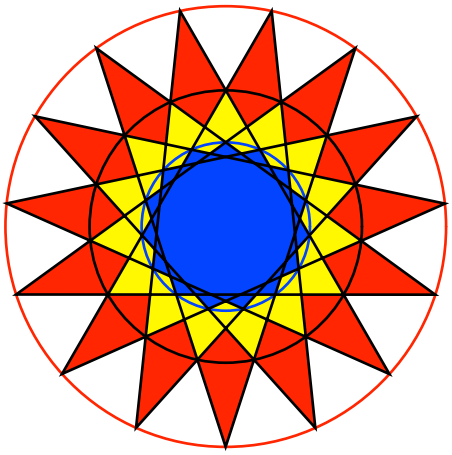
Hans Walser



Der Goldene Schnitt

Schönheit trifft Mathematik

Naturforschende Gesellschaft des Kantons Solothurn

Montag, 7. Dezember 2020, 20:00 Uhr

Naturmuseum Solothurn

Klosterplatz 2, 4500 Solothurn

Abstract:

Der Goldene Schnitt tritt seit der Antike in vielen Bereichen der Geometrie, Architektur, Musik, Kunst, Naturwissenschaften und Mathematik auf. Im Vortrag werden verschiedene Beispiele dazu gegeben. Dabei wird auch eine Abgrenzung zu eher esoterischen Sichten auf den Goldenen Schnitt versucht.

Der Goldene Schnitt ist kein isoliertes Phänomen, sondern in vielen Fällen das erste und einfachste Beispiel einer Folge weiterführender mathematischer Verallgemeinerungen. Die mit dem Goldenen Schnitt eng verbundenen Fibonacci-Zahlen sind das historisch erste Beispiel einer Wachstumsmodellierung.

Der Goldene Schnitt erscheint immer im Zusammenhang mit einer versetzten bilateralen Symmetrie, wobei der zweite Teil vom ersten Teil direkt beeinflusst ist.

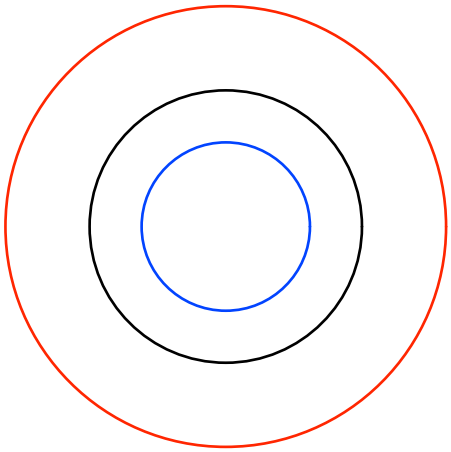
Inhalt

Last modified: 29. September 2020

Titelbild: Ausarbeitung einer Idee von Anton Weininger, Landshut

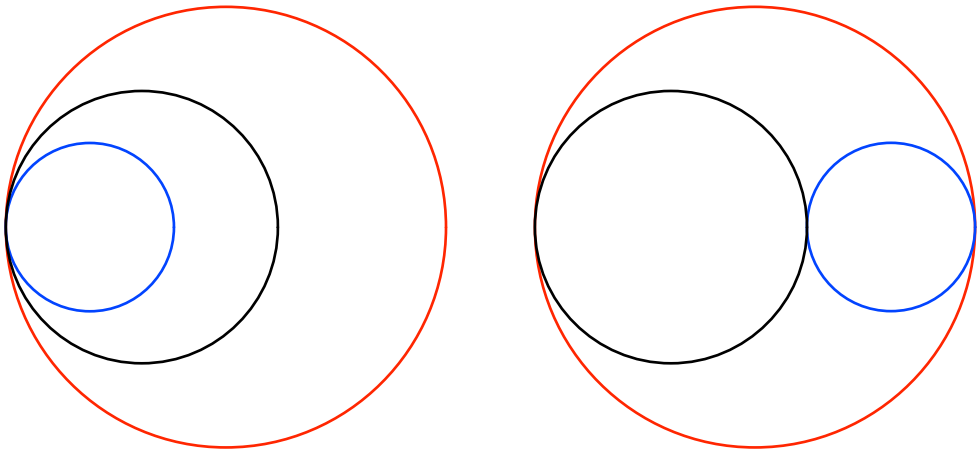
1 Kreise

Im Titelbild mit den Sternen sehen wir auch drei Kreise.



Kreise

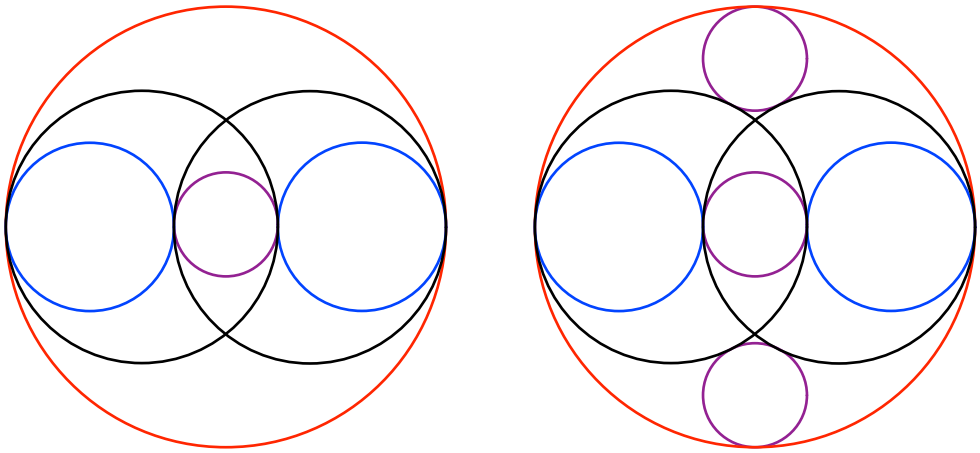
Die Radien dieser Kreise stehen im Verhältnis des Goldenen Schnittes. Wir können sie auch anders anordnen.



Andere Anordnungen

Im Bild links sehen wir nochmals die Verhältnisse. Die asymmetrische Anordnung im Bild rechts ist typisch für den Goldenen Schnitt.

Wir können die Figur symmetrisieren und weitere Kreise einfügen.

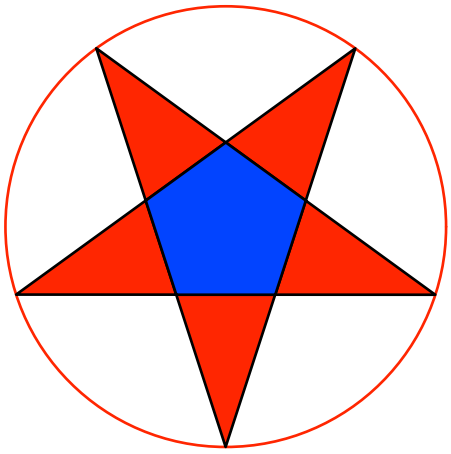


Weitere Kreise

Die kleinen Kreise, welche oben und unten hinein passen, sind eine der vielen Überraschungen, die einem beim Goldenen Schnitt begegnen können [1].

2 Pentagon und Pentagramm

Das Titelbild enthält drei Pentagons (regelmäßige Fünfecke) und drei Pentagramme (regelmäßige Sterne mit fünf Spitzen). Dies sind Schlüsselfiguren für den Goldenen Schnitt.



Pentagon und Pentagramm

3 Prozentrechnung

Wir suchen einen Prozentsatz so, dass der Prozentsatz plus der Prozentsatz des Prozentsatzes zusammen gleich 100 % ist.

Wir versuchen nach dem Einschachtelungsprinzip.

50 % + 25 % = 75 %	Zu klein
60 % + 36 % = 96 %	Etwas zu klein
61.8 % + 38.1924 % = 99.9924 %	Schon sehr gut
62 % + 38.44 % = 100.44 %	Recht gut
70 % + 49 % = 119 %	Zu groß

Versuche

Natürlich kann man das auch algebraisch angehen:

$$x + x^2 = 1$$

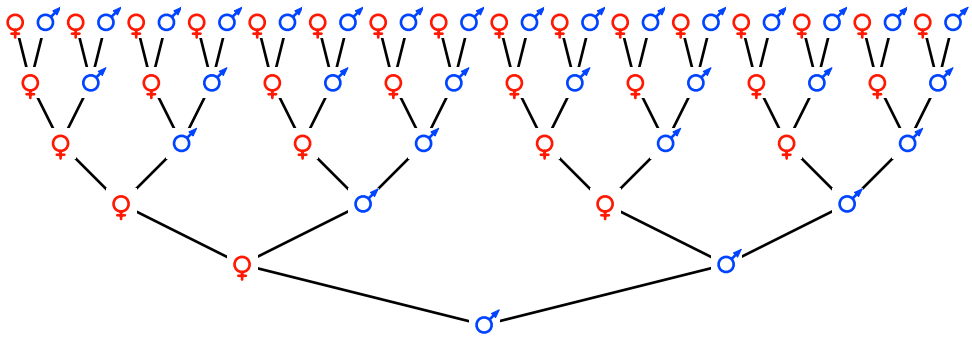
Das ist die einfachst mögliche allgmeine quadratische Gleichung. Für die positive Lösung erhalten wir:

$$x = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \approx 0.6180339887499$$

4 Stammbäume

4.1 Binärer Stammbaum

Die Abbildung zeigt einen binären Stammbaum, wie er etwa bei Menschen vorkommt.



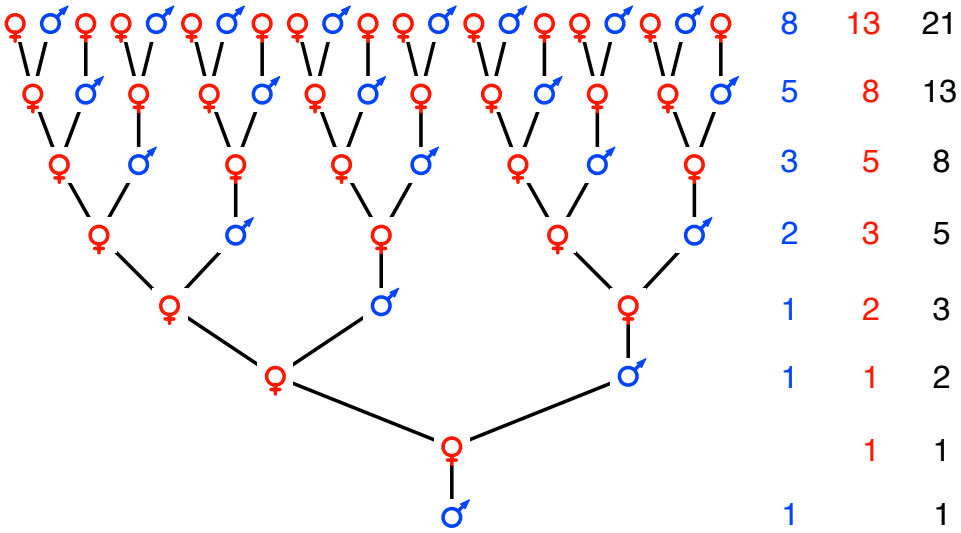
Binärer Stammbaum

Der Frauenanteil beträgt in jeder Generation 50°.

4.2 Stammbaum einer Drohne

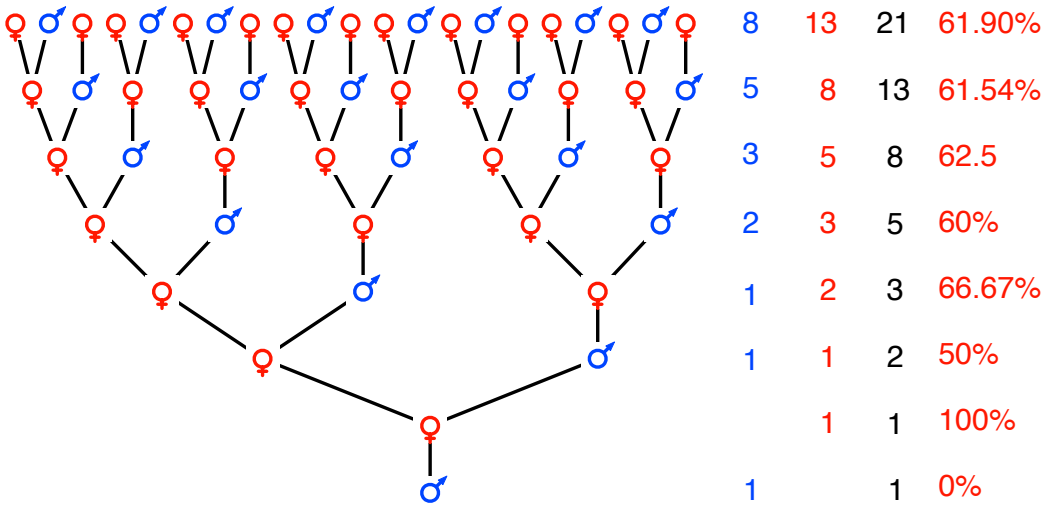
Bei den Bienen ist es so, dass es aus den befruchteten Eiern weibliche Bienen (Arbeitsbienen oder Königinnen, letzteres ist eine Frage der Ernährung) entstehen, aus den unbefruchteten Eiern aber Drohnen. Eine Drohne hat daher nur eine Mutter, eine weibliche Biene aber Vater und Mutter. Das führt zu einem asymmetrischen Stammbaum.

Die in diesem Stammbaum erscheinenden Zahlen 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ... heißen *Fibonacci*-Zahlen.



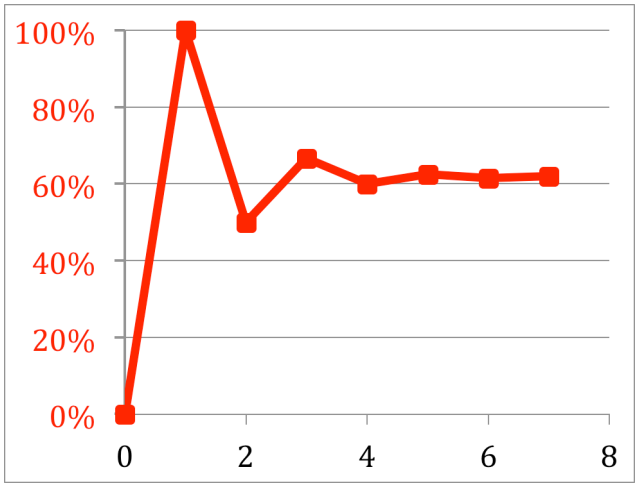
Stammbaum einer Drohne

Der Weibchen-Anteil variiert und ist ab der dritten Elterngeneration größer als 50 %.



Weibchen-Anteil

Aus den Prozentzahlen vermuten wir aber, dass es einen Grenzwert gibt.



Wir vermuten einen Grenzwert

Dies ist tatsächlich der Fall. Der Grenzwert ist wieder unsere merkwürdige Zahl:

$$\frac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 0.6180339887499 \triangleq 61.80339887499\%$$

Die Zahl hat unendlich viele Dezimalstellen und nie eine Periode. Es ist eine so genannte *irrationale* Zahl. Schuld daran ist $\sqrt{5} \approx 2.23606797749979$.

5 Der Goldene Schnitt in Zahlen

Die beiden Zahlen

$$\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.6180339887499 \approx 1.618$$

$$\frac{1}{\Phi} = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \approx 0.6180339887499 \approx 0.618$$

gehören beide zum Goldenen Schnitt. Traditionellerweise werden sie mit Φ und $\frac{1}{\Phi}$ bezeichnet. Sie sind Kehrzahlen voneinander, ihr Produkt ist also 1. Ebenfalls ist — und das ist eine Besonderheit beim Goldenen Schnitt — ihre Differenz 1.

Eigentlich handelt es sich beim Goldenen Schnitt um ein Verhältnis. Ein Verhältnis kann aber immer auf zwei Arten angegeben werden: „groß zu klein“ oder „klein zu groß.“ Beispiel: $3:2 = \frac{3}{2} = 1.5$ und $2:3 = \frac{2}{3} = 0.66666$.

Im Zusammenhang mit dem Goldenen Schnitt wird die größere der beiden Verhältniszahlen als *Major* und die kleinere als *Minor* bezeichnet.

6 Namen

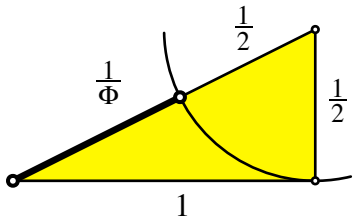
Für den Goldenen Schnitt sind im Verlaufe der Zeit verschiedene Bezeichnungen gewählt worden:

- *Goldener Schnitt* (1835, Martin Ohm, Bruder von Georg Simon Ohm)
- *Golden Section, Nombre d'Or*
- *Divina Proportione* (Luca Pacioli, 1445-1514)
- *Stetige Teilung* (Euklid, 3. Jh. v. Chr.)

7 Geometrische Konstruktion

7.1 Die kleine Zahl

Wir beginnen mit einem rechtwinkligen Dreieck mit der einen Kathete 1 und der anderen Kathete $\frac{1}{2}$.



Konstruktion des kleinen Goldenen Schnittes

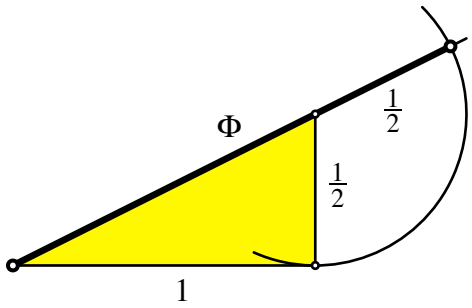
Dieses Dreieck hat auf Grund des Satzes von Pythagoras die Hypotenusenlänge:

$$\sqrt{1^2+\left(\tfrac{1}{2}\right)^2}=\sqrt{\tfrac{5}{4}}=\tfrac{\sqrt{5}}{2}$$

Nach Subtraktion der kurzen Kathete $\frac{1}{2}$ bleibt ein Reststück $\frac{\sqrt{5}-1}{2}=\frac{1}{\Phi}$ übrig.

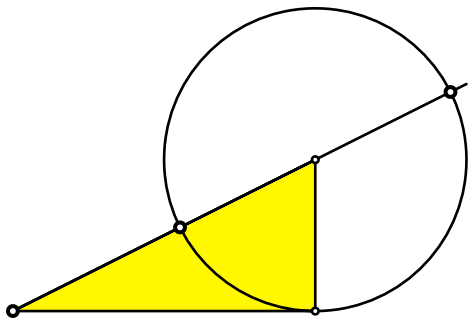
7.2 Die große Zahl

Die Konstruktion geht weitgehend analog. Wir addieren die kleine Kathete $\frac{1}{2}$ und erhalten $\frac{\sqrt{5}+1}{2} = \Phi$.



Konstruktion des großen Goldenen Schnittes

Die folgende Abbildung zeigt eine Überlagerung der beiden Konstruktionen. Wir werden diese Figur in späteren Zusammenhängen wieder antreffen. Sie deutet immer auf den Goldenen Schnitt.



Synopsis

8 Beispiele

8.1 Das alte Rathaus zu Leipzig

Das alte Rathaus zu Leipzig wurde 1556 auf den Fundamenten früherer Gebäude errichtet. Das Auftreten des Goldenen Schnittes ist daher eher zufällig und lag nicht primär in der Absicht der Bauherren.

Die Fassade ist durch den Treppenturm im Verhältnis 2:4 gegliedert. Das ist nicht der Goldene Schnitt. Der Goldene Schnitt wird aber durch die Lage der Eingangstür in den Treppenturm sichtbar.

Der Goldene Schnitt teilt „ungerecht“ in einen größeren und einen kleineren Anteil. Dafür sind die Bezeichnungen *Major* und *Minor* üblich.

8.2 Das Münster zu Freiburg im Breisgau

Der Turm des Münsters Freiburg im Breisgau (1330) ist neben dem einen der Straßburger Türme der einzige schon im Mittelalter fertig gebaute Turm einer gotischen Kathedrale. Alle anderen Türme gotischer Kathedralen (etwa Köln oder Ulm) wurden erst im 19. Jahrhundert fertiggestellt.

Der Pyramidenansatz ist im Teilpunkt des Goldenen Schnittes. Allerdings muss die Kreuzblume an der Spitze weggelassen werden.

8.3 Goldenes Rechteck

Oft werden Bildformate und Verpackungsformate im Verhältnis des Goldenen Schnittes gewählt. Wir haben es hier mit Goldenen Rechtecken zu tun.

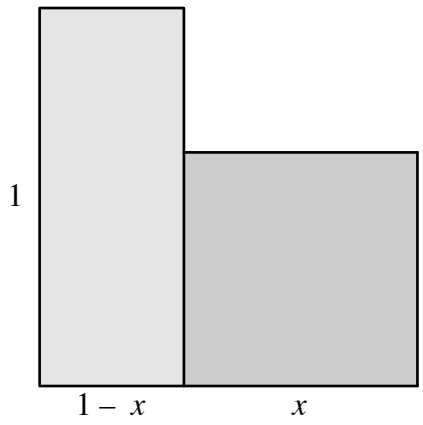
Goldene Rechtecke finden sich auch im Stadtgrundriss und in Gebäuden von Chandigarh (Le Corbusier).

9 Euklid

Eine klassische Aufgabe: Zweites Buch, §11: Eine gegebene Strecke so zu teilen, dass das Rechteckaus der ganzen Strecke und dem einen Abschnitt dem Quadrat über dem anderen Abschnitt gleich ist.

$$\text{ganze Strecke} \times \text{ein Abschnitt} = (\text{anderer Abschnitt})^2$$

Die Abbildung illustriert den Sachverhalt.

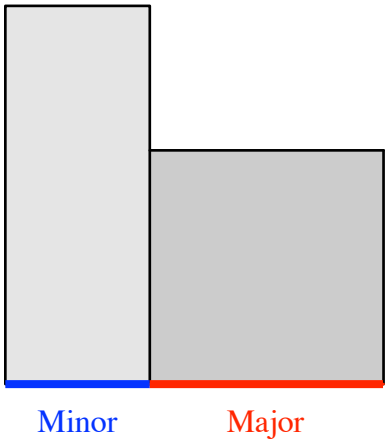


Flächengleichheit

Rechnerisch erhalten wir:

$$1 \cdot (1 - x) = x^2$$

Die Lösung ist wiederum der Goldene Schnitt.



Der Goldene Schnitt als Lösung

10 Berühmte irrationale Zahlen

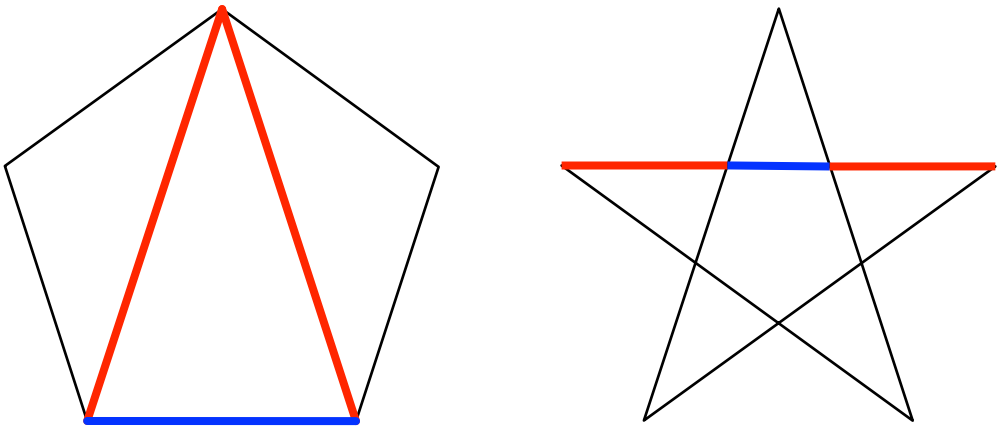
Der Goldene Schnitt kann nicht als Bruchzahl dargestellt werden. Er ist *irrational*. Weitere irrationale Zahlen sind $\sqrt{2}$ (wurde schon von Euklid nachgewiesen, 3. Jh. v. Chr.), die Kreiszahl π (Nachweis durch Johann Heinrich Lambert, 1761) und die eulersche Zahl e (Nachweis durch Leonhart Euler, 1737).

Der Nachweis der Irrationalität des Goldenen Schnittes („schuld“ ist $\sqrt{5}$) geht auf Hippasos von Metapont (5. Jh. V. Chr.).

11 Pentagon und Pentagramm

11.1 Geometrie

Im Pentagon und im Pentagramm tritt der Goldene Schnitt auf.



Pentagon und Pentagramm

11.2 Krieg und Frieden

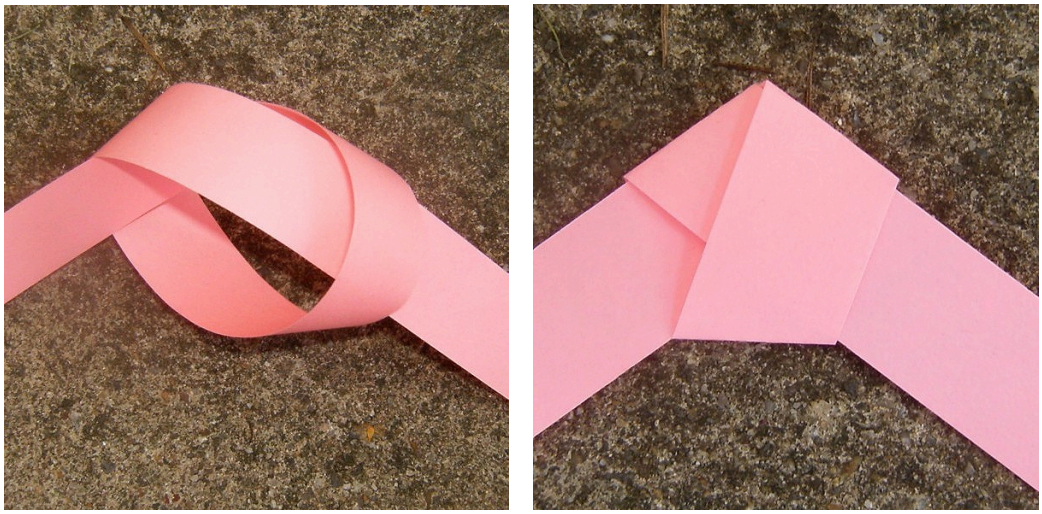
Das Gebäude des US-Verteidigungsministeriums hat die Form eines Pentagons. Auch etliche Festungen haben eine fünfteilige Symmetrie.

11.3 Architektur und Kunst

In vielen Beispielen ist die Verwendung des Pentagons offensichtlich.

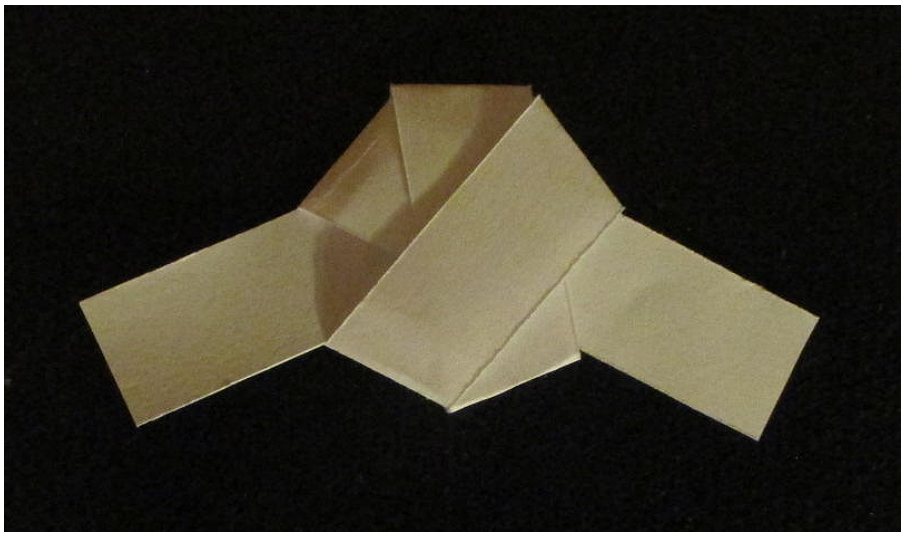
11.4 Wie kommen wir zu einem Fünfeck?

Wir können einen Papierstreifen zu einem Knoten falten.



Knotenfünfeck

Mit einer zusätzlichen Schlaufe erhalten wir ein Siebeneck (Walser, 2015).



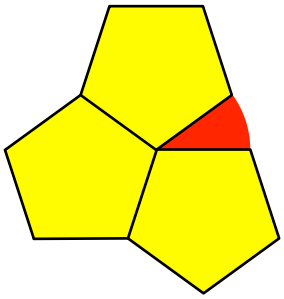
Siebeneck

An diesem Sachverhalt zeigt sich einmal mehr, dass der Goldene Schnitt das einfachste nichttriviale Beispiel einer weiterführenden Kette von Beispielen ist.

11.5 Gibt es ein regelmäßiges Fünfeckraster?

Es gibt regelmäßige Dreieckraster, Quadratraster (Schachbrett, Karopapier) und Sechseckraster (Bienenwabenmuster).

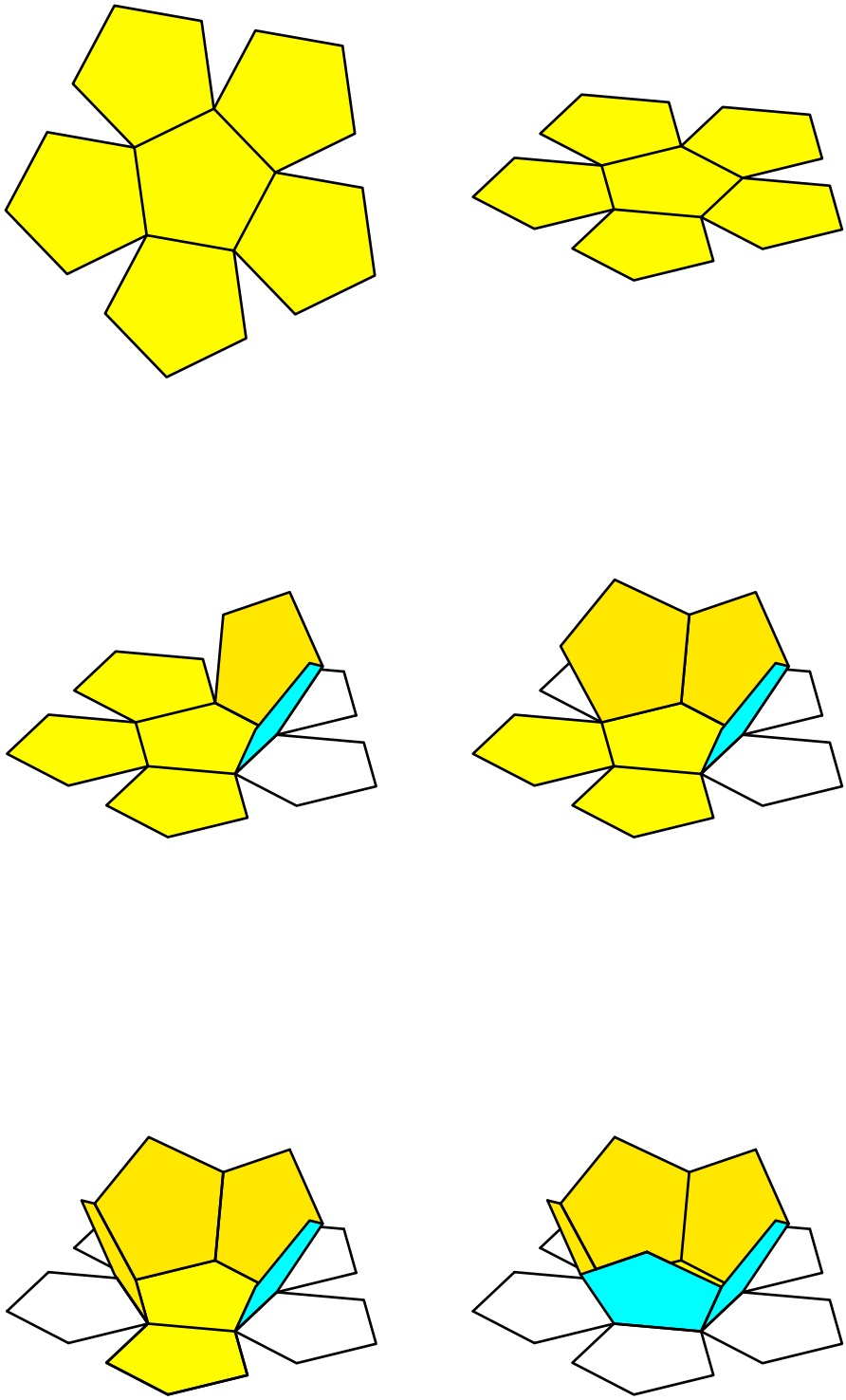
Hingegen gibt es kein regelmäßiges Fünfeckraster. Es geht an den Ecken nicht auf.



Kein regelmäßiges Fünfeckraster

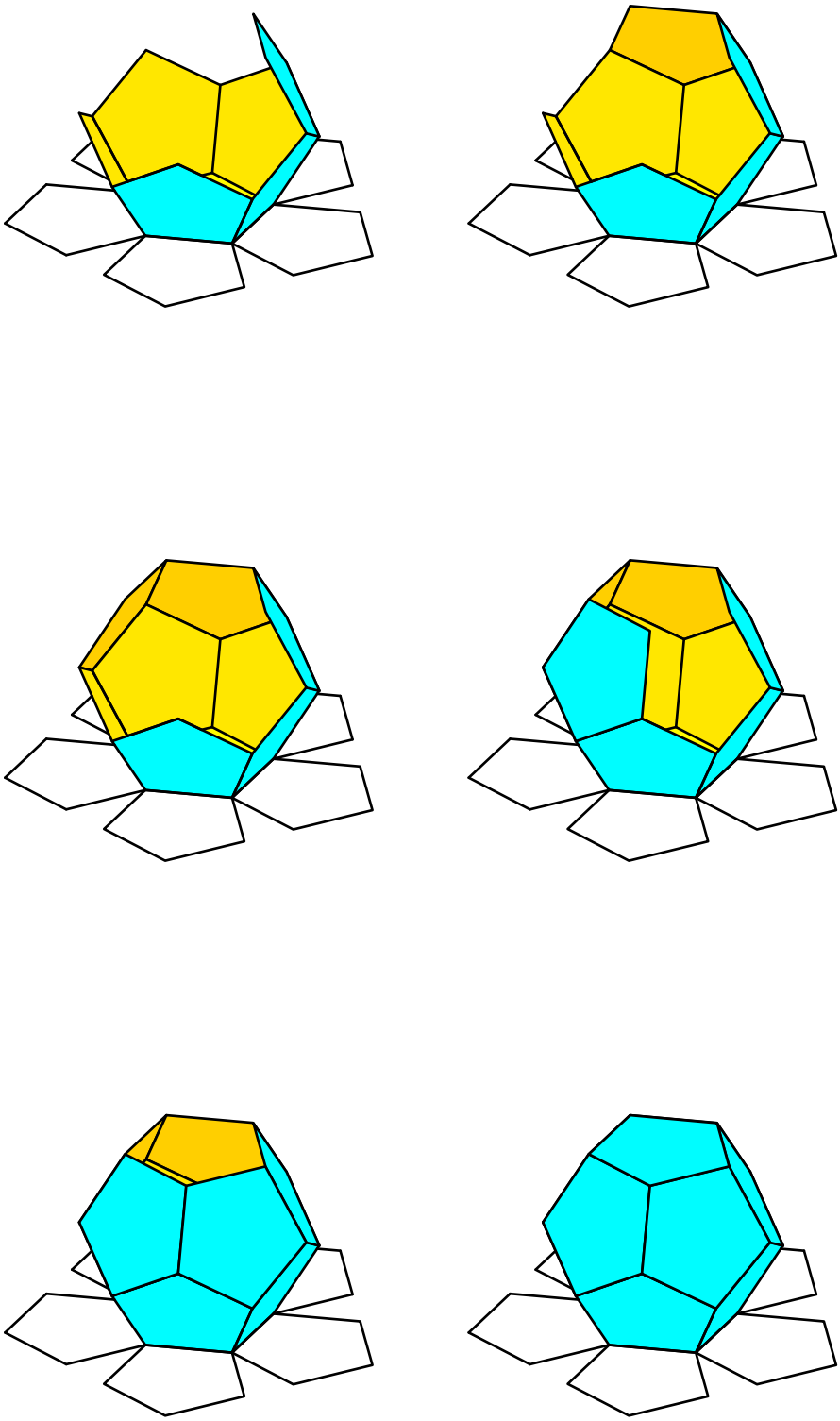
11.6 Hochklappen der Fünfecke. Dodekaeder

Wir können die überflüssigen Spickel durch Hochklappen in den Raum wegbringen. So entsteht ein Becher.



Hochklappen der fünf Seitenteile führt zum Becher

Wir können nun zu einem Deckel einwölben.

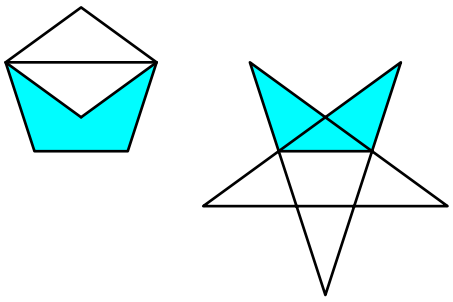


Einwölben führt zum Dodekaeder

Wir erhalten das regelmäßige Dodekaeder.

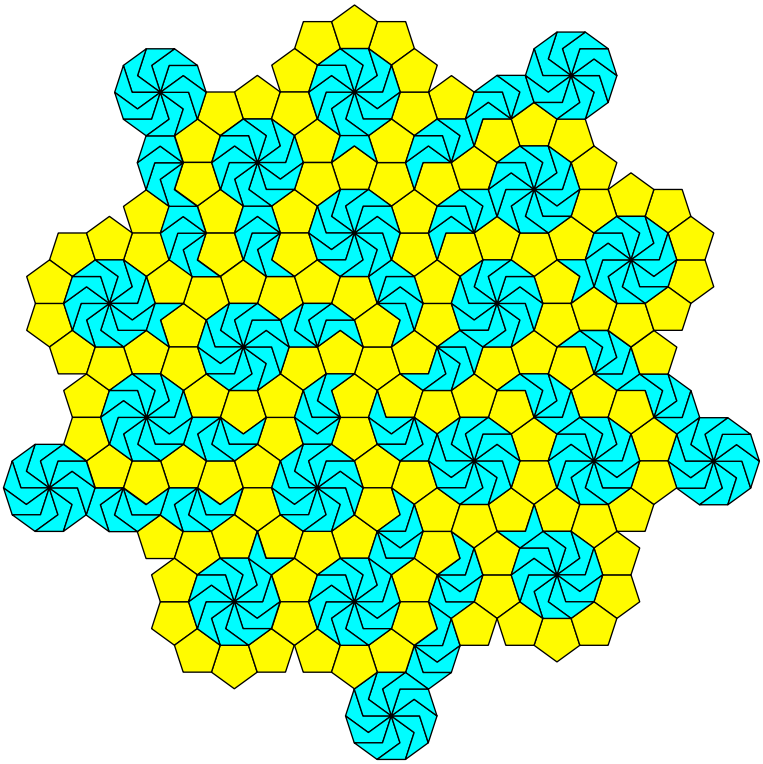
11.7 Halbregelmäßiges Fünfeck

Wir kerben das regelmäßige Fünfeck ein.



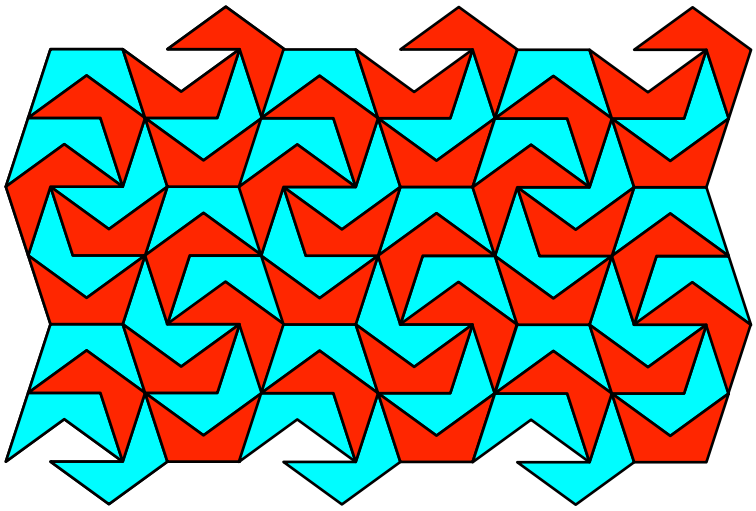
Halbregelmäßiges Fünfeck

Zusammen mit dem regelmäßigen Fünfeck können wir die Ebene pflastern.

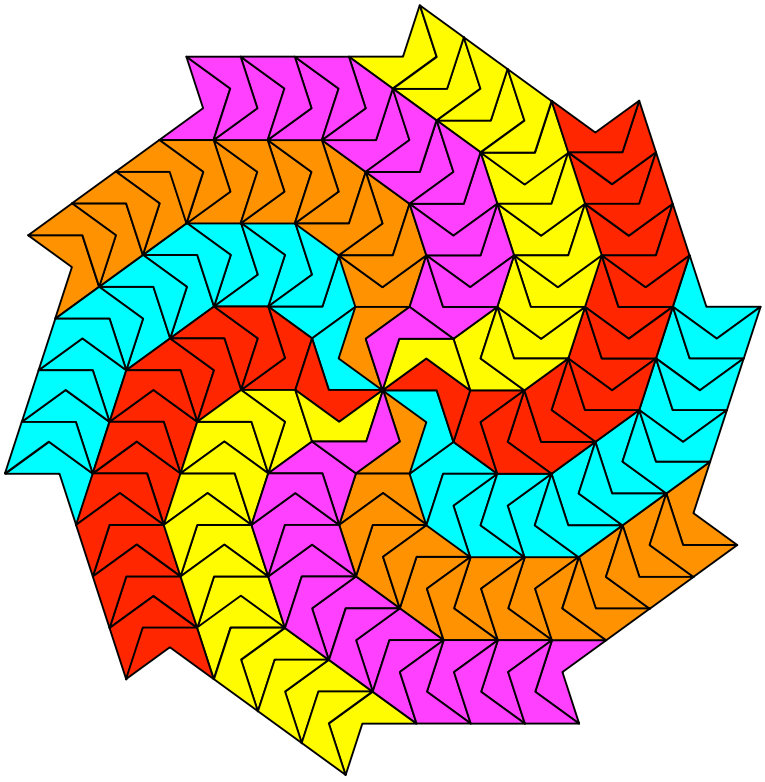


Pflasterung

Es geht aber auch mit dem halbregelmäßigen Fünfeck allein.

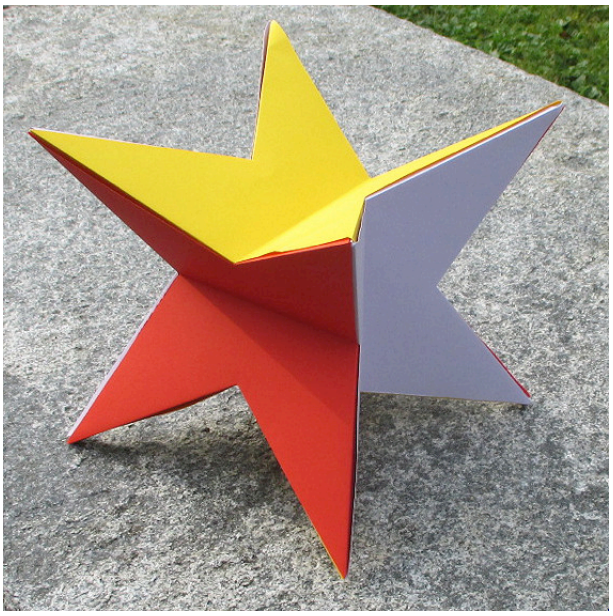


Parkett



Zehnfachspirale

Mit zwölf halbregelmäßigen Fünfecken können wir ein halbregelmäßiges Dodekaeder bauen.



Halbregelmäßiges Dodekaeder

12 Vermessung des Menschen

Es wird immer wieder versucht, im menschlichen Körper die Proportionen des Goldenen Schnittes zu finden.

Das bekannteste Beispiel ist wohl der uomo vitruviano von Leonardo da Vinci. Die Seitenlänge des Quadrates und der Kreisradius stehen im Verhältnis des Goldenen Schnittes.

Dazu gibt es Varianten und Karikaturen.

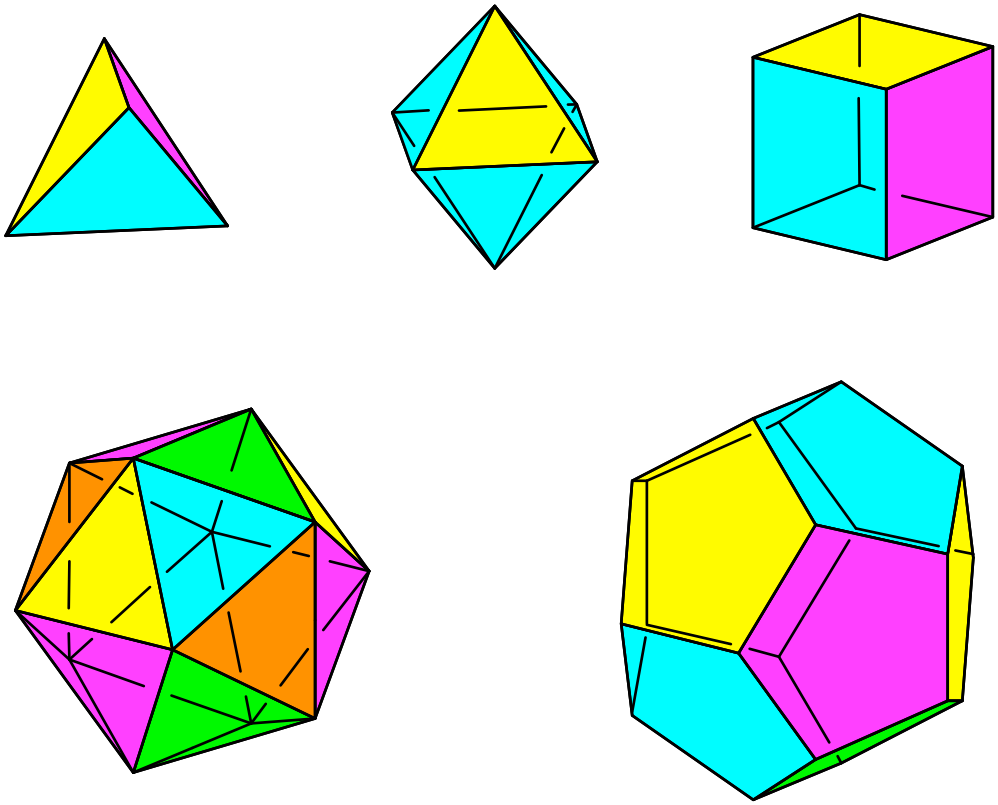
Die Idee wurde von Le Corbusier mit seinem *Modulor* wieder aufgenommen.

13 Die platonischen Körper

Es gibt fünf platonische Körper: Tetraeder, Oktaeder, Würfel (Hexaeder), Ikosaeder und Dodekaeder.

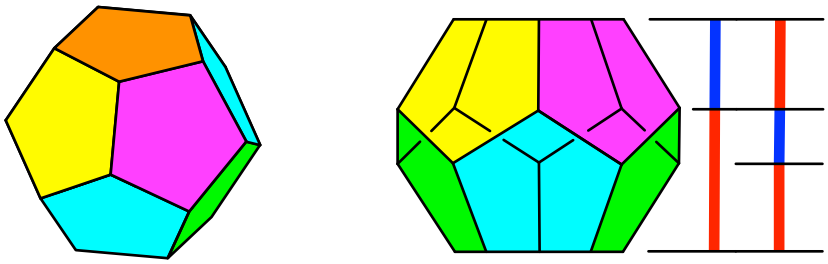
Die platonischen Körper (platonic solids, reguläre Körper) sind durch folgende drei Kriterien charakterisiert:

- Alle Seitenflächen kongruente regelmäßige Vielecke (Seitenregularität)
- Alle Eckfiguren kongruent (Eckenregularität)
- Keine Selbstdurchdringung



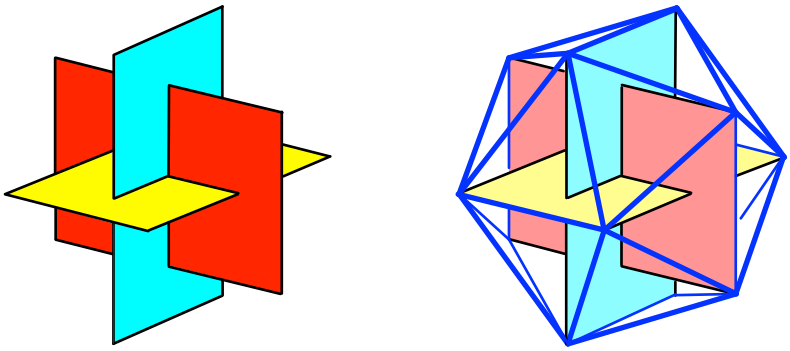
Die platonischen Körper

Das Ikosaeder und das Dodekaeder enthalten Fünfecke. Daher kommt bei diesen beiden Figuren der Goldene Schnitt an vielen Orten vor. Im Folgenden zwei Beispiele.



Der Goldene Schnitt bei den Niveaus der Ecken

Das Gerüst des Ikosaeders besteht aus Goldenen Rechtecken.



Gerüst des Ikosaeders aus Goldenen Rechtecken

Literatur

Euklid (1980): Die Elemente. Nach Heibergs Text aus dem Griechischen übersetzt und herausgegeben von Clemens Thaer. Darmstadt: Wissenschaftliche Buchgesellschaft. ISBN 3-534-01488-X

Götze, Oliver & Kugler, Lieselotte (2016): Göttlich, Golden, Genial. Weltformel Goldener Schnitt? München: Hirmer. ISBN 978-3-7774-2689-1.

Lehmann, Ingmar (2009): FIBONACCI-Zahlen – Ausdruck von Schönheit und Harmonie in der Kunst. *MU Der Mathematikunterricht*. Jahrgang 55. Heft 2. S. 51-63.

Lehmann, Ingmar (2012): Goldener Schnitt und Fibonacci-Zahlen in der Literatur. In: Die Fibonacci-Zahlen und der goldene Schnitt. *MU Der Mathematik-Unterricht* (58), Heft 1, S. 39-48.

Lehmann, Ingmar (2012): Goldener Schnitt, Fibonacci-Zahlen und Goldene Figuren. In: Die Fibonacci-Zahlen und der goldene Schnitt. MU Der Mathematik-Unterricht (58), Heft 1, S. 5-12.

Posamentier, Alfred S. and Lehmann, Ingmar (2012): *The Glorious Golden Ratio*. Amherst, N.Y., Prometheus Books.

Walser, Hans (2001): The Golden Section. Translated by Peter Hilton and Jean Pedersen. The Mathematical Association of America 2001. ISBN 0-88385-534-8.

Walser, Hans (2013): *Der Goldene Schnitt*. 6., bearbeitete und erweiterte Auflage. ISBN 978-3-937219-85-1.

Walser, Hans (2015): Vielecke aus Streifen. Der Falter // Magazin. Origami Deutschland e. V., 64, Oktober 2015, 9-12.

Websites

[1] Hans Walser: Kreise im Goldenen Schnitt (19.02.2017):

www.walser-h-m.ch/hans/Miniaturen/K/Kreise_im_GS/Kreise_im_GS.htm