
5	3	7
9	4	2

Addition von 1

3.3 Hexenhäuschen

Jetzt haben wir eine „Hexenhäuschen“ (Ausdruck einer Schülerin): Zahlen von 1 bis 9; in jeder Spalte und in jeder Zeile gibt es die Summe 15.

1	8	6	15
5	3	7	15
9	4	2	15
15	15	15	

Hexenhäuschen

Mit irgend einem maximal unordentlichen Quadrat ergibt das zweitstellige Codierungsverfahren ein Hexenhäuschen.
Hexenhäuschen sind keine „magischen Quadrate“; in den Diagonalen stimmt es in der Regel nicht mit der Summe.

4 Rechnen mit Hexenhäuschen

Wir arbeiten mit quadratischen 3×3-Zahlenschemas (Matrizen), deren Zeilen- und Spaltensummen jeweils konstant sind. Die Zahlen müssen nicht mehr aufenander folgend von 1 bis 9 laufen. Sie können auch negativ oder sogar reell sein.

4.1 Addition und Subtraktion

$$\begin{array}{ccc|c} 1&8&6&15\\ 5&3&7&15\\ 9&4&2&15\\ \hline 15&15&15& \end{array} \;+\; \begin{array}{ccc|c} 0&3&5&8\\ 4&2&2&8\\ 4&3&1&8\\ \hline 8&8&8& \end{array} \;=\; \begin{array}{ccc|c} 1&11&11&23\\ 9&5&9&23\\ 13&7&3&23\\ \hline 23&23&23& \end{array}$$

Addition

$$\begin{array}{ccc|c} 1&8&6&15\\ 5&3&7&15\\ 9&4&2&15\\ \hline 15&15&15& \end{array} \;-\; \begin{array}{ccc|c} 0&3&5&8\\ 4&2&2&8\\ 4&3&1&8\\ \hline 8&8&8& \end{array} \;=\; \begin{array}{ccc|c} 1&5&1&7\\ 1&1&5&7\\ 5&1&1&7\\ \hline 7&7&7& \end{array}$$

Subtraktion

Summe und Differenz zweier Hexenhäuschen ist wieder ein Hexenhaus. Die Zeilen- und Spaltensummen sind ebenfalls Summe beziehungsweise Differenz.

Nachweis trivial.

4.2 Skalare Multiplikation

$$3 \;*\; \begin{array}{ccc|c} 0&3&5&8\\ 4&2&2&8\\ 4&3&1&8\\ \hline 8&8&8& \end{array} \;=\; \begin{array}{ccc|c} 0&9&15&24\\ 12&6&6&24\\ 12&9&3&24\\ \hline 24&24&24& \end{array}$$

Skalare Multiplikation

Multiplizieren eines Hexenhäuschens gibt wieder ein Hexenhaus. Die Zeilen- und Spaltensummen werden entsprechend multipliziert. Nachweis trivial.

Die Hexenhäuschen bilden einen Vektorraum.

4.3 Matrixprodukt

$$\begin{array}{|c|c|c|c} \hline 1 & 8 & 6 & 15 \\ \hline 5 & 3 & 7 & 15 \\ \hline 9 & 4 & 2 & 15 \\ \hline 15 & 15 & 15 & \end{array} \quad * \quad \begin{array}{|c|c|c|c} \hline 0 & 3 & 5 & 8 \\ \hline 4 & 2 & 2 & 8 \\ \hline 4 & 3 & 1 & 8 \\ \hline 8 & 8 & 8 & \end{array} \quad = \quad \begin{array}{|c|c|c|c} \hline 56 & 37 & 27 & 120 \\ \hline 40 & 42 & 38 & 120 \\ \hline 24 & 41 & 55 & 120 \\ \hline 120 & 120 & 120 & \end{array}$$

Matrixprodukt

Das Matrixprodukt zweier Hexenhäuschen ist wieder ein Hexenhäuschen. Nachweis eine umfangreiche Rechnerei mit Summen. Zeilen- und Spaltensummen sind zu multiplizieren.

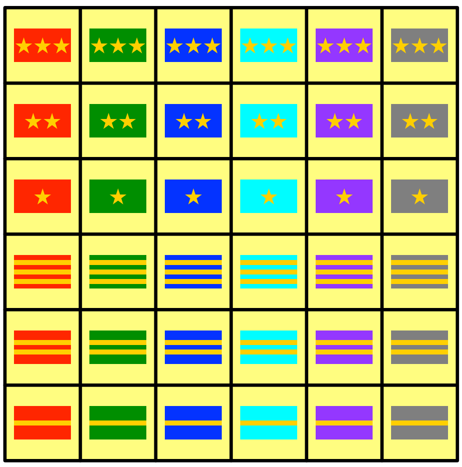
5 Das Problem mit den 36 Offizieren

Es wird berichtet, dass Leonhard Euler, der ab 1766 wieder in St. Petersburg lebte und arbeitete, von der Zarin Katharina der Großen folgende Aufgabe erhielt.

5.1 Originalproblem

Zum Divisionsball ordnet jedes der sechs anwesenden Regimenter für jeden der sechs Dienstgrade je einen Offizier ab: Diese sechsunddreißig Offiziere sollen zur Feier des Tages so im Quadrat aufgestellt werden, dass in jeder Zeile und jeder Spalte genau ein Offizier eines jeden Regiments und eines jeden Dienstgrades steht.

Die Abbildung zeigt schematisch die ordentliche Version.



Ordentliche Version

Wir haben ebenfalls zwei Kriterien, Regiment und Dienstgrad, und zu jedem Kriterium sechs Fälle. Das Problem erwies sich als sehr schwierig.

Auch Euler fand keine Lösung für die maximal unordentliche Situation.

Er versuchte es mit Quadraten anderer Größen, wo er Lösungen fand.

5.2 5×5-Quadrat

Euler verwendete für die beiden Kriterien mit lateinischen und griechischen Buchstaben. Für ein 5×5-Quadrat sieht das dann so aus:

Aα	Bδ	Cβ	Dε	Eγ
Bβ	Cε	Dγ	Eα	Aδ
Cγ	Dα	Eδ	Aβ	Bε
Dδ	Eβ	Aε	Bγ	Cα
Eε	Aγ	Bα	Cδ	Dβ

	1	9	12	20	23	65
	7	15	18	21	4	65
	13	16	24	2	10	65
	19	22	5	8	11	65
	25	3	6	14	17	65
115	65	65	65	65	65	65

Griechisch-lateinisches Quadrat. Codierung

Die griechischen Buchstaben sind senkrecht alphabetisch angeordnet, aber in jeder Spalte gegenüber der vorhergehenden um 2 versetzt. In jeder Zeile und jeder Spalte kommt jeder griechische Buchstabe genau einmal vor.

Die lateinischen Buchstaben sind in den Zeilen mit jeweils einem Versatz von 1 alphabetisch angeordnet. In jeder Zeile und jeder Spalte kommt jeder lateinische Buchstabe genau einmal vor.

Jede der 25 möglichen Kombinationen eines griechischen Buchstabens mit einem lateinischen Buchstaben kommt genau einmal vor.

Wir können im Zahlensystem mit der Basis 5 ein Zahlenquadrat mit konstanten Zeilen- und Spaltensummen bauen.

Bei den Diagonalensummen stimmt nur eine. In [1] ergibt sich mit einer anderen Buchstabenanordnung direkt ein magisches Quadrat.

5.3 Magisches Quadrat

Wir versuchen, auch die andere Diagonalensumme (rot) zum Stimmen zu bringen.

Grundsätzlich können wir zwei beliebige Zeilen oder Spalten vertauschen, ohne dass sich an den Zeilen- und Spaltensummen etwas ändert. Allerdings wird dabei in der Regel die Stimmigkeit in der blauen Diagonale zerstört.

	1	9	12	20	23	65
	7	15	18	21	4	65
	13	16	24	2	10	65
	19	22	5	8	11	65
	25	3	6	14	17	65
115	65	65	65	65	65	65

	13	16	24	2	10	65
	7	15	18	21	4	65
	1	9	12	20	23	65
	19	22	5	8	11	65
	25	3	6	14	17	65
90	65	65	65	65	65	65

Vertauschen zweier Zeilen

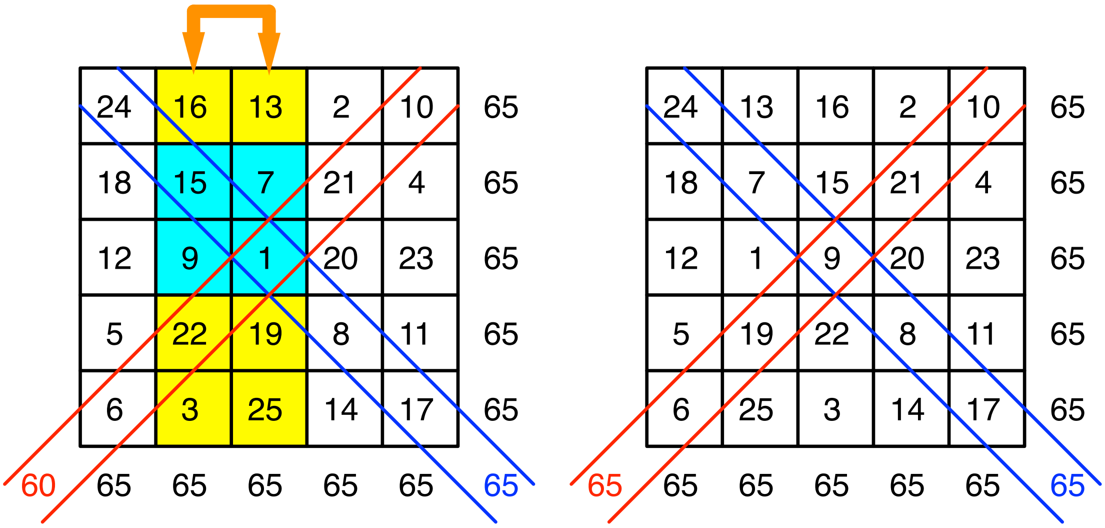
Die blau unterlegten Felder sind die Ecken eines Quadrates, dessen beide diametrale Summen mit 25 gleich groß sind. Wir können daher die zugehörigen Zeilen vertauschen, ohne dass die Stimmigkeit in der blauen Diagonale gestört wird. In der roten Diagonale haben wir neu die Summe 90. Besser, aber noch nicht gut.

	13	16	24	2	10	65
	7	15	18	21	4	65
	1	9	12	20	23	65
	19	22	5	8	11	65
	25	3	6	14	17	65
90	65	65	65	65	65	65

	24	16	13	2	10	65
	18	15	7	21	4	65
	12	9	1	20	23	65
	5	22	19	8	11	65
	6	3	25	14	17	65
60	65	65	65	65	65	65

Vertauschen zweier Spalten

Wir können denselben Trick nochmals anwenden und die beiden markierten Spalten vertauschen. In der roten Diagonale haben wir nun die Summe 60. Das ist zu wenig.



Nochmals Vertauschen zweier Spalten

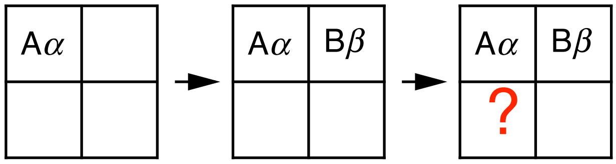
Nach einer weiteren Vertauschungsaktion erhalten wir (zufällig?) die rote Diagonalensumme 65. Wir haben ein magisches Quadrat für $n = 5$ gefunden.

24	13	16	2	10
18	7	15	21	4
12	1	9	20	23
5	19	22	8	11
6	25	3	14	17

Magisches Quadrat

5.4 n = 2

Dass es für $n = 2$ nicht geht, ist sofort klar. Wenn wir links oben mit Aα anfangen, folgt:

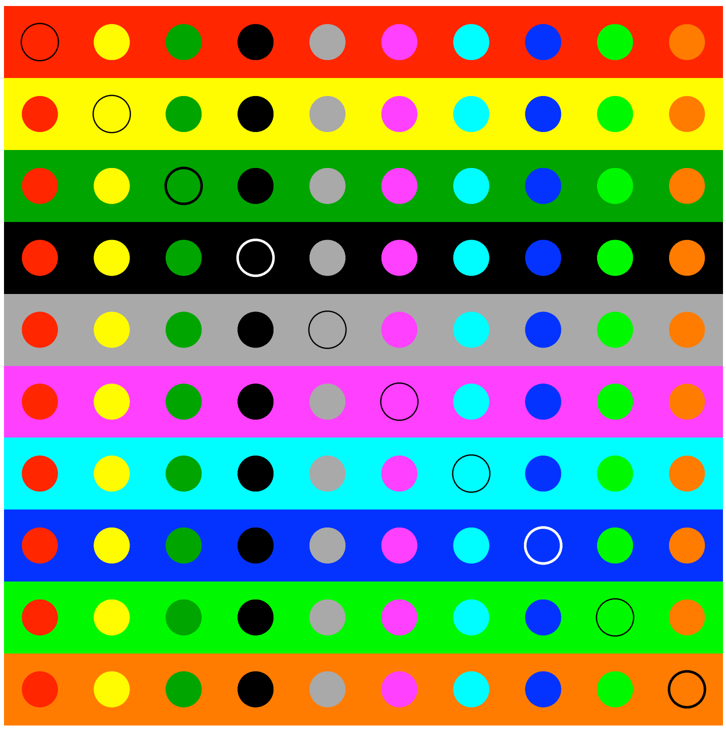


Versuch

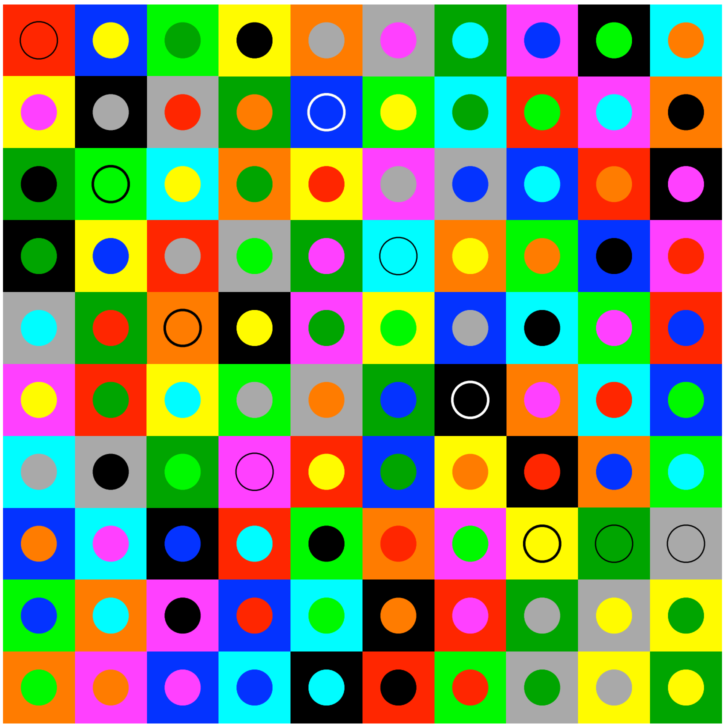
Im Feld links unten müsste wieder Bβ stehen, das ist aber bereits rechts oben gesetzt.

5.5 Eine nicht zutreffende Vermutung

Euler vermutete auf Grund seiner Arbeiten, dass es für alle Zahlen eine Lösung gibt außer für 2, 6, 10, 14, ... Einen Beweis fand er nicht. Tatsächlich ist die Vermutung der Nichtexistenz einer Lösung nur richtig für 2 und 6. Erst 1901 wurde vom französischen Mathematiker Gaston Tarry die Nichtexistenz einer Lösung für $n = 6$ bewiesen. Und erst 1959 fanden die amerikanischen Mathematiker Bose und Shrikhande mit Hilfe von Computern ein Gegenbeispiel (also eine Lösung) für $n = 10$.



Ordentlich



Unordentlich

Schließlich bewiesen 1960 Parker, Bose und Shrikhande, dass Eulers Vermutung falsch ist für alle Zahlen größer oder gleich 10.

5.6 … und was sagt Euler dazu?

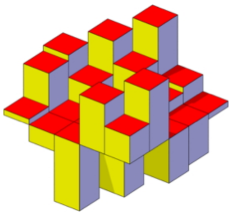
„Ich habe mit dieser Methode eine sehr grosse Zahl derartiger umgeformter Quadrate untersucht, ohne ein einziges anzutreffen, das nicht denselben Fehler aufgewiesen hätte: dass es nämlich kein System von “Konstruktionsformeln” gab, bei dem nicht die eine oder andere vertikale Reihe eine Zahl zweimal enthielt. Ich zögere nicht, daraus zu schliessen, dass man kein vollständiges Quadrat von 36 Feldern herstellen kann, und dass dieselbe Unmöglichkeit sich auf die Fälle n = 10, n = 14 und allgemein auf alle “ungerade geraden” Zahlen [d.h. Zahlen, die bei Division durch 4 den Rest 2 haben] erstreckt.“

« J’ai examiné par cette méthode un très grand nombre de quarrés transformés semblables, sans en rencontrer un seul qui n'ait eu le même inconvénient, de ne fournir aucun Système de directrices dont l’une ou l'autre bande verticale ne renfermât un nombre deux fois, et je n'ai pas hésité d'en conclure qu'on ne sauroit produire aucun quarré complet de 36 cases, et que la meme impossibilité s'étende aux cas de n = 10, n = 14 et en général à tous les nombres impairement pairs. » (Euler 1782).

Literatur

Euler, Leonhard (1782) : E 530, Recherches sur une nouvelle espèce de quarrés magiques, Vlissingen 1782 - Opera I 7, p. 291-392.

Walser, Hans (2018): Magische Symmetrie. MI, Mathematikinformation Nr. 69, 15. September 2018. ISSN 1612-9156. 25-33.



Bei der Analyse magischer Quadrate ungerader Seitenlänge treten verschiedene Symmetrien auf. Umgekehrt ist für die Konstruktion magischer Quadrate ein symmetrisches modulo-Rechnen problemadäquat. Ebenso brauchen wir ein angepasstes symmetrisches Positionssystem.

Websites

[1] Hans Walser: Magische Quadrate ungerader Seitenlänge
http://www.walser-h-m.ch/hans/Miniaturen/M/Mag_Quadrate/Mag_Quadrate.htm

[2] Hans Walser: Magisches Fraktal
www.walser-h-m.ch/hans/Miniaturen/M/Magisches_Fraktal/Magisches_Fraktal.htm

[3] Hans Walser: Magische Kreise
http://www.walser-h-m.ch/hans/Miniaturen/M/Magische_Kreise/Magische_Kreise.htm

[4] Hans Walser: Magische Quadrate quadrieren
http://www.walser-h-m.ch/hans/Miniaturen/M/Mag_Quadrate2/Mag_Quadrate2.htm

[5] Hans Walser: Magische Quadrate überlagern
http://www.walser-h-m.ch/hans/Miniaturen/M/Mag_Quadrate4/Mag_Quadrate4.htm

[6] Hans Walser: Magisches Puzzle
http://www.walser-h-m.ch/hans/Miniaturen/M/Mag_Puzzle/Mag_Puzzle.htm

[7] Hans Walser: Muster in magischen Quadraten
www.walser-h-m.ch/hans/Miniaturen/M/Muster_i_mag_Quadraten/Muster_i_mag_Quadraten.htm

[8] Hans Walser: Magische Symmetrie (Vortrag)
http://www.walser-h-m.ch/hans/Vortraege/20181117/index.html