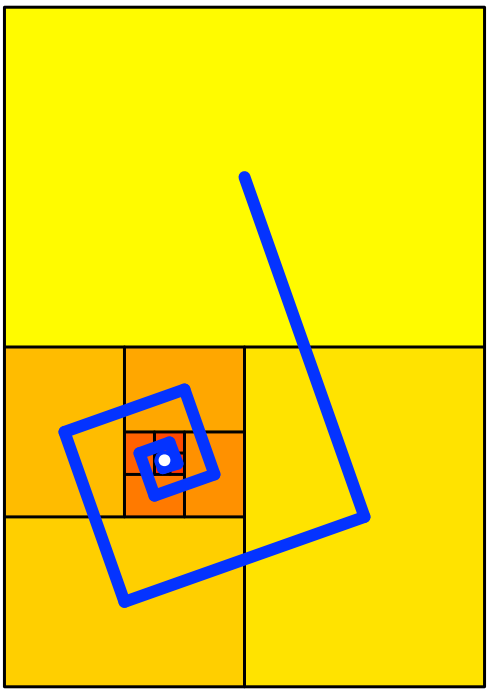
Hans Walser



Das DIN-Format

Phänomenale Mathematik

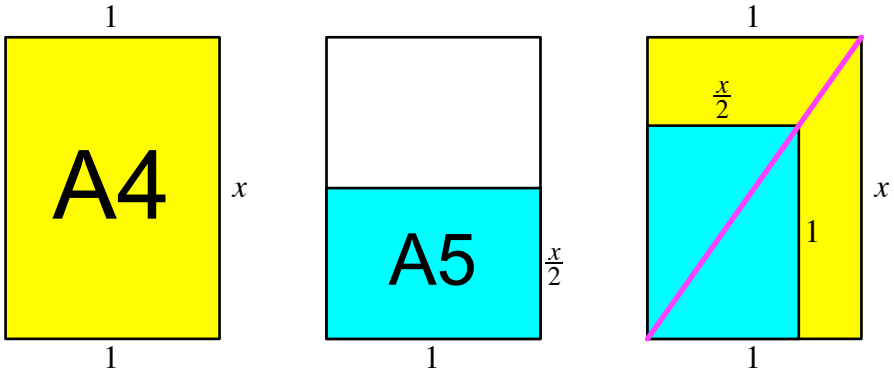
29. Mai 2019, 17:30-19:30
PH Bern

Zusammenfassung

Das DIN-Format ist mehr als ein Stück Papier und die Quadratwurzel aus Zwei.
Wir treffen auf Fragen der Perspektive, auf Spiralen, Grenzpunkte, Fragen der Abzählbarkeit, das Delische Problem, die gleichtemperierte 12-Ton-Stimmung, Jakobs Himmelsleiter, das Silberne Rechteck, Faltprobleme und Legespiele nach Fröbel.
Die Unterschiede zwischen einem DIN A4 Papier und einem US Letter Papier machen äußerlich nur einige Millimeter aus - die geometrischen und mathematischen Ideen dahinter unterscheiden sich fundamental.
Die Geschichte des DIN-Formates beginnt bei Georg Christoph Lichtenberg, dem Physiklehrer von Gauß. Aber erst der Nobelpreisträger Wilhelm Ostwald und sein Assistent Walter Porstmann verhalfen dem DIN-Format zum Durchbruch.

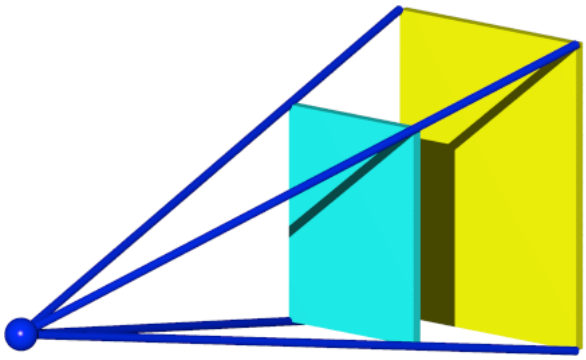
1 Wurzel aus zwei

Wenn wir ein DIN A4 Papier längs der kurzen Mittellinie falten, ergibt sich ein doppellagiges DIN A5 Papier. Dieses hat nun dieselbe Form (Ähnlichkeit), also dieselben Seitenverhältnisse wie das DIN A4 Papier, wie durch Anlegen an eine gemeinsame Diagonale nachgeprüft werden kann.



DIN A4 und DIN A5

Wir können die Ähnlichkeit auch mit einer räumlichen Perspektive überprüfen.

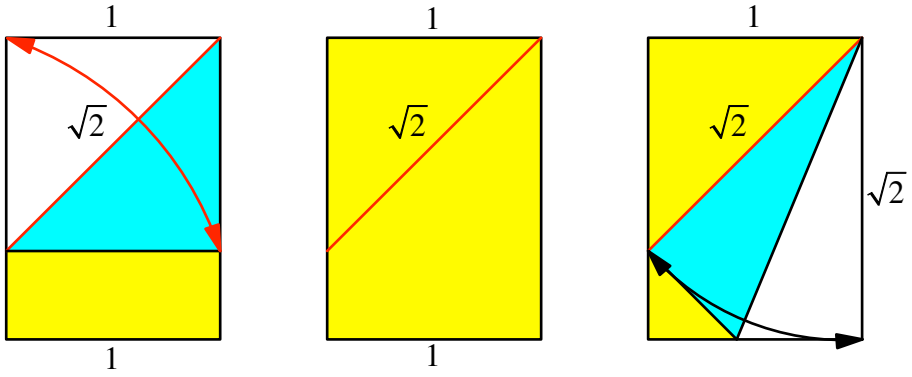


Perspektive

Mit der Schmalseite 1 und der Langseite x für das DIN A4 Rechteck erhalten wir aus der Ähnlichkeit:

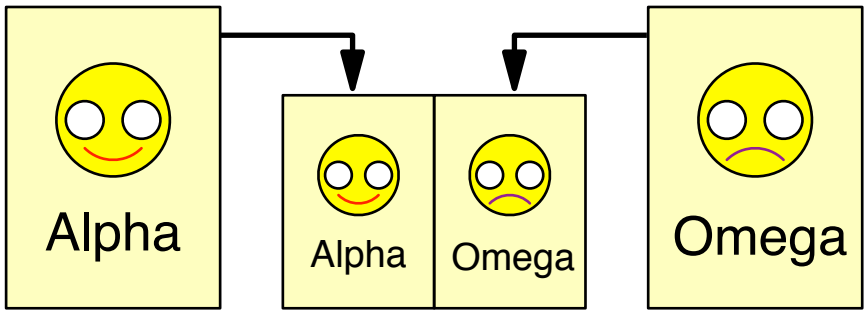
$$\frac{x}{1} = \frac{1}{\frac{x}{2}} \quad \Rightarrow \quad x = \sqrt{2}$$

Dieses Seitenverhältnis kann durch Falten nachgeprüft werden. Dabei benützen wir den Sachverhalt, dass im Quadrat die Diagonalen-Länge das $\sqrt{2}$-fache der Seitenlänge ist.



Kontrolle durch Falten

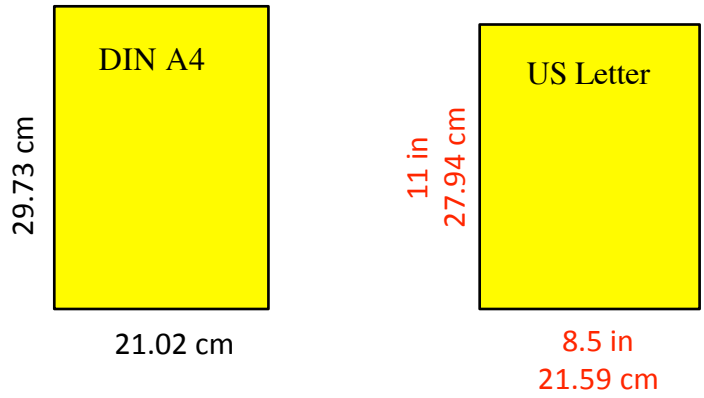
Dank dem Seitenverhältnis $\sqrt{2}:1$ können wir bei einem Drucker oder Kopierer zwei A4-Seiten im Hochformat auf eine A4-Seite im Querformat verkleinern.



Aus zwei mach eins

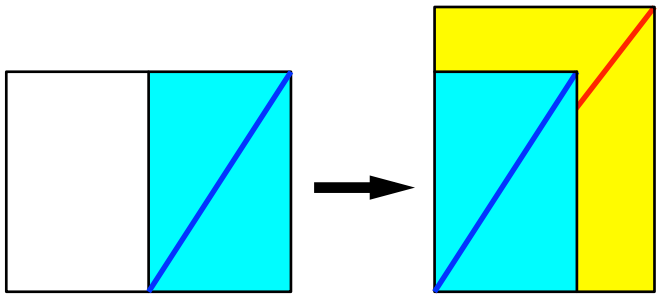
2 Vergleich mit dem Format US Letter

Die Maße für das DIN A4 Papier sind gerundet, die Maße für das Format US Letter sind exakt. Das US Letter Format hat ein rationales Seitenverhältnis.



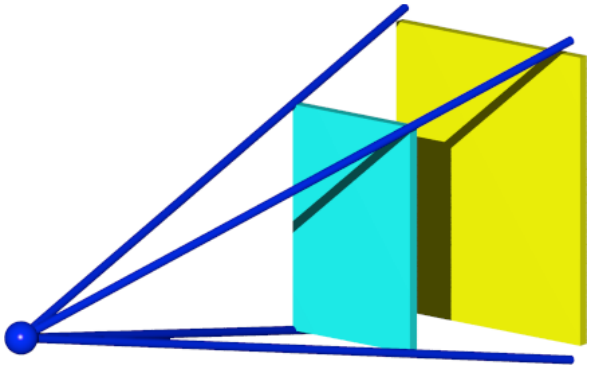
Vergleich der beiden Formate

Das halbe US Letter Papier ist nicht ähnlich zum ganzen US Letter Papier.



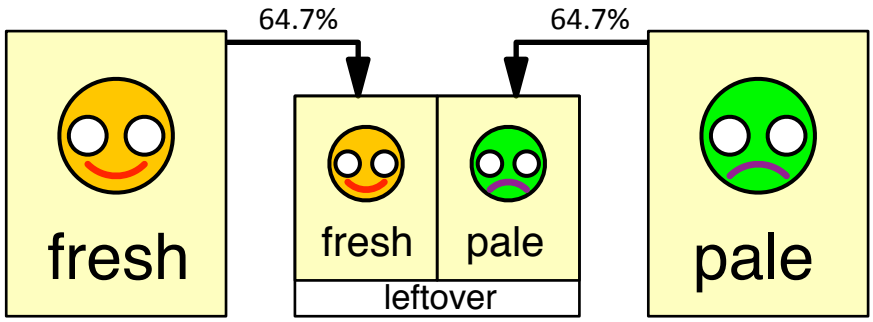
Keine Ähnlichkeit

Die Perspektive stimmt nicht.



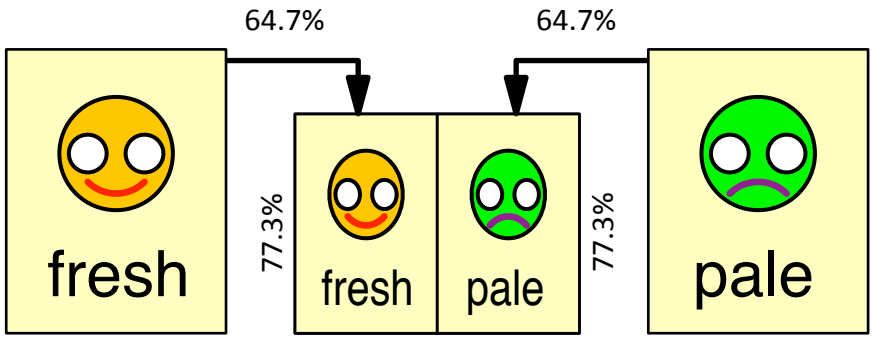
Fehlende Perspektive

Auch beim Kopierer klappt es nicht. Wir müssen mit 64.7% verkleinern, aber dann bleibt unten ein Reststück.



Aus zwei mach weniger als eins

Wollten wir das ganze Querformat-Papier verwenden, ergeben sich Verzerrungen.

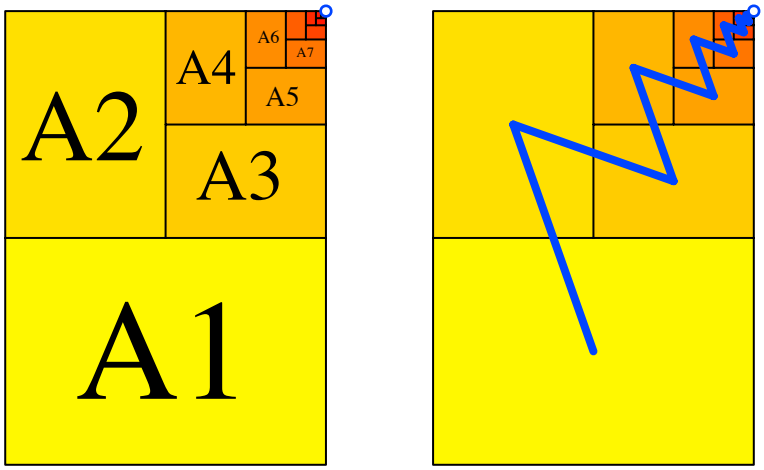


Verzerrungen

3 Ausschöpfen des A0-Rechteckes

3.1 Die klassische Art

Wir können mit einem Set von DIN-Rechtecken A1, A2, A3, ... ein A0-Rechteck ausschöpfen. Die Rechtecke sind im Wechsel im Quer- und Hochformat.

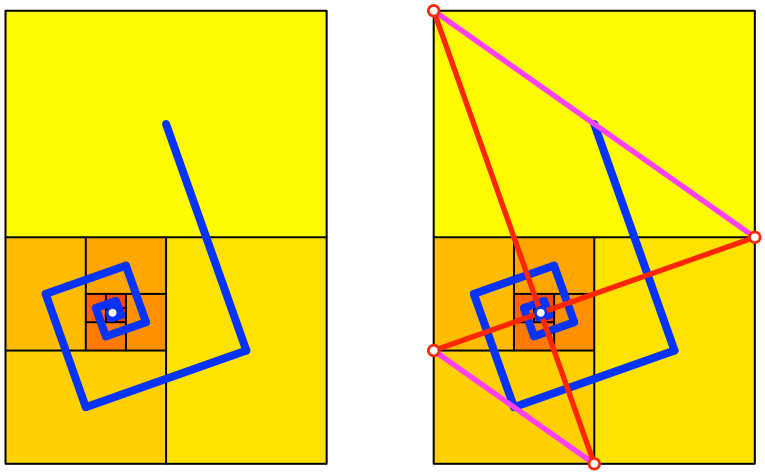


Ausschöpfung des A0-Rechteckes

Wenn wir die Mitten aufeinanderfolgender Rechtecke verbinden, ergibt sich eine Zickzack-Linie, welche in den Grenzpunkt rechts oben mündet.

3.2 Spiralförmige Anordnung

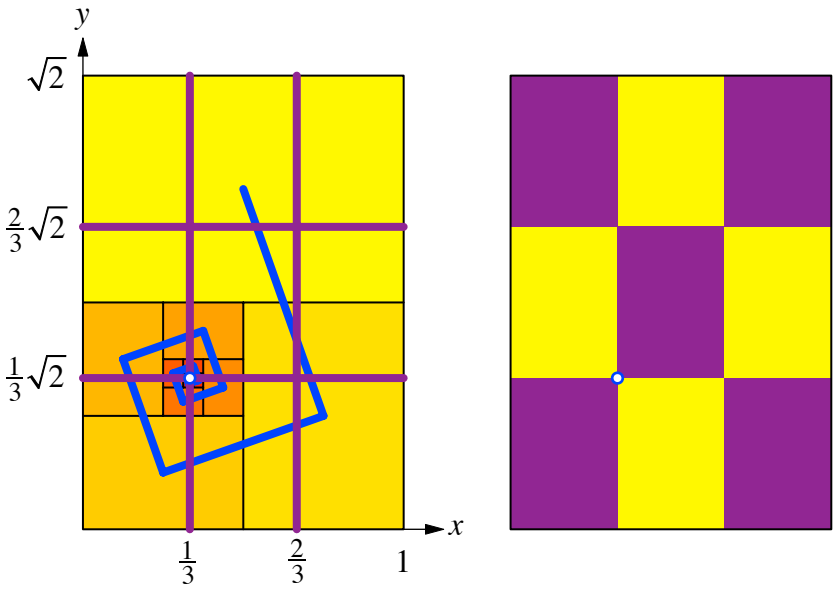
Wir können das Set von Rechtecken A1, A2, A3, ... aber auch spiralförmig anordnen.



Spiralförmige Anordnung

Der Grenzpunkt ergibt sich durch Einzeichnen geeigneter „Halbdiagonalen“ (magenta). Diese haben das Längenverhältnis 2:1. Damit ergibt sich eine Drittelung.

Der Grenzpunkt hat „Drittelkoordinaten“.



Drittel bei den Koordinaten

Das kann wie folgt eingesehen werden: Wenn auf der Höhe des Grenzpunktes von links her einfahren, treffen wir nur Hochformat-Rechtecke, und zwar der Reihe nach A4, A8, A12, A16, ... Diese haben im angegebenen Koordinatensystem die Breiten $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{16}$, $\frac{1}{64}$, $\frac{1}{256}$, ... Für die x-Koordinate des Grenzpunktes ergibt sich daher die geometrische Reihe:

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{64}+\frac{1}{256}+\cdots=\frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}}=\frac{1}{3}$$

Ein violettes Rechteck der vorstehenden Abbildung hat das Seitenverhältnis des DIN-Formates. Es bedeckt einen Neuntel des A0-Rechteks. Welchen DIN-Code hat es?

Dazu vergleichen wir mit den Flächenanteilen im DIN-System.

Format	A0	A1	A2	A3	A4	A5	⋯	An
Flächenanteil	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{32}$	⋯	$\left(\frac{1}{2}\right)^n$

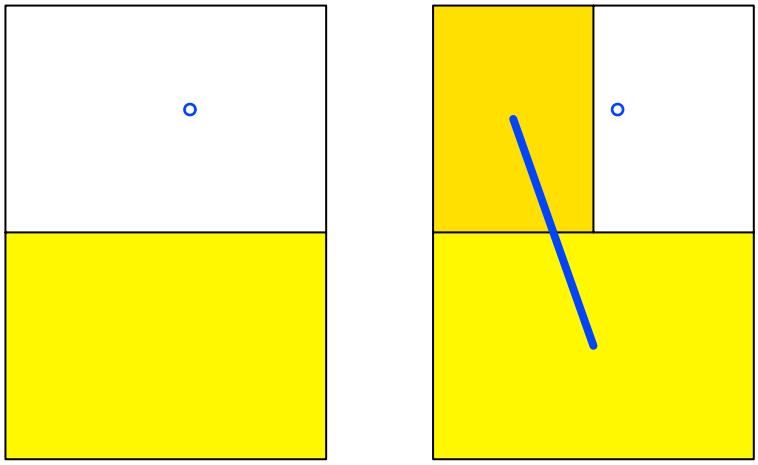
Wir sehen, dass unser violettes Rechteck zwischen A3 und A4 liegt, gefühlsmäßig näher an A3. Rechnerisch erhalten wir:

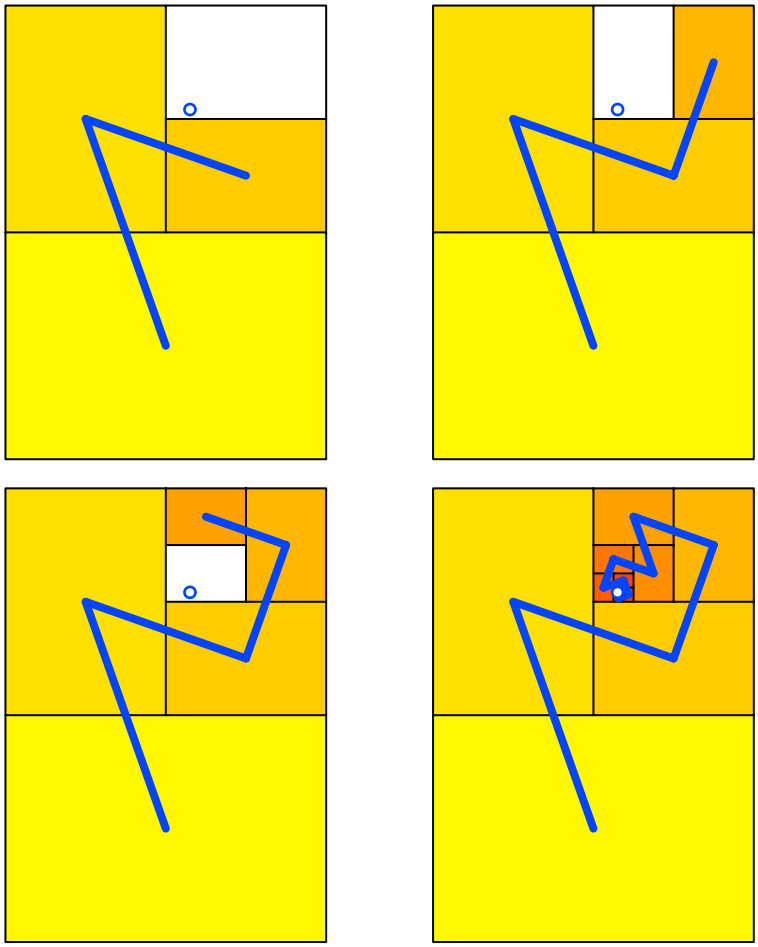
$$\left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{9}$$

$$n = \frac{\log\left(\frac{1}{9}\right)}{\log\left(\frac{1}{2}\right)} \approx 3.1699$$

3.3 Andere Grenzpunkte

Jeder Punkt im Innern oder auf dem Rand des A0-Rechteckes kann Grenzpunkt werden. Dazu verwenden wir folgenden Algorithmus („Die Katze schleicht um den heißen Brei“): Wir füllen das A0-Rechteck mit einem Set von DIN-Rechtecken A1, A2, A3, ... so auf, dass der anvisierte Grenzpunkt nie ins Innere eines Set-Rechteckes gelangt. Die folgende Abbildung zeigt die ersten fünf Schritte und die Grenzfigur.



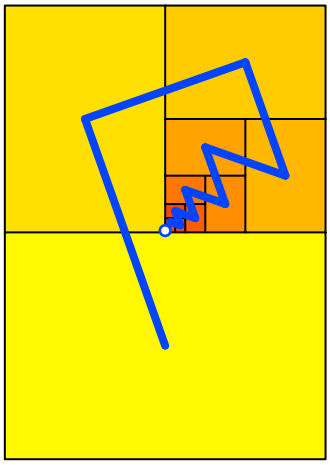


Beliebiger Grenzpunkt

Natürlich wird der Algorithmus ambivalent, wenn der anvisierte Grenzpunkt auf den Rand eines Set-Rechteckes zu liegen kommt. Dies ist genau dann der Fall, wenn die x-Koordinate und/oder die y-Koordinate modulo $\sqrt{2}$ eine abbrechende Dualbruchentwicklung haben.

In diesem Fall entscheiden wir uns für „unten“ beziehungsweise „links“. Dieser Entscheid ist von derselben Qualität wie der Entscheid, ein Halbes im Dezimalsystem durch 0.5 und nicht durch 0.4999... darzustellen.

Die folgende Abbildung zeigt die Situation mit dem Grenzpunkt in der Mitte des A0-Rechtecks.



Grenzpunkt in der Mitte

Die Figur ist asymmetrisch, muss es sein, da bei einer Symmetrie im A0-Rechteck jedes Teil doppelt oder vierfach erscheinen müsste.

3.4 Mächtigkeiten

Ein Set von DIN-Rechtecken A1, A2, A3, ... ist abzählbar (es ist ja bereits nummeriert). Es hat die Mächtigkeit $\aleph_0$. Da jeder Punkt eines Din A0-Rechteckes Grenzpunkt sein kann, haben wir für diese Punkte nach unserem Algorithmus die Mächtigkeit $2^{\aleph_0}$, da es für jedes Set-Rechteck zwei Positionsmöglichkeiten gibt.

4 Historisches

4.1 Georg Christoph Lichtenberg

Georg Christoph Lichtenberg, 1742-1799

Georg Christoph Lichtenberg hat seinen Studierenden die Aufgabe gestellt, ein Rechteck zu finden, das sich durch Halbieren mit der Schere in zwei zum Ausgangsrechteck ähnliche Rechtecke zerschneiden lässt.

4.2 Wilhelm Ostwald

Wilhelm Ostwald, 1853-1932

Der Chemiker und Nobelpreisträger (1909) Wilhelm Ostwald stipulierte das *Weltformat*, das er längenmäßig mit dem metrischen System verband.

Weltformat I maß 1cm auf 1.4 cm, Weltformat II dann 1.41cm auf 2cm usw.. Dieses Weltformat hat sich nur in wenigen Bereichen durchgesetzt. Plakate in der Schweiz sind im Weltformat XIV (90.6cm auf 128cm).

4.3 Walter Porstmann

Walter Porstmann, 1886-1959

Walter Porstmann war Assistent bei Wilhelm Ostwald. Er verknüpfte das Format flächenmäßig mit dem metrischen System. Daraus ist das heute gebräuchliche DIN-Format entstanden. DIN A0 hat den Flächeninhalt $1m^2$.

5 Andere Figuren

Gibt es andere Figuren, die in zwei kongruente, zur Ausgangsfigur ähnliche Teilfiguren zerlegbar sind?

Die Frage ist allgemein gehalten, es ist nicht von *Halbieren* die Rede, sondern nur von *Zerlegen*.

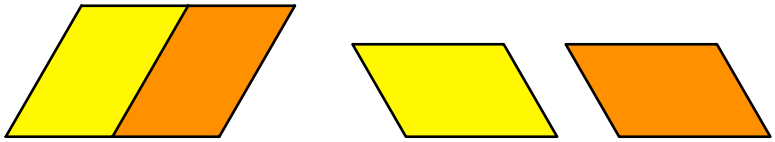
5.1 Strecke

Das einfachste Beispiel ist eine Strecke.

Strecke

5.2 DIN-Parallelogramm

Wir können die DIN-Rechtecke zu Parallelogrammen verscheren.

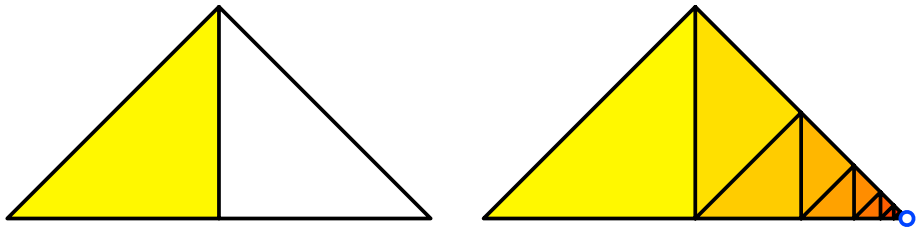


Parallelogramme

Die Teilparallelogramme sind *ungleichsinnig* ähnlich zum Startparallelogramm.

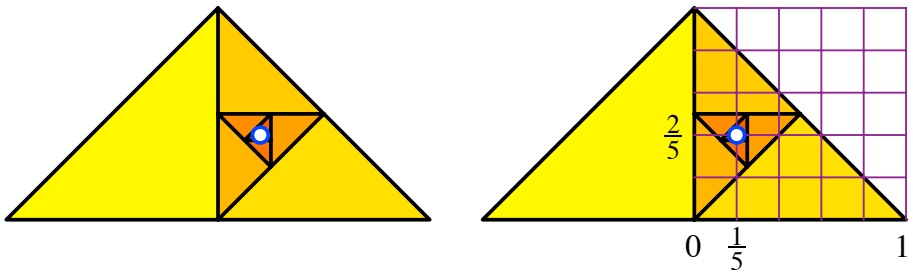
5.3 Das rechtwinklig-gleichschenklige Dreieck

Das naheliegende Beispiel ist das rechtwinklig-gleichschenklige Dreieck. Bei der einfachsten Zerlegung gibt es einen Grenzpunkt unten rechts.



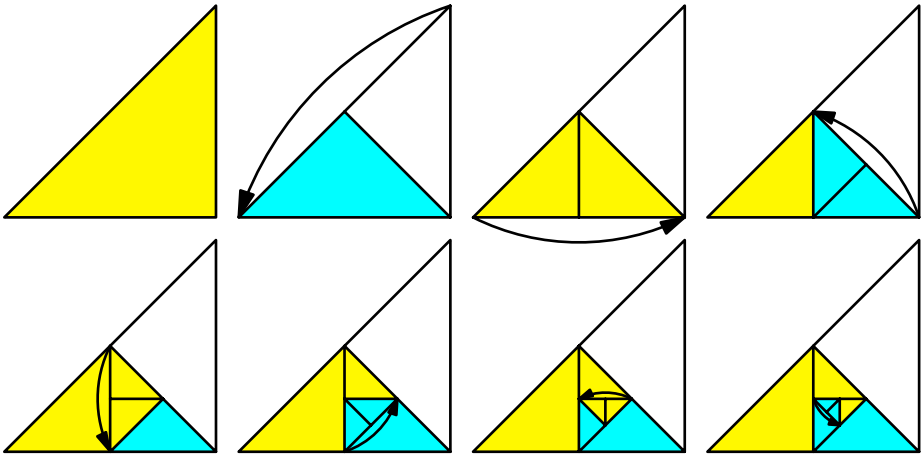
Das rechtwinklig-gleichschenklige Dreieck

Es gibt im rechtwinklig-gleichschenkligen Dreieck ebenfalls eine spiralförmige Anordnung. Der Grenzpunkt führt zu Fünfteln.

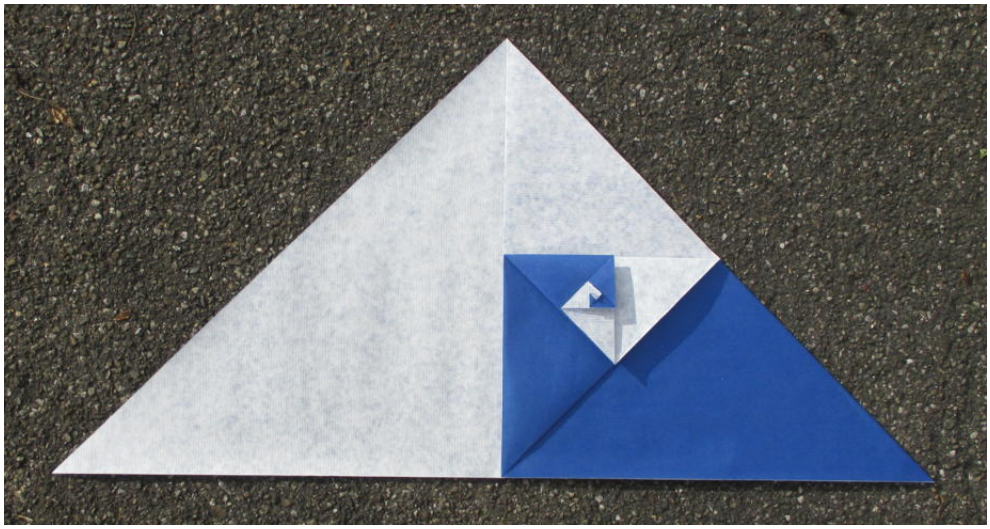


Spiralförmige Anordnung

Die Figur kann auch aus einem halben Origami Papier durch fortlaufendes Falten erreicht werden.

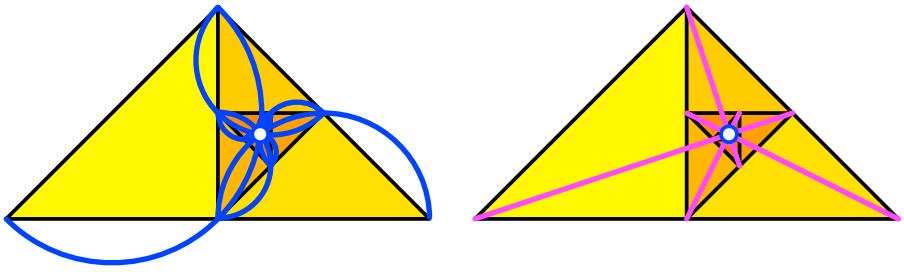


Faltprozess



Faltmodell

Die Thaleskreise der Teildreiecke verlaufen durch den Grenzpunkt, ebenso eine Art „Halbdiagonalen“.



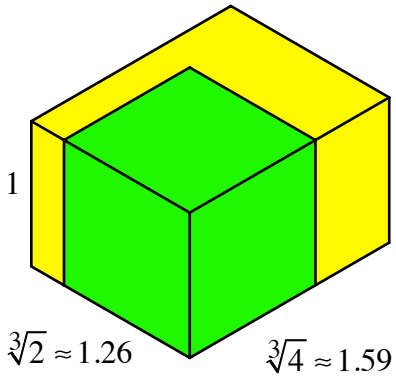
Thaleskreise. Halbdiagonalen

5.4 Der Sprung in den Raum

5.4.1 DIN-Quader

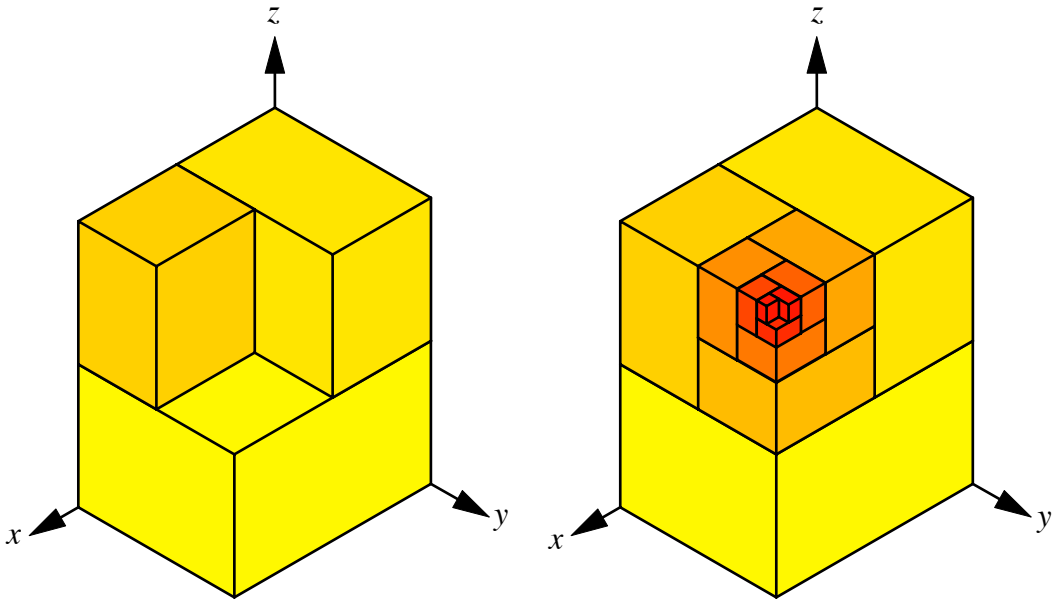
Wird ein Quader mit dem Kantenverhältnis $2:\sqrt[3]{4}:\sqrt[3]{2}$ halbiert, ergeben sich zwei Quader mit dem Kantenverhältnis $\sqrt[3]{4}:\sqrt[3]{2}:1$. Diese sind ähnlich zum ursprünglichen

Quader. Die folgende Abbildung zeigt einen DIN-Quader mit dem Kantenverhältnis $\sqrt[3]{4}:\sqrt[3]{2}:1$ im Vergleich zum Einheitswürfel.



DIN-Quader und Einheitswürfel

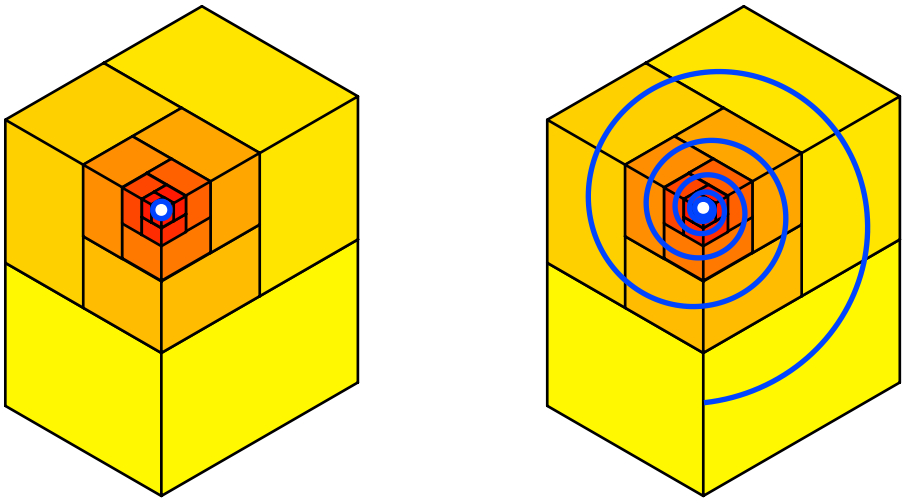
Die folgende Abbildung zeigt eine Anordnung eines DIN-Quader-Sets analog zur klassischen Anordnung eines Sets von DIN-Rechtecken.



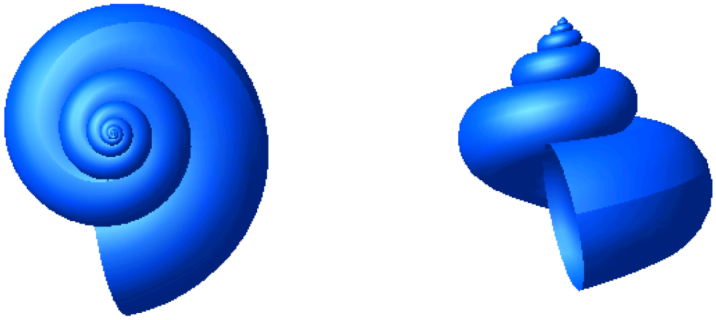
Anordnung

Während bei Rechtecken nur zwischen Querformat und Hochformat unterschieden werden kann, brauchen wir hier drei Anaordnungsformate. Dazu dient das beigefügte Koordinatensystem. Der erste Quader hat seine längsten Kanten in der *x*-Richtung, der zweite Quader hat seine längsten Kante in der *y*-Richtung und der dritte Quader in der *z*-Richtung. Der vierte Quader hat seine längsten Kanten wiederum in der *x*-Richtung.

Die Quader sind in einer Art räumlicher Spirale wie bei einer Wasserschnecke angeordnet.

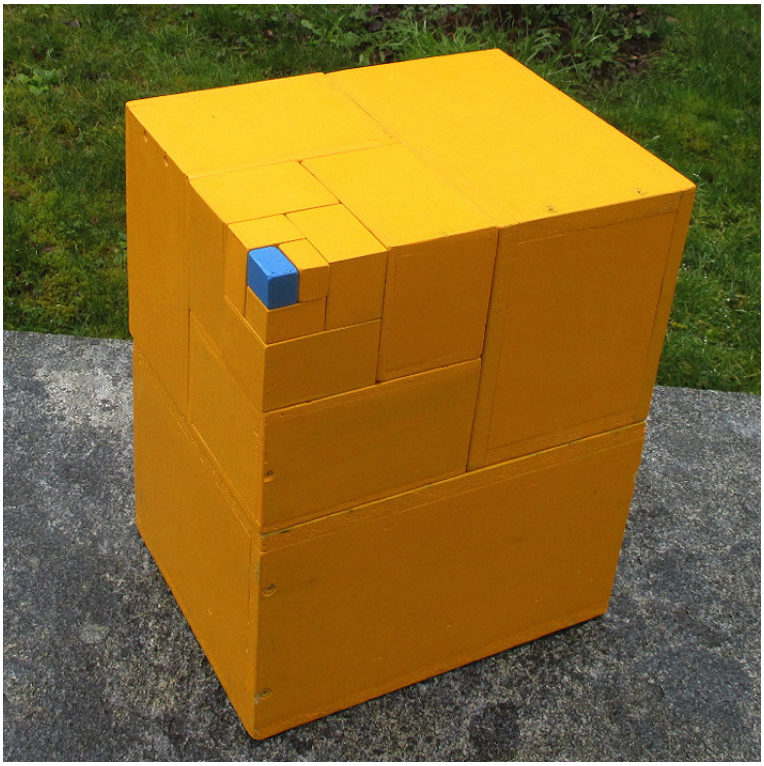


Wasserschnecke



Virtuelle Wasserschnecke

Versteinerung. Baumschnitt



DIN-Kisten

5.4.2 DIN-Hyperquader

Im vierdimensionalen Raum ergeben sich durch

$$2:\sqrt[4]{8}:\sqrt[4]{4}:\sqrt[4]{4}$$
$$\sqrt[4]{8}:\sqrt[4]{4}:\sqrt[4]{2}:1$$

oder in anderer Schreibweise

$$2^{\frac{4}{4}}:2^{\frac{3}{4}}:2^{\frac{2}{4}}:2^{\frac{1}{4}}$$
$$2^{\frac{3}{4}}:2^{\frac{2}{4}}:2^{\frac{1}{4}}:2^{\frac{0}{4}}$$

die Kanten zweier aufeinanderfolgender 4d-DIN-Hyperquader. George Pólya (1887-1985) hätte in dieser Situation allerdings von einer *Verallgemeinerung durch Verwässerung* gesprochen.

George Pólya, 1887-1985

5.4.3 Gleichtemperierte 12-Ton-Stimmung

Wir verwässern weiter zum 12d-DIN-Hyperquader mit den Kantenlängen

$$2^{\frac{12}{12}} : 2^{\frac{11}{12}} : 2^{\frac{10}{12}} : 2^{\frac{9}{12}} : 2^{\frac{8}{12}} : 2^{\frac{7}{12}} : 2^{\frac{6}{12}} : 2^{\frac{5}{12}} : 2^{\frac{4}{12}} : 2^{\frac{3}{12}} : 2^{\frac{2}{12}} : 2^{\frac{1}{12}}$$

Das hat man im Prinzip schon oft gesehen. Diese Zahlen stecken nämlich in den abnehmenden Abständen von Gitarrenbünden und in den Längen von Orgelpfeifen. Wir haben zwölf Tonschritte, aber 13 Orgelpfeifen. Das ist das *Orgelpfeifenproblem*, in Deutschland *Zaunpfahlproblem* und in der Schweiz *Pappelproblem* genannt.

Orgelpfeifen. Dom zu Salzburg

Und man kann es darüber hinaus auch hören. Es sind die Frequenzverhältnisse der von Andreas Werckmeister (1645-1706) angeregten und in Bachs Werk *Das Wohltemperierte Klavier* demonstrierten gleichstufig temperierten Stimmung. Es ist das „demokratischste“ aller Stimmsysteme, da es alle Tonarten gleich behandelt und so Modulationen erleichtert.

Für das Stimmen eines Klaviers ist diese Theorie gut. Aber nur in erster Näherung. Ein so gestimmtes Instrument klingt nämlich noch keineswegs optimal. Das liegt daran, dass die Klaviersaitenschwingungen generell keine harmonischen Schwingungen sind.

Die Rückstellkraft der Saite ist nämlich nicht proportional zur Auslenkung aus der Ruhelage. Die daraus entstehende „Inharmonizität“ hat nichts mit fehlerhafter Fertigung zu tun, sondern entsteht durch die Saitensteifigkeit.

Sie führt dazu, dass beispielsweise der erste Oberton des Kammertons a' = 440 Hz nicht mit 880 Hz schwingt, sondern etwas schneller, nämlich beinahe 881 Hz. Man würde es als zu tief und matt empfinden, wenn man die Oktave mathematisch nur auf a'' = 880 Hz stimmen würde. Der Diskant muss je höher, desto stärker „gespreizt“ werden, damit der Klang brilliant wird. Der höchste Klavierton wird etwa 40 Cent höher gestimmt, als es der mathematischen Theorie entspricht. Der Bass hingegen wird abgesenkt. Auch bei einem guten Instrument ist Klavierstimmung ein Stück weit Geschmacksache.

Die Intervallgröße von einem Cent entspricht dabei dem Faktor $2^{\frac{1}{1200}} \approx 1.00057779$.

5.5 Die Jakobsleiter

Und ihm träumte; und siehe, eine Leiter stand auf der Erde,
die rührte mit der Spitze an den Himmel, und siehe,
die Engel Gottes stiegen daran auf und nieder.
Gen 28, 11

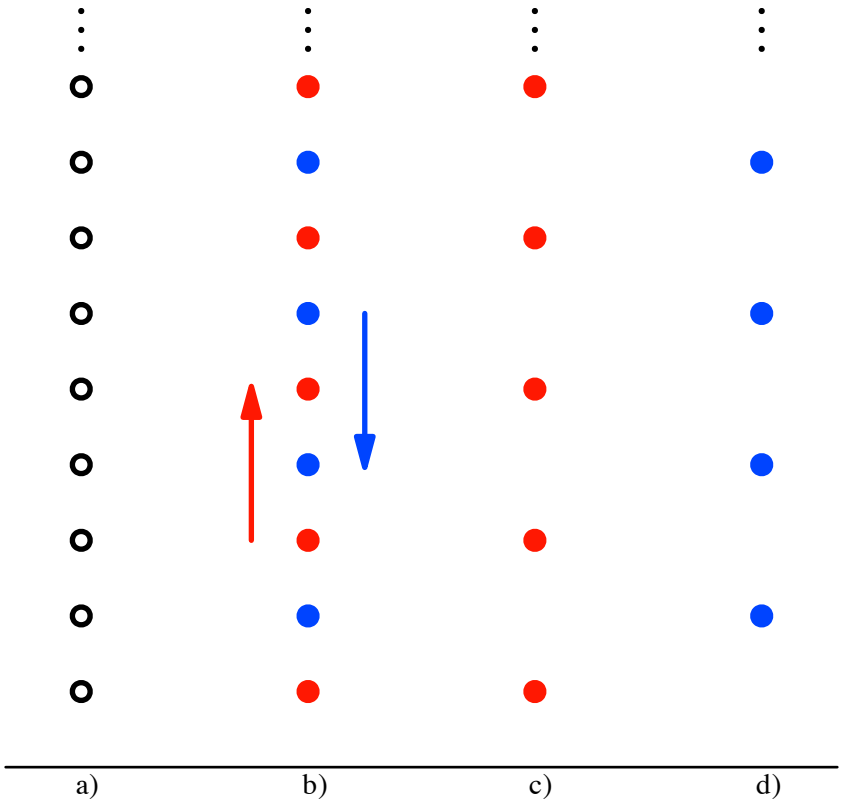
Die Bildvorlage von Jakobs Traum ist eine Treppe, die zum Heiligtum auf einem Hügel führte. Diese Bildvorlage findet sich auch in christlichen und profanen Bauten.

Maria Trost, Graz

Sanssouci, Potsdam

In der Bibelübersetzung von Martin Luther ist aus der Treppe eine Leiter geworden. Das ist auch mathematisch interessant.

Die Abbildung a) zeigt die ersten Sprossen der Jakobsleiter.



Jakobsleiter

Auf der einen Seite der Leiter steigen die Engel hinauf, auf der anderen Seite hinunter. Damit sie sich nicht gegenseitig auf den Füßen herumtreten, haben sie festgelegt, dass die aufsteigenden Engel nur die Sprossen mit ungeraden Nummern verwenden, die absteigenden nur die Sprossen mit geraden Nummern (Abb. b). Damit zerfällt die Jakobsleiter in zwei Teil-Jakobsleitern, die zur ursprünglichen Jakobsleiter ähnlich sind (Abb. c) und d). Wir haben also das Prinzip des DIN-Formates.

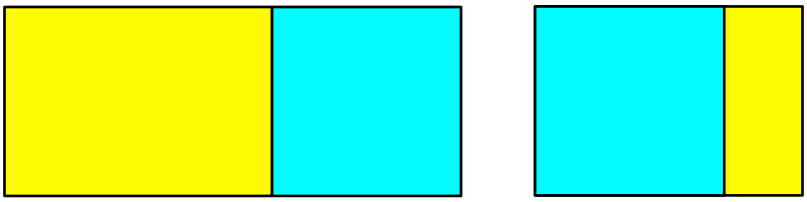
Der Reduktionsfaktor ist 2. Das Wort Reduktionsfaktor ist syntaktisch richtig, semantisch falsch, da Sprossenhöhne nicht reduziert, sondern verdoppelt wird. Unter dem Aspekt eines Fraktals ergibt sich die Mandelbrot-Dimension D (fraktale Dimension):

$$D = \frac{\ln(2)}{\ln\left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{1}{\log_2\left(\frac{1}{2}\right)} = -1$$

6 Das Silberne Rechteck

6.1 Quadrat ansetzen oder abschneiden

Wir können zu einem DIN-Rechteck ein Quadrat ansetzen oder von einem DIN-Rechteck ein Quadrat abschneiden.



Quadrat ansetzen oder abschneiden

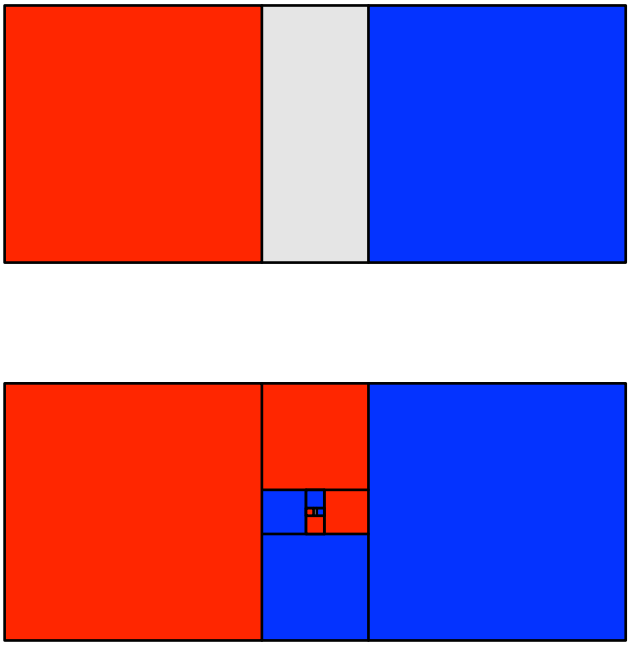
Das Resultat ist je ein langes schmales Rechteck. Die beiden Rechtecke haben dasselbe Seitenverhältnis $\left(\sqrt{2}+1\right):1$.

Silberne Rechtecke

Ein Rechteck mit diesem Seitenverhältnis heißt *Silbernes Rechteck*. Es hat viele zum Goldenen Rechteck (Walser 2013a) verwandte Eigenschaften.

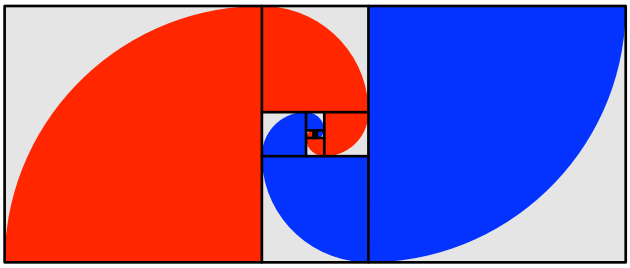
Zum Beispiel können wir zwei Quadrate abschneiden. Im Zentrum bleibt dann ein kleineres Silbernes Rechteck übrig.

Der Prozess kann ad infinitum iteriert werden.



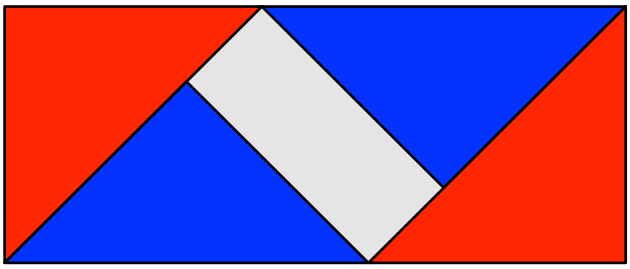
Zwei Quadrate abschneiden

Wir können zwei ineinanderlaufende Spiralen einpassen.



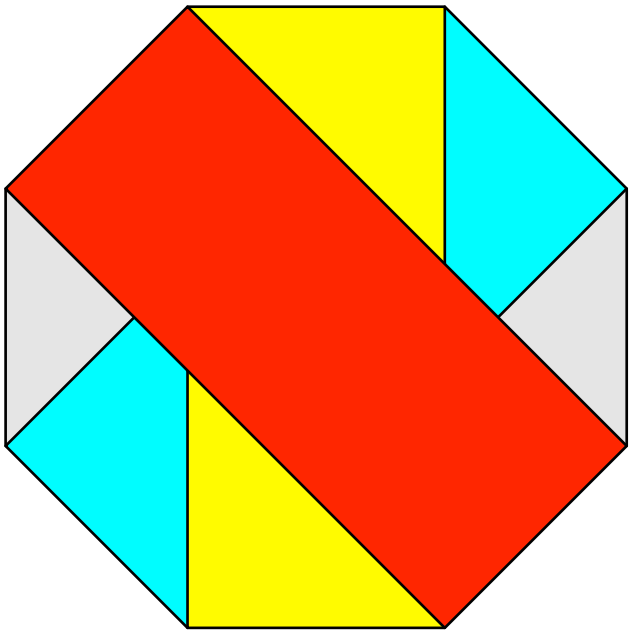
Spiralen

Das Silberne Rechteck kann mit vier Geodreiecken ausgelegt werden. In der Mitte bleibt ein kleineres Silbernes Rechteck übrig.



Vier Geodreiecke

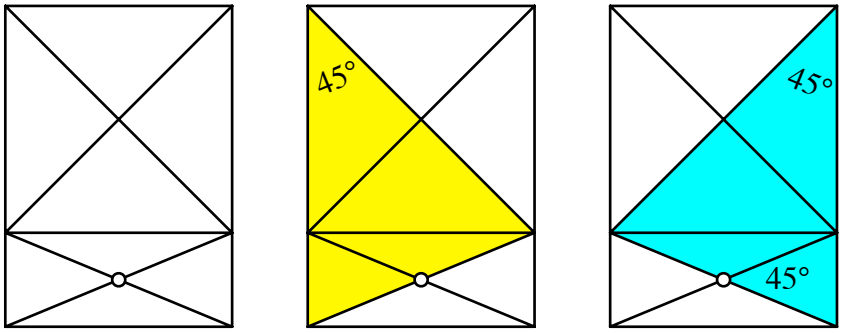
Vier Silberne Rechtecke können übereck aufgestapelt werden. Es entsteht ein regelmäßiges Achteck.



Regelmäßiges Achteck

6.2 Diagonalenschnittwinkel im Silbernen Rechteck

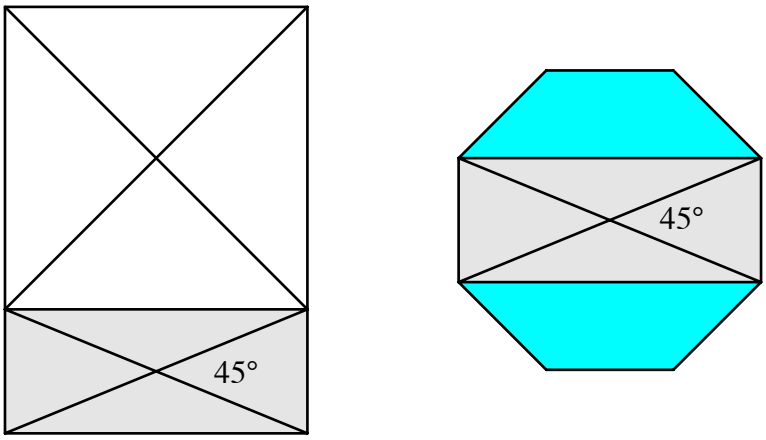
Die folgende Abbildung zeigt einen Beweis ohne Worte für den Sachverhalt, dass sich die Diagonalen im Silbernen Rechteck unter einem Winkel von 45° schneiden.



Diagonalenschnittwinkel im Silbernen Rechteck

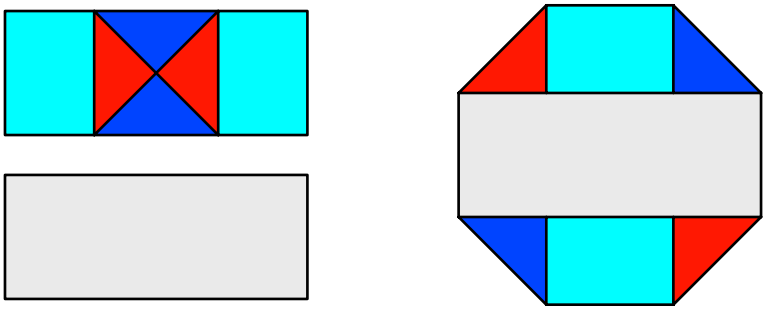
7 Das regelmäßige Achteck

Der 45°-Winkel ist aber auch der Zentriwinkel im regelmäßigen Achteck. Daher erscheint das Silberne Rechteck im regelmäßigen Achteck.



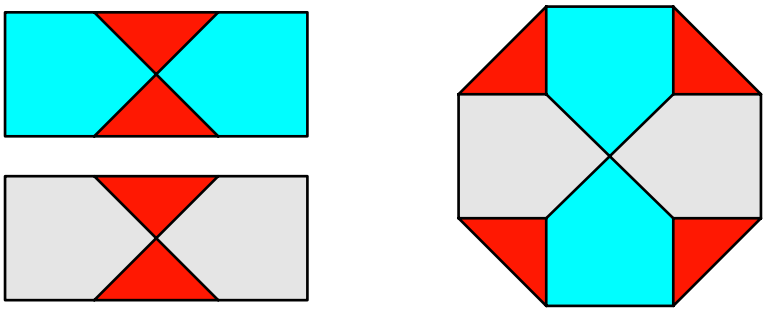
Silbernes Rechteck im regelmäßigen Achteck

Flächenmäßig macht das Silberne Rechteck genau die Hälfte des Achtecks aus. Dies kann mit einem Zerlegungsbeweis eingesehen werden.



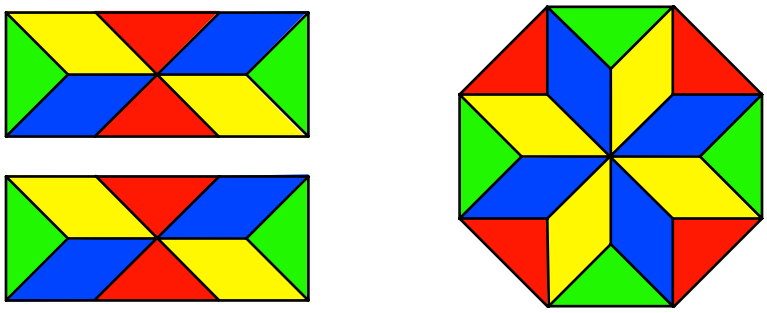
Teile-Ganzes-Beziehung

In der folgenden Zerlegung sind beide Silberne Rechtecke gleichermaßen zugeschnitten.



Zerlegungsbeweis

Der Zerlegungsbeweis kann noch subtiler gemacht werden, so dass ein Stern erscheint. Die Zerlegung des Achteckes hat von der Farbe abgesehen dieselben Symmetrien wie das Achteck selber.



Zerlegungsbeweis mit Stern

Das Beispiel erinnert an die Legespiele nach Fröbel.

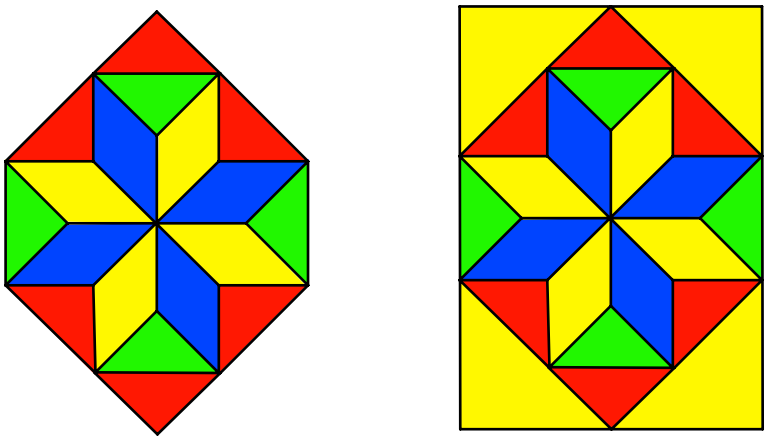
Fröbel-Stern

Dieses Grundmuster wird auch in Mosaiken verwendet.

Mosaik im Belvedere auf dem Pfingstberg, Potsdam

Weitere Zerlegungsbeweise zu diesem Thema siehe Link.

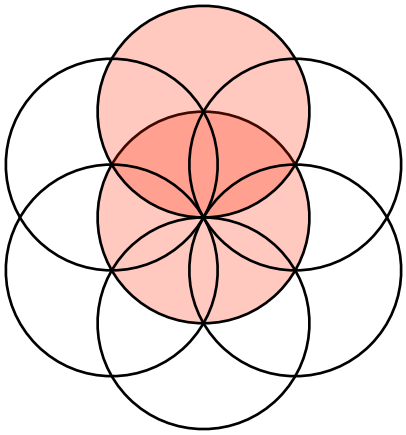
Wenn wir beim Stern zusätzlich zwei rechtwinklig gleichschenklige Dreiecke ansetzen passt die Figur in ein DIN-Rechteck.



Einpassen ins DIN-Rechteck

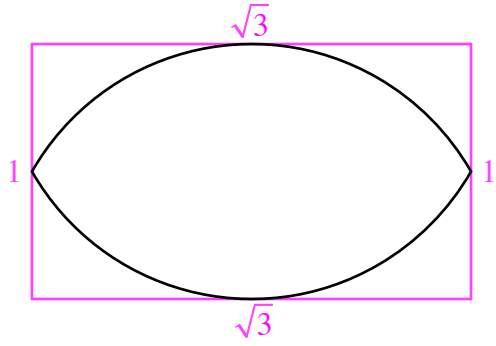
8 Link mit Dreieck und Sechseck

In der klassischen Kreiskonfiguration haben wir viele Bezüge zum gleichseitigen Dreieck und zum regelmäßigen Sechseck.



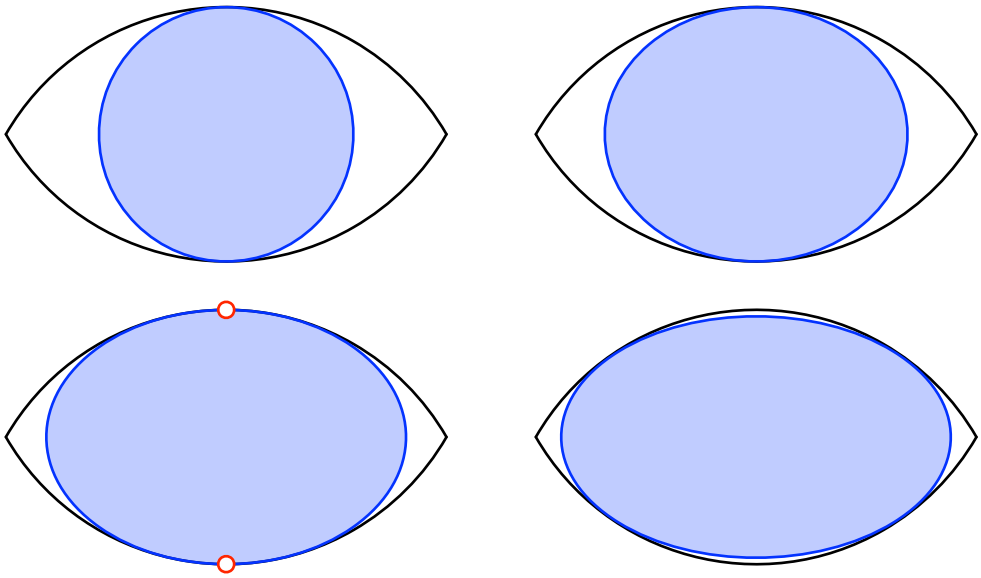
Kreiskonfiguration

Der Überlappungsbereich zweier Kreise ist ein Zweieck („Auge“) mit dem Längenverhältnis $\sqrt{3}:1$. Also nichts mit DIN-Format.



Zweieck

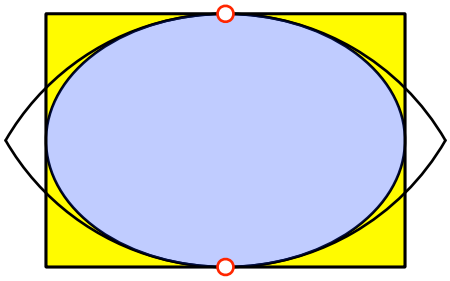
Wir versuchen, in dieses Zweieck eine Ellipse optimal einzupassen. Was heißt hier „optimal“? Im Folgenden einige Beispiele von eingepassten Ellipsen.



Beispiele

Im Beispiel mit den roten Punkten haben wir nicht nur ein tangentiales Verhalten, sondern ein Anschmiegen. Die Ellipse und die Kreise des Zweieckes haben in den roten Punkten gleiche Krümmung (kissing points). Wir können dies als optimale Einpassung bezeichnen. Allerdings ist in diesem Fall der Flächeninhalt der Ellipse *nicht* maximal.

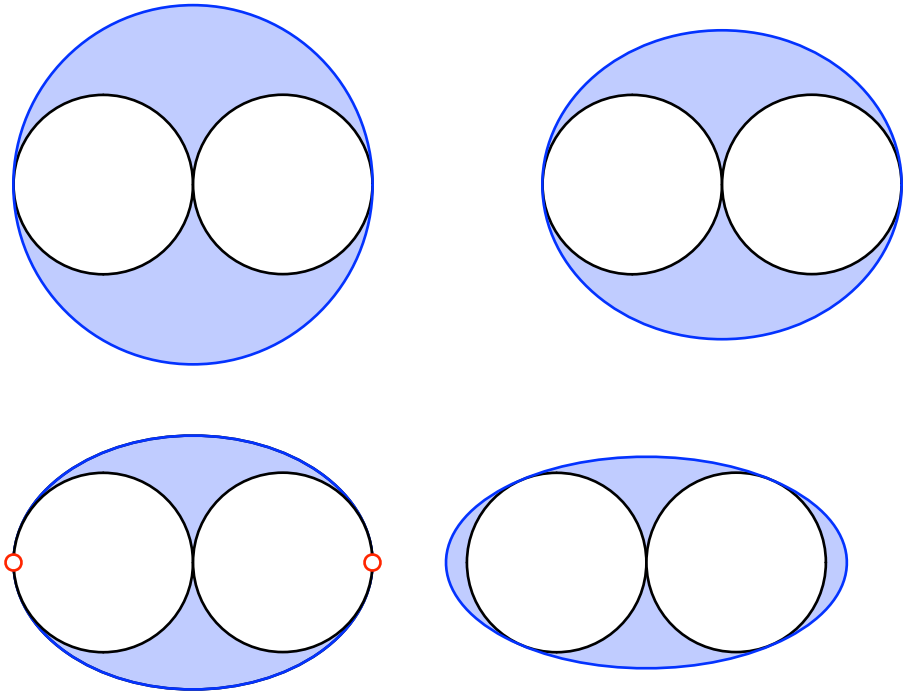
In diesem von uns aus ästhetischen Gründen als optimal definierten Fall haben wir bei der Ellipse ein Achsenverhältnis $\sqrt{2}:1$.



DIN-Ellipse

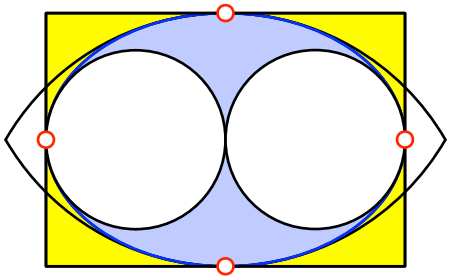
9 Zwei Kreise umschreiben

Analog versuchen wir zwei sich berührenden Kreisen eine optimale Ellipse umzubeschreiben.



Beispiele

Wir haben wieder ein Beispiel mit kissing points. Es handelt sich wiederum um eine DIN-Ellipse.



DIN-Ellipse

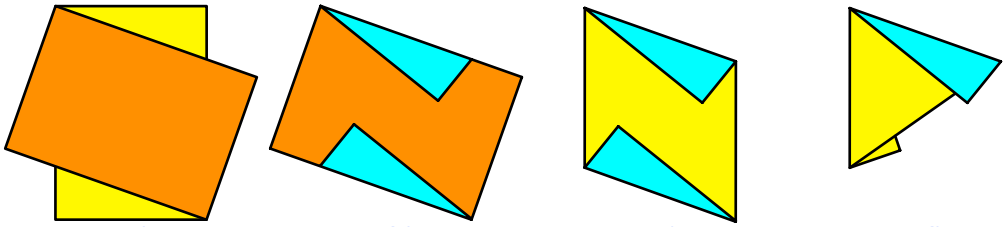
10 Würfel und Tetraeder

10.1 Kantenmodell des Würfels

Als Baumaterial dient Papier im DIN A6-Format. Geeignet ist Papier der Stärke 80 g/m², das vom Format A4 auf A6 zugeschnitten wird. Ebenfalls geht es mit dünnen Karteikarten.

Für jede Kante braucht es ein Papier.

Für den Faltprozess verwenden wir eine etwas festere A6-Karte als Faltlehre. Wir legen diese Faltlehre diagonal auf ein A6-Papier und falten die vorstehenden Ecken des darunterliegenden Papiers nach vorne über die Faltlehre. Dann entfernen wir die Faltlehre. Der Umriss des Papiers ist nun ein Rhombus mit dem spitzen Winkel $\varepsilon = \arccos\left(\frac{1}{3}\right) \approx 70.5288°$.



Faltvorgang

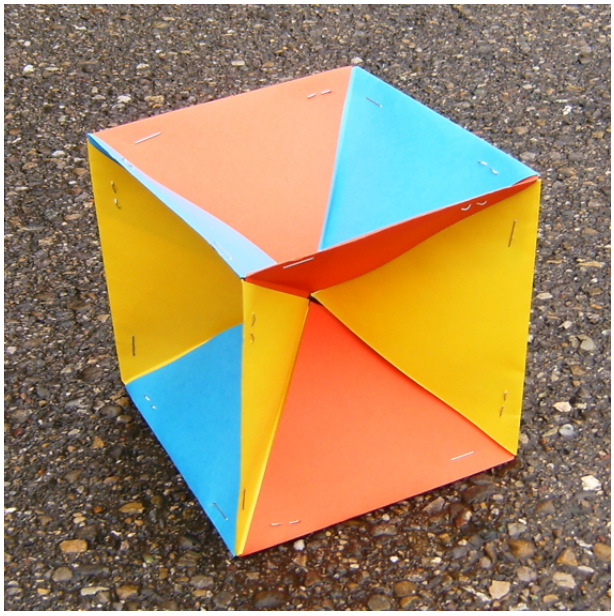
Nun falten wir die untere Spitze des Rhombus nach hinten unter die obere Spitze. Diese letzte Faltlinie wird zu einer Kante des Würfels. Was an dieser Kante noch vorsteht, kann zurückgebogen oder abgeschnitten werden. Damit haben wir unser Bauteil. Es hat die Form eines doppellagigen gleichschenkligen Dreiecks mit zwei Verbindungslaschen zum Einschieben in die Nachbarteile.

Die folgende Abbildung zeigt ein geöffnetes Bauteil von innen. Die Spitzen der beiden Rhomben-Hälften müssen vor dem Zusammenbau des Modells noch aufeinander gelegt werden. Diese Spitzen kommen alle in den Mittelpunkt des Würfels zu liegen. Die Seiten der Rhomben werden zu halben Raumdiagonalen des Würfels.

Wir benötigen 12 Bauteile. Beginnend mit drei verschieden farbigen A4-Papieren, die wir zu A6-Papieren vierteln, erhalten wir drei Sätze von je vier gleichfarbigen Bauteilen. Damit können wir den jeweils vier parallelen Würfelkanten dieselbe Farbe zuordnen.

Bauteil

Und nun kommt das Interessante, der Zusammenbau. Wir schieben jeweils eine Verbindungslasche zwischen die beiden gleichschenkligen Dreiecke des Nachbarbauteils. Dabei achten wir darauf, dass an jeder halben Raumdiagonale des Würfels drei Bauteile in den drei verschiedenen Farben zusammen kommen. Parallele Würfelkanten haben dieselbe Farbe.



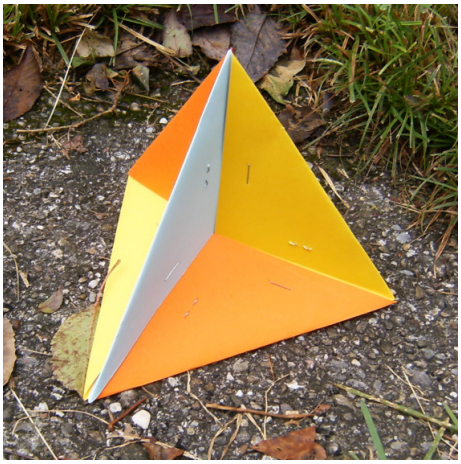
Kantenmodell des Würfels

Es empfiehlt sich, den Zusammenbau schrittweise mit Büroklammern zu fixieren. An jeder Ecke des Würfels ergeben sich schließlich drei Büroklammern.

Wenn alles sitzt, können die Büroklammern schrittweise entfernt und durch eine Heftklammer mit dem Tacker ersetzt werden. Dabei hat man den Ehrgeiz, dass die Klammern symmetrisch eingebracht werden.

10.2 Kantenmodell des Tetraeders

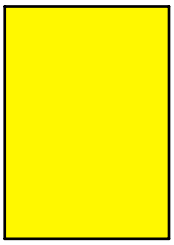
Beim regelmäßigen Tetraeder haben wir den Ergänzungswinkel von ε auf 180°, also 109.4712°, als Winkel zwischen den vom Zentrum aus zu den Ecken verlaufenden Strecken. Daher kann analog zum Kantenmodell des Würfels ein Kantenmodell des Tetraeders gebaut werden.



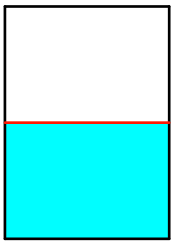
Kantenmodell des Tetraeders

11 Falten eines regelmäßigen Achtecks

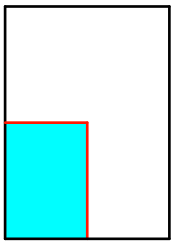
Ein regelmäßiges Achteck kann aus einem DIN-Papier durch Falten hergestellt werden.



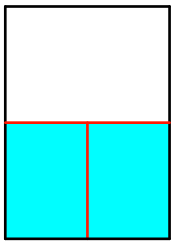
vorne gelb
hinten cyan
(1)



obere Hälfte nach
unten falten
(2)

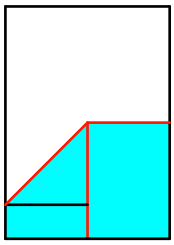


rechte Hälfte nach
links falten
(3)

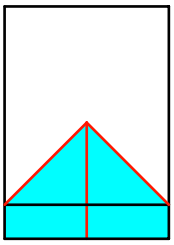


auffalten

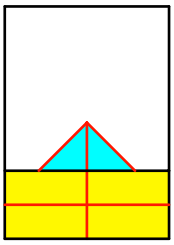
(4)



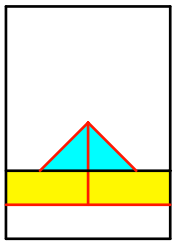
linke Ecke
einfalten
(5)



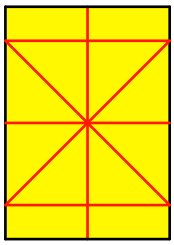
rechte Ecke
einfalten
(6)



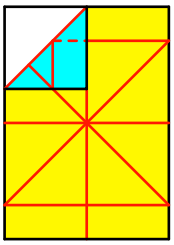
vorne unten
heraufklappen
(7)



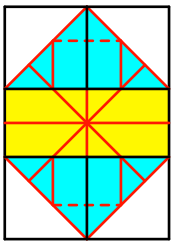
hinten unten
aufklappen
(8)



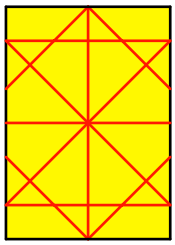
alles
auffalten
(9)



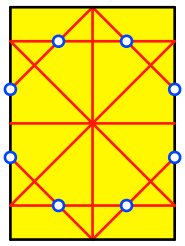
Ecke
einfalten
(10)



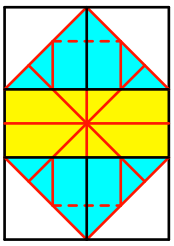
alle Ecken
einfalten
(11)



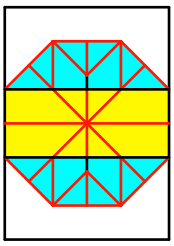
alles
auffalten
(12)



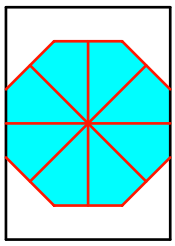
Achteck
sichtbar
(13)



Ecken wieder
einfalten
(14)



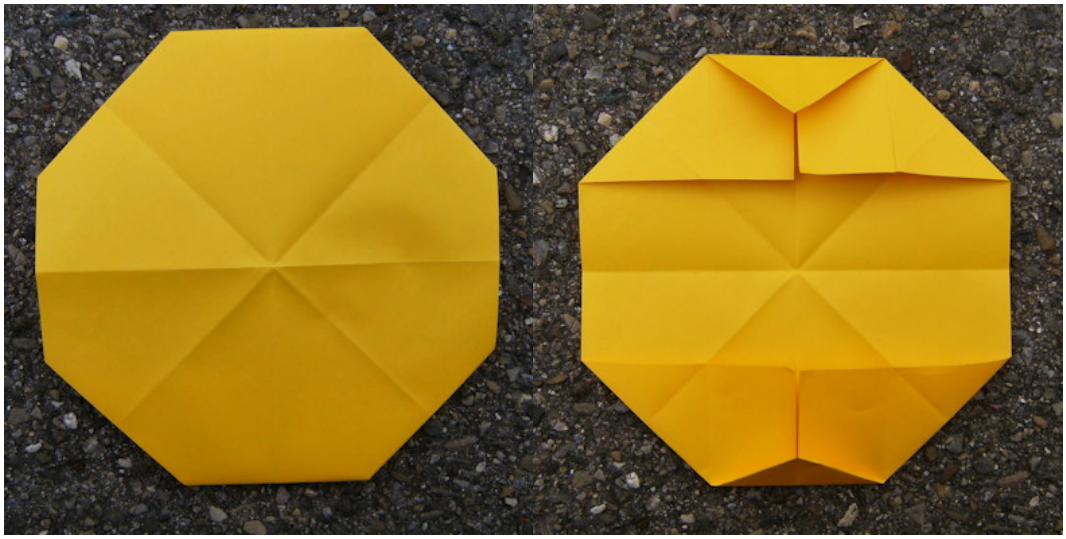
Spitzen
einfalten
(15)



wenden

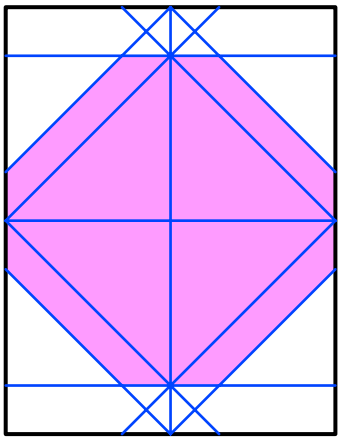
(16)

Falten eines Achteckes



Faltmodell

Natürlich können wir auch mit einem anderen Papier-Rechteck diesen Faltprozess durchführen. Wir erhalten dann ein zwar gleichwinkliges, aber nicht gleichseitiges Achteck. Die folgende Abbildung zeigt die Situation für das US Letter Format.



US Letter

12 Rechenaufgaben

12.1 Turm zu Papyron

12.1.1 Der Stapel

Wir zerlegen ein DIN-A4-Blatt in zwei DIN-A5-Blätter. Eines der beiden DIN-A5-Blätter zerlegen wir weiter in zwei DIN-A6-Blätter.

Nun legen wir eines der beiden DIN-A6-Blätter mittig auf das noch vorhandene DIN-A5-Blatt.

Das zweite DIN-A6-Blatt zerlegen wir ein zwei DIN-A7-Blätter und legen eines davon mittig auf das noch vorhandene DIN-A6-Blatt.

Und so weiter. Es entsteht ein Stapel.

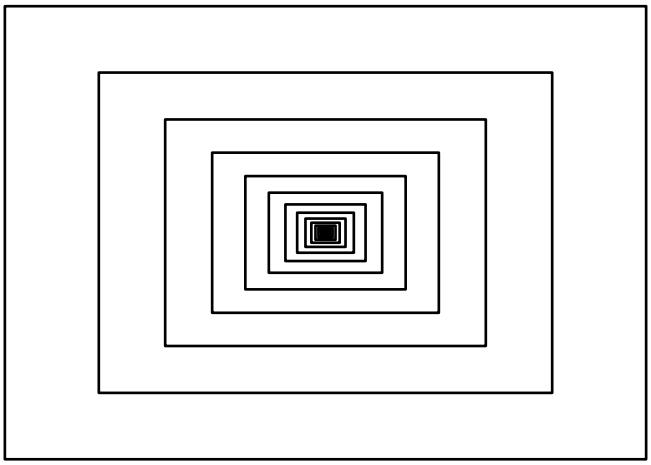
12.1.2 Fragen

Frage 1: Ist dieser Stapel als „Pyramide“ oder als „Turm“ zu bezeichnen?

Frage 2: Wie hoch wird der Stapel?

12.1.3 Bearbeitung der Fragen

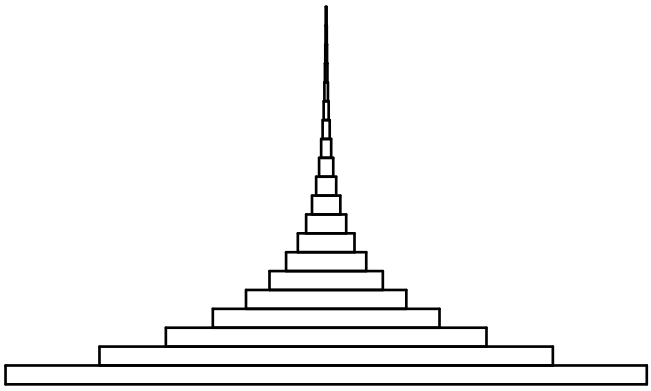
Die folgende Abbildung zeigt den Stapel von oben.



Stapel aus der Sicht von oben

Aus dieser Sicht lässt sich nicht entscheiden, ob wir es mit einer Pyramide oder einem Turm zu tun haben (Frage 1).

Die folgende Abbildung zeigt den Stapel von vorne. Die Papierdicke ist konstant, da ja alle Lagen aus demselben Papierblatt geschnitten sind.



Sicht von vorne

Der Stapel ist als „Turm“ zu bezeichnen. Der Turm kann beliebig hoch werden. Die Seitenkonturen des Stapels sind um 90° gedrehte Exponentialkurven.

Bei einer Pyramide dürften die Seitenkonturen nicht gekrümmt sein. Dies wäre dann der Fall, wenn die Papierdicke abnehmen würde (folgende Abbildung). Das ist aber nicht möglich, da alle Teile aus demselben Papierblatt geschnitten sind.

Pyramide

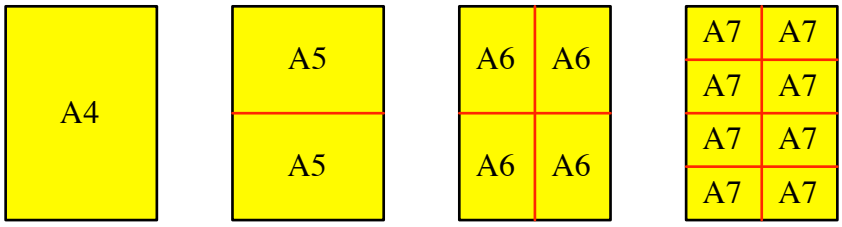
Die Pyramide hätte – mit der Papierdicke d für die unterste Lage – die Gesamthöhe h:

$$h = d\left(1 + \sqrt{\frac{1}{2}} + \sqrt{\frac{1}{2}}^2 + \sqrt{\frac{1}{2}}^3 + \cdots\right) = d\left(2 + \sqrt{2}\right)$$

12.2 Papier für die Welt

12.2.1 Fragen

Ein DIN-A4-Papier kann in zwei DIN-A5-Papiere zerschnitten werden oder in vier DIN-A6-Papiere oder in acht DIN-A7-Papiere oder ... (Abbildung).



Zerlegungen

Welches Format muss gewählt werden, damit es für die ganze Menschheit reicht? Wie hoch wird der Stapel dieser Papiere? Welche Ausmaße hat ein einzelnes Blatt?

12.2.2 Bearbeitung

12.2.2.1 Format

Aus einem DIN-A4-Papier erhalten wir 2^{n-4} Papiere im Format DIN-A*n*.

Die Weltbevölkerung beträgt 7.58 Milliarden Menschen (Ende 2017). Somit:

$$2^{n-4} = 7'560'000'000$$

mit der technischen Lösung:

$$n = \frac{\ln(7'560'000'000)}{\ln(2)} + 4 \approx 36.82$$

Wir müssen also das Format DIN-A37 wählen. Die genaue Anzahl Papier ist dann:

$$2^{37-4} = 8'589'934'592$$

12.2.2.2 Stapelhöhe

Eine Packung von 500 Blatt Druckerpapier der Stärke 80g/m² ist ziemlich genau 5 cm dick. Das ergibt für ein einzelnes Blatt eine Dicke von 0.1 mm.

Ein Stapel von 8'589'934'592 Blättern ist somit etwa 859 km hoch.

12.2.2.3 Ausmaße

Wir rechnen im Hochformat.

Für die Höhe $h(n)$ und die Breite $b(n)$ des DIN-A*n*-Papieres gilt:

$$h(n)=\sqrt[4]{2}\sqrt{\frac{1}{2}}^{n}\,[m] \quad \text{und} \quad b(n)=\sqrt[4]{\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{1}{2}}^{n}\,[m]$$

Die Tabelle gibt die ersten numerischen Werte.

n	Höhe in [m]	Breite in [m]
0	1.189207115	0.8408964153
1	0.8408964150	0.5946035573
2	0.5946035575	0.4204482076
3	0.4204482076	0.2973017787
4	0.2973017788	0.2102241038
5	0.2102241038	0.1486508893
6	0.1486508894	0.1051120519
7	0.1051120519	0.07432544468
8	0.07432544469	0.05255602596
9	0.05255602593	0.03716272234
10	0.03716272234	0.02627801298
11	0.02627801297	0.01858136117
12	0.01858136117	0.01313900649
13	0.01313900648	0.009290680585
14	0.009290680586	0.006569503245
15	0.006569503242	0.004645340292
16	0.004645340293	0.003284751622
17	0.003284751621	0.002322670146
18	0.002322670146	0.001642375811
19	0.001642375810	0.001161335073
20	0.001161335073	0.0008211879056
21	0.0008211879053	0.0005806675365
22	0.0005806675366	0.0004105939528
23	0.0004105939526	0.0002903337683
24	0.0002903337683	0.0002052969764
25	0.0002052969764	0.0001451668841
26	0.0001451668842	0.0001026484882
27	0.0001026484882	0.00007258344207

28	0.00007258344208	0.00005132424410
29	0.00005132424408	0.00003629172103
30	0.00003629172104	0.00002566212205
31	0.00002566212204	0.00001814586051
32	0.00001814586052	0.00001283106102
33	0.00001283106102	0.000009072930257
34	0.000009072930260	0.000006415530512
35	0.000006415530510	0.000004536465129
36	0.000004536465130	0.000003207765256
37	0.000003207765255	0.000002268232564

Numerische Werte

Für $n = 37$ erhalten wir:

$$h(37) = 0.000003207765255 \text{ m} = 0.003207765255 \text{ mm}$$
$$b(37) = 0.000002268232564 \text{ m} = 0.002268232564 \text{ mm}$$

Wegen der Papierdicke von 0.1mm erhalten wir ein sehr hohes Prisma.

Literatur

Walser, Hans(2013a): *Der Goldene Schnitt*. 6. Auflage. Leipzig: Edition am Gutenbergplatz. ISBN 978-3-937219-85-1.

Walser, Hans (2013b): DIN A4 in Raum und Zeit. Silbernes Rechteck – Goldenes Trapez – DIN-Quader. Edition am Gutenbergplatz, Leipzig 2013. ISBN 978-3-937219-69-1.

Websites

Miniaturen zum DIN-Format:

www.walser-h-m.ch/hans/Miniaturen_Uebersicht/DIN_Format

Zerlegungsbeweise:
www.walser-h-m.ch/hans/Miniaturen/A/Achteck2/Achteck2.pdf

Abbildungsnachweis

Alle Abbildungen und Fotos durch den Autor