Hans Walser

Geometrie zum Anfassen

Bayreuth, 11. / 12. November 2005

Inhalt

Hands on geometry

I do, and I understand.

In the usual school geometry we are discussing two dimensional problems only - I think by the simple reason because the paper of our school books and the black boards in the school rooms are two dimensional. But the space we are living in is three dimensional, and so are most of the practical geometrical problems.

Learning geometry — especially geometry in the three dimensional space — means to construct models. There are different techniques to do this, among them the technique of braiding (or weaving) is much more interesting than the usual technique of gluing pieces of cardboard. Braided models have different aspects: First the geometry of the polyhedron, but also the topology of the interwoven strips and combinatorial aspects and not least the question of beauty. There are links to spherical geometry — spherical geometry has many interesting features we don't find in the „flat“ geometry. This beyond the fact, that the earth we are living on is not flat, but much better described as a sphere.

But there is more: Preparing braided models develops manual skills and, working in the classroom, social skills of cooperation.

In our workshop we will learn a very simple and fast way of construction cubes and related models, among them the rhombic dodecahedron, which is a so called „space filler“ and leads to a problem about spherical configurations where a very old conjecture of Kepler has only been proved some years ago.

Geometrie zum Anfassen

Die übliche Schulgeometrie ist zweidimensional – wohl in Anpassung an Schulheft und Wandtafel. Die Welt, in der wir leben, ist allerdings dreidimensional, ebenso die meisten praktischen geometrischen Probleme.

Geometrie lernen – vor allem im Raum – heißt Modelle bauen. Unter den verschiedenen Techniken dazu besticht die Flechttechnik durch ihre Einfachheit. Es werden nur Papierstreifen benötigt, und sonst nichts. Dadurch wird Raumgeometrie handgreiflich nachvollziehbar. Die Symmetrien dieser Modelle führen einerseits zu kombinatorischen Einsichten und andererseits zur Kugelgeometrie. Es ist auch möglich, „Raumfüller“ modellmäßig herzustellen. Dies ergibt einen Zugang zu Raumpflästerungen und dichtesten Kugelpackungen und deren Bedeutung in Kristallographie und Chemie. Die Flechtstrukturen öffnen einen Weg zu topologischen Überlegungen und Invarianten.

Schülerinnen und Schüler finden verblüffende technisch-methodische Vereinfachungen. Nicht zuletzt sind die Modelle auch ästhetisch sehr ansprechend.

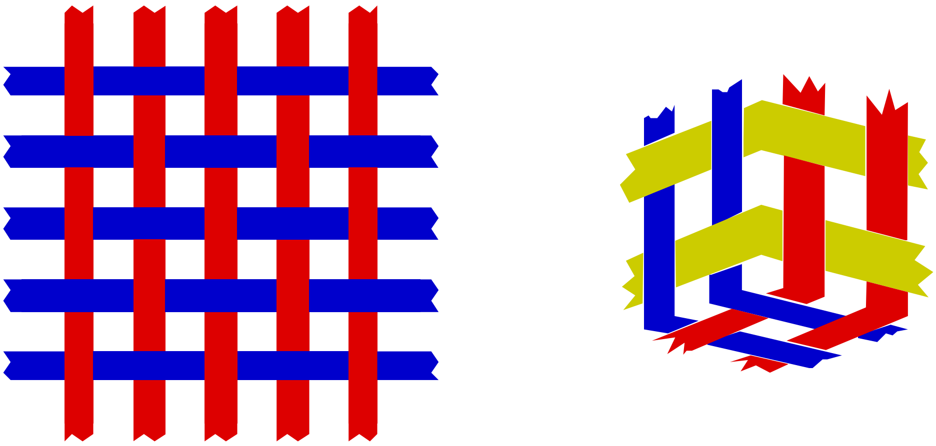
Teilnehmerinnen und Teilnehmer haben Gelegenheit, selbst Hand anzulegen.

1 Einleitung

Geometrie handgreiflich erfahren heißt mit Modellen arbeiten. Diese werden üblicherweise aus starkem Papier mit Leim zusammengeklebt - ein irreversibler Arbeitsvorgang, der infolge der benötigten Trocknungszeit des Bindemittels immer wieder unterbrochen werden muss. Demgegenüber benötigen Flechtmodelle keinen Leim, und sie können im Prinzip wieder in ihre Streifen zerlegt werden. Es zeigt sich dann, dass die Flechtstrukturen dieser Modelle auch einen topologischen sowie einen kombinatorischen Aspekt haben. Die Flechtstrukturen lassen sich durch Großkreismodelle visualisieren und geben so einen Zugang zur Kugelgeometrie. Flechtmodelle verschiedener Art werden in [Cundy/Rollet 1961], [Hilton/Pedersen 1994], [Pedersen 1981] und [Hilton/Pedersen/Walser 2003] beschrieben; Pargeter [Pargeter 1959] zeigte sogar, dass sich jedes Polyeder als Flechtmodell herstellen lässt.

2 Flechttechnik

Die Flecht- oder Webetechnik ist eine der ältesten Kulturtechniken [Gerdes 1990], [Pedersen 1983]. Für die Herstellung eines ebenen Geflechtes genügen zwei Scharen paralleler waagrechter und senkrechter Streifen.

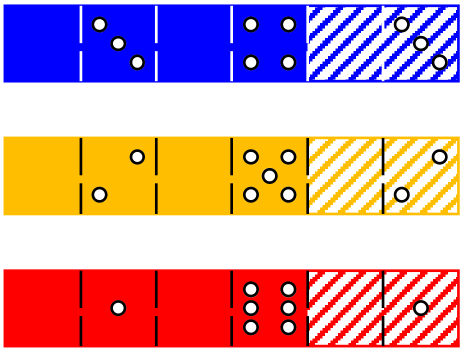


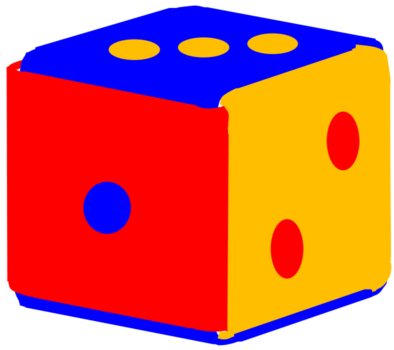
Flechten: Flach und mit Ecke

Die Ausbildung der räumlichen Ecken eines quaderförmigen Korbes etwa benötigt hingegen drei Streifentypen.

3 Flechtmodell des Würfels

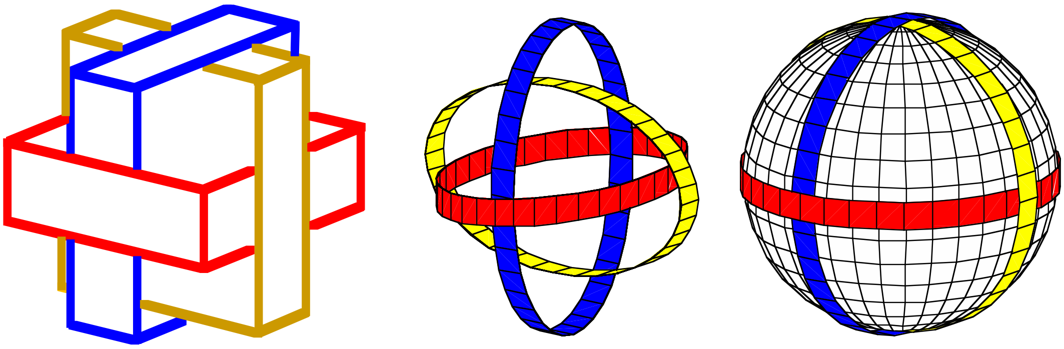
Das einfachste Flechtmodell des Würfels besteht aus drei Papierstreifen. Jeder Streifen besteht aus sechs Feldern, welche fast Quadrate sind; aus flechttechnischen Gründen (Spielraum) muss die Streifenbreite etwas geringer als die Kantenlänge des Würfels sein. In der Praxis genügt eine Verminderung von $\varepsilon \approx 1$ mm. Die beiden letzten (getönten) Felder der Streifen sind jeweils mit den beiden ersten zu überlappen; sie dienen zur Stabilisierung des Flechtmodells.





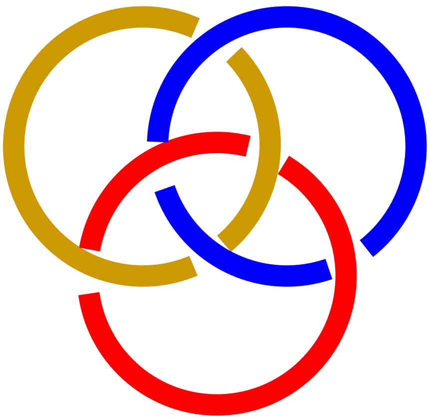
Würfel mit drei Streifen

Denken wir uns die Streifenbreite vermindert, erhalten wir Einblick in die Flechtstruktur.



Flechtstruktur: Eckig und rund

Diese Flechtstruktur kann noch weiter abstrahiert werden durch ein Kugelmodell, das aus den drei Großkreisen Äquator, 0°/180°-Meridian und +90°/-90°-Meridian bei passender Innen/Außen-Führung an den Treffpunkten gebaut werden kann. Die Flechtstruktur besteht topologisch aus drei verschlungenen Ringen mit folgender Eigenschaft: Wird einer der drei Ringe herausgenommen, so fallen auch die beiden restlichen auseinander. Diese Figur war das Emblem der Familie der Borromeo. Zu diesem bis ins 13. Jahrhundert zurückgehenden italienischen Adelsgeschlecht gehörte auch der Kirchenfürst *Carlo Borromeo* (1538-1584), welcher in der Gegenreformation eine bedeutende Rolle spielte.



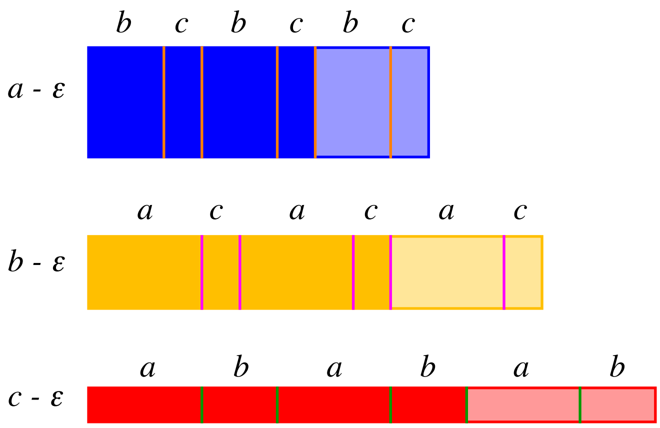
Die Borromäischen Ringe

4 Quader und Spat

Bei der Behandlung des Spatproduktes (Volumen des Parallelepipedes) in der Vektorgeometrie stellte ich fest, dass Schülerinnen und Schüler große Mühe haben, in einem zweidimensionalen Bild eines Spates den Spat als solchen zu erkennen. Da sich die Schülerinnen und Schüler angewöhnt haben, bei Schrägbildern von Würfeln und Quadern die verzerrt dargestellten Winkel zwischen den Kanten zu „orthogonalisieren“, das heißt als rechte Winkel zu interpretieren, sehen sie auch einen Spat lediglich als Quader. Es ist unerläßlich, die Schülerinnen und Schüler mit einem „echten“, das heißt dreidimensionalen Spat vertraut zu machen. Daher versuchte ich, mit ihnen ein dem Würfel entsprechendes Flechtmodell sowohl des Quaders wie auch des Spates zu erarbeiten.

4.1 Flechtmodell des Quaders

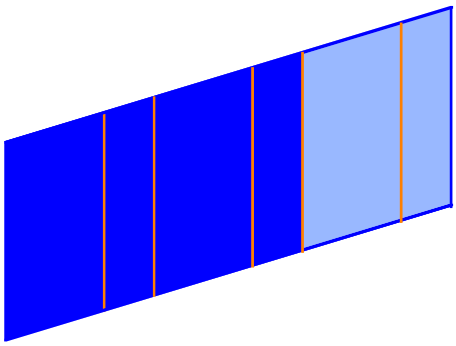
Die Schülerinnen und Schüler finden mühelos die für das Flechtmodell eines Quaders mit den Kantenlängen a, b und c benötigten drei Streifen.



Streifen für den Quader

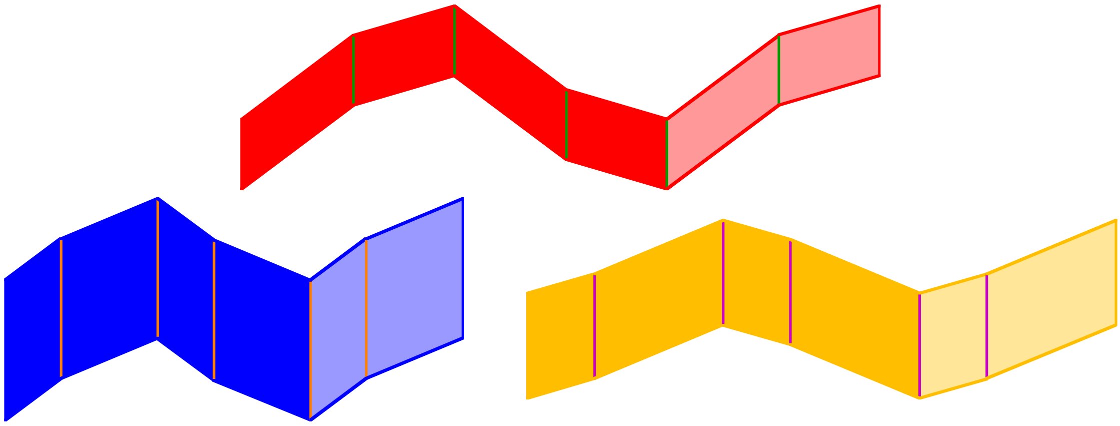
4.2 Flechtmodell des Spates

Die Erarbeitung der für einen Spat benötigten drei Streifen bietet Gelegenheit, aus Irrtümern zu lernen.



Dieser Streifen schafft es nicht

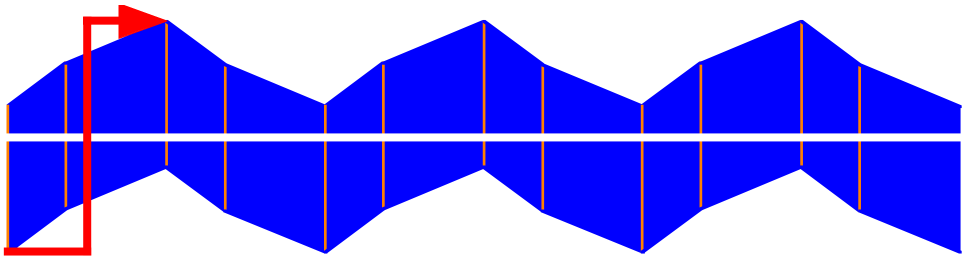
Zunächst versuchen es die Schülerinnen und Schüler mit Streifen welche eine affine Verzerrungen der entsprechenden Quaderstreifen sind. Durch das Falten zeigt sich dann, dass dieser Streifen sich nicht schließt, sondern treppenhausartig in die Höhe steigt. Die Schlüsseleinsicht ist, dass es „wieder heruntergehen muss“. Nach mehreren Versuchen — auch über einen Zwischenschritt mit einem speziellen Spat, der von vier Rechtecken und nur zwei "echten" Parallelogrammen begrenzt ist und der sich etwa durch Verscheren eines Bücherstapels gut darstellen lässt — wird schließlich das Schnittmuster für die drei Streifen gefunden.



Die drei Streifen für den Spat

4.3 Schubspiegelsymmetrie

Die Streifen für den Spat weisen auf den ersten Blick keine Symmetrie auf. Das ist ein Irrtum; tatsächlich haben die Streifen, als Bandornament betrachtet, das heißt auf beiden Seiten ins Unendliche fortgesetzt, eine so genannte Schubspiegelsymmetrie.



Schubspiegelsymmetrie

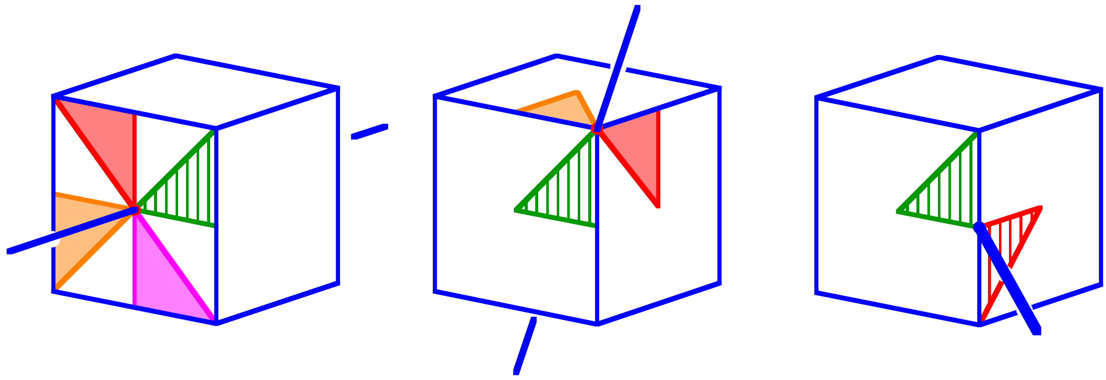
Diese Art Symmetrie findet sich in vielen Rankenornamenten; es ist auch die Symmetrie einer Fußspur im Sand.

Spuren im Sand

5 Drehsymmetrien

5.1 Beim Würfel

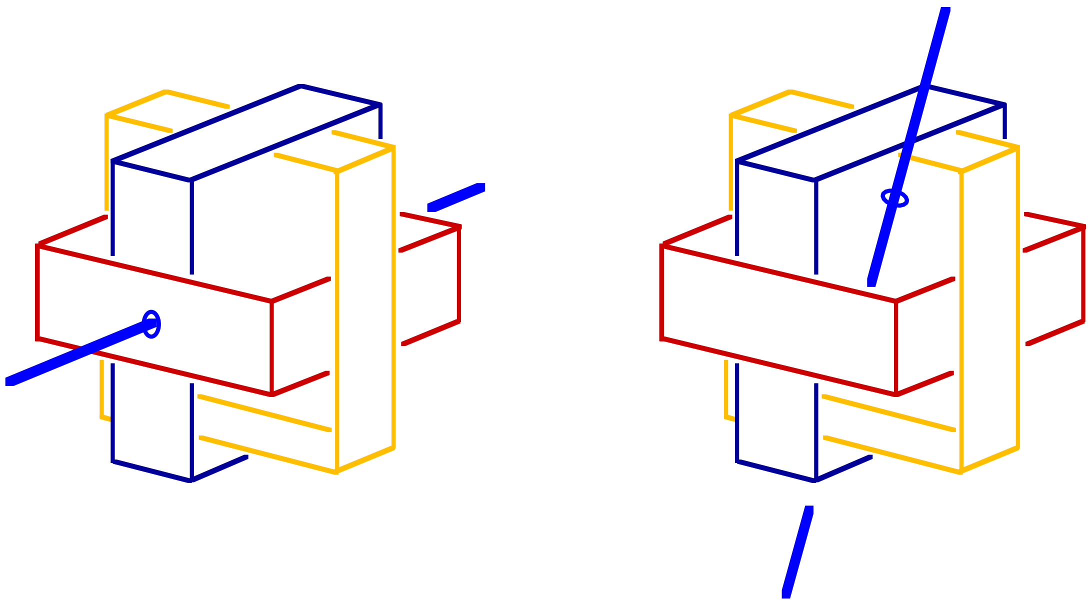
Beim Würfel sind verschiedene Drehungen möglich, die den Würfel in sich überführen: Viertelsdrehung, Drittelsdrehung und Halbdrehung.



Drehungen beim Würfel

5.2 Beim Flechtmodell

Bei unserem Flechtmodell sind nicht alle diese Drehungen (auch abgesehen von den verschiedenen Streifenfarben) möglich. Zulässig sind nur noch folgende Drehungen: Halbdrehung und Drittelsdrehung. Die Halbdrehung lässt Flecht- und Farbstruktur invariant, die Drittelsdrehung führt zu einer zyklischen Vertauschung der Farben.

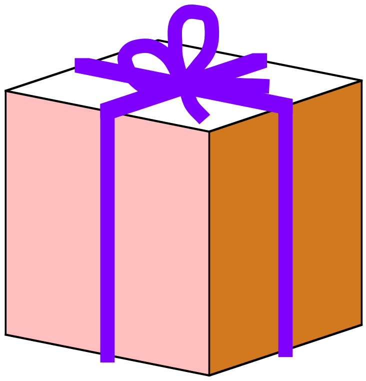


Flechtstruktur und Drehungen

Frage: Gibt es ein Flechtmodell des Würfels mit denselben Drehmöglichkeiten wie beim Würfel selbst?

Zwischenfrage: Wie kann ein würfelförmiges Paket verschnürt werden?

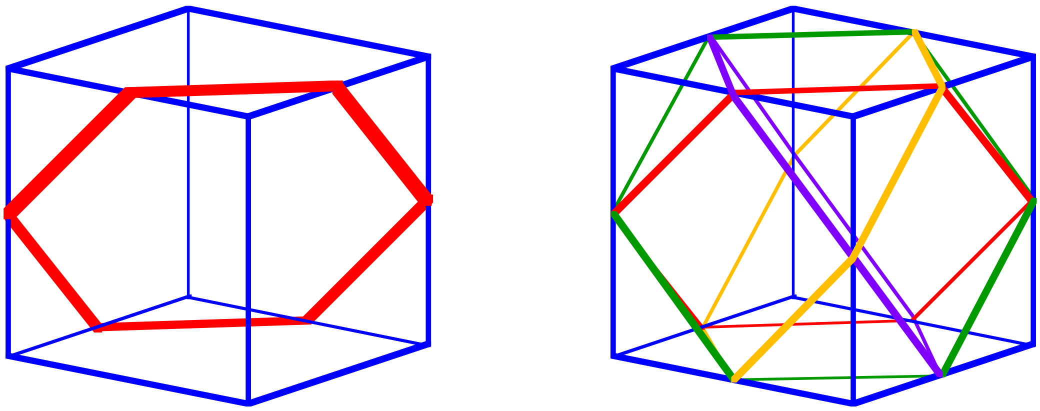
Die drei Streifen unserer Flechtmodelle von Würfel und Quader laufen so um diese Körper, wie ein entsprechendes Paket in der Regel verschnürt wird, wobei noch eine dritte Schnur als „Äquatorschnur“ dazugedacht werden muss.



Die Kalorienbombe

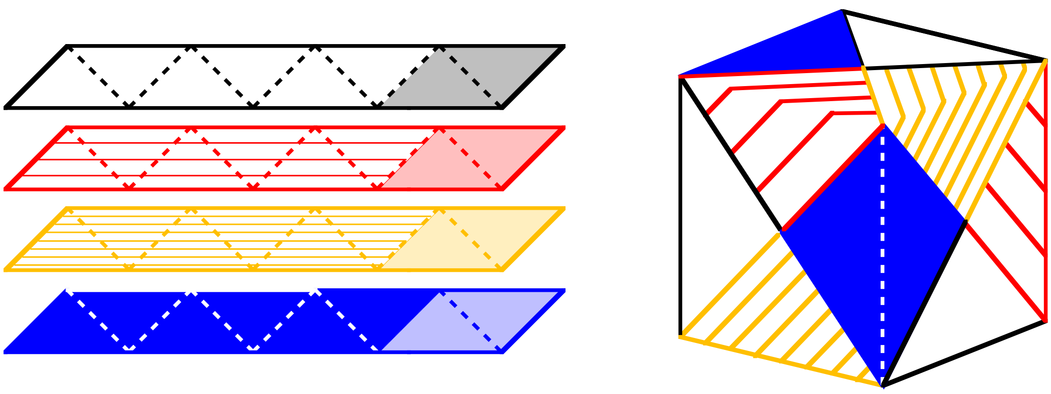
5.3 Schrägstreifenwürfel

Nun gibt es, etwa bei Geschenkpaketen, auch Schrägverschnürungen. Im einfachsten Fall des Würfels liefert eine solche schräge geschlossene Schnur ein regelmäßiges Sechseck. Da jedes dieser Sechsecke eine Würfeldiagonale als Achse besitzt, gibt es insgesamt vier solcher Sechsecke.



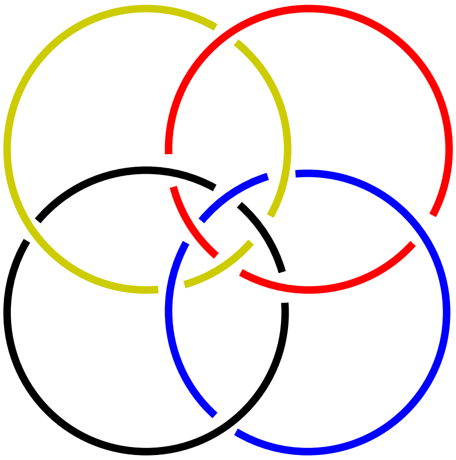
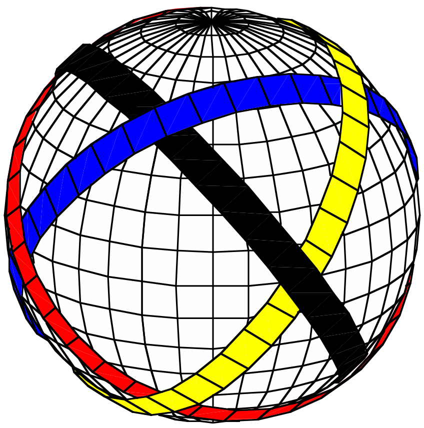
Schräge Verschnürung

Daraus lässt sich ein Flechtmodell mit vier Schrägstreifen ableiten.



Schrägstreifen-Flechtmodell

Die Flechtstruktur besteht topologisch aus vier Ringen.

Flechtstruktur

Bei diesem Flechtmodell sind (abgesehen von den Streifenfarben) dieselben Drehungen möglich wie beim Würfel.

5.4 Kugelmodell

Aus vier Streifen kann ein Kugelmodell der Flechtstruktur hergestellt werden. Die Streifen sind aus Plastikmaterial aus der Verpackungsindustrie und haben sieben Löcher mit etwa 3 mm Durchmesser in gleichen Abständen.

Streifen

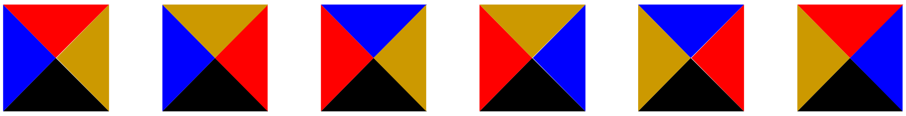
Das erste und das letzte Loch sind zu identifizieren; dadurch entsteht ein Kreis, welcher in sechs gleiche Abschnitte unterteilt ist. Mit Hilfe von Mustertütenklammern kann nun die Kugel zusammengebaut werden.

Kugel aus vier Streifen

6 Kombinatorik

Verwenden wir für die vier Streifen vier verschiedene Farben, ergibt sich ein kombinatorisches Farbspiel: Für vier verschiedene Elemente gibt es 4! = 24 lineare und 4!/4 = 6 zyklische Anordnungsmöglichkeiten, da bei der zyklischen Anordnung die vier Möglichkeiten, die sich durch Drehungen um Vielfache von 90° ergeben, zu identifizieren sind.

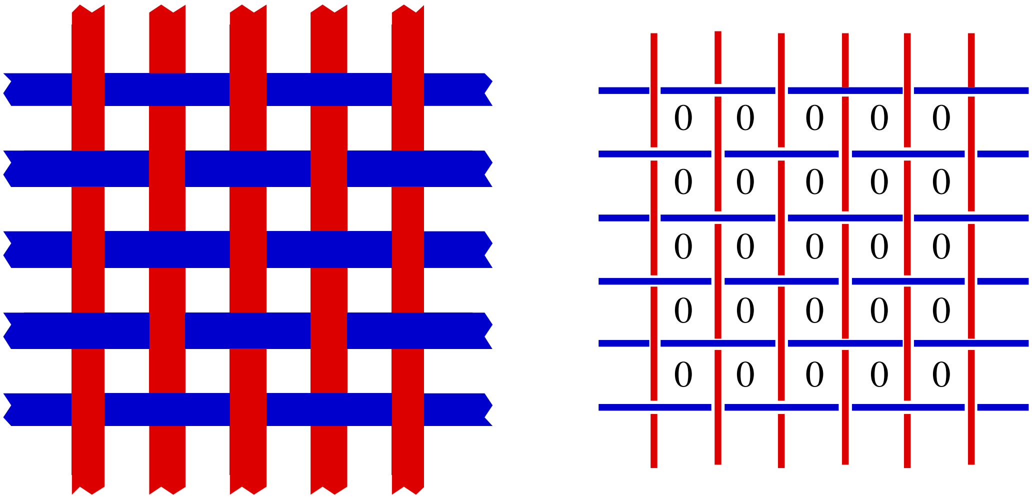


Die sechs zyklischen Anordnungen

Nun ist es so, dass auf den sechs Würfelseiten im Schrägstreifenmodell jede dieser sechs zyklischen Anordnungen genau einmal auftritt.

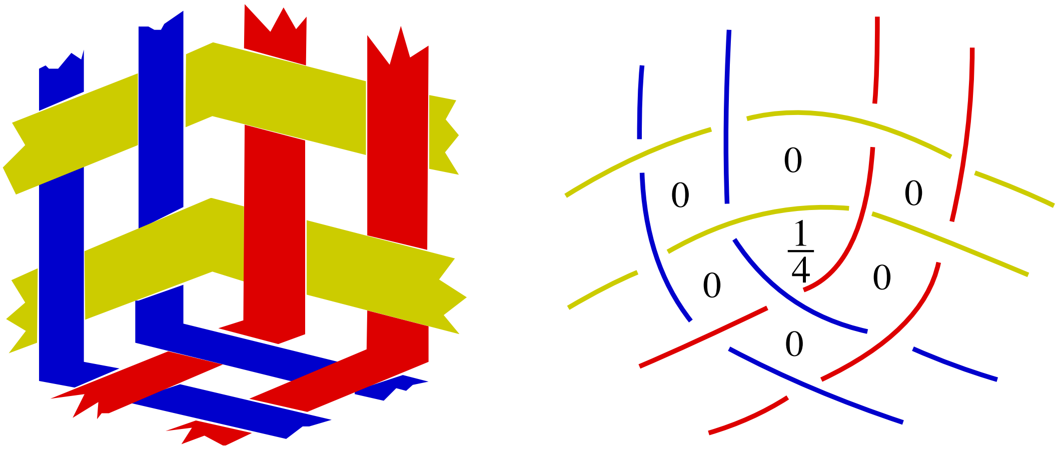
7 Topologie

Ein Geflecht mit nur waagrechten und senkrechten Streifen ist „flach“; wir ordnen daher jedem Viereck in der abstrakten Flechtstruktur einen Index $j = 0$ zu.



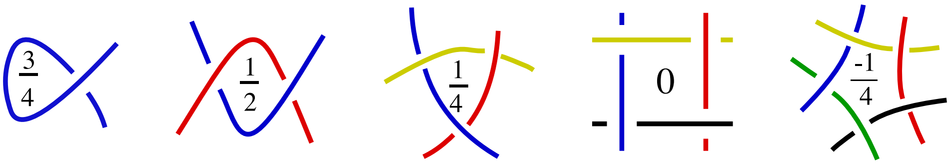
Index Null wenn nichts los ist

Bei der Ausbildung einer räumlichen Ecke tritt in der Flechtstruktur ein Dreieck mit drei Streifenüberkreuzungen auf; diesem ordnen wir den Index $j = \frac{1}{4}$ zu.



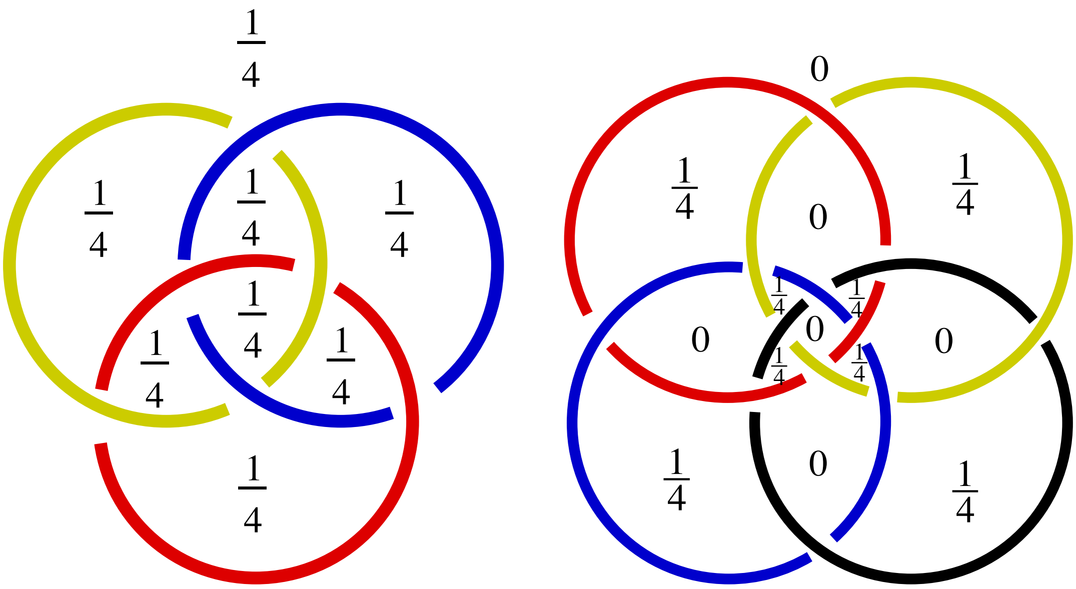
Index ein Viertel an einer Ecke

Allgemein ordnen wir einem k-Eck (mit k Streifenüberkreuzungen) in der Flechtstruktur einen Index $j = 1 - \frac{k}{4}$ zu.



Indizes

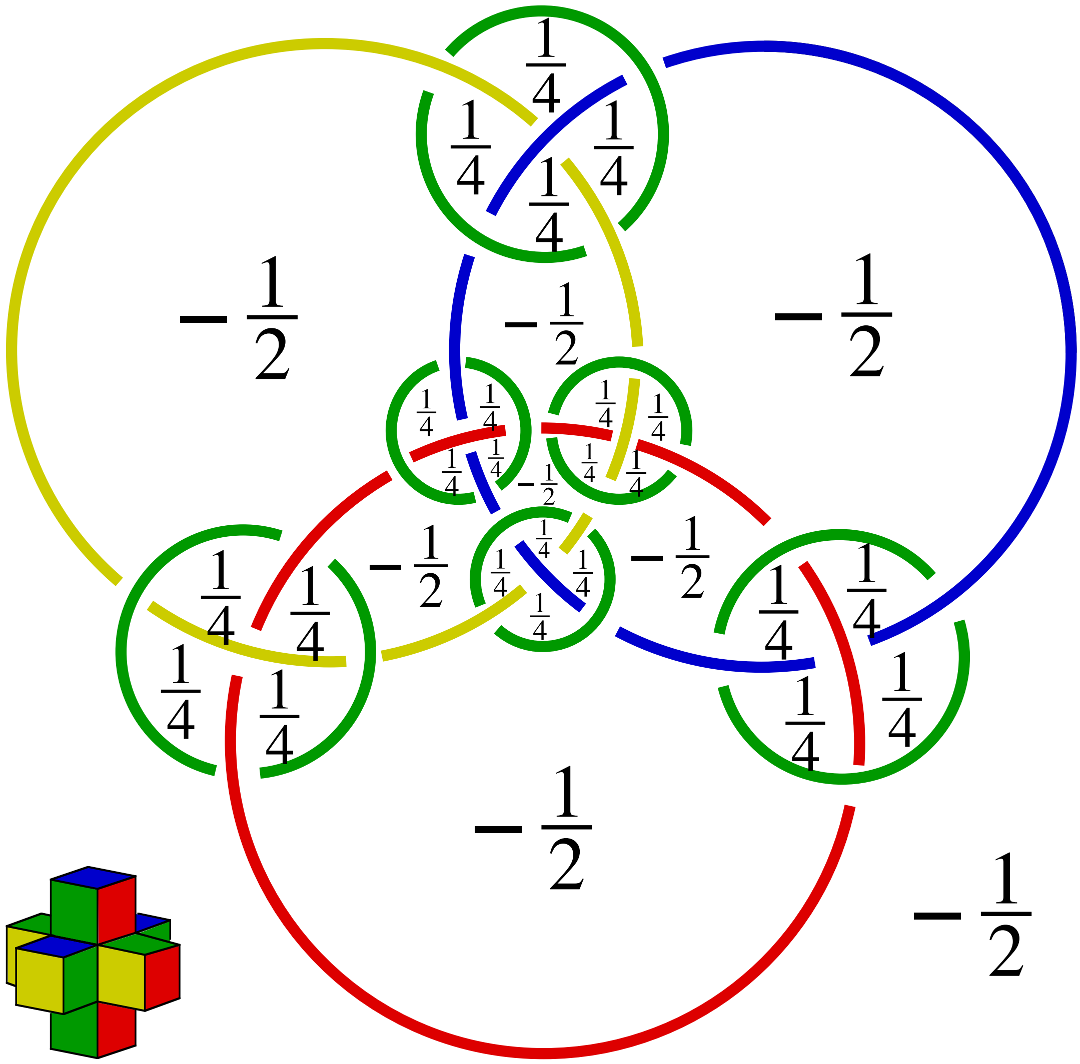
Für die beiden bisher angetroffenen Flechtstrukturen des Würfels ergibt sich je eine Indexsumme 2.



Indexsumme 2

Die Indexsumme ist eine topologische Invariante. Der Beweis für diese Invarianz kann entweder induktiv nach der Anzahl der Streifen oder aber als Anwendung des Polyedersatzes von Euler geführt werden. Die folgende Abbildung zeigt die

Flechtstruktur des dreidimensionalen Kreuzes, das aus sieben Würfeln besteht, mit den entsprechenden Indizes.

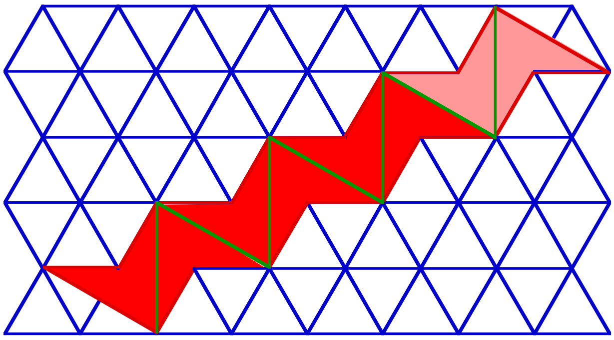


Dreidimensionales Kreuz und Flechtstruktur

8 Andere Figuren mit derselben Flechtstruktur

8.1 Das Oktaeder

Auch das Oktaeder lässt sich aus vier Streifen flechten; die Streifen sind zickzackförmig und basieren auf einem Dreiecksraster.

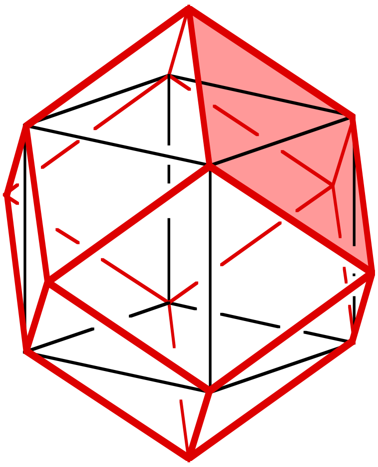


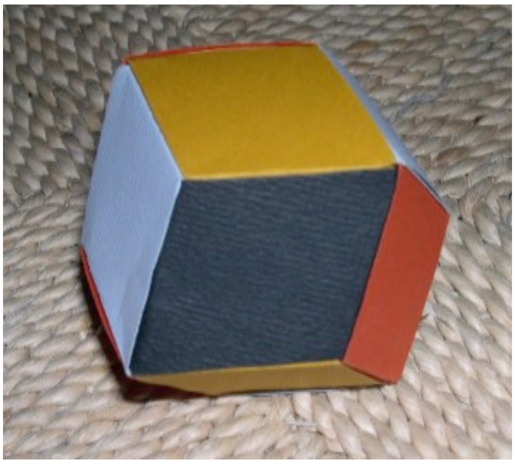
Flechtmodell des Oktaeders

Flechtstruktur dieses Modells ist dieselbe wie beim Schrägstreifenmodell des Würfels.

8.2 Das Rhombendodekaeder

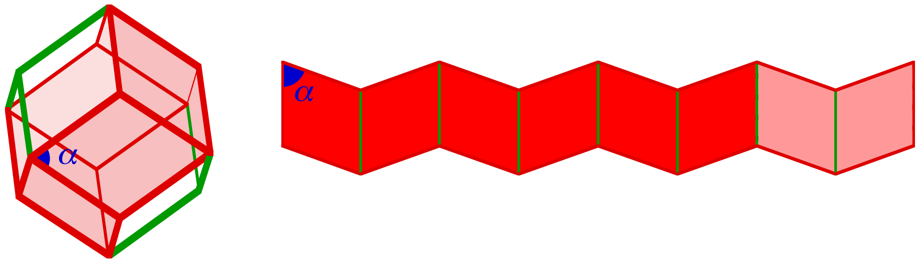
Wenn wir auf jeder Würfelseite eine Pyramide mit der halben Würfelkante als Höhe aufsetzen, ergibt sich ein Körper, der von zwölf Rhomben mit dem Diagonalenverhältnis $\sqrt{2}$ berandet ist, das so genannte Rhombendodekaeder.





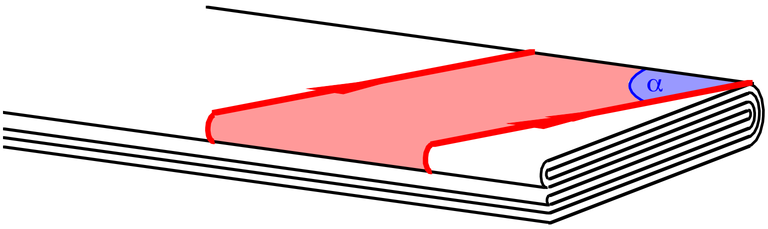
Rhombendodekader

Sein Flechtmodell benötigt vier Zickzack-Streifen; die Flechtstruktur ist wiederum dieselbe wie beim Schrägstreifen-Würfel. Der spitze Winkel α eines Rhombus mit dem Diagonalenverhältnis $\sqrt{2}$ misst $\alpha = 2\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \approx 70.53°$. Dieser Winkel α ergibt sich auch als Schnittwinkel der Diagonalen in einem DIN-A-Papier.



Rhombendodekaeder und Streifen

Die vier Zickzack-Streifen werden wie folgt hergestellt: Ein rechteckiges Papierblatt wird dreimal gefaltet. Aus dem nun acht lagigen Papier werden Rhomben mit dem benötigten spitzen Winkel $\alpha \approx 70.53°$ herausgeschnitten. Auffalten der Rhomben liefert die Zickzack-Streifen.



Scherenschnitt-Technik

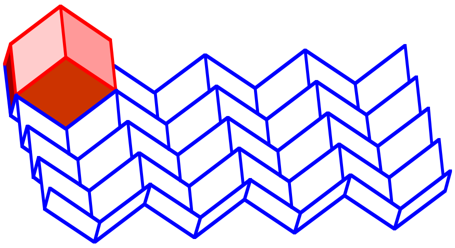
Besonders schöne, kristallähnliche Modelle erhalten wir unter Verwendung transparenter Polyesterfolien (Folien, welche für den Hellraum-Projektor verwendet werden). Wir können auch mit farbigen Folien arbeiten. Verwenden wir insbesondere für die vier Streifen drei Folien in den Grundfarben gelb, rot und blau sowie eine farblose Folie, ergibt sich ein bemerkenswertes Farbspiel: Das Rhombendodekaeder erlaubt sechs Durchblicke durch je zwei gegenüberliegende, parallele Seitenrhomben. In dreien dieser sechs Fälle kreuzt der farblose Streifen je einen Streifen in den drei Grundfarben, wir sehen also Rhomben in den drei Grundfarben. In den übrigen drei Fällen kreuzen sich je zwei Grundfarben, was zu den Mischfarben orange, grün und violett führt.

8.3 Raumfüller

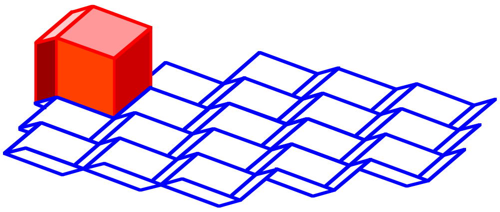
Das Rhombendodekaeder ist ein so genannter „Raumfüller“. Der Raum lässt sich mit gleich großen Rhombendodekaedern lückenlos ausfüllen [Coxeter 1973].

Um dies einzusehen, denken wir uns den Raum zunächst mit gleich großen Würfeln ausgefüllt, deren Ecken ein Würfelgitter bilden. Weiter denken wir uns diese Würfel im Sinne eines räumlichen Schachbrettmusters abwechslungsweise schwarz und weiß gefärbt. Dann zerlegen wir jeden schwarzen Würfel vom Würfelmittelpunkt aus in sechs Pyramiden, deren Grundfläche je ein Seitenflächenquadrat der schwarzen Würfel ist. Wenn wir nun diese schwarzen Pyramiden den benachbarten weißen Würfeln anheften, erhalten wir eine Zerlegung des Raumes in Rhombendodekaeder.

Wir können nun mit geringem Aufwand eine große Anzahl von Flechtmodellen des Rhombendodekaeders aus Papier herstellen und damit die Raumfüller-Eigenschaft des Rhombendodekaeders illustrieren. Zur Demonstration dieser Eigenschaft benützen wir mit Vorteil eine Unterlage in Form eines Eierkartons. Solche Unterlagen lassen sich ebenfalls aus Zickzack-Streifen flechten; die Länge der Streifen richtet sich nach der gewünschten Größe der Unterlage. Es gibt zwei Möglichkeiten, aus solchen Streifen eine Unterlage zu flechten, den „spitzen“ und den „stumpfen“ Eierkarton. Die aus diesen verschiedenen Unterlagen hervorgehenden Raumfüllungen sind aber kongruent und gehen durch geeignetes Umklappen auseinander hervor.

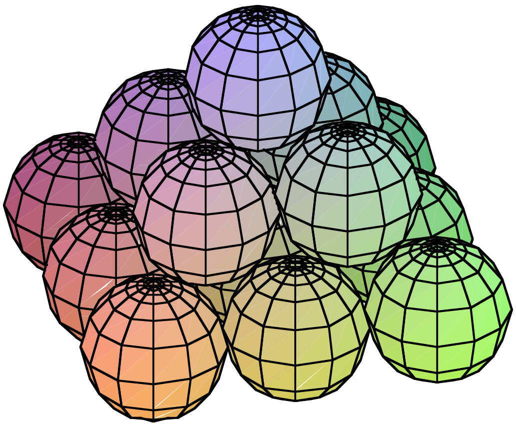



Spitzer Eierkarton




Stumpfer Eierkarton

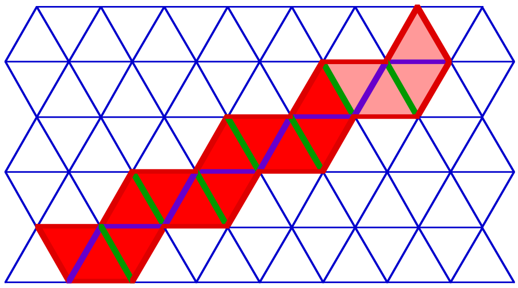
Die Innenkugeln der aufgeschichteten Rhombendodekaeder bilden eine dichteste Kugelpackung.



Kugelpackung

9 Fehler können zu neuen Einsichten führen. Sternfiguren

Die im Folgenden vorgestellten Modelle entstanden aus einem Schülerfehler: Bei der Herstellung der Zickzack-Streifen für das Rhombendodekaeder arbeitete ein Schüler mit einem zu spitzen Winkel — die Folge war ein sternartiges Modell mit abstehenden Ecken. Auf diese Weise ergeben sich unendlich viele Möglichkeiten von Sternkörpern, welche alle dieselbe Flechtstruktur wie der Schrägstreifen-Würfel aufweisen. Die Rhomben der Zickzack-Streifen sind dabei mit einer „Gegenfalte“ längs einer Diagonalen zu versehen; dadurch entstehen aus den Rhomben je zwei gleichschenklige Dreiecke. Die folgende Abbildung zeigt als Beispiel Modell und Streifen des so genannten Kepler-Sternes; die gleichschenkligen Dreiecke sind hier sogar gleichseitig.



Kepler-Stern

Literatur

[Adam/Wyss 1994] Paul Adam / Arnold Wyss: *Platonische und Archimedische Körper, ihre Sternformen und polaren Gebilde*. 2. Auflage. Bern: Verlag Paul Haupt 1994. ISBN 3-258-04943-2

[Chatani 1989] Chatani, Masahiro: *Papierkunst*. Dreidimensionales Falten. Stuttgart 1989.

[Coxeter 1973] Coxeter, H.S.M.: *Regular Polytopes*. Third Edition. New York: Dover 1973. ISBN 0-486-61480-8

[Cundy/Rollet 1961] Cundy, H.M. / Rollet, A.P.: *Mathematical Models*. Oxford: Clarendon Press 1961.

[Fusè 1993] Fusè, Tomoko: *Unit Origami*. Multidimensional Transformations. Tokyo: Japan Publications 1993. ISBN 0-87040-852-6

[Gerdes 1990] Gerdes, Paulus: *Ethnogeometrie*. Kulturanthropologische Beiträge zur Genese und Didaktik der Geometrie. Bad Salzdetfurth: Franzbecker 1990. ISBN 3-88120-189-0

[Hilton/Pedersen 1994] Hilton, Peter / Pedersen, Jean: *Build Your Own Polyhedra*. Menlo Park: Addison-Wesley 1994. ISBN 0-201-49096-X

[Hilton/Pedersen/Walser 2003] Hilton, Peter / Jean Pedersen / Hans Walser: Die Kunst der Mathematik. Von der handgreiflichen Geometrie zur Zahlentheorie. Dillingen: Akademie für Lehrerfortbildung und Personalführung. 2003

[Kneißler 1999] Kneißler, Irmgard: *Einfaches Origami*. Berlin: Urania-Ravensburger 1999. ISBN 3-332-00731-9

[Lörcher/Rümmele] Lörcher, G. A. / H. Rümmele: Körper falten. Hauptstelle RAA, Heßlerstr. 208-210, D-45329 Essen, 1995

[Mitchell 1999] Mitchell, David: Mathematical Origami. Norfolk: Tarquin Publications 1999. ISBN 1-899618-18-X

[Pargeter 1959] Pargeter, A.R.: Plaited Polyhedra. *The mathematical gazette* 43, 1959, p. 88-101.

[Pedersen 1981] Pedersen, J.J.: Some Isonemal Fabrics on Polyhedral Surfaces. *The Geometric Vein (The Coxeter Festschrift),* ed. by C. Davis, B. Grünbaum and F.A. Sherk. New York, Heidelberg, Berlin: Springer 1981, p. 99-122. ISBN 0-387-90587-1

[Pedersen 1983] Pedersen, Jean: Geometry: The Unity of Theory and Practice. The Mathematical Intelligencer, Vol. 5 (1983), No. 4, p. 37-49

[Steibl 1996] Steibl, Horst: *Geometrie aus dem Zettelkasten*. Hildesheim: Franzbecker 1996. ISBN 3-88120-269-2

[Walser 1987] Walser, Hans: Flechtmodelle. *Didaktik der Mathematik* (15), 1-17

[Walser 1994] Walser, Hans: Geometrie zum Anfassen. Mathematik Lehren, Heft 65, August 1994, S. 56-59.

[Zeier 1983] Zeier, Franz: Papier. Versuche zwischen Geometrie und Spiel. Bern: Haupt 1983. ISBN 3-258-03309-9